

Обратимся снова к рис. 4.1; мы видим, что интеграл вдоль (незамкнутого) пути, соединяющего точки A и B , может быть записан в виде

$$\int_A^B \bar{E} dz = \int_A^B E_t ds + i \int_A^B E_n ds = W = V + iU. \quad (4.1.19)$$

Действительная часть V этого интеграла представляет собой разность электростатических потенциалов в точках A и B . Мнимая часть U измеряет число силовых линий, пересекающих путь интегрирования от точки A до точки B .

Заметим, что семейство кривых $U = \text{const}$ ортогонально семейству $V = \text{const}$, так что V и U могут служить ортогональными криволинейными координатами в плоскости. Если в поле помещен проводник, имеющий форму цилиндра с образующими, перпендикулярными плоскости xy , то его поверхность должна пересекать эту плоскость по некоторой экви-потенциальной кривой $V = \text{const}$. Силовые линии будут при этом образовывать ортогональное семейство линий $V = \text{const}$, и поверхностный заряд цилиндра на единицу его высоты на участке поверхности, ограниченном точками A и B , будет равен $U(B) - U(A)$. В гл. 2 (см. стр. 153) функция U была названа *функцией тока*.

В этом параграфе мы сопоставили комплексные переменные и электростатические величины и в качестве примера дали электростатическую интерпретацию некоторым известным теоремам теории функций. В дальнейшем в этой главе мы разовьем более строгую теорию, но будем обращаться к электростатической интерпретации, чтобы сделать ощутимым смысл излагаемых теорем, как это было сделано здесь в применении к теореме Коши и интегралу Коши.

4.2. Аналитические функции

Электростатическая аналогия позволила нам вывести эвристическим путем некоторые основные теоремы теории функций. В частности, мы заметили, что аналитические функции образуют узкий класс, к которому не принадлежат многие функции. В этом параграфе мы постараемся выяснить сущность требований, определяющих аналитическую функцию, с точки зрения геометра и аналитика. При этом получатся более строгие выводы упомянутых теорем. (Строгость в этих вопросах действительно полезна!)

Аналитическая функция была нами определена грубо как функция, зависящая только от z , а не от z и \bar{z} вместе. Поэтому изучение аналитической функции комплексного переменного $f(z) = u + iv$, где u и v – действительные функции переменных x и y , обладает меньшей степенью общности, нежели изучение произвольных функций двух переменных, так как в случае аналитической функции u и v оказываются связанными условиями Коши – Римана (4.1.10). Более точное определение аналитической функции можно получить, рассматривая поведение производной функции $f(z)$ по z в точке a . Само понятие производной достаточно ясно. Функция $f(z)$ изображается вектором. Спрашивается, как изменяется этот вектор по величине и по направлению, когда z смещается из a в направлении, определяемом вектором dz . Если $f(z)$ зависит только от z (как, например, z^2), то мы вправе ожидать, что производная ($2z$ в нашем примере) определяется только точкой, в которой она вычисляется. Однозначная функция является аналитической в точке a , если ее производная в точке a определяется единственным образом, т. е. не зависит от направления dz , по которому она вычисляется. Независимо от того, куда мы

смещаемся из точки z , скорость изменения f с изменением z должна быть одна и та же. Для произвольной комплексной функции $u + iv$, в которой u и v зависят от x и y как угодно, это условие не выполняется. Оно выполняется лишь тогда, когда u и v удовлетворяют уравнениям (4.1.10).

Преимущество такого определения аналитической функции перед более простым определением, данным выше, состоит в его большей точности. Пользуясь им, легко проверить, является ли функция аналитической в какой-либо заданной точке. Мы снова видим, как узок класс аналитических функций. Большинство функций не обладает «изотропной» производной.

Нетрудно показать, что условия Коши — Римана *необходимы* для существования единственной производной. Для этого рассмотрим отношение приращения Δf функции $f(z)$ при изменении z от a до $a + \Delta z$ к приращению Δz :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(a + \Delta z) - f(a)}{\Delta z} = \frac{[(\partial u / \partial x) + i(\partial v / \partial x)] \Delta x + [(\partial u / \partial y) + i(\partial v / \partial y)] \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} = \\ &= \frac{(\partial u / \partial x) + i(\partial v / \partial x)}{1 + i(\Delta y / \Delta x)} \left\{ 1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(\frac{(\partial v / \partial y) - i(\partial u / \partial y)}{(\partial u / \partial x) + i(\partial v / \partial x)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Это равенство показывает, что, помимо некоторых исключительных случаев, производная $df/dz = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f / \Delta z$ зависит от $\Delta y / \Delta x$, т. е. от направления вектора Δz . Для аналитической же функции такой зависимости быть не должно. Достигается это только тогда, когда

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Последние равенства выражают условия Коши — Римана, необходимые для того, чтобы функция была аналитической. Эти условия *достаточны*, если дополнительно потребовать, чтобы входящие в (4.2.1) производные были *непрерывны* в точке a . Без этого требования производные $\partial u / \partial x$ и другие зависели бы от способа их вычисления, а это снова привело бы к неоднозначной первой производной от f . Пусть, например,

$$u = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2};$$

тогда $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (\partial u / \partial x) = 1$ и в то же время $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (\partial u / \partial x) = 0$ ¹⁾.

Условия Коши — Римана показывают, что если действительная (или мнимая) часть функции известна, то мнимая (соответственно действительная) часть определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого. Сейчас мы покажем на простом примере, как это осуществляется (позже будут указаны специальные методы). Предположим, что известна действительная часть u ; попытаемся найти мнимую часть:

$$v = \int dv = \int \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right),$$

¹⁾ Это довольно тонкое различие между необходимостью и достаточностью условий Коши — Римана для аналитичности функции установлено здесь недостаточно корректно. По этому поводу заметим только, что во всех случаях, возникающих при исследовании физических явлений, условия Коши — Римана необходимы и достаточны для аналитичности функции. — Прим. ред.

или

$$v = \int \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right). \quad (4.2.2)$$

Значит, если u известна, то v определяется посредством интегрирования по формуле (4.2.2). Например, пусть $u = \ln r = (1/2) \ln(x^2 + y^2)$. Тогда

$$v = \int \frac{-y \, dx}{r^2} + \frac{x \, dy}{r^2} = \operatorname{arc tg} \frac{y}{x} + \text{const},$$

так что $\ln r + i \operatorname{arc tg}(y/x)$ представляет собой аналитическую функцию; последнюю можно записать проще в виде $\ln z$.

Специальная природа аналитических функций сказывается также в том, что если u и v удовлетворяют условиям Коши — Римана, то тем же свойством обладает пара производных $\partial u / \partial x$ и $\partial v / \partial x$, так же как $\partial u / \partial y$ и $\partial v / \partial y$. Это обстоятельство указывает на то, что если функция $f(z)$ аналитична, то аналитичны и все ее производные. Эту полезную теорему мы сможем доказать в следующем параграфе, так как пока еще не установлено существование самих высших производных; ее, однако, следует запомнить, так как она позволяет обнаружить нарушение аналитичности в тех точках, где не существует какой-либо из старших производных.

Точки, в которых рассматриваемые функции неаналитичны, называются *особыми* (особенностями). Мы уже встречали функцию с особенностью $1/(z-a)$; она изображает электростатическое поле, которое порождено зарядом, находящимся в точке a . Точка a — особая, так как при $z=a$ эта функция не имеет производной. Существуют функции, неаналитические во всех точках, как, например, $|z|^2$. Эта функция равна zz и, очевидно, зависит не только от z . Функция $z^{p/q}$, где p/q — несократимая дробь, неаналитична в точке $z=0$. В применении, например, к функции $z^{8/5}$ в этом можно убедиться, заметив, что при $z=0$ ее вторая производная бесконечна.

Конформное отображение. Любая аналитическая функция $f(z) = u + iv$ ($z = x + iy$) может быть представлена геометрически как преобразование переменных x, y в переменные u, v . Можно вообразить две комплексные плоскости: на одной пусть изображаются значения z , на другой — соответствующие значения f . Любой линии на плоскости z будет при этом соответствовать некоторая линия на плоскости f . Разумеется, такого рода отображения осуществляются произвольными парами функций u, v переменных x, y . Но в тех случаях, когда u и v служат действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции, соответствующие отображения обладают некоторыми полезными и характерными свойствами. Самое важное и очевидное из этих характерных свойств состоит в том, что такие отображения «сохраняют углы», или являются *конформными*.

Если в плоскости z взять две пересекающиеся кривые, то соответствующие им кривые в плоскости f также будут пересекаться. При конформном отображении угол, под которым пересекаются эти кривые в плоскости f , равен углу, образованному выбранными кривыми в плоскости z в их точке пересечения.

На рис. 4.2 кривые в плоскости z пересекаются в точке $z=a$, точкой же пересечения соответствующих кривых в плоскости f является $f(a)$. Элементарное перемещение вдоль кривой 1 можно записать в виде $dz_1 = |dz_1| e^{i\varphi_1}$, элементарное перемещение вдоль кривой 2 есть $dz_2 = |dz_2| e^{i\varphi_2}$. Соответствующие элементарные перемещения в плоскости f

равны $dz_1(df/dz)$ и $dz_2(df/dz)$. Если функция f аналитична в точке $z = a$, то производная df/dz не зависит от направления dz ; поэтому df/dz в точке a равно $|df/dz|e^{ia}$, каков бы ни был угол φ направления dz_1 или dz_2 . Следовательно, элементарные перемещения вдоль кривых 1 и 2 в плоскости f равны соответственно $|dz_1(df/dz)|e^{i(a+\varphi_1)}$ и $|dz_2(df/dz)|e^{i(a+\varphi_2)}$. Эти кривые повернуты на угол α относительно соответствующих кривых в плоскости z , но угол между ними равен $(a + \varphi_1) - (a + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2$, т. е. равен углу между кривыми 1 и 2 в плоскости z . Таким образом, отображение, осуществляющее аналитической функцией $f(z) = u + iv$, конформно, т. е. сохраняет углы. Повторяя в обратном порядке все этапы этого рассуждения, мы убедимся в том, что если преобразование x, y в u, v конформно, то оно осуществляется аналитической функцией $f = u + iv$ переменного $z = x + iy$ и функций u и v удовлетворяют условиям Коши — Римана (4.2.1).

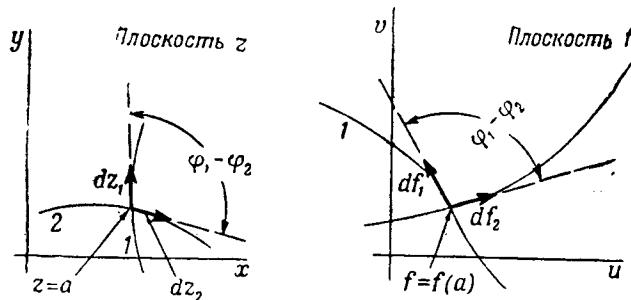


Рис. 4.2. Сохранение углов при конформном отображении.

Мы можем также нанести кривые на плоскость f и посмотреть, как расположатся соответствующие кривые в плоскости z . Например, прямые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ служат координатными линиями прямоугольной системы координат в плоскости f . Соответствующие кривые $u(x, y) = \text{const}$, $v(x, y) = \text{const}$ образуют ортогональную координатную сеть в плоскости z (ортогональность обусловлена тем, что при отображении прямые **углы** переходят в прямые). Воспользовавшись только что проведенным рассуждением или определениями § 1.3 [см. (1.3.4)], мы получим в силу уравнений (4.2.1) (т. е. в силу аналитичности функции f) для обеих координат u, v равные коэффициенты Ламе

$$h_u = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = h_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} = |df/dz|.$$

Поэтому бесконечно малая фигура на плоскости f отображается в **подобную** фигуру на плоскости z , отличающуюся, может быть, от исходной положением и величиной, но **заведомо сохраняющую углы и отношения линейных размеров**. Это свойство также может служить определением конформного отображения.

Простейшее конформное отображение задается равенством $f = ze^{i\theta} + c$, где действительный угол θ и комплексное слагаемое c постоянны. В этом случае коэффициенты Ламе $h_u = h_v = df/dz| = 1$, т. е. линейные размеры сохраняются. Само преобразование состоит в смещении, определяемом вектором c , и в повороте на угол θ . В других случаях происходит изменение линейных размеров, т. е. растяжение или сжатие, причем в различных участках это изменение неодинаково, так что в целом плоскость претерпевает искажения, несмотря на то, что преобразования ее малых участков сводятся к преобразованиям подобия. Всякую аналити-

ческую функцию комплексного переменного, как мы видели, можно рассматривать как изображение некоторого электростатического поля, а поэтому можно считать, что действие этого последнего состоит в искривлении пространства и в замене первоначального поля простым электростатическим полем $E = u + iv$. Движение заряженной частицы можно при этом объяснить либо непосредственным воздействием поля, либо искривленностью пространства под влиянием этого поля. Эта точка зрения напоминает подход Эйнштейна к гравитационным явлениям в общей теории относительности.

На рис. 4.3 показано конформное отображение, осуществляемое функцией

$$f(z) = \frac{1-z}{1+z}, \quad u = \frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}, \quad v = \frac{-2y}{(1+x)^2+y^2}, \quad z = \frac{1-f}{1+f}.$$

Эта функция аналитична всюду, кроме точки $z = -1$, соответствующее отображение конформно также всюду, кроме этой точки. Кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ в плоскости z образуют два взаимно ортогональных семейства

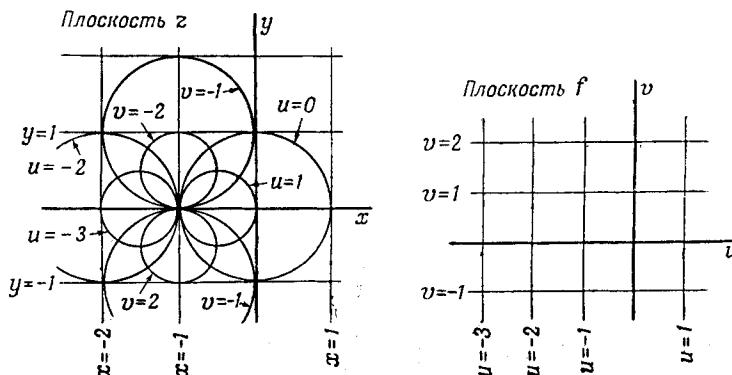


Рис. 4.3. Конформное отображение, осуществляемое функцией $f(z) = (1-z)/(1+z)$.

касающихся друг друга окружностей. Другие случаи будут разобраны и изображены ниже (см. § 4.7).

Заметим, что в точках, в которых коэффициент растяжения $|df/dz|$ обращается в нуль, отображение не конформно. Окрестность такой точки в плоскости z претерпевает сильное сжатие при отображении на плоскость f . При обратном отображении соответствующая область на плоскости f подвергается сильному растяжению. Это наводит на мысль, что для обратной функции $z(f)$ точка, соответствующая той, в которой $f'(z) = 0$, является особой. Мы увидим на примере, что это действительно так. Простейшим примером может служить функция $f(z) = z^2$, для которой $f'(0) = 0$. Как и следовало ожидать, $f = 0$ является особой точкой обратной функции $z = f^{1/2}$. Поэтому в этой точке отображение не может быть конформным. Это можно доказать непосредственно, так как если отрезки двух кривых пересекаются в точке $z = 0$ под углом $\varphi_2 - \varphi_1$, то угол между соответствующими кривыми в плоскости f равен $2(\varphi_2 - \varphi_1)$. Ясно, что если $f'(a) = 0$, то отображение в точке $z = a$ не конформно, независимо от того, ведет ли себя $f(z)$ вблизи $z = a$ как $(z - a)^2$, что имеет место в нашем частном примере, или как $(z - a)^n$ с любым целым $n > 2$.

Однако там, где f аналитична и коэффициент растяжения $|df/dz|$ не равен нулю, обратное отображение конформно. Математически это форму-

лируется так: если функция $f(z)$ аналитична в точке $z=a$ и $f'(a) \neq 0$, то функция, обратная $f(z)$, аналитична в достаточно малой области, окружающей $f(a)$, и ее производная в точке $f(a)$ равна $1/f'(a)$.

Во-первых, что касается существования обратной функции, то мы замечаем, что для отображения $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ существует обратное, если $(\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2 \neq 0$. При $f'(a) \neq 0$ последнее условие выполняется. Заметим также, что если $f'(a)$ равно нулю, то обратная функция в точке $f(a)$ не существует, а это означает, что $f(a)$ — особая точка обратной функции. Теперь нужно показать, что обратная функция аналитична, т. е. что $\partial x / \partial u = \partial y / \partial v$ и $\partial x / \partial v = -\partial y / \partial u$. Выразим $\partial x / \partial u$, ... через производные $\partial u / \partial x$, ... Для этого из тождества

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

находим

$$1 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y},$$

откуда в силу (4.2.1)

$$1 = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Точно так же

$$1 = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Решим полученную систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными $\partial x / \partial u$, $\partial x / \partial v$, $\partial y / \partial u$, $\partial y / \partial v$. Для производных от x получим выражения

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial u / \partial x}{(\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-\partial u / \partial y}{(\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2}.$$

Найдя производные от y , мы увидим, что удовлетворяются условия Коши — Римана $\partial x / \partial u = \partial y / \partial v$, $\partial x / \partial v = -\partial y / \partial u$. Вычислив производную обратной функции

$$\frac{dz}{df} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{(\partial u / \partial x) - i(\partial u / \partial y)} = \frac{1}{df/dz},$$

мы докажем последнее утверждение теоремы. Значительная часть этой главы будет посвящена дальнейшему изучению конформных отображений ввиду важности этих вопросов для приложений.

Интегрирование в комплексной плоскости. Теория интегрирования в комплексной плоскости в сущности есть теория криволинейных интегралов. Если C — какой-нибудь допустимый контур (см. ниже), то, согласно сказанному на стр. 335 [см. абзацы, предпоследние формуле (4.1.12)],

$$\int_C \bar{E} dz = \int_C E_t ds + i \int_C E_n ds, \quad ds = |dz|,$$

где E_t — компонента вектора E вдоль пути интегрирования, а E_n — нормальная компонента. Интегралы такого вида часто встречаются в физике.

Например, если E — силовое поле, то $\int_C E_t ds$ представляет собой работу,

которая совершается против сил поля при перемещении вдоль контура C . Второй интеграл измеряет поток вектора E через контур. Если E — вектор

скорости движущейся жидкости, то второй интеграл представляет собой поток жидкости через рассматриваемый контур.

Для того чтобы оба эти интеграла имели физический (а также математический) смысл, необходимо взять достаточно гладкий контур. Такой *гладкий контур* (гладкая кривая) можно составить из непрерывно примыкающих друг к другу дуг, каждая из которых имеет непрерывно изменяющуюся касательную. Последнее требование исключает возможность появления таких патологических явлений, как дуги, имеющие бесконечную длину. Для удобства предположим еще, что ни одна из дуг, составляющих контур, не имеет точек самопересечения, исключив тем самым появление петель. Впрочем, контуры, имеющие петли, можно было бы не исключать из рассмотрения, так как каждый контур с петлей может быть разбит на замкнутый контур (петлю) и некоторый гладкий контур, и теорему, о которой идет речь, можно было бы применить отдельно

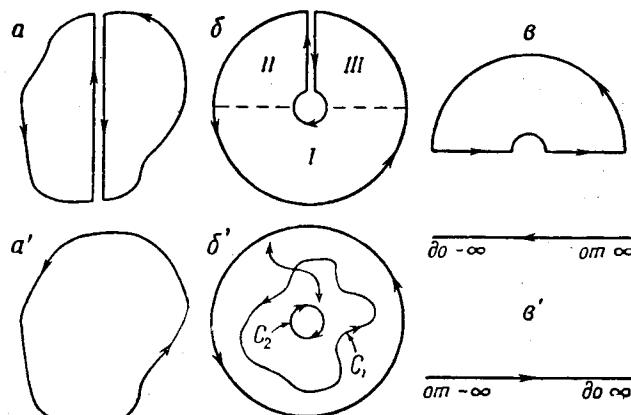


Рис. 4.4. Примеры контуров в комплексной плоскости.

к обеим частям. *Замкнутым контуром* назовем замкнутую гладкую кривую. Замкнутый контур описывается в *положительном* направлении по отношению к области, ограниченной контуром, если по отношению к наблюдателю, находящемуся в какой-либо внутренней точке этой области, обход контура совершается против часовой стрелки. Отрицательным будем считать обход по часовой стрелке. Интегрирование вдоль замкнутого контура будет обозначаться знаком \oint .

В дальнейшем мы будем часто пользоваться следующим достаточно очевидным фактом: если $f(z)$ — аналитическая функция внутри контура и на самом контуре и если производная df/dz в этой области однозначна, то

$$\oint \frac{df}{dz} dz = 0.$$

В тех случаях, когда df/dz неоднозначна, это равенство может нарушаться.

Комбинируя контуры, составленные из гладких кривых, можно получать новые контуры. На рис. 4.4 приведены примеры. В примере б' окружности не смыкаются и, следовательно, не образуют в совокупности единого замкнутого контура. Области, ограниченные контурами такого рода, называются *многосвязными*; в остальных примерах на рис. 4.4 области *односвязные*. Область односвязна, если любой замкнутый контур, лежащий в ней, можно стянуть в точку, непрерывно деформируя его и не задевая

при этом границу области. В примере b' кривая C_1 , лежащая в кольце между двумя окружностями, не поддается такой деформации. Пример b иллюстрирует тот факт, что любая многосвязная область может быть превращена в односвязную, если дополнить ее границу разрезами так, чтобы нельзя было провести нестыгиваемых замкнутых контуров. Так, контур C_1 в примере b' , если его перенести в b , не лежал бы целиком внутри заданной области. Необходимость принимать во внимание характер связности области и его физический смысл будет вскоре выяснена.

После этих геометрических замечаний мы можем сформулировать центральную теорему теории функций комплексного переменного.

Теорема Коши. *Если $f(z)$ — аналитическая функция, непрерывная внутри замкнутого гладкого контура C и на самом контуре, то*

$$\oint f(z) dz = 0. \quad (4.2.3)$$

Доказательство этой теоремы, принадлежащее Гурса, читатель может найти в различных учебниках. Простое доказательство, приведенное выше, предполагает не только существование производной $f'(z)$ всюду внутри C , но и ее непрерывность в этой области. Однако теорему Коши полезно доказать при минимальных предположениях относительно $f(z)$, так как это расширит область ее применения. В настоящем параграфе мы удовольствуемся предположениями, что контур C ограничивает звездообразную область и что $f'(z)$ ограничена внутри и на C .

Геометрическое понятие «звездообразной» области нуждается в разъяснении. Область называется звездообразной, если в ней существует такая точка O , что любой луч, выходящий из O , имеет в точности одну точку пересечения с границей области. Простым примером звездообразной области служит круг. Кольцо, напротив, не является звездообразной областью. То, что наше доказательство будет относиться лишь к звездообразным областям, не нарушает общности теоремы, так как произвольная односвязная область с достаточно хорошей границей может быть разбита на несколько звездообразных частей, к каждой из которых теорема Коши применима. Например, на рис. 4.4,6 область, представляющая собой полуокружность, может быть разбита на звездообразные части, подобные областям II и III примера b . Применив теорему Коши отдельно к границам этих частей, мы получим

$$\oint_{II} f dz + \oint_{III} f dz = 0.$$

Но интегралы по общим участкам границ областей II и III взаимно уничтожаются, и сумма интегралов в левой части равенства оказывается равной интегралу от f по границе полуокружности.

Переходим к доказательству теоремы Коши. Пусть точка O звездообразной области является началом координат. Рассмотрим функцию

$$F(\lambda) = \oint f(\lambda z) dz, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (4.2.4)$$

Теорема Коши утверждает, что $F(1) = 0$. Для доказательства дифференцируем $F(\lambda)$:

$$F'(\lambda) = \oint f(\lambda z) dz + \lambda \oint z f'(\lambda z) dz.$$

Интегрируя во втором слагаемом по частям [что допустимо при условии ограниченности $f'(z)$], получаем

$$F'(\lambda) = \oint f(\lambda z) dz + \lambda \left\{ \left[\frac{zf(\lambda z)}{\lambda} \right] - \frac{1}{\lambda} \oint f(\lambda z) dz \right\},$$

где квадратные скобки указывают на то, что берется разность значений заключенной в них функции в начальной и конечной точках контура. Так как функция $zf(\lambda z)$ однозначна, то $[zf(\lambda z)/\lambda]$ в случае замкнутого контура обращается в нуль и $F'(\lambda) = 0$, т. е.

$$F(\lambda) = \text{const.}$$

Для отыскания этой постоянной положим $\lambda = 0$ в (4.2.4) и получим $F(0) = 0$. Следовательно, $F(1) = 0$, и теорема доказана. Это доказательство, кажущееся столь простым, на самом деле переносит трудность на другие

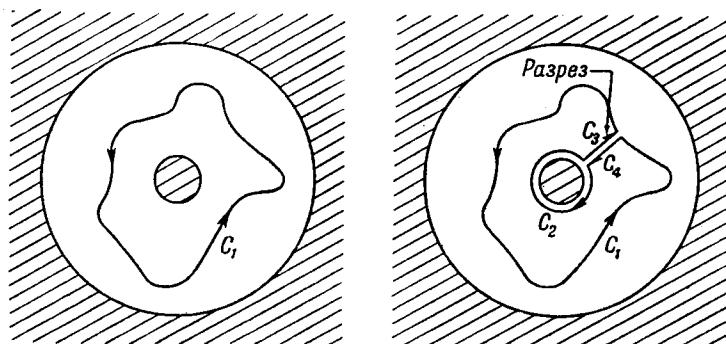


Рис. 4.5. Контуры в многосвязных областях.

вопросы, такие, например, как вопрос о возможности интегрирования по частям. Последняя вытекает из предположения об аналитичности функции.

Теорема Коши в форме (4.2.3) *неприменима к многосвязной области*, так как ее граница не является замкнутым гладким контуром. Физические причины этого факта нетрудно обнаружить. На стр. 335 мы установили, что в применении к электростатическому полю теорема Коши эквивалентна утверждению, что внутри области, ограниченной контуром C , нет электрических зарядов. Взяв многосвязную область, приведенную на рис. 4.4, б', мы увидим, что существует контур (например, контур C_1), целиком лежащий внутри рассматриваемой области, к которому теорема Коши явно неприменима из-за того, что внутри маленького круга, т. е. вне рассматриваемой области, могут находиться заряды. Теорему Коши можно получить здесь при помощи вычитания

$$\oint_{C_1} f dz - \oint_{C_2} f dz = 0, \quad (4.2.5)$$

где C_2 — малая окружность. Это равенство можно также установить непосредственно, соединив разрезом линии C_1 и C_2 и тем самым превратив многосвязную область в односвязную. Если взять теперь (см. рис. 4.5) контур, состоящий из контуров C_1 (описываемого в положительном направлении), C_2 (описываемого в отрицательном направлении) и границ разреза C_3 и C_4 , то к такому контуру теорема Коши применима. Интегралы вдоль C_3 и C_4 взаимно уничтожаются, и мы получаем равенство (4.2.5).

Некоторые полезные следствия из теоремы Коши. Из теоремы Коши следует, что если $f(z)$ — аналитическая функция внутри области, ограниченной некоторым замкнутым контуром C , то интеграл $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$, взятый вдоль любого контура, лежащего внутри C , зависит только от z_1 и z_2 . Таким образом, не только производная функции $f(z)$, но и ее интеграл определяются однозначно. Это обстоятельство часто приводится в качестве довода в пользу важности теоремы Коши. Для доказательства сравним интегралы $\int_{C_1} f(z) dz$ и $\int_{C_2} f(z) dz$, взятые вдоль двух различных

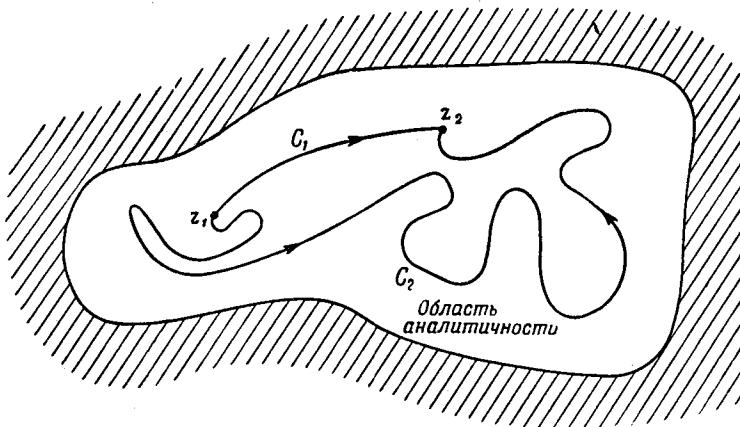


Рис. 4.6. Независимость интеграла от пути внутри области аналитичности.

контуров C_1 и C_2 , идущих от точки z_1 к точке z_2 (см. рис. 4.6). Согласно теореме Коши, $\int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz = \oint f(z) dz = 0$, что и требовалось доказать. Из этого следствия вытекает весьма важный факт, состоящий в том, что, не изменяя значения интеграла, мы можем деформировать контур интегрирования, если только при такой деформации контур не пересечет ни одной особой точки подинтегральной функции. Этой теоремой мы постоянно будем пользоваться при вычислении контурных интегралов, так как она позволяет выбирать наиболее удобный контур.

В силу однозначности интеграла $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ можно ввести *неопределенный интеграл функции $f(z)$* , положив

$$F(z) = \int_{z_1}^z f(z) dz,$$

причем контур берется, разумеется, внутри области аналитичности функции $f(z)$. Справедлива интересная теорема, состоящая в том, что если $f(z)$ аналитична в некоторой области, то $F(z)$ в этой области также является аналитической функцией. Для доказательства достаточно установить од-

нозначность производной функции $F(z)$. С этой целью рассмотрим тождество

$$\frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} - f(\zeta) = \frac{\int_{\zeta}^z [f(z) - f(\zeta)] dz}{z - \zeta}.$$

В силу непрерывности и однозначности $f(z)$, правая часть приближении z к ζ может быть сколь угодно малой. Поэтому

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} = f(\zeta).$$

Написанный предел является как раз производной $F'(\zeta)$, и теорема доказана.

Из уравнения (4.1.19) и последующих рассуждений мы сделали вывод, что если $f(z)$ — функция, сопряженная электростатическому полю, то действительная часть функции $F(z)$ является электростатическим потенциалом, а мнимая часть постоянна вдоль силовых линий поля, т. е. является функцией тока (см. стр. 337). Следовательно, двумерный электростатический потенциал и функция тока служат действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции комплексного переменного.

Возвращаясь к предыдущему абзацу, заметим, что, воспользовавшись только непрерывностью и однозначностью $f(z)$, а также однозначностью интеграла, мы установили *аналитичность* функции $F(z)$. Ниже мы покажем, что если функция $f(z)$ аналитична в некоторой области, то аналитична и ее производная [см. формулу (4.3.1)]. Забегая вперед и применив эту теорему, приходим к заключению, что если $F(z)$ аналитична, то аналитична и $f(z)$. Таким образом, мы получаем обращение теоремы Коши, именуемое *теоремой Морера*.

Если функция $f(z)$ непрерывна и однозначна внутри некоторого замкнутого контура C и $\oint f(z) dz = 0$ для любого замкнутого контура, лежащего внутри C , то $f(z)$ аналитична внутри C .

Эта теорема позволяет проверять аналитичность функций и является, таким образом, интегральным аналогом дифференциального признака, выражаемого условиями Коши — Римана. Последние, впрочем, требуют еще непрерывности производной от f , и поэтому иногда бывает проще пользоваться интегральным признаком.

Физический смысл теоремы Морера в применении к электростатическому полю $f(z)$ может шокировать физика своей очевидностью; она утверждает, что если полный заряд, заключенный внутри произвольного замкнутого контура, лежащего в данной области [вычисленный с помощью $f(z)$], равен нулю, то и плотность зарядов в этой области всюду равна нулю.

Интегральная формула Коши. Интегральная формула Коши, являющаяся прямым следствием теоремы Коши, играет основную роль в применениях теории аналитических функций в других областях математики и в физике. Ее электростатическим аналогом является теорема Гаусса, которая утверждает, что интеграл от нормальной компоненты вектора электростатического поля вдоль замкнутого контура C равен сумме зарядов, заключенных внутри C . В электростатике теорема Гаусса доказывается таким образом, что поле, возбуждаемое внешними (по отношению к C) источниками, отделяется от поля, порожденного внутренними источниками. Первое дает интеграл, равный нулю, а второе вычисляется путем сумми-

рования действий отдельных источников. Интегральная формула Коши относится к случаю, когда внутри C имеется единственный точечный источник.

Рассмотрим интеграл (называемый интегралом Коши)

$$\oint \frac{f(z) dz}{z-a}, \quad (4.2.6)$$

взятый вдоль некоторого замкнутого контура C , причем предполагается, что на контуре и внутри него $f(z)$ аналитична. Согласно следствию из теоремы Коши о деформировании контуров, C можно заменить малой окружностью радиуса ρ с центром в точке a . Положив $z-a=\rho e^{i\varphi}$, получим

$$J = i \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\varphi}) d\varphi = i f(a) \int_0^{2\pi} d\varphi + i \int_0^{2\pi} [f(a + \rho e^{i\varphi}) - f(a)] d\varphi. \quad (4.2.7)$$

В пределе при $\rho \rightarrow 0$ второй интеграл в правой части обращается в нуль в силу непрерывности $f(z)$. Итак, интегральная формула Коши гласит, что если функция $f(z)$ аналитична внутри контура C и на нем самом и a — какая-либо точка, лежащая внутри C , то

$$\oint \frac{f(z) dz}{z-a} = 2\pi i f(a). \quad (4.2.8)$$

Если точка a выбрана вне C , то $\oint [f(z)/(z-a)] dz = 0$. Если точка a выбрана на самом контуре C , то главное значение Коши¹⁾ этого интеграла равно $\pi i f(a)$ (т. е. среднему арифметическому значений, получающихся в предыдущих случаях). Последний случай соответствует такому положению точечного источника, когда одна его половина находится с внутренней стороны контура C , а другая половина — с внешней. Итак,

$$\oint \frac{f(z) dz}{z-a} = 2\pi i f(a) \times \begin{cases} 1, & \text{если } a \text{ лежит внутри } C, \\ \frac{1}{2} (\text{главное значение интеграла}), & \text{если } a \text{ лежит на } C, \\ 0, & \text{если } a \text{ лежит вне } C. \end{cases} \quad (4.2.9)$$

Формула Коши дает *интегральное представление* функции $f(z)$ и позволяет вычислить $f(z)$ в любой точке, лежащей внутри контура C , коль скоро известны значения $f(z)$ на C . В физике часто встречаются такого рода представления (в частности, в применениях функций Грина или функций источника) с разрывами такого же вида, как в (4.2.9). Формула (4.2.8) в том случае, когда f определяет электростатическое поле, дает возможность вычислить поле внутри контура C по его значениям вдоль C . Аналогичные теоремы имеют место в теории распространения волн, где они объединяются под названием принципа Гюйгенса.

¹⁾ Главное значение Коши несобственного интеграла определяется следующим образом: пусть $q(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$, тогда главное значение интеграла $\int_b^c q(x) dx$, обозначаемое $\mathcal{P} \int_b^c q(x) dx$ ($b < a < c$), равно

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left\{ \int_b^{a-\delta} q(x) dx + \int_{a+\delta}^c q(x) dx \right\}.$$

Формула Коши представляет собой мощное орудие исследования свойств аналитических функций. Она указывает на теснейшую связь, существующую между значениями аналитической функции во всей комплексной плоскости. Так, из формулы (4.2.7) мы видим, что $f(a)$ равно *среднему арифметическому* значений f на любой окружности с центром в точке a . Поэтому $|f(a)| \leq M$, где M – наибольшее значение $|f|$ на окружности. Равенство $|f(a)| = M$ может иметь место лишь тогда, когда f постоянна на окружности; в этом случае f постоянна и внутри круга. Эта теорема легко может быть обобщена на области, ограниченные произвольными контурами.

В случае электростатического поля последняя теорема означает, что вектор поля в области, ограниченной некоторым замкнутым контуром C и свободной от зарядов, принимает свое наибольшее (по модулю) значение на границе области. Если $f(z)$ не имеет нулей внутри контура C , то функция $1/f(z)$ аналитична в этой области и $|1/f(z)|$ достигает своего наибольшего значения лишь на C . Следовательно, в этом случае $|f(z)|$ принимает свое наименьшее значение лишь на контуре C . Доказательство не проходит и сама эта теорема несправедлива тогда, когда внутри C существуют нули функции $f(z)$. Таким образом, модуль аналитической функции не может достигать внутри области аналитичности ни максимума, ни (положительного) минимума. Если $|f(z)|$ достигает наибольшего или наименьшего (положительного) значения внутри C , то $f(z)$ – постоянная. Поэтому точки, в которых производная функции $f(z)$ обращается в нуль и $f'(z) \neq 0$, являются для $|f(z)|$ седловыми точками, а не точками максимума или минимума.

В частности, вектор электростатического поля принимает свои наибольшее и наименьшее (по модулю) значения (когда последнее отлично от нуля) на границе области.

Эти теоремы применимы не только к $|f(z)|$, но также к действительной и мнимой частям аналитической функции $f(z)$, а следовательно, и к электростатическому потенциалу V . Чтобы это показать, запишем равенство (4.2.7) в виде

$$2\pi i f(a) = 2\pi i(u + iv) = i \int_0^{2\pi} f(x - iy) d\varphi = i \int_0^{2\pi} (u + iv) d\varphi.$$

Приравняв мнимые части второго и четвертого выражений, получим

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\varphi, \quad (4.2.10)$$

и мы видим, что значение u в центре окружности есть среднее арифметическое ее значений на самой окружности. Рассуждая точно так же, как при рассмотрении $|f(z)|$, мы приходим к заключению, что u принимает свои наибольшее и наименьшее значения лишь на границе той области, где f аналитична.

Мы доказали, таким образом, теорему, которая гласит, что электростатический потенциал не может достигать ни максимума, ни минимума внутри областей, свободных от зарядов. Этот факт был уже установлен в гл. 1 (см. стр. 18) при обсуждении уравнения Лапласа, которому удовлетворяет электростатический потенциал. Непосредственным следствием этой теоремы является то, что электростатический потенциал V , если он постоянен на каком-либо контуре, внутри которого нет зарядов, оказывается постоянным также внутри контура. Это свойство V находит свое истол-

кование в хорошо известном факте, что электростатическое поле внутри проводника, образующего замкнутую поверхность, равно нулю.

Приведенные примеры показывают, насколько полезен интеграл Коши. Кроме того, мы еще раз убедились в том, что аналитические функции обладают весьма специальными свойствами. Более глубоким изучением этих свойств мы займемся в этой главе позднее.

Действительная и мнимая части аналитической функции. Только что приведенные рассмотрения указывают на то, что мы можем классифицировать компоненты аналитических функций, т. е. их действительные и мнимые части, и выяснить соотношения между ними так же, как в предыдущих пунктах это делалось с самими аналитическими функциями. Опять-таки, в силу особой природы аналитических функций, поведение этих компонент на одном участке комплексной плоскости оказывается жестко связанным с поведением их на других участках. Кроме того, действительная и мнимая части тесно связаны между собой. В частности, мы увидим, что, зная достаточно хорошо действительную или мнимую часть аналитической функции, можно вычислить вторую компоненту.

Эта связь между действительной и мнимой частями аналитической функции представляет значительный физический интерес. Например, в электростатике ей соответствует связь между электростатическим потенциалом и полным зарядом, в теории колебаний — связь между действительной и мнимой частями импеданса, т. е. между активной и реактивной составляющими. В последнем случае комплексное переменное представляет комплексную частоту.

Некоторые простейшие сведения об аналитических функциях мы смогли получить, воспользовавшись представлением аналитической функции посредством интеграла Коши. Такое представление возможно в любой области, лежащей внутри замкнутого контура, и, как мы видели, оно связывает значения аналитической функции f внутри области с ее значениями на границе. Простое выражение действительной части функции f (обозначаемой $\operatorname{Re} f$) внутри области через значения $\operatorname{Re} f$ на контуре легко установить для случая круга. Ниже мы увидим, что с помощью конформного преобразования внутренность любой области можно отобразить на внутренность круга; поэтому и в случае произвольной области можно, по крайней мере в принципе, установить связь между значениями $\operatorname{Re} f$ внутри контура и ее значениями на самом контуре, хотя очень часто это бывает нелегко осуществить практически. Однако в силу возможности такого отображения установленные ниже теоремы с качественной стороны справедливы для любой области. Всюду в последующем рассуждении будет предполагаться, что функция $f(z)$ аналитична внутри рассматриваемой области.

Многое удается достигнуть, рассматривая окружность бесконечного радиуса; для удобства мы предположим, что эта окружность совпадает с осью x , а внутренняя к ней область — с верхней полуплоскостью. Наша задача будет состоять в том, чтобы отыскать действительную и мнимую части функции $f = u + iv$ в верхней полуплоскости, считая u заданной на оси x . Решение может быть подсказано соответствующей электростатической задачей, когда требуется по заданным значениям потенциала на оси $y=0$ восстановить потенциал в верхней полуплоскости. Такого рода задачи в электростатике решаются методом изображений (см. гл. 7).

Интеграл Коши эквивалентен представлению решения с помощью функции источника, причем множитель $1/(z - \zeta)$ изображает «источник» в точке $z = \zeta = \xi + i\eta$. Точку ζ мы поместим в верхней полуплоскости, так

что интеграл от $f(z)/(z - \zeta)$ вдоль охватывающего точку ζ замкнутого контура, состоящего из оси x и полуокружности бесконечного радиуса, будет равен $2\pi i f(\zeta)$. В то же время интеграл от $f(z)/(z - \bar{\zeta})$ будет равен нулю, так как точка $\bar{\zeta}$ лежит вне выбранного контура. Следовательно,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \left(\frac{1}{z - \zeta} - \frac{1}{z - \bar{\zeta}} \right) dz. \quad (4.2.11)$$

Коль скоро f аналитична во всей верхней полуплоскости, интеграл по бесконечной верхней полуокружности обращается в нуль¹⁾, интеграл (4.2.11) сводится к интегралу, взятому вдоль действительной оси, и мы получаем

$$f(\zeta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx, \quad (4.2.12)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$. Знаменатель подинтегрального выражения, а также множитель перед интегралом действительны, поэтому формула (4.2.12) справедлива отдельно для u и v . Например,

$$u(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx. \quad (4.2.13)$$

Таким образом, если потенциал задан при $y = 0$, т. е. на оси x , то при условии, что f аналитична в верхней полуплоскости, формула (4.2.13) дает значения потенциала u во всех точках верхней полуплоскости.

Для того чтобы получить соотношения между u и v , следует повторить предыдущий вывод, сложив обе функции источника, вместо того чтобы брать их разность. Мы получим

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \left(\frac{1}{z - \zeta} + \frac{1}{z - \bar{\zeta}} \right) dz,$$

или

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx. \quad (4.2.14)$$

Отделив в последнем равенстве действительную и мнимую части, мы получим искомые соотношения:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \xi) v(x, 0)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx \quad (4.2.15)$$

$$v(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \xi) u(x, 0)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx. \quad (4.2.16)$$

Зная поведение действительной (или мнимой) части функции f на оси x , мы сможем посредством (4.2.13) и формулы для v , аналогичной (4.2.13), а также формул (4.2.15) и (4.2.16) вычислить как u , так и v в верхней полуплоскости. Эти формулы дают решение соответствующей задачи электростатики, когда требуется найти поле в полуплоскости по заданному на границе распределению зарядов или потенциалу.

¹⁾ Это будет верно только при дополнительном условии, что $|f(z)/z|$ стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. — Прим. перев.

Выражения (4.2.13) и (4.2.16) позволяют определить поведение u и v на самой границе, если положить $\eta = 0$. Но при этом приходится проявлять осторожность из-за получающихся несобственных (сингулярных) интегралов. Проще всего, пожалуй, снова вернуться к интегралу Коши, который в том случае, когда точка ζ лежит на контуре, даст нам [см. формулу (4.2.9)]

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \oint \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

Когда контуром служит ось x ,

$$f(\xi, 0) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, 0)}{x - \xi} dx, \quad (4.2.17)$$

откуда

$$u(\xi, 0) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x, 0)}{x - \xi} dx, \quad v(\xi, 0) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0)}{x - \xi} dx. \quad (4.2.18)$$

Эти соотношения встречаются в теории *преобразования Гильберта*; функции u и v являются преобразованиями Гильберта одна для другой. Дальше в настоящей главе мы подробнее рассмотрим эти трансформации. (Следует еще раз подчеркнуть, что полученные формулы связывают между собой действительную и мнимую части функции, *аналитической* в верхней полуплоскости.) Иногда удобно переписать формулы (4.2.18) в таком виде, чтобы особенность подинтегральной функции была «сглажена». Заметив,

что $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx/(x - \xi) = 0$, получим

$$\begin{aligned} u(\xi, 0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x, 0) - v(\xi, 0)}{x - \xi} dx, \\ v(\xi, 0) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0) - u(\xi, 0)}{x - \xi} dx. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Импеданс. Среди аналитических функций, встречающихся в приложениях, одной из наиболее важных является полное сопротивление, или *импеданс* Z (см. стр. 271 и 309). Электрический импеданс определяется как отношение напряжения к силе тока в данной точке цепи в предположении, что и напряжение и сила тока выражены в виде комплексных показательных функций времени ($V = V_0 e^{i\omega t}$ и т. д.); механический импеданс есть комплексное отношение силы к скорости; волновой импеданс колебаний струны был определен на стр. 128 и т. д.

Импеданс представляет собой функцию частоты ν (или, иначе, угловой скорости $\omega = 2\pi\nu$) и параметров системы. Когда ω действительна и положительна (т. е. когда возмущающая сила или напряжение имеет вид $F_0 e^{i\omega t}$), действительная часть функции Z называется активным сопротивлением (резистансом) и обозначается R , а мнимая часть называется

¹⁾ Может оказаться, что на бесконечности эти интегралы надо понимать в смысле главного значения, т. е. как $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N$. Так будет, например, для приводимого ниже интеграла (4.2.22), если $\xi \neq k\pi$. — *Прим. ред.*

реактивным сопротивлением (реактансом) и обозначается X . Однако мы можем представить себе случаи, когда ω имеет комплексные значения и возмущающая сила содержит вещественный множитель, являющийся показательной функцией времени, так что $Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$ можно рассматривать как аналитическую функцию комплексного переменного ω .

В большинстве физически реализуемых случаев Z оказывается аналитической в верхней полуплоскости ω (т. е. при положительной мнимой части переменного ω). Природа импеданса такова, что при изменении знака ω (т. е. если возмущающая сила имеет вид $F_0 e^{-i\omega t}$) активная составляющая не изменяется, а реактивная изменяет знак

$$Z(-\omega) = \overline{Z}(\omega), \quad R(-\omega) = R(\omega), \quad X(-\omega) = -X(\omega). \quad (4.2.20)$$

Применяя к этим функциям формулы (4.2.19), получаем равенства

$$R(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{xX(x) - \omega X(\omega)}{x^2 - \omega^2} dx, \quad X(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{R(x) - R(\omega)}{x^2 - \omega^2} dx, \quad (4.2.21)$$

выражающие активную составляющую при действительных ω через реактивную при действительных ω , и наоборот. Это показывает, что если Z ведет себя достаточно хорошо (аналитична в верхней полуплоскости), то активная и реактивная составляющие импеданса связаны между собой определенными соотношениями и их нельзя выбирать произвольно и независимо друг от друга.

Помимо упомянутых здесь непосредственных приложений, формулы (4.2.19) могут служить для вычисления интегралов с бесконечными пределами. Это достигается применением формул (4.2.19) к функциям, действительные и мнимые части которых известны. Пусть, например, $f(z) = e^{iz}$. Тогда $u(x, 0) = \cos x$, $v(x, 0) = \sin x$ и

$$\cos \xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x - \sin \xi}{x - \xi} dx; \quad (4.2.22)$$

при $\xi = 0$ получаем

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (4.2.23)$$

Такого рода применения формул (4.2.19) весьма многочисленны. В этой главе, а также в задачах встречаются и другие примеры.

Формула Пуассона. Аналогичные соотношения могут быть получены в том случае, когда рассматриваемой областью является круг. При этом точке ζ мы ставим в соответствие ее изображение $a^2/\bar{\zeta}$, где a — радиус круга (при $|\zeta| < a$ точка $a^2/\bar{\zeta}$ оказывается вне круга). Действуя так же, как при выводе формул (4.2.11) и следующих, напишем

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \left[\frac{f(z)}{z - \zeta} - \frac{f(z)}{z - a^2/\bar{\zeta}} \right] dz,$$

где интеграл берется вдоль выбранной окружности. Переходя к полярным координатам, имеем $z = ae^{i\varphi}$, $\zeta = re^{i\theta}$ ($r < a$) и после некоторых простых преобразований получаем *формулу Пуассона*

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta) + r^2} f(ae^{i\varphi}) d\varphi. \quad (4.2.24)$$

Этот аналог формулы (4.2.13) позволяет найти действительную (или мнимую) часть функции f внутри круга по заданным значениям ее на границе.

Формулы, подобные (4.2.14), можно получить, преобразуя интеграл

$$j(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \left[\frac{f(z)}{z-\zeta} + \frac{f'(z)}{z-a^2/\bar{\zeta}} \right] dz.$$

Из формулы (4.2.24) получаем

$$f(re^{i\theta}) = f(0) - \frac{iar}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi-\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)} f(ae^{i\varphi}) d\varphi. \quad (4.2.25)$$

Приравнивая действительные и мнимые части, имеем

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= u(0) + \frac{ar}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi-\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)} v(a, \varphi) d\varphi, \\ v(r, \theta) &= v(0) - \frac{ar}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi-\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)} u(a, \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

где $f = u + iv$ и значение u при $r = 0$ кратко обозначено $u(0)$.

И в этом случае обнаруживается соотношение между функциями u и v на окружности. Мы имеем равенство

$$f(ae^{i\theta}) = f(0) - \frac{i}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(ae^{i\varphi}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\theta}{2} d\varphi. \quad (4.2.27)$$

Воспользовавшись тем, что $\oint_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\theta}{2} d\varphi = 0$, и приравняв действительные и мнимые части обеих частей равенства (4.2.27), получаем соотношения

$$\begin{aligned} u(a, \theta) &= u(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [v(a, \varphi) - v(a, \theta)] \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\theta}{2} d\varphi, \\ v(a, \theta) &= v(0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(a, \varphi) - u(a, \theta)] \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\theta}{2} d\varphi, \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

являющиеся аналогами преобразований Гильберта для случая круга.

Различные выведенные здесь формулы еще раз демонстрируют тесную связь между u и v , которую в дифференциальной форме мы уже видели в условиях Коши — Римана (4.2.1).

4.3. Производные аналитических функций. Ряды Тейлора и Лорана

Одно из самых замечательных свойств аналитической функции состоит в том, что все ее производные также аналитичны, причем в той же области, где и исходная функция. Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся интегральным представлением аналитической функции, вычислив производные путем соответствующего предельного перехода. Возможность этого обеспечивается тем, что свойства интегрального представления определяются в основном свойствами функции $1/(z-a)$, аналитичной при $z \neq a$.