Этот аналог формулы (4.2.13) позволяет найти действительную (или мнимую) часть функции f *внутри* круга по заданным значениям ее на границе.

Формулы, подобные (4.2.14), можно получить, преобразуя интеграл

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\oint\left[\frac{f(z)}{z-\zeta}+\frac{f(z)}{z-a^2/\bar{\zeta}}\right]dz.$$

Из формулы (4.2.24) получаем

$$f(re^{i\theta})=f(0)-\frac{iar}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\varphi-\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)}f(ae^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{4.2.25}$$

Приравнивая действительные и мнимые части, имеем

$$\begin{aligned} u(r,\theta)&=u(0)+\frac{ar}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\varphi-\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)}v(a,\varphi)\,d\varphi,\\ v(r,\theta)&=v(0)-\frac{ar}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\varphi-\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)}u(a,\varphi)\,d\varphi, \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

где $f=u+iv$ и значение u при $r=0$ кратко обозначено $u(0)$.

И в этом случае обнаруживается соотношение между функциями u и v на окружности. Мы имеем равенство

$$f(ae^{i\theta})=f(0)-\frac{i}{2\pi}\mathcal{P}\int_0^{2\pi}f(ae^{i\varphi})\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}\,d\varphi. \tag{4.2.27}$$

Воспользовавшись тем, что $\mathcal{P}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}\,d\varphi=0$, и приравняв действительные и мнимые части обеих частей равенства (4.2.27), получаем соотношения

$$\begin{aligned} u(a,\theta)&=u(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[v(a,\varphi)-v(a,\theta)]\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}\,d\varphi,\\ v(a,\theta)&=v(0)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(a,\varphi)-u(a,\theta)]\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}\,d\varphi, \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

являющиеся аналогами преобразований Гильберта для случая круга.

Различные выведенные здесь формулы еще раз демонстрируют тесную связь между u и v, которую в дифференциальной форме мы уже видели в условиях Коши — Римана (4.2.1).

4.3. Производные аналитических функций. Ряды Тейлора и Лорана

Одно из самых замечательных свойств аналитической функции состоит в том, что все ее производные также аналитичны, причем в той же области, где и исходная функция. Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся интегральным представлением аналитической функции, вычислив производные путем соответствующего предельного перехода. Возможность этого обеспечивается тем, что свойства интегрального представления определяются в основном свойствами функции $1/(z-a)$, аналитичной при $z\neq a$.

Мы имеем

$$2\pi i f'(a) = 2\pi i \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{1}{h} \oint f(z) \left(\frac{1}{z-a-h} - \frac{1}{z-a} \right) dz \right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \oint \frac{f(z)}{(z-a)(z-a-h)} dz = \oint \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz.$$

Предельный переход под знаком интеграла оправдывается соотношениями

$$\left| \oint f(z) \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{(z-a-h)(z-a)} \right) dz \right| =$$

$$= \left| h \oint \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2 (z-a-h)} \right| \leqslant \frac{|h| ML}{b^2 (b-|h|)},$$

где M — наибольшее значение $|f(z)|$ на контуре, L — длина контура, b — наименьшее значение $|z-a|$ на контуре. При $h \to 0$ правая часть неравенства стремится к нулю, а следовательно, стремится к нулю и левая часть.

Вычисляя таким же способом высшие производные, приходим к важной общей формуле, выражающей n-ю производную функции f в точке $z=a$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \tag{4.3.1}$$

В силу того, что все производные существуют, все они оказываются аналитическими функциями внутри контура C. Заметим, что из этого доказательства не следует существование высших производных *на* самом контуре C, так как интегральное представление (4.2.9) функции f, которым мы здесь пользуемся, разрывно на C.

Ряд Тейлора. С помощью формулы (4.3.1) можно вывести ряд Тейлора и найти его радиус сходимости. Ряд Тейлора представляет собой разложение $f(a+h)$ в ряд по степеням h. Такой ряд 1) *сходится внутри своего круга сходимости и расходится вне его*, 2) *имеет аналитическую сумму внутри круга сходимости* и 3) *имеет круг сходимости, простирающийся до ближайшей к a особой точки функции $f(z)$*. Доказательство утверждений 1) и 2) читатель найдет в любом учебнике, в котором сколько-нибудь подробно рассматриваются свойства степенных рядов. Предполагая, что точка a лежит внутри контура C, а $f(z)$ аналитична внутри и на C, из формулы Коши получаем

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-a-h} dz.$$

В качестве C возьмем окружность с центром в a, поскольку область сходимости, получающаяся в результате, представляет собой круг.

В силу тождества

$$\left(1 + \frac{h}{z-a} + \frac{h^2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(z-a)^{n-1}} \right) \frac{z-a-h}{z-a} = 1 - \frac{h^n}{(z-a)^n}$$

мы имеем точное выражение

$$\frac{1}{z-a-h} = \sum_{n=1}^{N} \frac{h^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{h^N}{(z-a-h)(z-a)^N}.$$

Подставляя его в интегральное представление $f(a+h)$, получаем

$$f(a+h)=\sum_{n=0}^{N}\frac{h^n}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz+\frac{h^{N+1}}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-a)^{N+1}(z-a-h)}dz$$

или, в силу (4.3.1),

$$f(a+h)=\sum_{n=0}^{N}\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_N. \tag{4.3.2}$$

Здесь R_N — остаточный член, т. е. разность между $f(a+h)$ и суммой первых $N+1$ членов ряда Тейлора. Чтобы найти радиус сходимости, заметим прежде всего, что ряд наверное сходится в любом круге радиуса r с центром в a, где r меньше расстояния от a до ближайшей к a особой точки функции f. Это следует из неравенства

$$|R_N|\leqslant\frac{|h|^{N+1}M}{r^N(r-|h|)}.$$

где M — наибольшее значение $|f|$ на окружности радиуса r с центром в точке a. Внутри такого круга $|h|<r$, а поэтому $R_N\to 0$ при $N\to\infty$. Итак, внутри круга радиуса r

$$f(a+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a): \tag{4.3.3}$$

полученный сходящийся ряд называется *рядом Тейлора*. Таким образом, радиус сходимости не меньше расстояния от a до ближайшей особой точки. Но он и не превосходит этого расстояния, так как мы не можем ожидать от степенного ряда, чтобы он удовлетворительно представлял функцию в окрестности ее особой точки.

То обстоятельство, что радиус сходимости ряда Тейлора равен расстоянию до ближайшей особой точки, объясняет некоторые кажущиеся парадоксы в поведении функций и рядов, возникающие когда последние рассматриваются только при действительных значениях аргумента. Характерным примером служит ряд Тейлора $(1-z)^{-1}=1+z+z^2+\ldots$. Ясно, что этот ряд «разлетается» при $z=1$. Однако он расходится и при $z=-1$, а также при любом $z=e^{i\varphi}$, т. е. в любой точке единичной окружности с центром в начале. Доказанная выше теорема дает объяснение этому явлению. В качестве другого примера рассмотрим функцию $f(x)=e^{-1/x^2}$. Все ее производные в точке $x=0$ равны нулю, но если эти данные механически подставить в формулу Тейлора (4.3.3), то получится очевидная бессмыслица. Дело здесь в том, что $z=0$ — особая точка функции e^{-1/z^2} комплексного переменного z.

Часто очень важно различать ряд, представляющий функцию, и «самое функцию» (какой бы смысл не вкладывался в это выражение). Степенной ряд, каковым является ряд Тейлора, как правило, представляет заданную функцию f лишь в некоторой ограниченной области. За пределами этой области функция f «существует», но это специальное представление в виде ряда там непригодно. В примере, приведенном в предыдущем абзаце, функция $f=(1-z)^{-1}$ «существует» и аналитична всюду, за исключением точки $z=1$, но степенной ряд $1+z+z^2+\ldots$ «существует» (т. е. сходится) и представляет f только внутри единичного круга с центром в точке $z=0$. Другой ряд $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(z-3)-\frac{1}{8}(z-3)^3+\ldots$ «существует» и представляет

ту же функцию f только внутри круга радиуса 2 с центром в точке $z=3$ и т. д.

Степенные ряды (ряды Тейлора, Лорана и другие) подобны как бы кускам клише, с помощью которого можно снять копию функции. Каждый кусок клише воспроизводит f на всем своем протяжении, но не дает непосредственной информации относительно поведения f за его пределами; только если все куски клише сложены вместе и пригнаны один к другому, можно получить полное изображение функции. Такая пригонка отдельных кусков клише с целью описать поведение f целиком называется *аналитическим продолжением*; его мы рассмотрим ниже в этой главе. Если f задана в конечном виде, например как $(1-z)^{-1}$, то этот процесс может быть интересен, но необходимости в нем нет, так как мы уже знаем «самое функцию». Мы, так сказать, имеем рецепт, по которому можем вычислить любое значение f конечным числом шагов (в нашем примере следует вычесть z из 1 и взять обратную величину полученной разности); бесконечный ряд, каким обычно является ряд Тейлора, дает рецепт вычисления посредством бесконечного числа шагов, и поэтому оно выполнимо только тогда, когда ряд сходится (если каждый последующий шаг вносит, так сказать, все меньшую поправку, то на самом деле для получения удовлетворительной копии бесконечного числа шагов не требуется).

К сожалению, для большинства функций мы не имеем «конечных» алгебраических рецептов, позволяющих вычислять их значения. Даже показательная и тригонометрические функции, например, при подсчете требуют применения бесконечных рядов. При этом обычно дело обстоит так, что мы не располагаем единым слепком «самой функции», а лишь отдельными кусками клише, которые еще должны быть пригнаны друг к другу. Так именно обстоит дело с большинством функций, изучаемых в этой книге.

Для представления функций могут служить также интегралы (см., в частности, § 4.8 и 5.3); такие «клише» часто способны изобразить функцию в гораздо более обширных областях, нежели ряды. Например, некоторые интегральные представления справедливы внутри полосы постоянной ширины, пересекающей всю комплексную плоскость и простирающейся до бесконечности, тогда как степенной ряд сходится внутри некоторого круга, т. е. в ограниченной области в случае конечного радиуса. Однако и интегральные представления справедливы лишь в определенных участках комплексной плоскости, и это следует иметь в виду во избежание ошибок. Выяснение области сходимости интегральных представлений часто является задачей гораздо более тонкой, чем в случае рядов. Ниже мы встретимся с интегральным представлением постоянной; соответствующий интеграл действительно равен этой постоянной в полуплоскости $\operatorname{Im} z<1$, а при $\operatorname{Im} z \geqslant 1$ он «разлетается». Если бы нам было известно, что «сама функция» всюду равна постоянной, то это интегральное представление показалось бы особенно нелепым представлением постоянной, но трудность этого примера состоит в том, что задан только интеграл, и нам приходится доказывать, что «сама функция» есть постоянная.

Ряд Лорана. Если мы хотим разложить функцию f в ряд в окрестности ее особой точки a, то для этой цели ряд Тейлора, очевидно, непригоден. Однако некоторое разложение, справедливое сколь угодно близко к особой точке a, можно получить. Для этого нужно воспользоваться контуром C, изображенным на рис. 4.7; этот контур, не охватывающий точку a, может быть заменен, как показано, двумя окружностями C_1 и C_2, охватывающими точку $z=a$ и имеющими соответственно положительное и отри-

цательное направления обхода. Применив интеграл Коши и изменив направление обхода C_2 на положительное, мы получим

$$f(a+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_1}\frac{f(z)}{z-a-h}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_2}\frac{f(z)}{z-a-h}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{0}^{\infty}h^n\oint\limits_{C_1}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{h^n}\oint\limits_{C_2}(z-a)^{n-1}f(z)\,dz\right\},$$

то есть

$$f(a+h)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nh^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz, \tag{4.3.4}$$

где в формуле для a_n при $n\geqslant 0$ взят контур C_1, а при $n<0$ — контур C_2, тот и другой с положительным направлением обхода [хотя, так как подинтегральная функция аналитична в области между C_1 и C_2, интеграл в (4.3.4) можно во всех случаях брать вдоль C_1].

Мы получили *ряд Лорана*. Рассуждая так же, как в случае ряда Тейлора, можно показать, что полученный ряд сходится внутри некоторого кольца с центром в точке a, внешняя граница которого проходит через ближайшую к a особую точку функции $f(z)$. Так как мы считаем, что внутри C_2, кроме $z=a$, нет особых точек, то радиус внутренней окружности C_2 можно брать сколь угодно малым. Ряд положительных степеней h сходится всюду внутри внешней границы кольца, тогда как ряд, образованный отрицательными степенями h, сходится всюду вне внутренней границы кольца. Таким образом, пользуясь рядом Лорана, мы расщепляем $f(z)$ на две функции, одна из которых аналитична внутри внешней окружности, а другая — вне внутренней окружности. При помощи интегралов вдоль окружностей, ограничивающих кольцо (или вдоль любых других контуров, в которые в данной конкретной задаче эти контуры могут быть преобразованы, например вдоль прямых, параллельных действительной оси), мы разлагаем ряд для f на две части, суммы которых аналитичны в разных областях комплексной плоскости.

Теперь обратимся к простой физической интерпретации такого разложения. Выше мы заметили, что функция $1/h$ пропорциональна электростатическому полю линейного заряда, помещенного в точке $h=0$. Каков физический смысл функций $1/h^2$, $1/h^3$ и т. д.? Так как $1/h^2$ можно получить из $1/h$ с помощью дифференцирования, то естественно ожидать, что $1/h^2$ изображает поле, порожденное *линейным диполем* (последний реализуется наложением пары противоположно заряженных прямых). Важна ориентация диполя; в настоящем примере он ориентирован *вдоль оси* x. Для доказательства заметим, что поле, порожденное диполем, можно получить при помощи наложения полей линейных зарядов, а именно, поместив в точке $h=0$ линейный положительный заряд q, а в точке $h=\varepsilon$ (ε — действительное положительное число) — линейный заряд $-q$ и перейдя к пределу при $\varepsilon\to 0$ так, чтобы произведение $q\varepsilon$ оставалось постоянным и равным моменту диполя p. Соответствующая выкладка

$$-\lim\left(\frac{q}{h}-\frac{q}{h-\varepsilon}\right)=\lim\frac{q\varepsilon}{h(h-\varepsilon)}=\frac{p}{h^2}\quad(p=\varepsilon q)$$

подтверждает нашу догадку. Аналогично $1/h^3$ изображает предельное (при $\varepsilon\to 0$) поле, созданное положительным зарядом q в точке $h=0$ и зарядами $-\frac{1}{2}q$ в точках $\pm\varepsilon$, так что суммарный заряд равен нулю. Это — так

называемый *квадруполь*; его можно получить наложением двух ориентированных вдоль оси x диполей рассмотренного выше типа. Вообще функция h^{-n} соответствует *мультиполю* порядка 2^{n-1} с суммарным зарядом, равным нулю.

Рассматривая ту часть ряда Лорана, которая содержит отрицательные степени h и сходится вне меньшей окружности, приходим к выводу, что *заряды, содержащиеся внутри меньшей окружности, порождают поле, которое может быть представлено как линейное наложение полей, порожденных последовательностью мультиполей в точке a.* Подобную же интерпретацию допускает ряд, содержащий положительные степени h: поле, порожденное зарядами, лежащими вне большей окружности, может быть представлено как линейное наложение полей, порожденных мультиполями, находящимися в бесконечно удаленной точке. В § 10.3 это заключение будет распространено на трехмерное пространство.

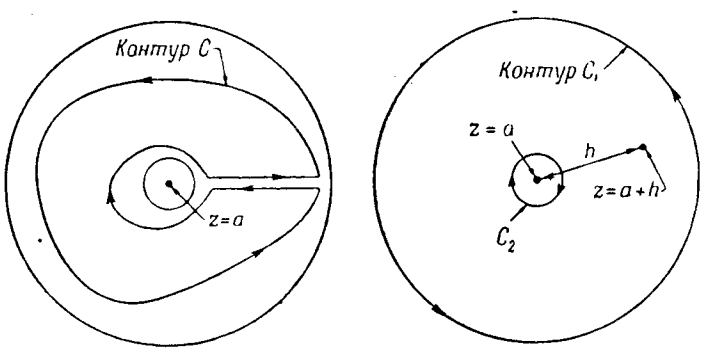

Рис. 4.7. Контуры, употребляемые при выводе ряда Лорана вблизи особенности $z=a$.

Неудивительно, что разложение в ряд Лорана невозможно тогда, когда заряды имеются и внутри рассматриваемой области, так как их действие нельзя свести к действию мультиполей, помещенных в точке $h=0$ и на бесконечности.

Изолированные особые точки. Выводы второй половины последнего пункта приводят к классификации типов изолированных особых точек, которые могут встретиться у аналитической функции. Если функция имеет изолированную особую точку, то эта последняя является центром некоторого круга, в котором других особых точек нет; таким образом, существует круг с выброшенным центром, внутри которого функция, будучи аналитической, допускает разложение в ряд Лорана. Из (4.3.4) следует, что если a — особая точка, то некоторые из коэффициентов a_n с отрицательными номерами n должны быть отличны от нуля. *Если неравный нулю коэффициент с наибольшим* (по абсолютной величине) *отрицательным номером есть a_{-N}, то говорят, что в точке a функция имеет полюс порядка N.* Таким образом, полюсы тесно связаны с мультиполями: полюс N-го порядка соответствует мультиполю порядка 2^{N-1}.

Если ряд отрицательных степеней в лорановском разложении функции f бесконечен, то $z=a$ называется существенно особой точкой этой функции. Известным примером служит функция $e^{1/z}$, имеющая существенно особую точку $z=0$; соответствующий ряд Лорана имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n!z^n)$. Если $z=a$ — существенно особая точка для $f(z)$, то она одновременно

является существенно особой точкой функции $1/f(z)$. Действительно, если бы точка $z=a$ *не* была существенно особой для $1/f$, то она, самое большее, была бы ее полюсом, скажем, порядка N, и тогда мы имели бы $1/f=\sum_{n=-N}^{\infty} b_n h^n$. Но при этом $f=h^N/\sum_{m=0}^{\infty} b_{m-N}h^m$, и так как функция $1/\sum b_{m-N}h^m$ аналитична внутри C_1, то разложение f в ряд по степеням h начиналось бы с h^N, что противоречит предположению. Иначе ведет себя $1/f(z)$ вблизи полюса функции $f(z)$: легко видеть, что полюс N-го порядка функции $f(z)$ будет *нулем* того же порядка функции $1/f(z)$.

На примере функции $e^{1/z}$ можно подметить еще одну важную черту в поведении функции вблизи существенно особой точки. Рассмотрим значения этой функции, когда z по различным путям приближается к началу. Например, если z стремится к нулю, принимая положительные действительные значения, то $e^{1/z}$ стремится к бесконечности, но если z принимает только отрицательные действительные значения, то $e^{1/z}$ при $z\to 0$ стремится к нулю. Если же z приближается к нулю, оставаясь на мнимой оси, то модуль рассматриваемой функции остается равным единице. Можно доказать (теорема Пикара), что в любой окрестности существенно особой точки функция принимает любое конечное значение, за исключением, быть может, одного. Так, например, функция $e^{1/z}$ нигде не обращается в нуль.

Мы видим, таким образом, что поведение функции вблизи существенно особой точки в высшей степени сложно. Существенно особыми точками обладают многие функции, встречающиеся в математических вопросах теории поля. Поэтому в каждом конкретном случае поведение этих функций вблизи таких точек должно быть тщательно исследовано.

Разложение в ряд Лорана применимо только вблизи изолированных особых точек однозначных аналитических функций. Но существуют особые точки, не являющиеся ни полюсами, ни существенно особыми. Например, функции $\sqrt{z}$ и $\ln z$ не разлагаются в ряды Лорана вблизи точки $z=0$. Обе они неоднозначны в окрестности точки $z=0$; если же мы попытаемся выделить однозначную аналитическую ветвь функции $\sqrt{z}$ или $\ln z$, то она непременно окажется разрывной вдоль некоторой линии (хотя бы вдоль отрицательной действительной полуоси), а поэтому $z=0$ не является для этих ветвей изолированной особой точкой. Такие особые точки (называемые *точками ветвления*) будут рассмотрены ниже в § 4.4, посвященном многозначным функциям.

Классификация функций; теорема Лиувилля. Функции с изолированными особыми точками мы можем теперь классифицировать по расположению и характеру их особых точек. Основную роль при этом будет играть *теорема Лиувилля*, которая гласит, что *функция, аналитическая при всех конечных значениях z и ограниченная во всей плоскости, есть постоянная*. Доказательство следует сразу из оценки для производной, получаемой в свою очередь из формулы

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz.$$

В качестве контура возьмем окружность радиуса R с центром в точке $z=a$, и пусть, согласно предположению, $|f(z)|\leqslant M$. Тогда

$$|f'(a)|\leqslant\frac{M}{2\pi R^2}2\pi R=\frac{M}{R}.$$

Положив теперь $R \to \infty$, мы получим, что $f'(a) = 0$, т. е. что функция $f(a)$ постоянна. Из этой теоремы следует, что малейшее отклонение аналитической функции $f(z)$ от постоянной на каком-либо участке комплексной плоскости неизбежно вызывает появление особой точки где-то в другом месте[1]). Таким образом, если функция гладко ведет себя на действительной оси и не постоянна, то она имеет особую точку вне действительной оси. Мы вновь замечаем тесную взаимосвязь между значениями аналитической функции на всей комплексной плоскости.

Подобным же приемом можно получить обобщение теоремы Лиувилля: *если функция $f(z)$ аналитична при всех конечных значениях z и $|f|$ возрастает не быстрее $|z|^k$, когда $z \to \infty$ (здесь k — целое число), то $f(z)$ представляет собой многочлен степени $\leqslant k$. В самом деле,*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

а значит, если $|f(z)| \simeq A|z|^k (z \to \infty)$, то

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!\,M}{R^n} \simeq An!\,R^{k-n},$$

где A = постоянная. Когда $R \to \infty$, правые части этих неравенств при $n > k$ стремятся к нулю. Следовательно,

$$f^{(n)}(a) = 0 \quad \text{при} \quad n > k,$$

и теорема доказана. (Если $A \neq 0$, то степень многочлена *точно равна* k.)

Многочлен степени $k > 0$ имеет особую точку на бесконечности[2]). Функции, аналитические в любой конечной области плоскости z, называются *целыми*. Например, многочлены являются целыми функциями. К тому же классу принадлежат и другие функции, важные для приложений, как-то e^z, $\cos z$, бесселева функция $J_n(z)$ порядка n и др. Ниже мы увидим, что аналитичность этих функций в конечных областях комплексной плоскости и наличие у них существенно особой точки на бесконечности находят свое отражение в геометрических свойствах систем координат, связанных с этими функциями (так, например, цилиндрическая система координат связана с бесселевыми функциями).

Мероморфные функции. Мы рассмотрели функции, всюду аналитические (они постоянны), и функции, аналитические всюду, кроме бесконечно удаленной точки (многочлены относительно z, e^z и др.). Следующий по сложности класс образуют функции, все особые точки которых (включая бесконечно удаленную, если она особая) являются полюсами. Можно показать, что любая такая функция является *рациональной*, т. е. представляет собой отношение двух многочленов.

Для доказательства заметим прежде всего, что каждая такая функция может иметь лишь *конечное* число полюсов. Действительно, если бы полюсов было бесконечно много, то существовала бы неизолированная особая точка (точка накопления полюсов), конечная или бесконечно удаленная, которая, следовательно, не была бы полюсом, что противоречит предположению. Итак, допустим, что $f(z)$ имеет N полюсов, причем n-й полюс находится в точке a_n и порядок его равен i_n. Тогда функция

$$G(z) = f(z) \prod_{n=1}^{N} (z - a_n)^{i_n}$$

[1]) Быть может, на бесконечности.—*Прим. ред.*

[2]) Поведение функции на бесконечности исследуется путем подстановки $z = 1/\zeta$ с последующим рассмотрением результата при $\zeta \to 0$. При этом, например, z^k преобразуется в функцию $(1/\zeta)^k$, для которой $\zeta = 0$ служит полюсом порядка k.

аналитична всюду, кроме, быть может, бесконечно удаленной точки. Независимо от того, является ли точка $z=\infty$ полюсом функции $f(z)$ или нет, $|G(z)|$ при $z\to\infty$ растет не быстрее, чем $|z|^k$, где k — некоторое целое положительное число, и, согласно нашей предыдущей теореме, $G(z)$ есть многочлен. Следовательно, $f(z)$ представляет собой отношение двух многочленов G и $\prod\limits_n (z-a_n)^{i_n}$, и теорема доказана.

К тому же выводу приводит рассмотрение электростатической аналогии: поле, порожденное каждым отдельным полюсом, может быть выражено в виде суммы конечного числа функций вида $A(z-a_n)^{-k}$. (Полюс в бесконечно удаленной точке создает поле, изображаемое многочленом от z.) Сложив все такие выражения, мы получим рациональную функцию.

Теперь мы можем обобщить понятие рациональной функции. Допустим, что все особые точки некоторой функции в заданной области комплексной плоскости являются полюсами. Такую функцию мы назовем *мероморфной* в этой области. Функцию, мероморфную во всей плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки, можно разложить на элементарные дроби точно так же, как рациональную функцию. Различие состоит в том, что, поскольку особых точек теперь может быть бесконечно много, мы получаем, вообще говоря, бесконечный ряд элементарных дробей. Выведем это разложение для того случая, когда все полюсы — первого порядка.

Пусть $f(z)$ — заданная функция, a_n — ее полюсы, занумерованные в порядке возрастания их расстояний от начала, и предположим, что $f(z)$ аналитична при $z=0$. Пусть $f(z)\simeq b_n/(z-a_n)$ при $z\to a_n$. Рассмотрим какую-либо окружность C_p радиуса R_p, внутри которой находятся p полюсов (предполагаем, что на самой окружности полюсов нет). Тогда функция

$$g_p(z)=f(z)-\sum_{n=1}^{p}\frac{b_n}{z-a_n} \tag{4.3.5}$$

аналитична внутри C_p. Взяв C_p в качестве контура интегрирования, получим

$$g_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{g_p(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{p}b_n\oint\frac{d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-a_n)}\,.$$

Сумма в последнем выражении, как легко видеть, равна нулю и, следовательно,

$$g_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Возьмем теперь последовательность окружностей C_p с радиусами $R_p\to\infty$. Ей будет соответствовать последовательность функций g_p, каждая из которых аналитична во все большей и большей области комплексной плоскости. Остается показать, что предел последовательности функций g_p представляет собой ограниченную функцию, и применить к ней теорему Лиувилля [1]). Легко видеть что

$$|g_p(z)|\leqslant\frac{M_pR_p}{R_p-R}\,,$$

где M_p — наибольшее значение $|f|$ на C_p и $R=|z|$.

---

[1]) Ни существование предела последовательности g_p, ни то, что этот предел представляет собой аналитическую функцию, в приведенном здесь доказательстве не установлено. — *Прим. перев.*

Может случиться, что M_p остается ограниченным при возрастании p. При этом $\lim\limits_{p\to\infty}|g_p(z)|$ ограничен, и, согласно теореме Лиувилля, функция $g=\lim\limits_{p\to\infty} g_p$ есть постоянная. Итак, в этом случае

$$f(z)=\text{постоянная}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z-a_n}.$$

Для того чтобы отыскать эту постоянную, положим $z=0$; мы вправе это сделать, поскольку в точке $z=0$ функция $f(z)$ аналитична. Тогда

$$f(z)=f(0)+\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{z-a_n}+\frac{b_n}{a_n}\right). \tag{4.3.6}$$

В том случае, когда $f(z)$ не ограничена на окружностях C_p при $p\to\infty$, иногда можно все же получить аналогичное выражение. Так, например, часто удается подобрать такую степень z, скажем z^n, что отношение $f(z)/z^n$ *ограничено* на рассматриваемых окружностях при $p\to\infty$; при этом $f(z)$ выражается в виде произведения ряда (4.3.6) на z^n.

Как уже указывалось, разложение (4.3.6) имеет простой электростатический смысл. Оно является также распространенной формой представления адмитанса динамической системы (см. стр. 287). В качестве таковой оно показывает, как система, имеющая много нормальных видов движения (например, струна), реагирует на воздействие возмущающей силы. Знаменатели $z-a_n$ в (4.3.6) соответствуют встречающимся резонансным знаменателям, постоянные b_n — влиянию пространственного распределения возмущающей силы на n-е нормальное колебание. В гл. 11 мы увидим приложение этих фактов к исследованию движения полей.

Рассмотрим пример применения формулы (4.3.6) к разложению функции в ряд частичных дробей. Возьмем функцию $f(z)=\operatorname{tg} z$. Полюсами ее служат точки $a_n=\pi(2n+1)/2$. Из соотношений

$$\operatorname{tg}\left[(z-a_n)+\frac{1}{2}(2n+1)\pi\right]=\operatorname{tg}\left(z-a_n+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}(z-a_n)\simeq-\frac{1}{z-a_n}$$
$$(z\to a_n)$$

мы обнаруживаем, что $b_n=-1$. Выберем последовательность окружностей с радиусами $p\pi$ (p — целое). На таких окружностях $\operatorname{tg} z$ ограничен для всех значений p и, согласно доказанной теореме,

$$\operatorname{tg} z=-\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-(2n+1)\pi/2}+\frac{1}{(2n+1)\pi/2}\right)=$$
$$=-\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-(2n+1)\pi/2}+\frac{1}{(2n+1)\pi/2)}\right)-$$
$$-\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+(2n+1)\pi/2}-\frac{1}{(2n+1)\pi/2}\right),$$

$$\operatorname{tg} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z}{[(2n+1)\pi/2]^2-z^2}. \tag{4.3.7}$$

Так как *логарифмическая производная* $f'(z)/f(z)$ *целой функции* $f(z)$ *есть функция мероморфная*, то с помощью формулы (4.3.6) можно представить *целую функцию* $f(z)$ в виде бесконечного произведения. В самом деле, в конечной части плоскости особыми точками, а именно полюсами функции $f'(z)/f(z)$ являются только нули a_n функции $f(z)$. Снова предположим для простоты, что все эти полюсы простые, т. е. что $f(z) \underset{z\to a_n}{\simeq} \text{const}\cdot(z-a_n)$; при этом

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{f'(0)}{f(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{d}{dz}\ln f(z),$$

откуда

$$\ln f(z)=\ln f(0)+\frac{f'(0)}{f(0)}z+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+\frac{z}{a_n}\right]$$

и

$$f(z)=f(0)\,e^{zf'(0)/f(0)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{z/a_n}. \tag{4.3.8}$$

Для того чтобы эта формула была применима, требуется, чтобы $f(z)$ была целой функцией, чтобы ее логарифмическая производная имела простые полюсы, отличные от 0, чтобы эта производная была ограничена на некоторой последовательности окружностей C_p и т. д.

Разложим в бесконечное произведение функцию $\sin z$; этим разложением мы часто будем пользоваться в дальнейшем. Так как $\sin z$ не удовлетворяет одному из требуемых условий, а именно обращается в нуль в точке $z=0$, то мы рассмотрим функцию $\sin z/z$. Последняя имеет логарифмическую производную $(z\operatorname{ctg} z-1)/z$, удовлетворяющую всем необходимым требованиям. Итак, $a_n=n\pi$, где $n\neq 0$, и

$$\frac{\sin z}{z}=\prod_{\substack{-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{z/n\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z}{n\pi}\right)^2\right]. \tag{4.3.9}$$

Подобные разложения можно получить и для других тригонометрических функций, а также для бесселевых функций $J_n(z)$.

Поведение степенного ряда на границе круга сходимости. В многих задачах нерационально (или невозможно) получать в замкнутом виде решение, являющееся аналитической функцией, и приходится довольствоваться представлением этого решения в виде степенного ряда. Последний имеет обычно конечный радиус сходимости, который можно найти, если известно выражение коэффициента общего члена или по каким-либо иным данным. Конечно, степенной ряд не полностью эквивалентен решению; внутри своего круга сходимости этот ряд совпадает с искомым решением, но вне этого круга понадобится новый ряд, сходящийся в некоторой другой области, и т. д. Как уже говорилось выше, дело обстоит так, как будто искомое решение приходится изображать с помощью клише, состоящего из разрозненных кусков, причем кусками являются как раз ряды, изображающие решение на отдельных участках плоскости и ничего не изображающие за пределами этих участков. А для того, чтобы отдельные куски клише могли быть хорошо пригнаны один к другому, мы

должны выяснить соотношение между решением и изображающим его степенным рядом на границе круга сходимости последнего.

Заранее очевидно, что исследование поведения степенного ряда на границе круга сходимости представляет собой чрезвычайно деликатную задачу, требующую для своего решения привлечения весьма тонких свойств аналитических функций. К счастью, формулировки соответствующих теорем достаточно понятны, и в этой книге нам нужны окончательные результаты, а не математические детали доказательств. Поэтому мы опустим здесь большинство выводов и сосредоточим свое внимание на выяснении содержания указанных теорем. Доказательства читатель найдет в учебниках, перечисленных в конце главы.

Итак, предположим, что решение некоторой задачи представлено степенным рядом вида

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n. \tag{4.3.10}$$

Прежде всего нужно отыскать *радиус сходимости* R этого ряда. Если коэффициент a_n общего члена известен, то, как вытекает из *признака сходимости Даламбера*,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{4.3.11}$$

(если только этот предел, конечный или бесконечный, существует). Предположим, что радиус сходимости конечен. Тогда, произведя изменение масштаба $\zeta = zR$, мы получим новый ряд

$$f(z) = \sum b_n z^n \quad (b_n = a_n R^n), \tag{4.3.12}$$

имеющий радиус сходимости, равный единице. Такая нормировка рассматриваемого ряда оказывается полезной.

Делать заключения о поведении $f(z)$ в заданной точке z единичной окружности, основываясь на поведении коэффициентов b_n при больших n, можно лишь с большой осторожностью. Так, если ряд (4.3.12) сходится или расходится в некоторой точке $z = e^{i\varphi}$, то отсюда не следует, что в этой точке $f(z)$ аналитична или неаналитична. Например, ряд $\sum(-z)^n$, представляющий при $|z| < 1$ функцию $1/(1+z)$, расходится в точке $z = 1$, хотя в этой точке $1/(1+z)$ аналитична. С другой стороны, точка $z = 1$ — особая для функции

$$-\int_0^z \ln(1-w)\,dw = 1 + (1-z)[\ln(1-z) - 1]$$

(хотя эта функция конечна при $z = 1$), но соответствующий ряд $\sum z^{n+1}/n(n+1)$ в точке $z = 1$ сходится. Существуют ряды, у которых $b_n \to 0$, расходящиеся во всех точках единичной окружности, и такие, которые сходятся в точке $z = 1$, а в остальных точках единичной окружности расходятся. Предостерегши таким образом читателя от поспешных заключений, посмотрим, что можно сказать об аналитических функциях и соответствующих рядах на границе кругов сходимости этих последних.

Сначала мы рассмотрим признаки, по которым можно судить, является ли заданная на границе круга сходимости точка особой или нет. Произведем преобразование поворота так, чтобы рассматриваемая точка заняла положение $z = 1$. Для решения поставленного вопроса полезны следующие две теоремы. Первая утверждает, что если ряды $f(z) = \sum b_n z^n$ и $g(z) =$

$= \sum \operatorname{Re} b_n \cdot z^n$ имеют радиусы сходимости, равные 1, и если $\operatorname{Re} b_n \geqslant 0$, то $z=1$ является особой точкой функции $f(z)$. Другими словами, если аргумент точки z на границе круга сходимости таков, что в этой точке все члены ряда имеют неотрицательные действительные части, то такая точка особая для $f(z)$.

Так, применяя эту теорему к упомянутой выше функции $f=\sum z^{n+1}/n(n+1)$, обнаруживаем, что $z=1$ является особой точкой функции f, несмотря на то, что ряд, изображающий эту функцию, сходится при $z=1$. В точке $z=1$ естественно ожидать осложнений, так как все коэффициенты положительны и ряд, изображающий производную функции f, расходится.

Заметим, что если, согласно указанному признаку, $z=1$ является особой точкой, то точки $z=e^{i\varphi}$, где φ мало, но отлично от нуля, могут не быть особыми; действительно, положив $z=Ze^{i\varphi}$, найдем, что $f(z)=\sum B_n Z^n$, где $B_n=b_n e^{in\varphi}$, и действительная часть коэффициента B_n получит множитель $\cos n\varphi$.

Более сильный признак дается следующей теоремой: *Если* $C_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} b_m$, *то для того, чтобы точка* $z=1$ *была особой для функции* $\sum b_n z^n$, *необходимо и достаточно, чтобы при* $n \to \infty$ *величина* $|C_n|^{-1/n}$ *не становилась меньше* $1/2$[1]. Например, для ряда $\sum (-z)^n$, где $b_n=(-1)^n$, точка $z=1$ не является особой. Для ряда $\sum z^n$, с другой стороны, $C_n=2^n$ и $\lim |2^n|^{-1/n}=1/2$, так что $z=1$ — особая точка. Более драматичен пример $f=\sum (n+1)(n+2)(-z)^n$ [этот ряд изображает функцию $2/(1+z)^3$], в котором $b_n=(-1)^n(n+1)(n+2)$ и, следовательно, ряд заведомо расходится при $z=1$, но $C_n=0$ для номеров $n>2$, так что f аналитична в точке $z=1$.

Найдя радиус сходимости и выяснив расположение особых точек на границе круга сходимости, полезно было бы получить общее представление о поведении $f(z)$ на всей границе, в частности на ее части, заполненной особыми точками. Здесь полезна следующая теорема: *Если* $f(z)=\sum b_n z^n$ *и* $g(z)=\sum C_n z^n$, *где* $\operatorname{Re} b_n \geqslant 0$, $\operatorname{Re} C_n \geqslant 0$, $\operatorname{Im} b_n \geqslant 0$, $\operatorname{Im} C_n \geqslant 0$, *и если* $b_n \simeq DC_n$ *при* $n \to \infty$ (D — *постоянная*), *то* $f(z) \simeq Dg(z)$ *при* $|z| \to 1$.

Следует заметить, что условие $\operatorname{Re} b_n \geqslant 0$, $\operatorname{Re} C_n \geqslant 0$ можно немного ослабить, потребовав, чтобы $\operatorname{Re} b_n$ и $\operatorname{Re} C_n$ при достаточно больших n не меняли знака; то же относится и к $\operatorname{Im} b_n$, $\operatorname{Im} C_n$.

Попросту говоря, эта теорема утверждает, что если n-е члены степенных рядов, изображающих функции f и g, одинаково ведут себя при больших n, то обе функции имеют одни и те же особые точки. С помощью этой теоремы удается получить некоторые сведения об асимптотическом поведении коэффициента b_n. Например, мы можем утверждать, что если $b_n \simeq Dn^{p-1}/(p-1)!$ $(n \to \infty)$, то $f(z) \simeq D/(1-z)^p$ при $|z| \to 1$. Для доказательства[2]) достаточно установить, что коэффициент C_n разложения $\sum C_n z^n = (1-z)^{-p}$ асимптотически совпадает с $n^{p-1}/(p-1)!$. Но последнее

---

[1]) Точная формулировка этого условия такова: $z=1$ является особой точкой тогда, и только тогда, когда *нижний предел* последовательности $\{|G_n|^{-1/n}\}$ равен $1/2$. — *Прим. перев.*

[2]) Наше доказательство относится лишь к случаю целого $p>0$. Его можно обобщить и на нецелые p, заменив факториалы соответствующими значениями гамма-функции (последняя рассматривается ниже в этой главе).

утверждение вытекает из равенства

$$(1-z)^{-p}=\sum\frac{(n+1)\ldots(n+p-1)}{(p-1)!}z^n.$$

В качестве второго примера рассмотрим гипергеометрическую функцию. Эта функция, которую мы подробно изучим в гл. 5, определяется формулой

$$F(a,\ b\,|\,c\,|\,z)=1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}+\ldots.$$

Известно, что точка $z=1$ является для нее особой. Общий член ряда имеет коэффициент

$$b_n=\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)\,b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!\,c(c+1)\ldots(c+n-1)}.$$

Взяв целые a, b, c и предполагая, что $a+b>c\geqslant b>0$, получим

$$b_n=\frac{(c-1)!}{(b-1)!\,(a-1)!}\frac{(a+n-1)!\,(b+n-1)!}{n!\,(c+n-1)!}=$$

$$=\frac{(c-1)!}{(b-1)!\,(a-1)!}\frac{(n+1)\ldots(a+n-1)}{(b+n)\ldots(c+n-1)}\simeq\frac{(c-1)!}{(b-1)!\,(a-1)!}n^{a+b-c-1},$$

откуда можно заключить, что при $c<a+b$

$$F(a,\ b\,|\,c\,|\,z)\simeq\frac{(c-1)!\,(a+b-c-1)!}{(b-1)!\,(c-1)!}\frac{1}{(1-z)^{a+b-c}}\quad(z\to 1).$$

Выше мы привели пример ряда $f=\sum z^{n+1}/n(n+1)$, сходящегося в точке $z=1$, которая является особой для f, хотя f при $z=1$ конечна. Спрашивается, равна ли сумма ряда $s=\sum 1/n(n+1)$ значению f в точке $z=1$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, принадлежащая Литтльвуду: *Если $f(z)\to s$, когда $z\to 1$ вдоль некоторой гладкой кривой, и числа $n\,|\,a_n\,|$ ограничены, то $\sum a_n$ сходится к s.* В нашем примере

$$\sum\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{z\to 1}\{1+(1-z)[\ln(1-z)-1]\}=1;$$

в этом можно убедиться, непосредственно рассмотрев сам ряд.

Из приведенных здесь теорем ясно, что, зная разложение функции в степенной ряд, можно получить довольно полное представление о поведении функции на границе круга сходимости представляющего ее ряда. Можно ли использовать этот ряд для выяснения поведения функции вне круга сходимости? Этому вопросу посвящен следующий пункт; ответ при некоторых достаточно слабых ограничениях оказывается утвердительным.

Аналитическое продолжение. Часто случается, что некоторая функция появляется в таком представлении, которое имеет смысл лишь в ограниченных участках комплексной плоскости. Так, например, мы уже не раз подчеркивали, что степенной ряд с конечным радиусом сходимости непосредственно не дает сведений о поведении изображаемой им функции вне круга сходимости. Часто встречается другой случай, когда функция представляется интегралом, сходящимся не при всех значениях ее аргу-

мента. Например, интеграл

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,dt$$

представляет функцию $1/z$ лишь при $\operatorname{Re} z > 0$. Однако иногда удается, сравнив ряд или интеграл с каким-либо другим представлением функции, определить функцию за пределами той области, в которой действует первоначально заданное представление. Так, например, исходя из ряда $f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots$, сходящегося при $|z| < 1$, можно найти значения $f(z)$ в круге $|z| < 1$ и отождествить f с $1/(1-z)$, причем последнее выражение определено и при $|z| > 1$.

Такого рода действия (а также их результат) называются *аналитическим продолжением* функции. Получающаяся в результате последовательного продолжения функция оказывается (в большинстве случаев) определенной на всей комплексной плоскости независимо от того, где она была первоначально определена. Но бывает и так, что функцию невозможно продолжить за пределы некоторой конечной области. При этом граница такой области называется *естественной границей* функции, а сама область — *естественной областью существования* функции.

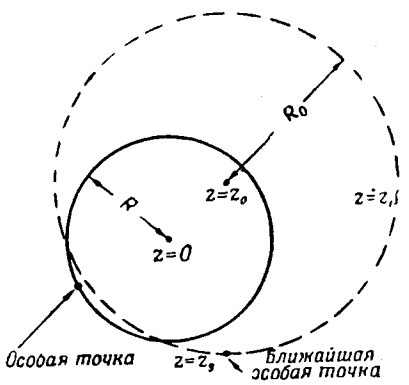

Рис. 4.8. Аналитическое продолжение посредством степенных рядов (сначала $\sum a_n z^n$, затем $\sum b_n (z-z_0)^n$ и т. д.).

Предположим, например, что функция f задана в окрестности точки $z = 0$ степенным рядом, имеющим радиус сходимости R, и пусть на границе круга сходимости имеется только одна особая точка функции f. Можно следующим образом распространить эту функцию за пределы круга радиуса R. Заметим, что в любой точке z, лежащей внутри круга сходимости ($|z| < R$), можно вычислить не только f, но и значения всех ее производных, так как производные имеют ту же область аналитичности, что и f, и изображающие их степенные ряды имеют тот же радиус сходимости. Вычислив производные в некоторой точке $z = z_0$, составим ряд Тейлора

$$f = \sum_n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \tag{4.3.13}$$

Его радиус сходимости R_0 равен расстоянию от z_0 до ближайшей особой точки $z = z_s$ (которая не обязательно лежит на окружности $|z| = R$). Соответствующий круг сходимости радиуса R_0 изображен прерывистой линией на рис. 4.8. Этот процесс можно продолжить, взяв в качестве исходной новую точку, например $z = z_1$, не обязательно лежащую в первоначальном круге, и построив новый ряд, подобный (4.3.13). Продолжая действовать таким образом, мы с помощью последовательности рядов с перекрывающимися областями сходимости получим значения f во всей комплексной плоскости, за исключением, разумеется, особых точек.

Это построение заведомо осуществимо, если на границе круга сходимости имеется только одна особая точка z_s. Если же особые точки располагаются всюду плотно на окружности или на какой-либо другой замкнутой кривой, то продолжить функцию за эту кривую невозможно. Так обстоит дело с функциями, имеющими естественную границу.

У читателя естественно возникает вопрос о единственности продолжения. В самом деле, если функция продолжена, как только что описано, из одного участка плоскости в другой вдоль двух различных путей, то будут ли ее значения и значения ее производных, полученные в конечном участке, одинаковы в обоих случаях? Читатель спросит далее, получится ли один и тот же результат, если применять различные приемы аналитического продолжения? Сейчас мы попытаемся ответить на эти вопросы.

Основные теоремы. Наиболее полезная теорема, служащая для разрешения этих вопросов, состоит в том, *что если функция аналитична в некоторой области и равна нулю вдоль какой-либо дуги непрерывной кривой, лежащей в этой области, то эта функция тождественно равна нулю в рассматриваемой области.* В самом деле, если условия этой теоремы выполнены, то в любой точке рассматриваемой кривой можно вычислить все производные функции f, и все они оказываются равными нулю. Все члены соответствующего ряда Тейлора будут равны нулю, и в его круге сходимости f будет тождественно равна нулю. Возьмем теперь какую-либо дугу внутри круга сходимости, образуем новый ряд Тейлора и продолжим это построение, оставаясь все время внутри области аналитичности. Таким образом, наше заключение о том, что $f \equiv 0$, оказывается верным в любой точке этой области.

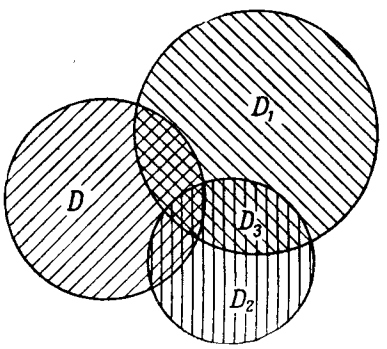

Рис. 4.9. Независимость аналитического продолжения от пути. Если пересечение D_3 областей D_1 и D_2 пересекается с D, то между этими тремя областями нет особых точек и $f_1 = f_2 = f_3$.

Эта замечательная теорема еще раз показывает глубокую взаимосвязь между поведением аналитической функции в различных частях комплексной плоскости. Например, из нее вытекает, что если две аналитические функции совпадают на какой-нибудь дуге кривой (сколь угодно малой, но не сводящейся к единственной точке), то они совпадают в их общей области аналитичности.

Теперь мы можем доказать основную теорему единственности аналитического продолжения. *Если функции f_1 и f_2 соответственно в областях D_1 и D_2 получены аналитическим продолжением функции f, заданной первоначально в области D, и если область D_3, общая часть областей D_1 и D_2, перекрывается с D, то $f_1 = f_2$ в области D_3* (см. рис. 4.9). Эта теорема дает утвердительный ответ на первый из поставленных выше вопросов, по крайней мере (как это видно из формулировки теоремы) при некоторых дополнительных ограничениях. Она немедленно вытекает из предыдущей теоремы, так как функция $f_1 - f_2$, будучи аналитической в области D_3 и равной нулю в той ее части, которая заключена в D, тождественно равна нулю в D_3. Таким образом, в точках области D_3 мы получим одни и те же значения f_1 и f_2, каким бы путем мы ни продолжали функцию f.

Однако это доказательство существенно основывается на том, что область D_3 перекрывается с областью D. В противном случае теорема единственности может нарушаться. Иначе говоря, *если функция f продолжена из точки z_0 в точку z_1 вдоль двух различных путей и в результате в точке z_1 получены два различных значения функции, то между обоими путями содержится особая точка функции $f(z)$.*

Последняя теорема очевидным образом следует из того факта, что круг сходимости степенного ряда простирается до ближайшей особой точки функции, изображаемой этим рядом. Если бы между двумя выбранными путями не было особых точек функции $f(z)$, то, осуществляя продолжение посредством степенных рядов, мы заполнили бы всю эту область их кругами сходимости и получили бы перекрытия, требуемые теоремой единственности. Значения $f(z_1)$ при том и другом продолжении были бы равны, что противоречит нашему предположению. Следовательно, в условиях теоремы где-то между двумя путями, вдоль которых продолжается функция, есть особая точка.

Точки ветвления. Заметим, что последняя теорема *не* утверждает, что при наличии особой точки между двумя путями продолжения *непременно* получатся различные значения функции. Такое расхождение обусловливается лишь особыми точками определенного типа! Рассмотрению таких случаев мы посвятим несколько пунктов. Ясно, что, желая учесть те случаи, когда различные пути продолжения приводят к различным значениям $f(z)$ в точке z_1, мы должны как-то обобщить понятие аналитической функции, чтобы охватить все такие значения. Мы условимся теперь понимать под аналитической функцией не только функцию в том виде, как она задана первоначально в некоторой области, но и все ее аналитические продолжения, независимо от однозначности или неоднозначности результатов. Если всевозможные аналитические продолжения приводят в любой точке z к одному и тому же значению $f(z)$, то полученная функция f называется *однозначной*, в противном случае — *многозначной*. В силу предыдущей теоремы многозначные функции имеют особые точки, обладающие тем свойством, что аналитическое продолжение по различным путям, охватывающим эти особые точки, приводит к неоднозначным результатам.

Такие особые точки называются *точками ветвления*, а различные совокупности значений, полученных посредством аналитического продолжения, — *ветвями* аналитической функции. Более детальное определение точки ветвления и примеры, поясняющие это понятие, будут даны в следующем параграфе, целиком посвященном многозначным функциям. Здесь достаточно будет сказать, что многозначные функции естественно возникают при рассмотрении аналитического продолжения и что всевозможные значения функции в заданной точке могут быть получены посредством аналитического продолжения вдоль путей, обвивающих точки ветвления должное число раз.

Приемы аналитического продолжения. Обратимся теперь ко второму вопросу, относящемуся к единственности: будут ли результаты аналитического продолжения функции зависеть от того, каким приемом это продолжение осуществлено? *Отрицательный* ответ на этот вопрос вытекает непосредственно из основной теоремы, приведенной на стр. 369. Любые два метода дадут, разумеется, тождественные значения в исходной области задания функции. Одинаковые значения, в силу приведенной выше теоремы, получатся поэтому в любой области, перекрывающейся с исходной. Повторяя это рассуждение на каждом этапе продолжения, мы докажем наше утверждение.

Эти три теоремы единственности являются основными в теории аналитического продолжения. Однако с точки зрения приложений наиболее важной была бы теорема, позволяющая решить, является ли функция f_2 аналитическим продолжением функции f_1. Использовать мы будем обычно не метод степенных рядов, но любой метод, естественный для той или иной

конкретной задачи. Любой прием опирается на следующую теорему: *Если f_1 и f_2 — аналитические функции соответственно в областях D_1 и D_2 и если они совпадают на общей части этих областей, то функции f_1 и f_2 представляют собой аналитические продолжения одна другой.*

Справедливость этой теоремы обусловлена тем, что в силу аналитичности f_1 и f_2 аналитическое продолжение с общей части областей D_1 и D_2 на их неперекрывающиеся участки можно осуществить, начав с одного и того же степенного ряда. Фактически области D_1 и D_2, о которых идет речь в теореме, могут пересекаться лишь по некоторой линии, служащей их общей границей. Покажем, что *если f_1 аналитична в D_1,*

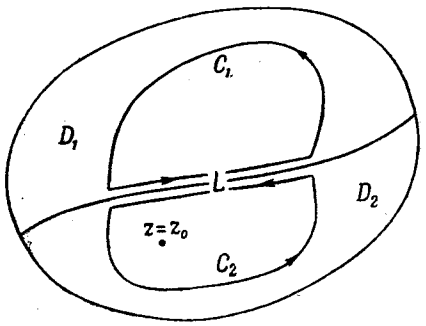

Рис. 4.10. Продолжение контурного интеграла, охватывающего точку $z=z_0$.

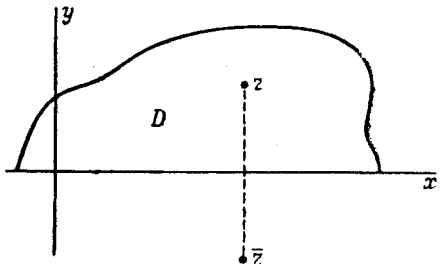

Рис. 4.11. Аналитическое продолжение посредством отражения относительно действительной оси.

а f_2 аналитична в D_2 и если f_1 и f_2 совпадают и непрерывны на общей границе C областей D_1 и D_2, то f_2 является аналитическим продолжением функции f_1 в область D_2, а f_1 — аналитическим продолжением f_2 в область D_1.

Для доказательства мы установим, что функция f, равная f_1 в D_1 и f_2 в D_2, аналитична во всей области D_1+D_2 (см. рис. 4.10), а из этого уже будет следовать, что f_2 служит продолжением функции f_1. Возьмем какую-либо точку z_0 в D_2. В силу свойств интеграла Коши

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_2+L}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_1+L}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Сложив эти равенства, получим

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_1+C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,$$

так как интегралы вдоль L в силу совпадения f_1 и f_2 на L взаимно уничтожаются. C_1+C_2 представляет собой замкнутый контур. Воспользовавшись приемом, которым были получены формулы (4.3.1), можно вычислить производные функции f в точке z_0. Так как эти производные существуют, функция f аналитична в точке z_0. В силу непрерывности функции f, последняя формула остается справедливой также тогда, когда z_0 находится на L, и теорема доказана.

Продолжим описание методов аналитического продолжения. Мы ознакомимся с методами двух типов: методы первого типа основаны на функ-

циональных соотношениях, которым подчиняется продолжаемая функция; методы второго типа — на непосредственных преобразованиях степенных рядов. Рассмотрим два метода первого типа. Первый из них вытекает из *принципа отражения Шварца* и основывается на функциональном соотношении $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$. *Если функция $f(z)$ аналитична в области D, которую пересекает действительная ось, и $f(z)$ на действительной оси принимает действительные значения, то сопряженным значениям z соответствуют сопряженные значения $f(z)$.* Иначе говоря, $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$ (см. рис. 4.11). Для доказательства разложим $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности какой-либо точки a действительной оси. В силу того, что значения $f(z)$ действительны на действительной оси, все коэффициенты этого ряда Тейлора также действительны. Итак, $f(z)=\sum a_n(z-a)^n$ с действительными a_n. Отсюда $\overline{f(z)}=\sum a_n(\bar{z}-a)^n=f(\bar{z})$, и теорема доказана. Правда, она доказана лишь для точек, лежащих внутри круга сходимости выбранного ряда, но при помощи аналитического продолжения ее можно распространить на любые неособые точки, сопряженные каким-либо точкам области D. Таким образом, образование функции, сопряженной к f, непосредственно продолжает аналитическую функцию из области, примыкающей к действительной оси сверху, в область, лежащую по другую сторону действительной оси. Этот метод можно обобщить на тот случай, когда вместо действительной оси берется любая прямая линия. Но формулировать это обобщение не стоит, так как всегда можно повернуть упомянутую прямую так, чтобы она совпала с действительной осью, и после этого применить уже доказанную теорему.

Второй метод основывается на явных функциональных соотношениях, таких, как теоремы сложения или рекуррентные соотношения. Простым примером может служить формула сложения $f(z_1+z_2)=f(z_1)f(z_2)$, которой, очевидно, подчиняется показательная функция. Если бы f была задана лишь в некоторой ограниченной области, то, складывая координаты всевозможных точек этой области и применяя указанную формулу сложения, мы смогли бы определить f вне исходной области. Менее тривиальный пример встречается в теории гамма-функции. Гамма-функция часто определяется как интеграл

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt, \tag{4.3.14}$$

который сходится только при $\operatorname{Re} z>0$, так что $\Gamma(z)$ оказывается определенной лишь в правой полуплоскости. Из (4.3.14), интегрируя по частям, получаем соотношение, связывающее значения $\Gamma(z)$ и $\Gamma(z+1)$,

$$z\Gamma(z)=\Gamma(z+1). \tag{4.3.15}$$

С помощью соотношения (4.3.15) функцию $\Gamma(z)$ можно продолжить на полуплоскость $\operatorname{Re} z<0$. Действительно, $\Gamma(z)$ задана в области $x>0$ (см. рис. 4.12); зададим $\Gamma(z)$ посредством равенства (4.3.15) в полосе $-1/2<x<1/2$. Вновь полученная и заданная первоначально аналитические функции оказываются определенными в перекрывающихся областях, а следовательно, первая служит аналитическим продолжением второй в области, где $x<0$.

Теперь рассмотрим методы непосредственного преобразования степенных рядов. Метод продолжения с помощью степенных рядов, при всей его важности в теоретическом отношении, практически весьма громоздок, поэтому прибегать к нему в конкретных задачах следует лишь в крайнем случае. Если не удается воспользоваться какими-либо функциональными

соотношениями, можно обратиться к методу Эйлера. Этот метод состоит в том, что ряд по степеням z (расходящийся при $z=-1$) преобразуется в ряд по степеням переменной

$$\zeta=\frac{z}{1+z}. \tag{4.3.16}$$

При этом, если первоначальный ряд при $z=1$ расходился или сходился медленно, то новый ряд в соответствующей точке $\zeta=1/2$ может оказаться достаточно быстро сходящимся. Поскольку оба ряда имеют одинаковую сумму в области их общей сходимости, ряд по степеням ζ является аналитическим продолжением ряда по степеням z.

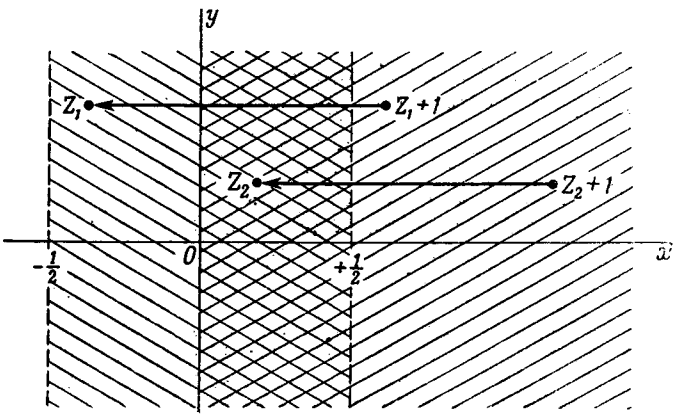

Рис. 4.12. Аналитическое продолжение гамма-функции с помощью рекуррентного соотношения (4.3.15).

Рассмотрим это преобразование, приводящее к степенному ряду относительно ζ. Преобразование Эйлера удобнее всего применять к знакопеременным рядам вида

$$f(z)=\sum(-1)^n a_n z^n. \tag{4.3.17}$$

Ограничиваясь значениями z, лежащими внутри круга сходимости этого ряда, умножим обе части равенства на $1+z$; перегруппировав члены справа, получим

$$(1+z)f(z)=a_0+z\sum(a_n-a_{n+1})(-1)^n z^n.$$

Здесь полезно воспользоваться обозначениями, которые мы будем снова применять при изучении исчисления конечных разностей. Положим

$$\delta a_n=a_n-a_{n+1}. \tag{4.3.18}$$

Повторяя эту операцию, получим

$$\delta(\delta a_n)=\delta^2 a_n=a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}$$

и, вообще,

$$\delta^{(q)}a_n=\sum_{p=0}^{q}(-1)^p\binom{q}{p}a_{n+p}, \tag{4.3.19}$$

где $\binom{q}{p}=\frac{q!}{p!\,(q-p)!}$ — биномиальные коэффициенты, так что $(1+x)^q=$

$= \sum_p \binom{q}{p} x^p$. Воспользовавшись этими обозначениями, можно написать

$$f(z) = \frac{a_0}{1+z} + \zeta \sum_{n=0}^{\infty} (\delta a_n)(-1)^n z^n. \tag{4.3.20}$$

Применяя к коэффициенту при ζ в (4.3.20) тот же прием, каким было получено само это выражение, получаем

$$f(z) = \frac{a_0}{1+z} + \frac{\zeta \delta a_0}{1+z} + \zeta^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\delta^2 a_n)(-1)^n z^n.$$

Продолжая это преобразование, приходим к формуле

$$f(z) = \frac{1}{1+z}(a_0 + \zeta \delta a_0 + \zeta^2 \delta^2 a_0 + \ldots). \tag{4.3.21}$$

Продемонстрируем силу этого преобразования на каких-нибудь простых примерах. Первым рассмотрим ряд

$$\ln(1+z) = z\left(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^3 + \ldots\right). \tag{4.3.22}$$

Этот ряд имеет радиус сходимости, равный 1, и при z, близких к 1, сходится чрезвычайно медленно. Вычислим коэффициенты $\delta^{(n)} a_0$:

n	a_n	δa_n	$\delta^2 a_n$	$\delta^3 a_n$	...
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	...
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	.	...
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	.	.	...
.	.	.	.	.	...

Преобразованный ряд имеет вид

$$\ln(1+z) = \frac{z}{1+z}\left[1 + \frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{3}\zeta^2 + \ldots\right]; \tag{4.3.23}$$

это равенство нетрудно проверить непосредственно. Ряд в (4.3.23) сходится при $|\zeta| < 1$, т. е. при $(x^2+y^2)/[(1+x)^2+y^2] < 1$, последнее же неравенство, коль скоро $x > -1/2$, выполняется при любом y. Таким образом, мы получили аналитическое продолжение функции в полуплоскость $x > -1/2$.

Далее рассмотрим пример, обсуждавшийся выше на стр. 366, в котором $a_n = n(n+1)$. Из таблицы

n	a_n	δa_n	$\delta^2 a_n$	$\delta^3 a_n$	...
0	0	−2	2	0	...
1	2	−4	2	0	...
2	6	−6	2	0	...
3	12	−8	2	0	...
...	...	...	...	...	...

мы заключаем, что все разности порядков >2 равны нулю, а поэтому преобразованный ряд обрывается и

$$f(z)=\frac{1}{1+z}[-2\zeta+2\zeta^2]=-\frac{2z}{(1+z)^3}.$$

Заметим, что исходный ряд расходился при $z=1$. В этом примере преобразование Эйлера дает выражение $f(z)$ в замкнутой форме, и, следовательно, $f(z)$ оказывается продолженной на всю комплексную плоскость.

Преобразование Эйлера допускает различные обобщения. Быть может, наиболее важное из них устанавливает соотношение между функциями

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{и} \quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n b_n z^n. \tag{4.3.24}$$

Функция g считается заданной, и мы попытаемся связать между собой f и g, основываясь на выражении коэффициентов b_n через производные функции $g(z)$. Записав f в виде

$$f=C_0 g(z)+\sum_{1}^{\infty} b_n (C_n-C_0) z^n,$$

мы исключим b_0. Коэффициент b_1 можно исключить, заметив, что $g'=\sum_{1}^{\infty} n b_n z^{n-1}$. Тогда

$$f=C_0 g+(C_1-C_0) z g'+\sum_{2}^{\infty} b_n [(C_n-C_0)-n(C_1-C_0)] z^n.$$

Продолжая эти преобразования, окончательно получаем

$$f=C_0 g-(\delta C_0) z g'+\frac{(\delta^2 C_0) z^2}{2!} g''-\ldots . \tag{4.3.25}$$

Полученное преобразование сводится к преобразованию Эйлера (4.3.21) в том случае, когда $g=1/(1+z)$. Важное обобщение формулы (4.3.21) получается при $g=1/(1+z)^p$. Формула (4.3.25) принимает в этом случае вид

$$f=\frac{1}{(1+z)^p}\left(C_0+p(\delta C_0)\zeta+\frac{p(p+1)}{2!}(\delta^2 C_0)\zeta^2+\ldots\right), \tag{4.3.26}$$

где

$$f=C_0-C_1 p z+\frac{C_2 p(p+1) z^2}{2!}+\ldots, \quad \zeta=\frac{z}{1+z}.$$

Формулы (4.3.25) и (4.3.26) применимы во многих важных случаях.

Заметим, что формула (4.3.25) представляет $f(z)$ в замкнутой форме всякий раз, когда ряд в правой части обрывается, а это имеет место, если C_n являются многочленами относительно n. Значительного упрощения можно достигнуть также тогда, когда g удовлетворяет какому-либо дифференциальному уравнению, с помощью которого все ее производные могут быть выражены через конечное число младших производных. В качестве иллюстрации возьмем $g=\cos z=\sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ [т. е. положим $b_{2n}=(-1)^n/(2n)!$, $b_{2n+1}=0$] и $C_n=n^2$. Тогда $f=\sum_n (-1)^n \frac{(2n)^2}{(2n)!} z^{2n}$ и, согласно формуле (4.3.25),

$$f=-z\sin z-z^2\cos z,$$

в чем нетрудно убедиться непосредственно.

Рассмотрим более сложный пример, применив формулу (4.3.26) к гипергеометрической функции от $-z$

$$f = 1 - \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} - \ldots . \tag{4.3.27}$$

Пусть p в формуле (4.3.26) равно a. Тогда, положив $C_0 = 1$, $C_1 = b/c$, $C_2 = b(b+1)/c(c+1)$ и т. д., мы получим из (4.3.26)

$$f = \frac{1}{(1+z)^a} \left[1 + \frac{a(c-b)}{c} \zeta + \frac{a(a+1)(c-b)(c-b+1)}{c(c+1)} \frac{\zeta^2}{2!} + \ldots \right] . \tag{4.3.28}$$

Выражение в квадратных скобках есть некоторая другая гипергеометрическая функция от $z/(1+z)$. Кругом сходимости полученного ряда является $|\zeta| < 1$, и ему в плоскости z соответствует область $x > -1/2$. Таким образом, формула (4.3.28) в отличие от (4.3.27) позволяет вычислять значения заданной гипергеометрической функции вне круга $|z| \leqslant 1$.

Существенное обобщение метода Эйлера принадлежит Барнесу; здесь сумма заменяется интегралом в комплексной плоскости от функции, полюсы которой подбираются так, чтобы интегральная формула Коши приводила к требуемому ряду. В этом методе используются свойства гамма-функции, и потому мы отложим его изложение до § 4.6.

4.4. Многозначные функции

Вопросы теории функций комплексного переменного, рассмотренные до сих пор, почти полностью относились к однозначным функциям, которые, по определению, заданы при каждом данном z однозначно. Теперь, переходя к изучению многозначных функций, мы должны заново рассмотреть многие теоремы (прежде всего теорему Коши и интеграл Коши). Важно отметить, что большинство функций из тех, которые встретятся нам в этой книге, либо сами многозначны, либо имеют многозначные обратные функции.

Полезно сначала наметить основные понятия, рассмотрев типичный пример

$$f(z) = z^{1/2}. \tag{4.4.1}$$

Положим $z = re^{i\varphi}$ и $f(z) = Re^{i\theta}$, тогда

$$R = r^{1/2}, \quad \theta = \frac{1}{2}\varphi. \tag{4.4.2}$$

Эта функция многозначна. В самом деле, положение точки z на плоскости можно задать координатами r, φ и, в то же время, координатами r, $\varphi + 2\pi$, и соответственно этому мы получаем два значения функции $f(z)$:

$$f_1 = r^{1/2} e^{i\varphi/2}, \quad f_2 = r^{1/2} e^{i(\varphi+2\pi)/2} = -r^{1/2} e^{i\varphi/2}. \tag{4.4.3}$$

Причина полученной здесь многозначности лежит в том хорошо известном факте, что квадратный корень из положительного числа может быть взят со знаком + или −. Если вместо $1/2$ взять показатель $1/4$, то для любого $z \neq 0$ мы получим четыре различных значения функции:

$$(z^{1/4})_1 = r^{1/4} e^{i\varphi/4}, \quad (z^{1/4})_2 = e^{i\pi/2}(r^{1/4} e^{i\varphi/4}) = e^{i\pi/2}(z^{1/4})_1,$$

$$(z^{1/4})_3 = e^{i\pi}(z^{1/4})_1, \quad (z^{1/4})_4 = e^{3i\pi/2}(z^{1/4})_1.$$

Если же z возводится в степень π (или в какую-либо другую иррациональную степень), то получается бесконечное множество значений, отли-