

Рассмотрим более сложный пример, применив формулу (4.3.26) к гипергеометрической функции от $-z$

$$f = 1 - \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} - \dots . \quad (4.3.27)$$

Пусть p в формуле (4.3.26) равно a . Тогда, положив $C_0 = 1$, $C_1 = b/c$, $C_2 = b(b+1)/c(c+1)$ и т. д., мы получим из (4.3.26)

$$f = \frac{1}{(1+z)^a} \left[1 + \frac{a(c-b)}{c} \zeta + \frac{a(a+1)(c-b)(c-b+1)}{c(c+1)} \frac{\zeta^2}{2!} + \dots \right]. \quad (4.3.28)$$

Выражение в квадратных скобках есть некоторая другая гипергеометрическая функция от $z/(1+z)$. Кругом сходимости полученного ряда является $|\zeta| < 1$, и ему в плоскости z соответствует область $x > -1/2$. Таким образом, формула (4.3.28) в отличие от (4.3.27) позволяет вычислять значения заданной гипергеометрической функции вне круга $|z| \leq 1$.

Существенное обобщение метода Эйлера принадлежит Барнесу; здесь сумма заменяется интегралом в комплексной плоскости от функции, полюсы которой подбираются так, чтобы интегральная формула Коши приводила к требуемому ряду. В этом методе используются свойства гамма-функции, и потому мы отложим его изложение до § 4.6.

4.4. Многозначные функции

Вопросы теории функций комплексного переменного, рассмотренные до сих пор, почти полностью относились к однозначным функциям, которые, по определению, заданы при каждом данном z однозначно. Теперь, переходя к изучению многозначных функций, мы должны заново рассмотреть многие теоремы (прежде всего теорему Коши и интеграл Коши). Важно отметить, что большинство функций из тех, которые встречаются нам в этой книге, либо сами многозначны, либо имеют многозначные обратные функции.

Полезно сначала наметить основные понятия, рассмотрев типичный пример

$$f(z) = z^{1/2}. \quad (4.4.1)$$

Положим $z = re^{i\varphi}$ и $f(z) = Re^{i\theta}$, тогда

$$R = r^{1/2}, \quad \theta = \frac{1}{2}\varphi. \quad (4.4.2)$$

Эта функция многозначна. В самом деле, положение точки z на плоскости можно задать координатами r , φ и, в то же время, координатами r , $\varphi + 2\pi$, и соответственно этому мы получаем два значения функции $f(z)$:

$$f_1 = r^{1/2} e^{i\varphi/2}, \quad f_2 = r^{1/2} e^{i(\varphi+2\pi)/2} = -r^{1/2} e^{i\varphi/2}. \quad (4.4.3)$$

Причина полученной здесь многозначности лежит в том хорошо известном факте, что квадратный корень из положительного числа может быть взят со знаком + или -. Если вместо $1/2$ взять показатель $1/4$, то для любого $z \neq 0$ мы получим четыре различных значения функции:

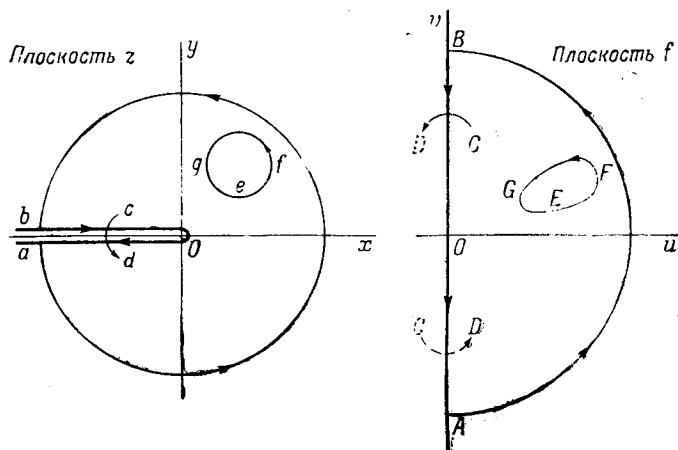
$$(z^{1/4})_1 = r^{1/4} e^{i\varphi/4}, \quad (z^{1/4})_2 = e^{i\pi/2} (r^{1/4} e^{i\varphi/4}) = e^{i\pi/2} (z^{1/4})_1, \\ (z^{1/4})_3 = e^{i\pi} (z^{1/4})_1, \quad (z^{1/4})_4 = e^{3i\pi/2} (z^{1/4})_1.$$

Если же z возводится в степень π (или в какую-либо другую иррациональную степень), то получается бесконечное множество значений, отли-

чающихся своими аргументами, причем эти аргументы можно выбрать как угодно близко к любому наперед заданному числу. Поэтому, имея дело со степенной функцией $f = z^a$, мы обладаем значительной свободой в выборе $\arg f$ в заданной точке, если он не задан.

Многозначность влечет за собой появление разрывов. Так, например, в точке $z = -r$ функция $z^{1/2}$ принимает значения $ir^{1/2}$ или $-ir^{1/2}$ в зависимости от того, представлено ли $-r$ в виде $re^{\pi i}$ или в виде $re^{-\pi i}$. Эти разрывы могут соответствовать реальной физической картине, когда на полуоси $\varphi = \pm \pi$ помещена преграда; математический аппарат в задачах такого рода всегда использует многозначные функции.

Точки ветвления и линии ветвления. Разрывы, о которых сейчас шла речь, могут быть легко обнаружены геометрически, если обратиться к конформному отображению, реализуемому функцией $f = z^{1/2}$. На рис. 4.13

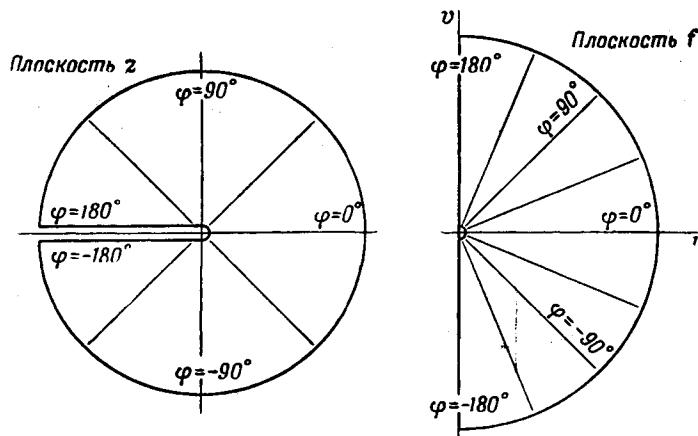


Фиг. 4.13. Конформное отображение $f = \sqrt{z}$ (указана линия ветвления этой многозначной функции aOb в плоскости z).

окружность, соединяющая точки a и b , отображается в полуокружность с концами A и B в плоскости переменного $f = u + iv$. Наличие разрыва очевидно, так как точки A и B , являющиеся соответственно образами точек a и b , не совпадают. Так как радиус окружности в плоскости z может быть выбран произвольно, то мы видим, что всей плоскости z ставится в соответствие полуплоскость $v > 0$ плоскости f . Остальные точки плоскости f появятся лишь при вторичном обходе окружности в плоскости z от точки a до точки b ; иначе говоря, точки f , у которых $u < 0$, будут соответствовать тем точкам z , аргументы которых заключены между π и 3π . Снова мы видим, что каждому $z \neq 0$ соответствуют два различных значения f . Но теперь мы замечаем, что эти значения функции f могут быть разбиты на два самостоятельных множества, одно из которых появляется при первом обходе окружности от a до b , когда φ , аргумент переменного z , изменяется от $-\pi$ до π , а второе — при втором обходе, когда φ изменяется от π до 3π . Третий обход, соответствующий значениям $3\pi < \varphi < 5\pi$, приводит к тем же значениям f , какие получились при $-\pi < \varphi < \pi$. Описанные здесь два независимых множества значений $z^{1/2}$ называются ветвями этой функции. Линия $\varphi = \pi$, вдоль которой эти ветви терпят разрыв, называется линией ветвления. На рисунках линии ветвления мы будем изображать двойной жирной линией.

Необходимость такого выделения линий ветвления объясняется тем, что, пересекая в плоскости z линию ветвления, хотя бы вдоль дуги cd (см. рис. 4.13), мы переходим с одной ветви функции $z^{1/2}$ на другую. Образами cd на плоскости f служат дуги CD , причем сплошной линией изображена та дуга, для которой точка C принадлежит ветви $z^{1/2}$ с положительной действительной частью. Если взять C на другой ветви, то получится дуга CD , изображенная пунктиром. В обоих случаях, когда z пересекает линию ветвления, соответствующая точка f переходит с одной ветви функции на другую.

К тому же выводу можно прийти, опираясь на теоремы об аналитическом продолжении. Рассмотрим, например, окружность efg на рис. 4.13. Если продолжить $z^{1/2}$ вдоль efg , то мы придем к прежнему значению этой функции, поскольку при этом особая точка функции лежит вне efg . Наглядно это проявляется в том, что образом окружности efg будет замкнутый контур EFG . С другой стороны, если $z^{1/2}$ продолжить вдоль



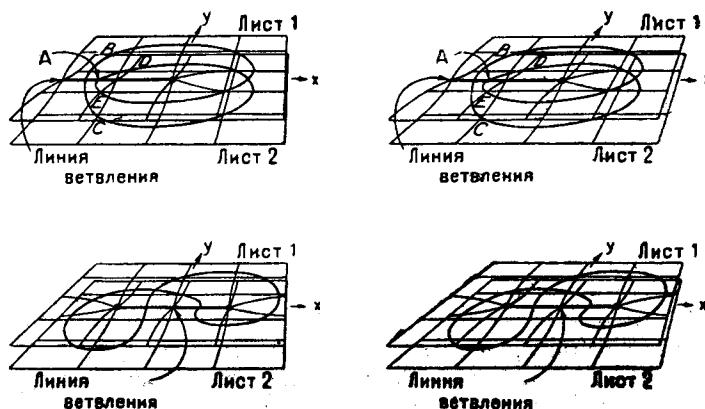
Фиг. 4.14. Преобразование $f = \sqrt{z}$ (в точке $z = 0$ нарушаются конформность).

окружности ab , то, как мы видели, мы придем к значению $z^{1/2}$ в точке b , отличному от значения в ее исходной точке a . Из изложенной выше теории аналитического продолжения следует, что внутри этой окружности должна находиться особая точка. Таковой является точка $z = 0$, так как радиус окружности можно было взять произвольным; в этом можно убедиться и непосредственным изучением функции $z^{1/2}$ вблизи $z = 0$. Такого рода особая точка называется *точкой ветвления* (см. стр. 370).

Отметим еще некоторые свойства точек ветвления. Обычно значение $f(z)$ в точке ветвления принадлежит одновременно всем ветвям функции $f(z)$. Чаще всего, хотя и не всегда, только точки ветвления являются общими для всех ветвей функции. Далее, в точке ветвления отображение, определяемое функцией $f(z)$, не конформно. Это можно обнаружить на рис. 4.14, где при отображении функцией $z^{1/2}$ углы между образами радиусов, выходящих из точки $z = 0$, вдвое меньше углов между самими радиусами. Для функции $z^{1/2}$ соответствующие углы уменьшаются в α раз. Важно, наконец, заметить, что точки ветвления встречаются *парами* и что *линии ветвления соединяют точки ветвления*. Так, функция $z^{1/2}$ имеет еще точку ветвления $z = \infty$. В этом можно убедиться, сделав подстановку $z = 1/\zeta$; при этом $z^{1/2} = \zeta^{-1/2}$, а функция $\zeta^{-1/2}$ имеет точку ветвления $\zeta = 0$, которой соответствует точка $z = \infty$.

Линия ветвления, которую мы рассматривали, соединяет точку ветвления $z = 0$ с точкой ветвления $z = \infty$ вдоль отрицательной действительной полуоси. Но линией ветвления могла бы служить с таким же успехом любая линия, соединяющая точки ветвления 0 и ∞ . Например, в качестве промежутков изменения аргумента, определяющих первую и вторую ветви функции $z^{1/2}$, можно было бы взять соответственно $0 < \varphi < 2\pi$ и $2\pi < \varphi < 4\pi$. В плоскости f им соответствовали бы области $v > 0$ и $v < 0$, и линией ветвления оказалась бы положительная действительная полуось. Ветви, выделенные таким образом, совершенно равноценны ранее определенным ветвям. Вообще, мы можем выбирать в данной конкретной задаче линии ветвления так, как нам удобно.

Римановы поверхности. Представление о том, что в случае функции $z^{1/2}$ областям $-\pi < \varphi < \pi$ и $\pi < \varphi < 3\pi$ плоскости z соответствуют различные области плоскости f , сопряжено с некоторыми геометрическими неудобствами, так как каждая из областей $-\pi < \varphi < \pi$, $\pi < \varphi < 3\pi$ полностью покрывает плоскость z (за исключением линии ветвления). Для того чтобы восстановить однозначность и непрерывность и тем самым



Фиг. 4.15. Склейивание листов римановых поверхностей
функций $f = \sqrt{z}$ и $f = \sqrt{z^2 - 1}$ вдоль линий ветвления.

сделать применимыми теоремы, изложенные в предыдущих параграфах, необходимо приписать самостоятельное геометрическое существование обеим указанным областям плоскости z . Это может быть осуществлено с помощью понятия *римановой поверхности*. Представим себе вместо плоскости z , существующей в одном экземпляре, целый набор плоскостей (называемых *листами*), расположенных одна над другой. Каждая из них ставится в соответствие определенной ветви функции. Таким образом, для функции $z^{1/2}$, имеющей две ветви, понадобятся два листа, причем точки каждого из них будут взаимно однозначно соответствовать точкам определенной полуплоскости плоскости f . Пусть на листе 1 нанесена область $-\pi < \varphi < \pi$, а на листе 2 — область $\pi < \varphi < 3\pi$. Оба листа должны быть как-то соединены друг с другом, потому что, как мы помним, пересекая линию ветвления, мы переходим с одной ветви функции на другую.

Обратимся к рис. 4.15. Оба листа, 1 и 2, разрезаются вдоль линии ветвления (поэтому сами линии ветвления часто называются *разрезами*), и оба края разреза на листе 1 склеиваются с соответственно противоположными краями разреза на листе 2. Рассмотрим изображенный на рис. 4.15 замкнутый контур $AEBCDAA$. Дуга AEB этого контура принадлежит листу 1, но, пересекши разрез на листе 1, мы попадаем на лист 2 в точку C .

Дуга CD целиком принадлежит листу 2; двигаясь по этой дуге дальше, мы пересекаем разрез на листе 2 и снова попадаем через точку A на лист 1, в точку E . Ясно, что следует разуметь под замкнутым контуром, когда рассматривается такая поверхность, склеенная из нескольких листов: в нашем примере $AEBCD$ — замкнутый контур, а контур AEB — незамкнутый. Теперь возможно применять теорему Коши и интеграл Коши. Этим мы займемся в следующем параграфе, а сейчас продолжим изучение поведения многозначных функций.

В качестве более сложного примера рассмотрим функцию

$$f = \sqrt{z^2 - 1}.$$

Точками ветвления для нее являются $z = \pm 1$; $z = \infty$ не будет точкой ветвления, так как, положив $z = 1/\zeta$, получаем $f = \sqrt{(1/\zeta^2) - 1} = \sqrt{1 - \zeta^2}/\zeta \simeq 1/\zeta$ ($\zeta \rightarrow 0$), и, значит, бесконечно удаленная точка является простым полюсом функции f .

Точки $z = -1$ и $z = 1$ соединены линией ветвления. Ее можно направить по отрезку оси x , соединяющему эти точки, как указано на рис. 4.15, но можно было бы в качестве линии ветвления взять отрезок оси x , содержащий бесконечно удаленную точку (состоящий из точек этой оси от $x = -1$ до $x = -\infty$ и от $x = \infty$ до $x = 1$);

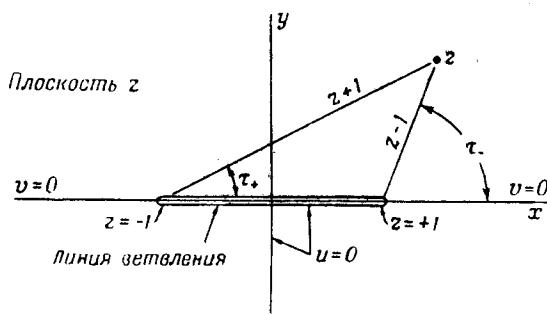


Рис. 4.16. Линия ветвления функции $f = \sqrt{z^2 - 1}$.

есть, конечно, и множество других возможностей.

В точках действительной оси, где $|x| > 1$, значения $\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$ действительны, поэтому участок $|x| > 1$ действительной оси соответствует точкам $\operatorname{Im} f = v = 0$. При действительных x , для которых $|x| < 1$, $\arg f$ может быть равен $\pi/2$ или $-\pi/2$. От этой неопределенности можно избавиться, фиксируя линии ветвления множителей $\sqrt{z+1}$ и $\sqrt{z-1}$. Тот или иной выбор их определит положение линии ветвления произведения. Для того чтобы получить линию ветвления, изображенную на рис. 4.15, мы возьмем для $\sqrt{z+1}$ и $\sqrt{z-1}$ линии ветвления, идущие вдоль оси x соответственно от -1 до $-\infty$ и от 1 до $+\infty$. Аргумент произведения $f = u + iv = \sqrt{z^2 - 1}$ будет равен $(\tau_+ + \tau_-)/2$, где $\tau_+ = \arg(z+1)$, а $\tau_- = \arg(z-1)$ (см. рис. 4.16). Возьмем какую-либо точку, лежащую между -1 и $+1$ непосредственно над действительной осью. В такой точке $\tau_+ = 0$ и $\tau_- = \pi$, а следовательно, f будет иметь аргумент $\pi/2$. В соответствующей точке непосредственно под осью x имеем $\tau_+ = 0$, $\tau_- = -\pi$ и $\arg f = -\pi/2$. Таким образом, над линией $y = 0$ (в плоскости z) $v > 0$, а под ней $v < 0$, что еще раз демонстрирует разрыв, имеющийся на линии ветвления. Теперь обратимся к оси y . На ней, в тех точках, где $y > 0$, имеем $\tau_+ + \tau_- = \pi$, $\arg f = \pi/2$ и, следовательно, $u = 0$. На отрицательной полуоси y имеем равенство $\arg f = -\pi/2$.

Располагая этими сведениями, мы попытаемся наметить линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ в плоскости z (см. рис. 4.17). Эти линии должны быть взаимно-ортогональны всюду, за исключением точек ветвления, в которых отображение плоскости z на плоскость f не конформно. (Так, в точках $z = \pm 1$ линии $u = 0$ и $v = 0$ служат продолжениями одна другой. В точке $z = 0$ конформность также нарушается, так как в этой точке

$df/dz = 0$.) Для больших z (т. е. при $|z| \gg 1$) $f \approx z$, поэтому линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ должны асимптотически совпадать соответственно с линиями $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. На рис. 4.17 показана линия $u = 0$, состоящая из оси y и отрезка оси x от $x = -1$ до $x = +1$.

Между точками $z = -1$ и $z = 0$ функция v изменяется от 0 до 1 над осью x и от 0 до -1 под осью x . Таким образом, линии $v = C \neq 0$ при $|C| < 1$ подходят к оси x между точками $x = -1$ и $x = 1$, образуя с ней прямые углы. При $|C| > 1$ линии $v = C$ пересекают ось y под прямым углом. Сказанное позволяет наметить линии $v = \text{const}$. Линии $u = \text{const}$ можно построить, воспользовавшись свойством ортогональности. Выясним теперь, где u положительно и где отрицательно. Для этого найдем $\arg f$

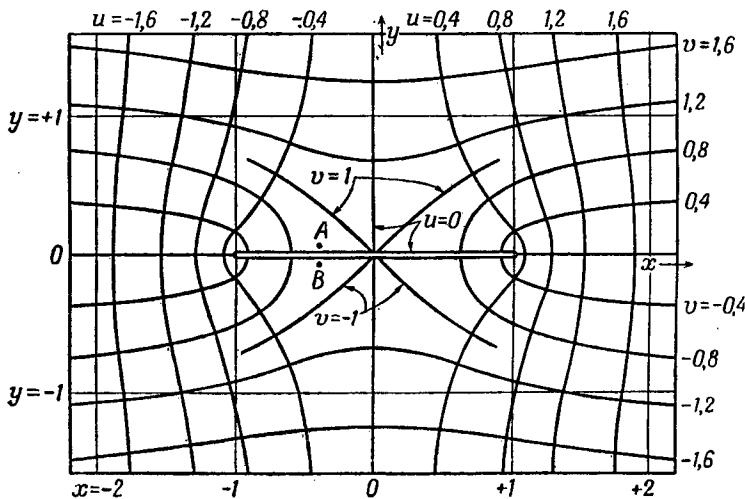


Рис. 4.17. Конформное отображение $f = \sqrt{z^2 - 1}$ (в плоскости z нанесены линии $\operatorname{Re} f = u = \text{const}$ и $\operatorname{Im} f = v = \text{const}$).

на оси x при $x < -1$. В точках z , лежащих непосредственно над осью x ,левее точки $x = -1$, $\tau_+ = \tau_- = \pi$, и поэтому здесь $\arg f = \pi$. Подобным же образом мы обнаружим, что $\arg f = -\pi$ непосредственно под осью x , т. е. f имеет по существу тот же аргумент. Отсюда видно, что $u < 0$ в нижней полуплоскости $x < 0$; легко видеть, что в правой полуплоскости u положительно.

На рис. 4.17 нанесены линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, соответствующие первому листу римановой поверхности функции $\sqrt{z^2 - 1}$ (ср. рис. 4.15). Линии $v = C$ при $C > 0$ продолжаются в нижней полуплоскости второго листа, а при $C < 0$ — в верхней полуплоскости. При переходе с одного листа на другой области $v < 0$ и $v > 0$ меняются местами, а в остальном рис. 4.17 годился бы и для второго листа. Действительно, на листе 2 τ_+ или τ_- на 2π отличаются от соответствующего угла на листе 1, и, рассуждая так же, как на стр. 380, мы обнаружим, что f в точках A и B на втором листе имеет аргумент, равный соответственно $-\pi/2$ и $\pi/2$. При этом надо взять первый лист функции $\sqrt{z+1}$ и второй лист функции $\sqrt{z-1}$ или наоборот; если взять в обоих случаях вторые листы, то мы получим то же, что и в разобранном выше случае, когда для обоих множителей были взяты первые листы. Отсюда мы видим, что для двух ветвей функции $\sqrt{z^2 - 1}$ требуются только два листа. Листы 1 и 2 склеиваются

таким образом, что нижний край разреза от -1 до 1 на одном листе склеивается с верхним краем разреза на другом листе.

Наконец, поучительно указать физические поля, описываемые функцией $\sqrt{z^2 - 1}$, для того чтобы показать, какой барьер в физической задаче соответствует разрезу в плоскости z . Так, например, $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ могут изображать соответственно эквипотенциальные и силовые линии однородного электростатического поля, направленного вдоль оси x , в которое помещен проводник, имеющий форму бесконечной пластины, сечение которого изображено на рис. 4.18, a . В гидродинамике $u = \text{const}$ могут изображать линии тока, возникающие при обтекании контура

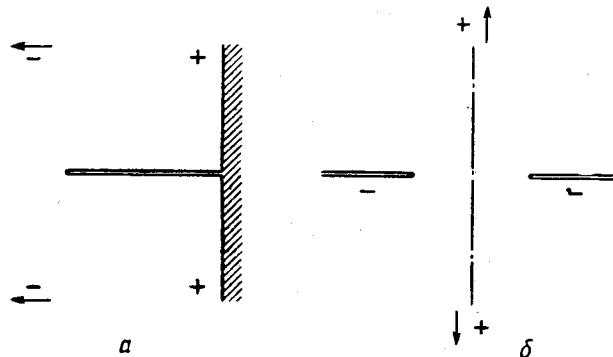


Рис. 4.18. Расположение граничных поверхностей в задачах, в которых применимо отображение $f = \sqrt{z^2 - 1}$.

такой же формы потоком жидкости. В то же время $u = \text{const}$ являются силовыми линиями, а $v = \text{const}$ — эквипотенциальными линиями поля, созданного пластинами, изображенными на рис. 4.18, b , если предположить, что они заряжены отрицательно относительно удаленных участков оси y ($|y| \gg 1$).

Пример. В качестве последнего примера рассмотрим многозначную функцию f переменного z , определяемую уравнением

$$z = \frac{1}{f} \operatorname{th} f \quad (4.4.4)$$

(см. рис. 4.19). Функция (4.4.4) встречается при решении волнового уравнения (см. гл. 11). Она имеет простые полюсы в точках $f = [(2n+1)/2]\pi i$ (n — целое число). Точка ветвления функции f служит нулем производной от z . В каждой такой точке — обозначим ее a — отображение, определенное уравнением (4.4.4), не конформно. Объясняется это тем, что (см. стр. 341) разность $z - a$ имеет нуль порядка > 1 в точке $f(a)$, так что $f - f(a)$ в окрестности точки $z = a$ выражается дробной степенью разности $z - a$. Значения f в точках ветвления отыскиваются из уравнения $\operatorname{sech}^2 f/f - \operatorname{th} f/f^2 = 0$, т. е. из уравнения

$$2f = \operatorname{sh} 2f. \quad (4.4.5)$$

Решение уравнения (4.4.5) и соответствующие значения $z = a_n$ (помимо $a_0 = 1$) приведены в нижеследующей таблице.

Точки ветвления	$f = u + iv$		$z = re^{i\varphi}$	
	u	v	r	φ
a_1	1,3843	3,7488	0,23955	63,00°
a_2	1,6761	6,9500	0,43760	72,54°
a_3	1,8584	10,1193	0,09635	76,85°
a_4	1,9916	13,2773	0,07407	79,36°

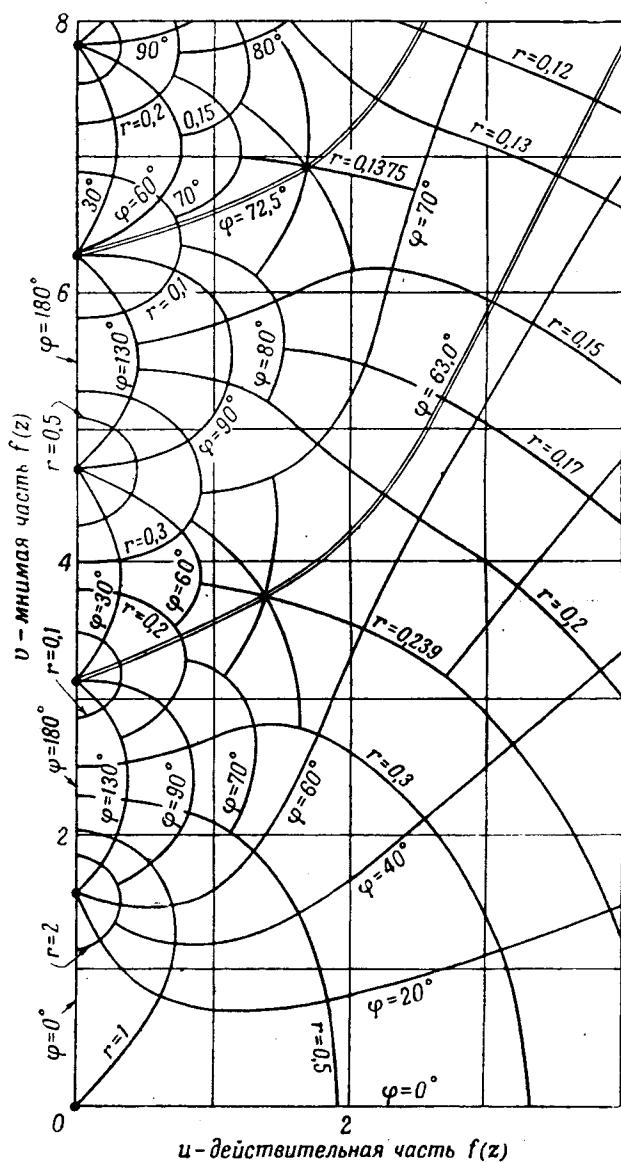


Рис. 4.19. Конформное отображение $(1/f)^{1/4} f(z) = z = re^{i\varphi}$. В плоскости f нанесены линии $r=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$ и отмечены первые три точки ветвления.

При больших v точки ветвления $a_n = u + iv$ ($n \gg 1$) асимптотически выражаются в виде $u \approx [\ln(4n+1)\pi]/2$, $v \approx (n+1/4)\pi$, в чем можно убедиться посредством подстановки в уравнение (4.4.5). Мы имеем, таким

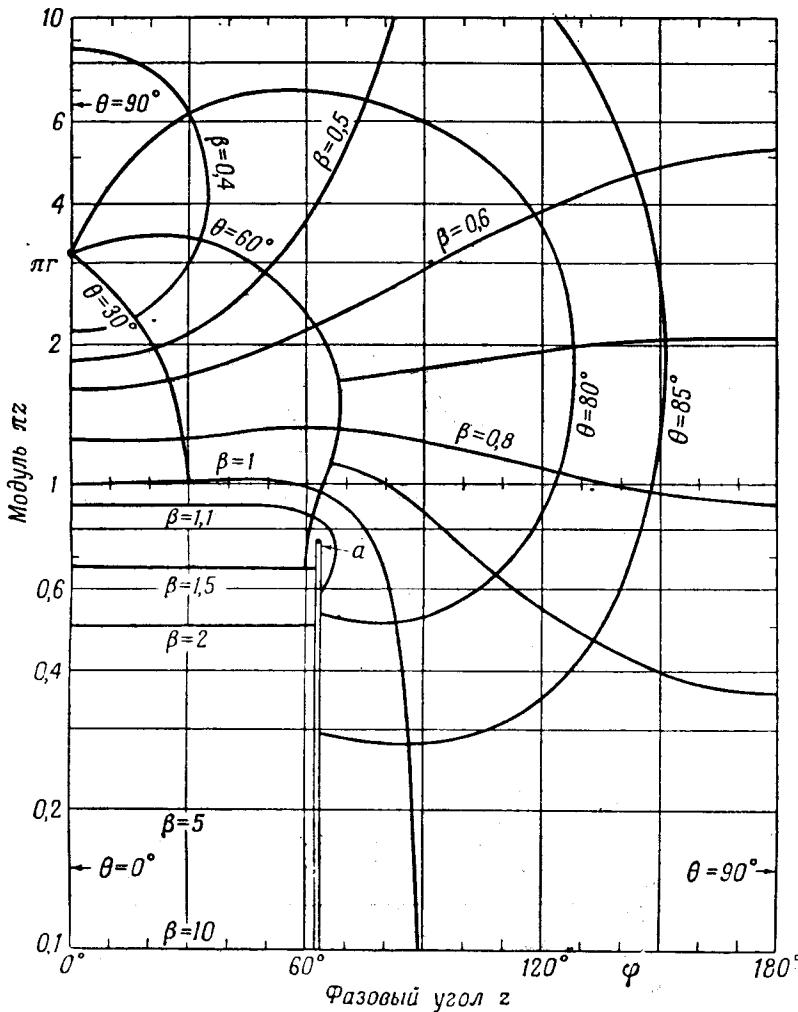


Рис. 4.20. Конформное отображение первого листа римановой поверхности функции $f(w)$, где $(1/f) \operatorname{th} f = z = e^w$ ($f = \pi^3 e^{i\theta}$).
В плоскости w нанесены линии $\beta = \text{const}$; $\theta = \text{const}$; a — одна из точек ветвления.

образом, бесконечное множество точек ветвления и соответственно бесконечное множество листов римановой поверхности. Следует отметить, впрочем, одно упрощающее обстоятельство: в любой точке ветвления a функция f ведет себя как $(z-a)^{1/2}$, так как $z''(f(a)) \neq 0$. Поэтому все точки ветвления имеют такой же характер, как точка $z=0$ для функции $z^{1/2}$, уже нами исследованной. Поэтому мы сразу можем сказать, что в точке $z=a$ смыкаются лишь два листа римановой поверхности. Имея в виду эти подробности, мы можем с помощью рис. 4.20 и 4.21 наглядно представить отображение (4.4.4). Для удобства изображения плоскости z мы ввели еще преобразование

$$z = r e^{i\varphi} = e^w, \quad \operatorname{Im} w = \varphi, \quad \operatorname{Re} w = \ln r \quad (4.4.6)$$

и аналогично для f :

$$f = u + iv = \pi\beta e^{i\theta} = e^F, \quad \operatorname{Im} F = \theta, \quad \operatorname{Re} F = \ln \pi\beta.$$

В качестве линии ветвления, выходящей из точки a , мы взяли линию $\varphi = 63^\circ$. Еще раз отметим очевидный разрыв F на этой линии. Разумеется, линии $\theta = \text{const}$, пересекая линию ветвления $\varphi = 63^\circ$, переходят на второй

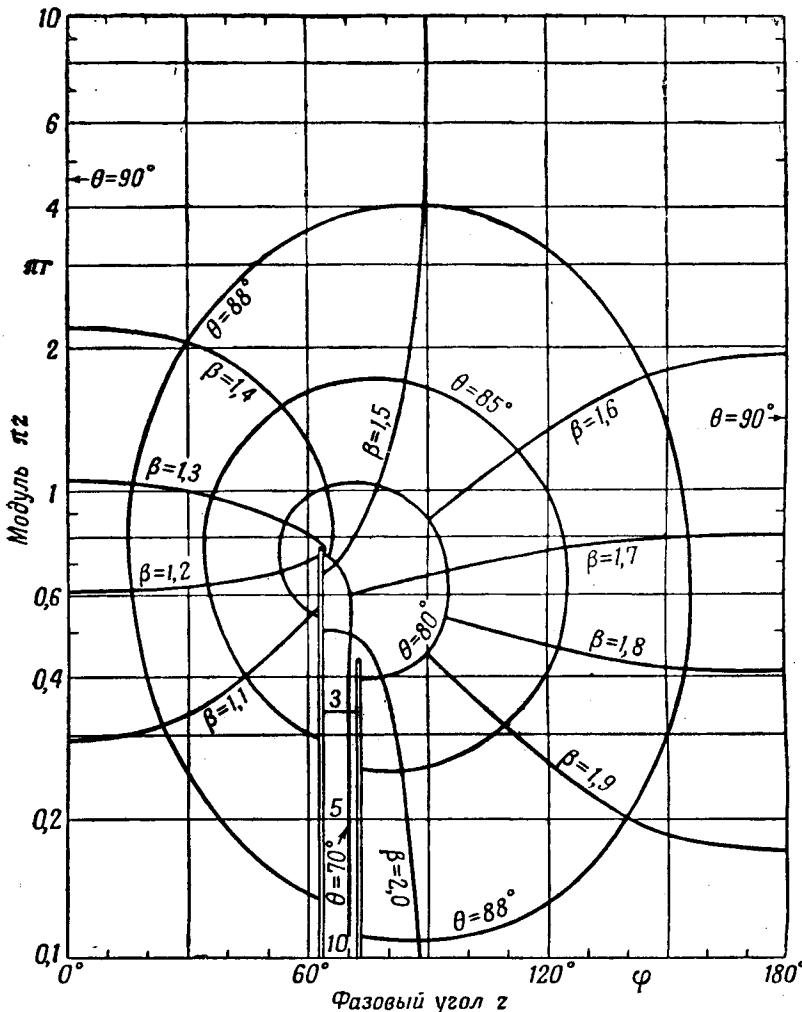


Рис. 4.21. Конформное отображение второго листа римановой поверхности функции $f(w)$, где $(1/f) \operatorname{th} f = z = e^w$ ($f = \pi\beta e^{i\theta}$).

лист римановой поверхности, изображенный на рис. 4.21. На этом последнем рисунке, помимо $\varphi = 63^\circ$, изображена также линия ветвления $\varphi = 72,54^\circ$, вдоль которой склеиваются второй и третий листы римановой поверхности. Таким образом, любой лист склеивается со следующим, и в одной точке могут склеиваться лишь два листа римановой поверхности. На рис. 4.19 изображен ряд линий $\varphi = \text{const}$ и $r = \text{const}$ на плоскости f , причем отдельные участки этой плоскости соответствуют различным ветвям функции. В задачах к этой главе мы еще вернемся к дальнейшим подробностям, связанным с этими рисунками.