

## 4.5. Теория вычетов. Гамма-функция и эллиптические функции

В предыдущих параграфах мы использовали интеграл Коши как средство обнаружения различных свойств аналитических функций. В этом параграфе мы займемся более земными вещами. Так, например, формулу Коши можно применить к вычислению интегралов. С примерами такого рода мы встретились на стр. 353 и 354, но в действительности область применения интеграла Коши гораздо шире. Им можно пользоваться для получения интегральных представлений функций, имеющих разрывы, или таких, производные которых разрывны, а также для суммирования рядов.

Рассмотрим сначала задачу о вычислении интегралов. При этом мы воспользуемся методами так называемой *теории вычетов*. Вычет определяется следующим образом. Если  $a$  — изолированная особая точка функции  $f(z)$ , то в окрестности этой точки  $f(z)$  разлагается в ряд Лорана  $\sum a_n(z-a)^n$  [см. (4.3.4)]; коэффициент  $a_{-1}$  есть *вычет* функции  $f(z)$  в точке  $z=a$ . Сформулируем теперь основную теорему теории вычетов.

*Если функция  $f(z)$  аналитична всюду в области, ограниченной контуром  $C$ , за исключением конечного числа особых точек, лежащих внутри  $C$ , то значение интеграла  $\oint f(z) dz$ , вычисленного вдоль  $C$ , равно умноженной на  $2\pi i$  сумме вычетов подинтегральной функции во всех ее особых точках, лежащих внутри  $C$ .*

Для доказательства следует применить теорему Коши и проинтегрировать почленно соответствующие ряды Лорана; мы предоставляем это читателю. С помощью этой теоремы можно вычислять интегралы следующих трех типов:

1.  $\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ , где  $f$  — рациональная функция  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$ .
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ , где  $f(z)$  — функция, аналитическая всюду в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек, ни одна из которых не лежит на действительной оси. Когда  $z$  стремится к  $\infty$ ,  $|f(z)|$  должен стремиться к нулю как  $|Az|^{-m}$ , где  $m > 1$ .
3.  $\int_0^{\infty} x^{u-1} f(x) dx$ , где  $f(z)$  — рациональная функция, аналитическая в точке  $z=0$ , имеющая только простые полюсы на положительной действительной полуоси и такая, что  $x^u f(z)$  стремится к нулю, когда  $z$  стремится к нулю или к бесконечности.

В задачах приводятся некоторые обобщения.

Для вычисления интегралов типа 1 следует  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$  выразить через  $z = e^{i\theta}$ . Интеграл преобразуется при этом в интеграл вдоль единичной окружности в плоскости  $z$ . После этого остается вычислить вычеты подинтегральной функции относительно полюсов, лежащих внутри единичного круга. В качестве простого примера рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2}. \quad (4.5.1)$$

Пусть  $z = e^{i\theta}$ ; тогда

$$I = \frac{1}{i} \oint \frac{dz}{(1-pz)(z-p)}, \quad (4.5.2)$$

где контуром интегрирования служит единичная окружность. Дальнейшие вычисления зависят от величины  $p$ . Предположим, что  $|p| < 1$ . Тогда точка  $z = p$  является полюсом подинтегральной функции в (4.5.2). Соответствующий вычет равен  $1/(1 - p^2)^1$ , так что

$$I = \frac{2\pi}{1-p^2}, \quad |p| < 1. \quad (4.5.3)$$

Если  $|p| > 1$ , то полюсом является точка  $z = 1/p$ . Вблизи этой точки подинтегральную функцию можно записать в виде  $-1/[ip(z - 1/p)(z - p)]$ , поэтому соответствующий вычет равен  $-1/[i(1 - p^2)]$ . Итак,

$$I = \frac{2\pi}{p^2 - 1}, \quad |p| > 1.$$

В том случае, когда  $p$  — действительное число, оба результата можно объединить, записав  $I = 2\pi/|p^2 - 1|$ .

Обращаясь к интегралам типа 2, проинтегрируем  $f(z)$  вдоль замкнутого контура, состоящего из отрезка действительной оси от  $-R$  до  $+R$

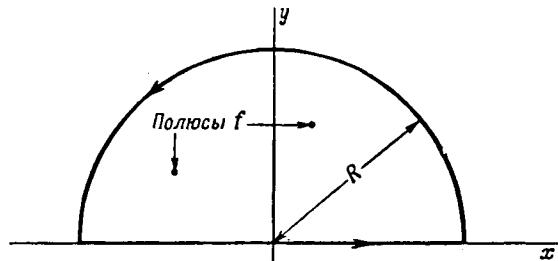


Рис. 4.22. Контур, служащий для вычисления интегралов в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$  с помощью теории вычетов.

и полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости (см. рис. 4.22). В силу предположений, высказанных относительно  $f(z)$ , интеграл вдоль полуокружности при  $R \rightarrow \infty$  будет стремиться к нулю, и мы получаем формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \left( \begin{array}{l} \text{вычетов } f(z) \text{ относительно особых точек,} \\ \text{лежащих в верхней полуплоскости.} \end{array} \right). \quad (4.5.4)$$

В качестве простого примера вычислим этим методом интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

который, как известно, равен  $\pi$ . Согласно формуле (4.5.4),  $I = 2\pi i \times (\text{вычет в точке } i)$ , так как  $i$  — единственный полюс функции  $1/(1+z^2) = 1/(z+i)(z-i)$  в верхней полуплоскости. Искомый вычет равен  $1/2i$ , а следовательно,  $I = \pi$ . Более сложные примеры приведены в задачах.

<sup>1)</sup> Если  $a$  — полюс первого порядка и  $f(z) = a_{-1}/(z-a) + a_0 + a_1(z-a) + \dots$  — соответствующее разложение Лорана, то  $f(z) = g(z)/(z-a)$ , где  $g(z) = a_{-1} + a_0(z-a) + a_1(z-a)^2 + \dots$ . Отсюда следует, что  $a_{-1}$ , вычет  $f(z)$  относительно  $z=a$ , равен  $\lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)]$ .

Это — частный случай формулы (4.5.6), выраждающей вычет функции относительно полюса  $n$ -го порядка. — Прим. перев.

**Интегралы от функций, имеющих точки ветвления.** Рассмотрим, наконец, интеграл типа 3 от функции, не имеющей полюсов на положительной действительной оси. Начнем с интеграла

$$\oint (-z)^{\mu-1} f(z) dz,$$

замкнутый контур интегрирования которого не охватывает  $z=0$ , точку ветвления подинтегральной функции, и поэтому лежит целиком на одном листе соответствующей римановой поверхности. Выберем контур, изображенный на рис. 4.23 и состоящий из маленькой окружности, которая охватывает  $z=0$  и радиус которой мы заставим стремиться к нулю, большой окружности, радиус которой будет в дальнейшем стремиться к бесконечности, и двух прямолинейных отрезков, направленных в противоположные стороны и лежащих на противоположных краях разреза вдоль оси  $x$ . Интегралы вдоль этих прямолинейных отрезков не будут взаимно уничтожаться, так как вдоль разреза подинтегральная функция разрывна. Аргумент множителя  $(-z)^{\mu-1}$  выбираем так, чтобы  $(-z)^{\mu-1}$

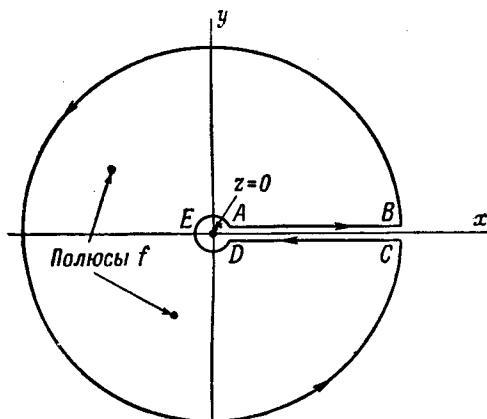


Рис. 4.23. Контур, служащий для вычисления интегралов функции с точкой ветвления  $z=0$ .

жений относительно интегралов 3-го типа интегралы по обеим окружностям, малой и большой, стремятся к нулю; следовательно, интеграл по выделенному контуру в пределе, когда радиус внешней окружности бесконечно велик, а радиус внутренней равен нулю, имеет вид

$$\oint (-z)^{\mu-1} f(z) dz = - \int_0^\infty e^{\pi i(\mu-1)} x^{\mu-1} f(x) dx + \int_0^\infty e^{-\pi i(\mu-1)} x^{\mu-1} f(x) dx.$$

Первое слагаемое справа есть интеграл вдоль  $CD$ , второе — интеграл вдоль  $AB$ .

Объединив оба слагаемых, получим

$$\oint (-z)^{\mu-1} f(z) dz = 2i \sin \pi \mu \int_0^\infty x^{\mu-1} f(x) dx.$$

Применяя основную теорему теории вычетов к контурному интегралу в левой части, получаем равенство

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} f(x) dx = \pi \operatorname{cosec} \pi \mu \sum \left[ \begin{array}{l} \text{вычетов функции } (-z)^{\mu-1} f(z) \\ \text{относительно всех полюсов } f \end{array} \right]. \quad (4.5.5)$$

В качестве простого примера возьмем  $\int_0^\infty [x^{\mu-1}/(1+x)] dx$ . Согласно формуле (4.5.5), значение этого интеграла при  $0 < \mu < 1$  равно  $\pi \operatorname{cosec} \pi \mu$ .

Заметим, наконец, что подинтегральная функция может иметь полюсы второго и более высокого порядка. Предположим, что точка  $z = a$  является полюсом  $n$ -го порядка подинтегральной функции  $f(z)$ , и представим последнюю в виде  $f(z) = g(z)/(z-a)^n$ , где  $g(z)$  — аналитическая функция в окрестности  $z = a$ . Посредством несложного подсчета<sup>1)</sup> мы получим для соответствующего вычета выражение

$$\frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g(z) \right)_{z=a}. \quad (4.5.6)$$

Тот же результат получается, если полюс  $n$ -го порядка рассматривается как предельный случай  $n$  простых полюсов, слившихся в одну точку  $z = a$ .

**Обращение рядов.** Часто приходится иметь дело с задачей обращения функции, заданной степенным рядом

$$w = f(z) = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_1 \neq 0. \quad (4.5.7)$$

Требуется найти такую функцию  $z = z(w)$ , что  $f(z) - w = 0$ . Из уравнения (4.5.7) видно, что в силу теоремы, приведенной на стр. 342, эта обратная функция может быть представлена степенным рядом

$$z(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (w - w_0)^n. \quad (4.5.8)$$

Коэффициенты  $b_n$  можно выразить через  $a_n$ , подставив непосредственно (4.5.8) в (4.5.7). Однако их можно вычислить и более изящным способом при помощи интеграла Коши. Сначала мы возьмем контурный интеграл, вычет которого равен как раз функции  $z(w)$ . Таким интегралом является  $(1/2\pi i) \oint [z df/(f-w)]$ , где переменным интегрирования служит  $f(z)$ , а контур охватывает точку  $f = w$  и не охватывает других нулей функции  $f - w$ . Через  $z$  этот контурный интеграл выразится в виде

$$z(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{zf'(z) dz}{f(z)-w}. \quad (4.5.9)$$

Дифференцируя его по  $w$ , а затем интегрируя по частям, получаем

$$\frac{d}{dw} z(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{f(z)-w}. \quad (4.5.10)$$

Последний интеграл можно вычислить. Записав

$$\frac{1}{f(z)-w} = \frac{1}{f(z)-w_0} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-w_0)^n}{[f(z)-w_0]^n} \right)$$

и сравнив правую часть с рядом, полученным дифференцированием (4.5.8) по  $w$ , замечаем, что

$$nb_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{[f(z)-w_0]^n},$$

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 387.—Прим. перев.

а этот интеграл равен

$$\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{(z-z_0)^n}{[f(z)-w_0]^n} \right)_{z=z_0}.$$

Таким образом,

$$b_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [a_1 + a_2(z-z_0) + a_3(z-z_0)^2 + \dots]^{-n} \right\}_{z=z_0},$$

или

$$b_n = \frac{1}{a_1^n n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( 1 + \frac{a_2}{a_1}x + \frac{a_3}{a_1}x^2 + \dots \right)^{-n} \right]_{x=0}. \quad (4.5.11)$$

Производную, фигурирующую в (4.5.11), можно вычислить явно с помощью формулы

$$(a+b+c+\dots)^p = \sum_{r,s,t,\dots} \frac{p!}{r!s!t!\dots} a^r b^s \dots,$$

где

$$r+s+t+\dots = p.$$

Пользуясь этой формулой и взяв соответствующие производные, получаем выражение  $b_n$  в виде

$$b_n = \frac{1}{na_1^n} \sum_{s,t,u,\dots} (-1)^{s+t+u+\dots} \frac{n(n+1)\dots(n-1+s+t+u+\dots)}{s!t!u!\dots} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^s \left( \frac{a_3}{a_1} \right)^t \dots, \quad (4.5.12)$$

где

$$s+2t+3u+\dots = n-1.$$

Вычислим отсюда несколько первых  $b_n$ :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1}, \\ b_2 &= -\frac{1}{a_1^2} \frac{a_2}{a_1} = -\frac{a_2}{a_1^3}, \\ b_3 &= \frac{1}{3a_1^3} \left[ \frac{3 \cdot 4}{2!} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 - \frac{3}{1!} \frac{a_3}{a_1} \right] = \frac{1}{a_1^3} \left[ 2 \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 - \frac{a_3}{a_1} \right], \\ b_4 &= \frac{1}{4a_1^4} \left[ -\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^3 + \frac{4 \cdot 5}{1!1!} \frac{a_3}{a_1} \frac{a_3}{a_1} - \frac{4}{1!} \frac{a_4}{a_1} \right] = \\ &= \frac{1}{a_1^4} \left[ -5 \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^3 + 5 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_4}{a_1} \right], \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

Подставляя найденные коэффициенты в (4.5.8), получаем искомое обращение ряда.

**Суммирование рядов.** Следующее применение интеграла Коши, заслуживающее быть рассмотренным, состоит в суммировании рядов вида  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ . Прежде всего такой ряд заменяется контурным интегралом.

Для этого подбирается функция, которая имеет простые полюсы в точках  $z=n$  и ограничена на бесконечности вне действительной оси. Такой функцией может служить  $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ ; действительно, она имеет полюсы в точках  $z=n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  с вычетами 1 и ограничена на бесконечности

в требуемом смысле. Другой функцией такого типа является  $\pi \operatorname{cosec} \pi z$ , имеющая полюсы в точках  $z = n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  с вычетами  $(-1)^n$ .

Интеграл  $\oint \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz$  вдоль контура  $C_1$ , изображенного на рис. 4.24, равен умноженному на  $2\pi i$  вычету функции  $\pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z$  относительно точки  $z = 0$ , который в свою очередь равен  $f(0)$ . Соответствующий интеграл вдоль  $C_2$  равен

$$2\pi i \{f(0) + f(1) + f(-1) + [\operatorname{Res} \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z]_{a_1}\}$$

и т. д. [Сокращение  $\operatorname{Res}$  (от французского *residue*) стоит вместо слова вычет.] Беря последовательность расширяющихся контуров указанного вида, получим в пределе

$$2\pi i \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) + \sum \operatorname{Res} \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z \right\},$$

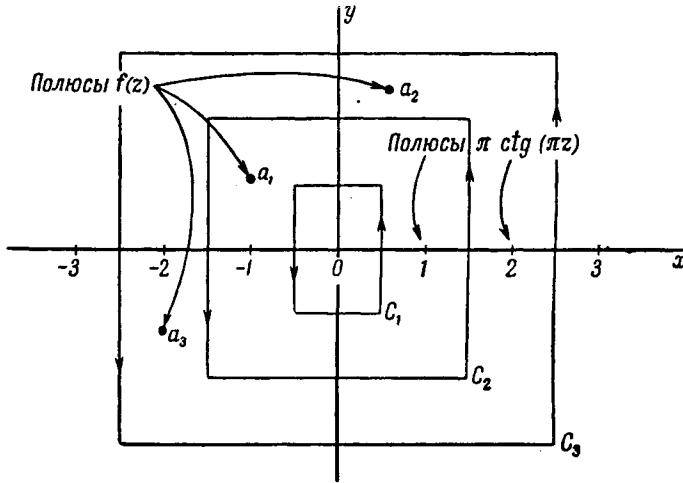


Рис. 4.24. Полюсы подинтегральной функции в интеграле, выражающем ряд  $\sum f(n)$ .

где вторая сумма берется по всем полюсам<sup>1)</sup>  $f(z)$ . Предполагается, что у  $f(z)$  нет точек ветвления.

Если, кроме того,  $|zf(z)| \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ , то интеграл по бесконечному контуру обращается в нуль и мы получаем

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum [\operatorname{Res} \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z \text{ в полюсах } f(z)]. \quad (4.5.14)$$

Если вместо  $\pi \operatorname{ctg} \pi z$  взять  $\pi \operatorname{cosec} \pi z$ , то тем же путем приходим к формуле

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = - \sum [\operatorname{Res} \pi f(z) \operatorname{cosec} \pi z \text{ в полюсах } f(z)]. \quad (4.5.15)$$

Рассмотрим простой пример: в случае ряда  $\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n / (a+n)^2$  имеем функцию  $f(z) = 1/(a+z)^2$  с полюсом второго порядка в точке  $z = -a$ . Вычет функции  $\pi f(z) \operatorname{cosec} \pi z$  относительно этой точки равен  $-\pi^2 \operatorname{cosec} \pi a \operatorname{ctg} \pi a$

<sup>1)</sup> Здесь могут быть и изолированные существенно особые точки.—Прим. ред.

[см. формулу (4.5.6)], и, следовательно,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2} = \pi^2 \operatorname{cosec} \pi a \operatorname{ctg} \pi a.$$

Этот метод суммирования рядов может служить иллюстрацией метода интегрального представления рядов. Последний употребляется в тех случаях, когда решение дифференциального уравнения, полученное в виде степенного ряда, нужно представить в виде интеграла (см. § 5.3).

**Интегральное представление функций.** Иногда бывает полезно представить функцию в виде некоторого интеграла. Объясняется это тем, что зачастую очень сложные функции могут быть представлены интегралами

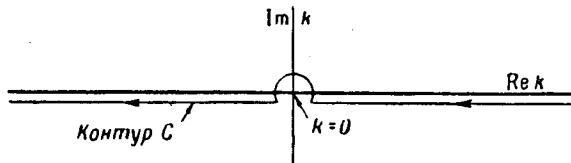


Рис. 4.25. Контур, по которому берется интеграл, выражающий единичную ступенчатую функцию  $u(x)$ .

от сравнительно простых функций. Кроме того, изменяя путь интегрирования в соответствии с теоремой Коши, можно получить приближенные выражения для таких интегралов. В главе, посвященной дифференциальному уравнениям, мы неоднократно будем прибегать к этому приему.

В качестве первого примера рассмотрим интеграл

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-ikx}}{k} dk. \quad (4.5.16)$$

Контур интегрирования изображен на рис. 4.25. Эта функция  $u(x)$  встречается в операционном исчислении Хевисайда (см. § 11.1). Ее можно вычислить с помощью интеграла Коши. При  $x > 0$  мы замыкаем контур полуокружностью бесконечно большого радиуса, лежащей в нижней полуплоскости. Интеграл вдоль такой полуокружности обращается в нуль. Следовательно,  $u(x) = \operatorname{Res}[e^{-ikx}/k]$  в точке  $k=0$ , т. е.  $u(x)=1$  при  $x > 0$ . При  $x < 0$  замыкающую полуокружность берем в верхней полуплоскости, и по такой полуокружности интеграл в пределе обращается в нуль. Так как внутри такого контура полюсов функции  $e^{-ikx}/k$  нет, то  $u(x)=0$  при  $x < 0$ . Итак, мы нашли, что

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (4.5.17)$$

Таким образом, интеграл (4.5.16) представляет разрывную функцию. Часто это представление оказывается более удобным, чем явное задание функции  $u(x)$  в виде (4.5.17).

В качестве второго примера рассмотрим интегральное представление функции Грина для выведенного ранее уравнения колебаний бесконечной струны [см. также вывод уравнений (7.2.32) и (11.2.8)]. Возьмем интеграл

$$G_K(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 - K^2} dk. \quad (4.5.18)$$

До тех пор, пока точно не определено положение контура  $C$  относительно особых точек  $k = \pm K$  подинтегральной функции, этот интеграл остается неопределенным. Выберем два контура, изображенные сплошной линией и пунктиром на рис. 4.26, и сначала возьмем контур  $C_1$ . При  $x - x' > 0$  мы замыкаем этот контур полуокружностью большого радиуса, лежащей в верхней полуплоскости. Когда радиус стремится к бесконечности, интеграл по этой полуокружности имеет предел, равный нулю. Значение рассматриваемого интеграла равно  $2\pi i \times$  (вычет подинтегральной функции в  $k = K$ ). Следовательно, если выбран контур  $C_1$ , то

$$G_K(x - x') = \frac{i}{2K} e^{iK(x-x')}, \quad x - x' > 0. \quad (4.5.19)$$

При  $x - x' < 0$  замыкаем контур снизу. В этом случае интеграл равен  $-2\pi i \times$  (вычет в  $k = -K$ ), и, следовательно, если выбран контур  $C_1$ , то

$$G_K(x - x') = \frac{i}{2K} e^{-iK(x-x')}, \quad x - x' < 0. \quad (4.5.20)$$

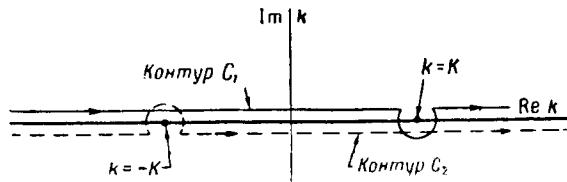


Рис. 4.26. Контуры для интегрального представления функции Грина задачи о колебаниях струны.

Комбинируя (4.5.19) и (4.5.20) для того случая, когда выбран контур  $C_1$ , получаем

$$G_K(x - x') = \frac{i}{2K} e^{iK|x-x'|}. \quad (4.5.21)$$

С другой стороны, если взят контур  $C_2$ , то мы получаем

$$G_K(x - x') = -\frac{i}{2K} e^{-iK|x-x'|}. \quad (4.5.22)$$

В полученном результате нет ничего неожиданного, если учесть, что контур  $C_2$  получается из  $C_1$  отражением относительно действительной оси. Выбор контура  $C_1$  приводит к функции Грина при граничном условии, соответствующем расходящимся волнам; иначе говоря, в этом случае точка  $x'$  действует как источник. Выбор контура  $C_2$  приводит к выражению, соответствующему наличию стока в точке  $x'$ . В этом примере сами представляемые функции непрерывны, но имеют разрывные производные.

И в том и в другом случае  $G_K(x - x')$  можно в результате соответствующих преобразований выразить через ступенчатую функцию  $u(x' - x)$ . Например, когда выбран контур  $C_1$ ,

$$G_K = \frac{1}{4\pi K} \left\{ e^{iK(x-x')} \int_C \frac{e^{-i(k-K)(x'-x)}}{k-K} dk - e^{-iK(x-x')} \int_C \frac{e^{-i(k+K)(x'-x)}}{k+K} dk \right\}.$$

Из этих интегралов первый имеет единственную особую точку  $k = K$ , поэтому нет надобности в том, чтобы контур, вдоль которого он берется, обходил вокруг точки  $k = -K$ . Аналогично, вычисляя второй интеграл, обходить нужно лишь вокруг точки  $k = -K$ . Сопоставив полученное выра-

жение с (4.5.16) и принимая во внимание рис. 4.25, получим равенство

$$G_K(x-x') = \frac{i}{2K} \{ e^{iK(x-x')} [1 - u(x'-x)] + e^{-iK(x-x')} u(x'-x) \},$$

согласующееся с (4.5.21).

**Интегралы, связанные с функцией ошибок.** До сих пор мы имели дело с интегралами, которые могли быть выражены через элементарные трансцендентные функции. Теперь мы рассмотрим случай, когда это сделать невозможно. Дифференциальное уравнение  $(d^2\psi_\lambda/dz^2) - 2z(d\psi_\lambda/dz) + 2\lambda\psi_\lambda = 0$  имеет частное решение, выражающееся в виде интеграла

$$\psi_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-t^2+2tz}}{t^{\lambda+1}} dt; \quad (4.5.23)$$

контур интегрирования изображен на рис. 4.27, а. Выберем линию ветвления подинтегральной функции вдоль положительной действительной полуоси. Вычислим теперь этот интеграл при некоторых частных значениях  $\lambda$  для малых и для больших  $z$ . Если  $\lambda$  равно целому числу  $n \geq 0$ , то 0 не является точкой ветвления, и контур можно путем деформации превратить в окружность с центром в нуле. Тогда в силу формулы (4.3.1)

$$\psi_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2+2tz} \right)_{t=0},$$

или

$$\psi_n = \frac{(-1)^n}{n!} e^{z^2} \left( \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \right), \quad \lambda = n. \quad (4.5.24)$$

Рис. 4.27. Контуры для интеграла ошибок и гамма-функции.

Полученные многочлены пропорциональны многочленам Эрмита (см. таблицу в конце гл. 6).

При  $\lambda < 0$  рассматриваемый контурный интеграл можно свести к действительному интегралу следующим образом. Разбиваем контур на отрезок действительной оси от  $+\infty$  до 0, малую окружность с центром в нуле и отрезок от 0 до  $+\infty$ . При  $\lambda < 0$  интеграл вдоль указанной окружности стремится к нулю вместе с радиусом окружности, поэтому остается рассмотреть лишь интегралы вдоль полуоси. Поскольку  $t=0$  — точка ветвления подинтегральной функции, нужно указать, какая именно ветвь этой функции рассматривается. Лучше всего выбрать аргумент множителя  $t^{-(\lambda+1)}$  так, чтобы в точке  $A$  он равнялся нулю. Тогда интеграл по полупрямой от  $\infty$  до  $A$  будет равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2+2tz}}{t^{\lambda+1}} dt \quad (t \text{ действительное}).$$

В точку  $D$  точка  $A$  переходит при повороте на угол  $2\pi$  в положительном направлении. При таком повороте  $\arg[t^{-(\lambda+1)}]$  принимает значение  $-2\pi(\lambda+1)$ , и интеграл от  $D$  до  $\infty$  будет равен

$$\frac{e^{-2\pi i(\lambda+1)}}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2+2tz}}{t^{\lambda+1}} dt \quad (t \text{ действительное}).$$

Таким образом, для интеграла (4.5.23) при  $\lambda < 0$  мы получаем выражение

$$\psi_\lambda = \frac{1}{\pi} e^{-\pi i(\lambda+1)} \sin \pi(\lambda+1) \int_0^\infty \frac{e^{-t^2+2tz}}{t^{\lambda+1}} dt. \quad (4.5.25)$$

Так как интеграл в (4.5.25) действителен, не обращается в нуль и не имеет полюсов при целых отрицательных  $\lambda$ , то при этих значениях  $\lambda$  должна обращаться в нуль  $\psi_\lambda$ . В этом нет ничего неожиданного, так как при таких  $\lambda$  значения интеграла по верхнему и нижнему участкам контура отличаются лишь знаком. Мы видим также, что, быть может, удобнее было бы, чтобы  $t^{-(\lambda+1)}$  была действительна в точке  $B$  контура, потому что тогда в выражение (4.5.25) не вошел бы показательный множитель.

Для того чтобы выяснить поведение  $\psi_\lambda$  при  $z \rightarrow 0$ , разложим  $e^{2tz}$  в степенной ряд и запишем

$$\psi_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-t^2} t^{n-\lambda-1} dt \right\}. \quad (4.5.26)$$

Такие интегралы могут быть выражены через гамма-функцию. (Требуемая для этого формула будет выведена в следующем пункте.) Поэтому мы выносим вычисление (4.5.26) в задачи, а здесь ограничимся лишь одним интересным замечанием. Если  $\lambda$  равно целому числу  $p > 0$ , то интеграл в (4.5.26) обращается в нуль при всех  $n > p$ . Следовательно,  $\psi_p$  представляет собой многочлен степени  $p$ . Это, конечно, подтверждается формулой (4.5.24).

Наконец, рассмотрим значения  $\psi_\lambda$  при больших  $z$ . (Здесь особенно отчетливо выступают преимущества интегрального представления  $\psi_\lambda$ . В нем содержится в наиболее доступной форме все сведения о функции; в частности, оно позволяет нам сопоставить поведение функции при  $z \rightarrow 0$  с ее поведением при  $z \rightarrow \infty$ .) При  $z \rightarrow \infty$  и  $\operatorname{Re} z < 0$  проще всего воспользоваться подстановкой  $u = -2tz$  ( $|\operatorname{Im} z| < |\operatorname{Re} z|$ ):

$$\psi_\lambda = -\frac{(2z)^\lambda}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-(u/2z)^2} e^{-u}}{(-u)^{\lambda+1}} du.$$

Разложив показательную функцию в степенной ряд, получим

$$\psi_\lambda = (2z)^\lambda \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n! (2z)^{2n}} \frac{1}{2\pi i} \int_C (-u)^{2n-\lambda-1} e^{-u} du \quad (\operatorname{Re} z > 0). \quad (4.5.27)$$

Эти интегралы выражаются через гамма-функцию [см. формулу (4.5.36)]. При очень больших  $|z|$  в этом ряде доминирует первый член, и  $\psi_\lambda \simeq Az^\lambda$ .

При  $\operatorname{Re} z < 0$ , положив  $u = 2tz$ , получим

$$\psi_\lambda = \frac{(2z)^\lambda}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-(u/2z)^2} e^u}{(u)^{\lambda+1}} du.$$

Контур интегрирования при этой замене переходит в контур, изображенный на рис. 4.27, б. Разложив в ряд  $e^{-(u/2z)^2}$ , получим

$$\psi_\lambda = (2z)^\lambda \sum \frac{(-1)^n}{n! (2z)^{2n}} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^u (u)^{2n-\lambda-1} du. \quad (4.5.28)$$

Последний интеграл также может быть выражен через гамма-функцию.

**Гамма-функция.** Выше [см. (4.3.14)] гамма-функция была определена следующим образом:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Gamma(n) = (n-1)!.$$
 (4.5.29)

Для того чтобы этот интеграл сходился,  $z$  должно иметь положительную действительную часть. При  $z$  нецелом  $t=0$  служит точкой ветвления подинтегральной функции. В качестве линии ветвления берется положительная действительная полуось. Элементарные преобразования приводят к следующим формулам:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0; \\ \Gamma(z) &= 3 \int_0^1 \left[ \ln \frac{1}{t} \right]^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.\end{aligned}$$
 (4.5.30)

Как уже говорилось в § 4.3,  $\Gamma(z)$  может быть аналитически продолжена на полуплоскость  $\operatorname{Re} z \leq 0$  посредством рекуррентного соотношения

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1).$$
 (4.5.31)

Из этого же соотношения можно получить сведения об особых точках функции  $\Gamma(z)$ .

Так как интеграл (4.5.29) сходится при  $\operatorname{Re} z > 0$ , то в верхней полуплоскости  $\Gamma(z)$  всюду конечна. Далее, так как производную  $\Gamma'(z)$  при  $\operatorname{Re} z > 0$  можно вычислить, дифференцируя в выражении (4.5.29) под знаком интеграла, то  $\Gamma(z)$  аналитична в полууплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$ . Чтобы выяснить поведение  $\Gamma(z)$  при  $\operatorname{Re} z < 0$ , выберем для заданного  $z$  настолько большое  $n$ , чтобы выполнялось неравенство  $\operatorname{Re}(z+n+1) > 0$ . Пусть  $n$  — наименьшее целое число, удовлетворяющее этому требованию. Тогда, очевидно,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1)(z+n-2)\dots z},$$
 (4.5.32)

и мы видим что  $\Gamma(z)$  конечна и имеет определенную производную, если только  $z$  не равно нулю или целому отрицательному числу.

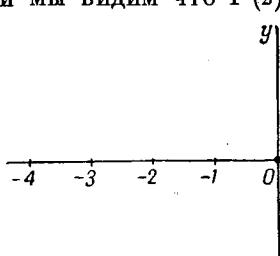
Вблизи числа  $-n$  ( $n$  — целое положительное число или нуль) мы можем положить  $z = -n + \varepsilon$ , где  $|\varepsilon| \ll 1$ , и тогда в силу (4.5.32)

$$\Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{(-1)^n \Gamma(1 + \varepsilon)}{(n-\varepsilon)(n-\varepsilon-1)\dots(1-\varepsilon)\varepsilon},$$

Рис. 4.28. Расположение полюсов гамма-функции.

а эта функция имеет при  $\varepsilon = 0$  простой полюс. Итак, функция  $\Gamma(z)$  аналитична во всех конечных точках плоскости  $z$ , за исключением точек  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ , которые являются ее простыми полюсами (см. рис. 4.28). Так как  $\Gamma(1) = 1$ , то вычет функции  $\Gamma(z)$  относительно полюса  $z = -n$  равен  $(-1)^n / n!$ .

Правильным расположением своих полюсов, на одинаковом расстоянии один от другого, функция  $\Gamma(z)$  напоминает такие функции, как  $\operatorname{cosec} \pi z$  или  $\operatorname{ctg} \pi z$ . Последние, впрочем, имеют полюсы и на положитель-



ной действительной полуоси. На этой же полуоси расположены, очевидно, полюсы функции  $\Gamma(-z)$ . Поэтому функция  $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$  будет иметь полюсы при всех целых значениях  $z=n$  (положительных и отрицательных), и других полюсов у нее не будет. Следовательно, произведение  $\sin \pi z \Gamma(z)\Gamma(1-z)$  будет аналитической функцией в любой конечной точке плоскости. [Здесь нельзя было взять  $\operatorname{tg} \pi z$  вместо  $\sin \pi z$ , так как  $\operatorname{tg} \pi z$  имеет полюсы при всех  $z=(2p+1)\pi/2$ , где  $p$  — целое.] Мы сейчас покажем, что на самом деле

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z. \quad (4.5.33)$$

Это тождество будет сначала установлено для действительных значений  $z$ , заключенных между 0 и 1; на всю плоскость оно будет распространено посредством аналитического продолжения (см. теорему на стр. 369).

Для доказательства формулы (4.5.33), воспользовавшись первой из формул (4.5.30), напишем двойной интеграл

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2a-1} y^{-(2a-1)} dx dy.$$

Переходя к полярным координатам  $x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$ , получаем

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = 4 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg} \theta)^{2a-1} d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg} \theta)^{2a-1} d\theta.$$

Для того чтобы вычислить этот последний интеграл, прибегнем к подстановке  $\operatorname{ctg} \theta = s$ ; при этом

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = 2 \int_0^\infty \frac{s^{2a-1} ds}{1+s^2},$$

и мы получили интеграл, к которому при  $0 < a < 1$  применима формула (4.5.5). Таким образом,

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = 2 \operatorname{cosec} (2\pi a) \times \left\{ \sum \operatorname{Res} [(-s)^{2a-1}/(1+s^2)] \text{ в } s = \pm i \right\},$$

если  $0 < a < 1$ . Несложный подсчет дает  $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \pi \operatorname{cosec} \pi a$ . Далее, как уже говорилось, применяется аналитическое продолжение.

Воспользуемся этой формулой для получения следующих двух результатов. Во-первых, положив  $z=1/2$ , получаем  $[\Gamma(1/2)]^2 = \pi$ , т. е.  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Во-вторых, мы покажем, что  $[\Gamma(z)]^{-1}$  является целой функцией. Так как у  $\Gamma(z)$  нет других конечных особых точек, кроме полюсов, то достаточно убедиться в том, что  $\Gamma(z)$  не имеет нулей в конечных точках. А это следует из (4.5.33), так как если бы  $\Gamma(z)$  обращалась в нуль в какой-либо точке, то в этой точке  $\Gamma(1-z)$  было бы бесконечно. Но полюсы функции  $\Gamma(1-z)$  известны, и в них  $\Gamma(z)$  в нуль не обращается.

**Контурные интегралы для гамма-функции.** Получив известное общее представление о поведении функции  $\Gamma(z)$ , мы займемся теперь выводом таких выражений для  $\Gamma(z)$ , которые были бы справедливы в более широких областях, нежели выражение (4.5.29). Одно из таких выражений получается непосредственно при решении разностного уравнения (4.5.31). При этом нужно выбрать такое решение уравнения (4.5.31), которое при  $\operatorname{Re} z > 0$  сводится к (4.5.29). [Заметим, что любое решение уравнения (4.5.31), умноженное на периодическую функцию с перио-

дом 1, снова дает решение того же уравнения.] Вид выражения (4.5.29) подсказывает нам, что решение следует искать в виде интеграла

$$\Gamma(z) = \int_C v(t) t^{z-1} dt,$$

где контур  $C$  и функция  $v(t)$  подлежат еще определению. Подставив этот интеграл в (4.5.31), получим

$$\int_C v(t) t^z dt = \int_C v(t) zt^{z-1} dt = \int_C v(t) \frac{d}{dt}(t^z) dt.$$

Интегрируя по частям во втором из этих трех интегралов, приходим к равенству

$$\int_C \left[ v(t) + \frac{dv}{dt} \right] t^z dt = [v(t) t^z],$$

где в правой части стоит разность в конечных точках контура. Выберем контур так, чтобы разность  $[v(t) t^z]$  обратилась в нуль; тогда в качестве  $v$  можно взять решение уравнения

$$v(t) + \frac{dv}{dt} = 0,$$

то есть

$$v = \text{const} \cdot e^{-t}$$

и

$$\Gamma(z) = A \int_C (e^{-t}) (-t)^{z-1} dt, \quad (4.5.34)$$

где  $A$  — некоторая постоянная. Выберем в качестве  $C$  контур, изображенный на рис. 4.27, а. Теперь мы вычислим этот интеграл при  $\operatorname{Re} z > 0$  и выберем  $A$  так, чтобы (4.5.34) совпало с (4.5.29). Пусть  $\arg[(-t)^{z-1}] = 0$  в точке  $B$ ; тогда при  $\operatorname{Re} z > 0$

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= A \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{-t} e^{-\pi i(z-1)} t^{z-1} dt + \int_0^\infty e^{-t} e^{\pi i(z-1)} t^{z-1} dt \right\} = \\ &= 2iA \sin[\pi(z-1)] \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \end{aligned}$$

Отсюда  $A = -1/(2i \sin \pi z)$ , и мы получаем

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i \sin \pi z} \int_C e^{-t} (-t)^{z-1} dt \quad (4.5.35)$$

— представление, справедливо для всех  $z$ . Комбинируя его с соотношением (4.5.33), приходим к другому интегральному представлению

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-t} (-t)^{-z} dt. \quad (4.5.36)$$

Поведение  $\Gamma(z)$  при целых  $z$  можно найти из формулы (4.5.35) или (4.5.36), непосредственно.

**Представление гамма-функции в виде бесконечного произведения.** Другое полезное представление функции  $\Gamma(z)$  можно получить, воспользовавшись формулой (4.3.8), выраждающей целую функцию в виде бесконечного произведения. Так как  $[\Gamma(z+1)]^{-1}$  — целая функция, нулями которой являются точки  $z = -1, -2, \dots$ , то, согласно (4.3.8),

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}. \quad (4.5.37)$$

Постоянная  $\gamma = -\Gamma'(1)/\Gamma(1)$ , известная под названием *постоянной Эйлера-Маскерони*, приближенно равна 0,5772157. Ее значение нетрудно получить, положив  $z = 1$  и прологарифмировав обе части равенства (4.5.37):

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right]. \quad (4.5.38)$$

Из формул (4.5.38) можно получить и другие выражения для  $\gamma$ :

$$\gamma = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{M} - \ln M \right), \quad (4.5.39)$$

$$\gamma = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^{M-1} \int_0^{\infty} e^{-nq} dq - \int_0^{\infty} \frac{e^{-q} - e^{-Mq}}{q} dq \right),$$

$$\gamma = \int_0^{\infty} e^{-q} \left( \frac{1}{1-e^{-q}} - \frac{1}{q} \right) dq. \quad (4.5.40)$$

**Производные гамма-функции.** Для последующих приложений существенный интерес представляет логарифмическая производная гамма-функции

$$\psi_1(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (4.5.41)$$

Из (4.5.37) следует, что

$$\psi_1(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right). \quad (4.5.42)$$

Когда  $z$  принимает целое значение  $N$ ,

$$\psi_1(N) = -\gamma + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}, \quad \psi_1(1) = -\gamma. \quad (4.5.43)$$

Производная функции  $\psi_1(z)$  имеет вид

$$\psi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}. \quad (4.5.44)$$

Вообще

$$\psi_p(z) = \frac{d}{dz} \psi_{p-1}(z) = (-1)^p (p-1)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^p}. \quad (4.5.45)$$

Таблицы этих функций для действительных  $z$  позволяют непосредственно вычислить суммы рядов, общие члены которых представляют собой

рациональные функции номера. Так, например, сумму

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 (n+a)^2}$$

можно записать в виде

$$S = \frac{1}{(a-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+a)^2} \right) - \frac{2}{a-1} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+a} \right) \right\},$$

и поэтому

$$S = \frac{1}{(a-1)^2} \left\{ [\psi_2(1) + \psi_2(a)] - \frac{2}{a-1} [-\psi_1(1) + \psi_1(a)] \right\}.$$

Функции  $\psi_p$  («полигамма-функции») подчиняются простой рекуррентной (по аргументу) формуле. В самом деле,

$$\psi_p(z+1) = (-1)^p (p-1)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1+z)^p} = (-1)^p (p-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^p},$$

откуда следует, что

$$\psi_p(z+1) = \psi_p(z) - [(-1)^p (p-1)!] \frac{1}{z^p}. \quad (4.5.46)$$

Тем же приемом, каким была получена формула (4.5.40) для  $\gamma$ , можно получить интегральные представления полигамма-функций  $\psi_p$ . Из формулы (4.5.42) вытекает

$$\psi_1(z) = -\gamma + \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-q}}{1-e^{-q}} - \frac{e^{-zq}}{1-e^{-q}} \right) dq.$$

Выражая  $\gamma$  с помощью формулы (4.5.40), получаем

$$\psi_1(z) = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-q}}{q} - \frac{e^{-zq}}{1-e^{-q}} \right) dq. \quad (4.5.47)$$

Последовательно дифференцируя по  $z$ , приходим к общей формуле для полигамма-функций

$$\psi_p(z) = (-1)^p \int_0^{\infty} \frac{q^{p-1} e^{-zq}}{1-e^{-q}} dq. \quad (4.5.48)$$

Эта формула дает возможность выяснить поведение  $\psi_p(z)$  при  $z \rightarrow \infty$ . Последовательно интегрируя по  $z$ , получаем  $\psi_1(z) = [d \ln \Gamma(z)]/dz$  и затем  $\Gamma(z)$ ; таким образом можно выяснить поведение  $\Gamma(z)$  при больших  $z$ . Впрочем, из-за необходимости находить постоянные интегрирования мы отложим рассмотрение этого вопроса до следующего параграфа. Здесь же мы ограничимся тем, что приведем для справок асимптотическую формулу Стирлинга для значений  $z$ , заключенных в первом квадранте,

$$\ln \Gamma(z) = -z + \left( z - \frac{1}{2} \right) \ln z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad (z \rightarrow \infty), \quad (4.5.49)$$

или

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} \left( 1 + \frac{1}{12z} + \dots \right) \quad (z \rightarrow \infty). \quad (4.5.50)$$

**Формула удвоения.** Применим теперь бесконечное произведение (4.5.37) к выводу формулы удвоения

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z). \quad (4.5.51)$$

Для доказательства рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} &= 2e^{iz} \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2z}{n}\right) e^{-2z/n}}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)} = \\ &= 2e^{iz} (1+2z) e^{-2z} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2z}{2p+1}\right) e^{-2z/(2p+1)} = \\ &= 2e^{iz} (1+2z) e^{-2z} \frac{\prod_{p=1}^{\infty} \left[1 + \left(z + \frac{1}{2}\right)/p\right] e^{-\left(z + \frac{1}{2}\right)/p}}{\prod_{p=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2p}\right] e^{-1/2p}} \prod_{p=1}^{\infty} \exp \left[z \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/2}\right)\right]. \end{aligned}$$

В силу формулы (4.5.37), выражающей гамма-функцию в виде бесконечного произведения,

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{2\Gamma(1/2) e^{-2z}}{\Gamma(z+1/2)} \exp \left[z \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/2}\right)\right]. \quad (4.5.52)$$

Для вычисления показательного множителя положим  $z = 1$  в (4.5.52) и получим

$$\exp \left[\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/2}\right)\right] = \frac{e^2}{4}. \quad (4.5.53)$$

Подставляя (4.5.53) в (4.5.52), приходим к формуле удвоения (4.5.51).

**Бета-функция.** Рассмотрение гамма-функции мы заключим знакомством с бета-функцией; последняя определяется равенством

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (4.5.54)$$

или, иначе,

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt, \quad B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta. \quad (4.5.55)$$

Мы ограничимся тем, что установим формулу

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (4.5.56)$$

Согласно первой формуле (4.5.30),

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2p-1} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2q-1} dy; \quad (4.5.57)$$

переходя к полярным координатам ( $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ), получаем равенство

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta.$$

Пользуясь снова формулой (4.3.30), а также формулой (4.5.55), приходим к (4.5.56).

**Периодические функции.** Много раз нам встретятся и будут нужны функции, обладающие свойством *периодичности*, т. е. функции, значения которых повторяются снова и снова. В математике функция  $f(z)$  называется периодической, если существует такое комплексное число  $a$ , что

$$f(z+a) = f(z)$$

для всех значений  $z$  из области, где  $f$  аналитична. Эта постоянная  $a$  называется *периодом* функции  $f$ . Когда  $z$  перемещается от  $z_0 + a$  до  $z_0 + 2a$ , функция  $f$  снова изменяется так же, как при переходе от  $z_0$  к  $z_0 + a$ .

Разумеется, если  $a$  — период функции  $f$ , то  $2a$ , а также любое целое (положительное или отрицательное) кратное  $a$  является периодом  $f$ . Иногда  $a/2$ ,  $a/3$  и т. д. также оказываются периодами. Однако такое дробление периода не может продолжаться безгранично. Посредством несложного рассуждения читатель может убедиться в том, что функция, отличная от постоянной, не может иметь бесконечно малого периода. (Необходимо воспользоваться непрерывностью функции  $f$  и свойством единственности аналитических функций.) Расположив по порядку периоды некоторой заданной периодической функции, мы обнаружим, что все они являются целыми кратными некоторого *основного периода*  $\tau$ , характеристического для функции  $f$ . Функция  $f$  удовлетворяет тождеству

$$f(z+\tau) = f(z), \quad (4.5.58)$$

но если снабдить  $\tau$  множителем, меньшим 1 по модулю, то аналогичное тождество не будет иметь места<sup>1)</sup>.

Функции  $\sin z$  и  $\operatorname{tg}(z/2)$  — периодические с основным периодом  $2\pi$ ,  $e^z$  — периодическая функция с основным периодом  $2\pi i$  и т. д. Функции такого рода допускают представления в виде рядов или бесконечных произведений, в которых проявляется наличие полюсов (или нулей), лежащих на прямой (или на прямых) в плоскости  $z$  на расстоянии  $\tau$  один от другого. Таковы, например, рассмотренные выше представления

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n z}{z^2 - (n\pi)^2}, \quad \sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{z}{n\pi} \right)^2 \right]. \quad (4.5.59)$$

Периодичность синуса можно было бы получить алгебраическими средствами непосредственно из этих выражений.

Периодические функции можно характеризовать также их дифференциальными уравнениями. Например,  $\sin z$  является решением уравнения

$$\left( \frac{dy}{dz} \right)^2 = 1 - y^2 \quad (4.5.60)$$

<sup>1)</sup> Возможны также двоякопериодические функции, о которых будет сказано ниже. — Прим. ред.

или уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -y, \quad (4.5.61)$$

получающегося из предыдущего дифференцированием.

Для того чтобы обнаружить периодичность функции  $\sin z$  при действительных  $z$ , воспользуемся уравнением (4.5.60). Возьмем такое его решение  $y$ , которое обращается в нуль при  $z = 0$ ; тогда уравнение показывает, что производная этого решения в той же точке принимает значение 1 (она может равняться  $\pm 1$ , но мы возьмем +1). Когда  $z$  возрастает, возрастает и  $y$ , до тех пор пока  $y$  не обратится в 1; в этот момент  $dy/dz = 0$ , а  $d^2y/dz^2 = -1$  [см. уравнение (4.5.61)]. Таким образом, 1 есть наибольшее значение функции  $y$  на действительной оси. Когда  $z$  продолжает возрастать,  $y$  убывает, а производная  $dy/dz$ , оставаясь отрицательной, возрастает по абсолютной величине, и когда  $y$  снова обращается в нуль,  $dy/dz$  принимает значение -1. При дальнейшем возрастании  $z$  функция  $y$  становится отрицательной, достигает -1, снова начинает возрастать и при некотором  $z$  принимает значение 0, а ее производная — значение 1, как в начальный момент. При этом значении  $z$  функция  $y$  заканчивает свой первый «цикл» и готова начать второй. Мы замечаем, что в силу симметрии самого уравнения этот полный период функции  $y$  разбивается на четыре равных участка, на первом из которых  $y$  растет от 0 до 1, на втором убывает от 1 до 0 и т. д.

Возвращаясь к уравнению (4.5.60), замечаем, что его решение, обращающееся в нуль при  $z = 0$ , определяется равенством

$$z = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

то есть  $z = \arcsin y$ . Собственно говоря, здесь мы имеем выражение для *обратной функции* ( $z$  как функция  $y$ ), но оно позволяет легко отыскать период *функции*  $y$ . Из рассуждений предыдущего абзаца вытекает, что если  $\tau$  — период, то

$$\frac{1}{4} \tau = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Этот интеграл равен  $\pi/2$ , а поэтому рассматриваемая функция  $y$  имеет период  $\tau = 2\pi$ .

В учебниках анализа свойства тригонометрических функций, связанные с периодичностью, изучаются подробнее и гораздо более строго, чем здесь, где мы не можем уделить этим вопросам много места; для нас эти рассмотрения служат лишь подходом к изучению более общих периодических функций.

Существуют ли функции комплексного переменного  $z$ , имеющие *два* периода, скажем,  $a_1$  и  $a_2$ ? Тождества  $y(z+a_1) \equiv y(z)$  и  $y(z+a_2) \equiv y(z)$  не дают ничего нового в том случае, когда векторы  $a_1$  и  $a_2$  имеют одинаковое направление в комплексной плоскости (т. е. когда отношение  $a_1/a_2$  действительно); в самом деле, одновременно с  $a_1$  периодами являются  $2a_1$ ,  $3a_1$  и т. д. Можно, конечно, еще спросить, не могут ли периоды  $\tau_1$  и  $\tau_2$  иметь одинаковое направление, но несоизмеримые длины. Однако этот случай исключается по тем же соображениям, в силу которых период функции (отличной от постоянной) не может быть бесконечно мал. [В самом деле, если  $\tau_2 = \lambda\tau_1$ , где  $\lambda$  — действительное, но иррациональное число, то среди чисел  $(m+\lambda n)\tau_1$  нашлись бы периоды, сколь угодно мало-

отличающиеся друг от друга, а это невозможно.] Но если  $a_1$  и  $a_2$  имеют различные направления в комплексной плоскости (т. е.  $a_1/a_2$  не является действительным числом), то возникает совершенно иное положение, более сложное, чем в случае однопериодической функции.

Прежде всего, вместо последовательности периодов, лежащих на одной прямой, мы получаем на плоскости целую решетку параллелограммов, в каждом из которых рассматриваемая функция ведет себя в точности одинаково.

Наименьший параллелограмм, поведение функции в котором целиком воспроизводится в других параллелограммах решетки, называется *основным параллелограммом* для данной функции  $f$ ; сторонами основного параллелограмма служат основные периоды  $\tau_1$  и  $\tau_2$  этой функции. В окрестности точки  $z + m\tau_1 + n\tau_2$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) функция  $f$  ведет себя так же, как в окрестности точки  $z$  исходного параллелограмма. Точки  $z$  и  $z + m\tau_1 + n\tau_2$  называются *конгруэнтными* (по отношению к  $f$ ).

Можно задать вопрос, существуют ли функции комплексного переменного, имеющие более двух независимых периодов? Доказательство того, что таких функций нет, аналогично доказательству невозможности для функции иметь два независимых периода с действительным отношением и основывается по существу на том, что комплексная плоскость двумерна. Итак, могут существовать однопериодические и двоякопериодические функции комплексного переменного, но периодичность тройная или более высокой кратности невозможна.

**Основные свойства двоякопериодических функций.** Прежде чем выводить какие бы то ни было формулы, касающиеся двоякопериодических функций, мы установим некоторые свойства этих последних посредством контурного интегрирования. Заметим, что интеграл вдоль границы основного параллелограмма, в силу периодичности подинтегральной функции, равен нулю. Двоякопериодическая функция  $f(z)$ , имеющая основные периоды  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , может иметь нули и полюсы. Если это так, то в каждом параллелограмме тех и других должно быть одинаковое количество (при этом мы условимся выбирать основной параллелограмм так, чтобы на его границе не было ни нулей, ни полюсов). Если функция имеет точки ветвления, то эти последние в каждом параллелограмме появляются парами, а поэтому линии ветвления можно провести так, чтобы они не пересекали границ параллелограммов.

Займемся такими двоякопериодическими функциями, которые не имеют точек ветвления, но могут иметь полюсы и нули целого порядка. [Это означает, что вблизи таких точек  $z_i$  рассматриваемые функции имеют вид  $(z - z_i)^{n_i} g_i(z)$ , где  $n_i$  — целое число, положительное или отрицательное, а функция  $g_i(z)$  аналитична в  $z_i$  и  $g_i(z_i) \neq 0$ ; показатель  $n_i$ , когда он положителен, представляет собой *порядок* нуля  $z_i$ , а при  $n_i < 0$  порядок полюса  $z_i$  равен  $|n_i|$ .] Такие функции называются *эллиптическими*. Согласно сказанному на стр. 386, интеграл  $(1/2\pi i) \oint f(z) dz$  по замкнутому контуру от такой функции  $f$  равен сумме ее вычетов в особых точках, лежащих внутри контура. Но при интегрировании по границе основного параллелограмма интеграл равен нулю, и мы приходим к следующему выводу:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Сумма вычетов эллиптической функции во всех ее полюсах,} \\ \text{лежащих в основном параллелограмме, равна нулю.} \end{array} \right\} \quad (4.5.62)$$

Если все полюсы некоторой эллиптической функции простые, то их должно быть по меньшей мере два в каждом параллелограмме, чтобы соответствующие вычеты могли взаимно уничтожиться. Эллиптическая функция может, конечно, иметь один полюс порядка  $> 2$  в каждом параллелограмме,

если вычет в нем равен нулю. (Эллиптическая функция может, конечно, и вовсе не иметь полюсов, но тогда она тождественно равна постоянной. Почему?)

Если  $f$  — эллиптическая функция, то, очевидно,  $f+c$ ,  $1/f$ ,  $f'$ ,  $f^n$  и  $f'/f$  также являются эллиптическими функциями. Рассматривая интеграл  $\oint (1/f) dz$  по границе основного параллелограмма, убеждаемся в том, что сумма вычетов  $1/f(z)$  в ее полюсах, — а последние являются нулями функции  $f(z)$ , — по основному параллелограмму равна нулю. Поэтому, если все нули эллиптической функции  $f$  простые, то они встречаются парами и в каждом параллелограмме их должно быть не меньше двух. Согласно определению, эллиптическая функция не может иметь существенно особых точек. У нее не может быть и бесконечного множества полюсов в основном параллелограмме, так как иначе в некоторой конечной точке появилась бы изолированная особенность. Следовательно, в любом основном параллелограмме эллиптическая функция может иметь лишь конечное число полюсов и, соответственно, лишь конечное число нулей.

Возьмем теперь произвольную аналитическую функцию  $f(z)$ , имеющую внутри некоторого контура конечное число нулей и конечное число особых точек, каждая из которых представляет собой полюс, и рассмотрим интеграл  $\oint [f'(z)/f(z)] dz$  ( $f' = df/dz$ ), взятый вдоль этого контура. Функция  $f$  вблизи полюса  $z_i$  порядка  $n_i$  имеет вид  $f = (z - z_i)^{-n_i} g_i(z)$ , где  $g_i(z)$  — аналитическая функция и  $g_i(z_i) \neq 0$ . При этом  $f'/f$  имеет в точке  $z_i$  простой полюс, а вычет ее относительно этого полюса равен  $-n_i$ . Вблизи нуля  $\tilde{z}_j$   $f$  имеет вид  $f = (z - \tilde{z}_j)^{m_j} h_j(z)$ , где  $m_j$  — порядок нуля,  $h_j(z)$  — аналитическая функция, причем  $h_j(\tilde{z}_j) \neq 0$ . Точка  $\tilde{z}_j$  является также простым полюсом функции  $f'/f$ , и соответствующий вычет равен  $m_j$ . Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j m_j - \sum_i n_i, \quad (4.5.63)$$

т. е. такой интеграл равен сумме порядков нулей минус сумма порядков полюсов функции  $f$ , лежащих внутри контура интегрирования. В том случае, когда все эти нули и полюсы первого порядка, интеграл (4.5.63) равен разности между числом нулей и числом полюсов.

Применяя этот вывод к интегралу от эллиптической функции, взятыму вдоль границы основного параллелограмма, получаем теорему:

Для эллиптической функции сумма порядков всех полюсов, лежащих внутри основного параллелограмма, равна сумме порядков всех нулей, лежащих в этом параллелограмме. Если все эти полюсы и нули простые, то число полюсов равно числу нулей. (4.5.64)

Рассматривая интеграл  $\oint [f'/(f - C)] dz$ , взятый вдоль границы основного параллелограмма, приходим к такому заключению:

Если  $f$  — эллиптическая функция, то число корней<sup>1)</sup> уравнения  $f(z) = C$ , принадлежащих основному параллелограмму, при любом значении постоянной  $C$  равно сумме порядков полюсов  $f$  в основном параллелограмме. (4.5.65)

<sup>1)</sup> Корни  $z_j$  уравнения  $f(z) = C$  являются нулями функции  $f(z) - C$  порядка  $n_j (> 1)$ . Числом корней уравнения  $f(z) = C$  называют сумму  $\sum_j n_j$ . — Прим. перев.

Сумма порядков полюсов функции  $f$  в основном параллелограмме (равная числу полюсов в основном параллелограмме в том случае, когда все эти полюсы простые) называется *порядком* эллиптической функции. В силу теоремы (4.5.62) не существует эллиптических функций первого порядка. Эллиптическая функция нулевого порядка есть постоянная, так что простейшими нетривиальными эллиптическими функциями являются функции второго порядка.

**Эллиптические функции второго порядка.** Существует эллиптическая функция, имеющая в основном параллелограмме один полюс второго порядка и два простых нуля; это — *эллиптическая функция Вейерштрасса*. Впрочем, более полезны *эллиптические функции Якоби*, имеющие по два простых полюса и по два простых нуля в каждом основном параллелограмме. В силу теоремы (4.5.65) *каждая из этих функций в любом основном параллелограмме принимает любое значение в точности два раза*.

Такие функции, подобно тригонометрическим, могут быть построены с помощью рядов или бесконечных произведений, либо путем обращения некоторых интегралов. Для первой из функций Якоби мы выбираем на действительной оси последовательность нулей, отстоящих на  $\tau_1/2$  один от другого, где (действительное) число  $\tau_1$  — первый основной период функции. Считая, что второй основной период  $\tau_2$  чисто мнимый, поместим над каждым нулем на расстоянии  $|\tau_2|/2$  простой полюс. Над цепочкой полюсов на том же расстоянии появится новая цепочка нулей и т. д.

По аналогии с рядом (4.5.59) можно было бы составить ряд, «ведающий» нулями нашей функции. Потребуем, чтобы последняя вблизи своих нулей вела себя как синус, т. е. имела производную, равную 1, а при  $\tau_2 \rightarrow \infty$ , становясь однопериодической, превращалась бы прямо в  $\sin z$ . Об этих свойствах напоминает обозначение  $\operatorname{sn} z$  конструируемой функции.

Полюсы функции  $1/\operatorname{sn} z$  (т. е. нули  $\operatorname{sn} z$ ), лежащие на действительной оси, можно получить, введя в ряд член  $(2\pi/\tau_1) \operatorname{cosec}(2\pi z/\tau_1)$ . Последний ведет себя требуемым образом вблизи каждого из действительных нулей  $\operatorname{sn} z$  и сводится к  $1/\sin z$ , если  $\tau_1 \rightarrow 2\pi$  при  $\tau_2 \rightarrow \infty$ . Следующая цепочка полюсов функции  $1/\operatorname{sn} z$  образована точками  $z = \tau_2 \pm m\tau_1/2$ , где  $\tau_2$  — чисто мнимое число.

Выражение

$$\frac{\cos(2\pi\tau_2/\tau_1)}{\sin^2(2\pi z/\tau_1) - \sin^2(2\pi\tau_2/\tau_1)}$$

имеет полюсы в точках  $z = \pm \tau_2 + n\tau_1/2$ , так же как  $1/\sin(2\pi z/\tau_1)$  в точках  $z = n\tau_1/2$ . Комбинируя эти выражения, получаем

$$\frac{2 \cos(2\pi\tau_2/\tau_1) \sin(2\pi z/\tau_1)}{\sin^2(2\pi z/\tau_1) - \sin^2(2\pi\tau_2/\tau_1)} = \frac{4 \sin(2\pi z/\tau_1) \cos(2\pi\tau_2/\tau_1)}{\cos(4\pi\tau_2/\tau_1) - \cos(4\pi z/\tau_2)}.$$

Учитывая всевозможные цепочки нулей  $\operatorname{sn} z$ , пересекающие мнимую ось в точках  $iy = \pm n\tau_2$ , составляем ряд

$$\frac{1}{\operatorname{sn} z} = \frac{2\pi}{\tau_1} \left\{ \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi z}{\tau_1}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi z/\tau_1) \cos(2\pi n\tau_1/\tau_2)}{\cos(4\pi n\tau_2/\tau_1) - \cos(4\pi z/\tau_2)} \right\}, \quad (4.5.66)$$

обеспечивающий требуемое распределение нулей функции  $\operatorname{sn} z$  во всей комплексной плоскости. Нетрудно показать, что нули этого ряда (т. е. полюсы функции  $\operatorname{sn} z$ ) лежат посередине между любыми двумя соседними полюсами [т. е. в точках  $z = m\tau_1/2 + (n + 1/2)\tau_2$ ]. Значительно труднее было бы найти вычеты  $\operatorname{sn} z$  в этих точках.

К эллиптическим функциям можно подойти еще иначе. Ряд

$$F(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \gamma + 2i n u} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nu) \quad (4.5.67)$$

(где  $\operatorname{Im} \gamma > 0$  и  $q = e^{\pi i \gamma}$ ) представляет собой периодическую функцию переменного  $u$  с периодом  $\pi$ . Он сходится, когда мнимая часть  $\gamma$  положительна, т. е. когда  $|q| < 1$ . Интересно, что такой ряд *псевдопериодичен* по  $u$  с периодом  $\pi\gamma$ , так как

$$\begin{aligned} F(u + \pi\gamma) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \gamma (n^2 + 2n) + 2i n u} = e^{-\pi i \gamma - 2i u} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \gamma (n+1)^2 + 2i(n+1)u} = \\ &= q^{-1} e^{-2i u} F(u). \end{aligned}$$

Следующие четыре подобных ряда называются *тета-функциями*:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(u, q) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin[(2n+1)u], \quad \vartheta_1(u + \pi, q) = -\vartheta_1(u, q), \\ &\quad \vartheta_1(u + \pi\gamma, q) = -N\vartheta_1(u, q), \\ \vartheta_2(u, q) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos[(2n+1)u], \quad \vartheta_2(u + \pi, q) = -\vartheta_2(u, q), \\ &\quad \vartheta_2(u + \pi\gamma, q) = N\vartheta_2(u, q), \\ \vartheta_3(u, q) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nu), \quad \vartheta_3(u + \pi, q) = \vartheta_3(u, q), \\ &\quad \vartheta_3(u + \pi\gamma, q) = N\vartheta_3(u, q), \\ \vartheta_4(u, q) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nu), \quad \vartheta_4(u + \pi, q) = \vartheta_4(u, q), \\ &\quad \vartheta_4(u + \pi\gamma, q) = -N\vartheta_4(u, q), \\ \vartheta_2(u, q) &= \vartheta_1\left(u + \frac{1}{2}\pi, q\right), \quad \vartheta_3(u, q) = \vartheta_4\left(u + \frac{1}{2}\pi, q\right) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (4.5.68)$$

Здесь  $q = e^{\pi i \gamma}$  и  $N = q^{-1} e^{-2i u}$ . Эти функции не являются, конечно, собственно эллиптическими функциями из-за наличия множителя  $N$ .

Оперируя с тета-рядами, можно показать, что выражения

$$\frac{\vartheta_1^2(u) + a\vartheta_4^2(u)}{\vartheta_2^2(u)}, \quad \frac{\vartheta_1^2(u) + b\vartheta_4^2(u)}{\vartheta_3^2(u)}$$

представляют собой уже настоящие эллиптические функции. Подбрав должным образом постоянные  $a$  и  $b$ , можно добиться того, чтобы эти отношения имели не более одного простого нуля в основном параллелограмме со сторонами  $\pi$  и  $\pi\gamma$ . Тогда, в силу теоремы (4.5.62) при таких  $a$  и  $b$  рассматриваемые отношения будут постоянны, и мы сможем выразить  $\vartheta_2^2$  и  $\vartheta_3^2$  через  $\vartheta_1^2$  и  $\vartheta_4^2$ . Для отыскания  $a$  и  $b$  полагаем  $u = 0$  и  $\pi/2$ . Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \vartheta_2^2(u) \vartheta_4^2(0) &= \vartheta_4^2(u) \vartheta_2^2(0) - \vartheta_1^2(u) \vartheta_3^2(0), \\ \vartheta_3^2(u) \vartheta_4^2(0) &= \vartheta_4^2(u) \vartheta_3^2(0) - \vartheta_1^2(u) \vartheta_2^2(0), \\ \vartheta_1^2(u) \vartheta_4^2(0) &= \vartheta_3^2(u) \vartheta_2^2(0) - \vartheta_2^2(u) \vartheta_3^2(0), \\ \vartheta_4^2(u) \vartheta_4^2(0) &= \vartheta_3^2(u) \vartheta_3^2(0) - \vartheta_2^2(u) \vartheta_2^2(0). \end{aligned} \quad (4.5.69)$$

Второй аргумент  $q$  опущен для упрощения записи.

Исходя из тета-функций, можно, как мы видели, построить настоящие эллиптические функции. Для этого нужно взять их отношения,

чтобы освободиться от нежелательного множителя  $N$ . Так, например, функция

$$\operatorname{sn} z = \frac{\vartheta_3(0, q)}{\vartheta_2(0, q)} \frac{\vartheta_1(u, q)}{\vartheta_4(u, q)}, \quad u = \frac{z}{[\vartheta_3(0, q)]^2}, \quad (4.5.70)$$

имеет те же нули и так же ведет себя вблизи каждого из нулей, как и функция, определенная равенством (4.5.66), если только числа  $\pi[\vartheta_3(0, q)]^2$  и  $\pi[\vartheta_2(0, q)]^2$  равны соответственно периодам  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Далее в монографиях по эллиптическим функциям из формул (4.5.68) выводятся, не без труда, дифференциальные уравнения для тета-функций и для  $\operatorname{sn} z$ . Так, например,

$$\frac{d}{du} \left[ \frac{\vartheta_1(u, q)}{\vartheta_4(u, q)} \right] = [\vartheta_4(0, q)]^2 \frac{\vartheta_2(u, q)}{\vartheta_4(u, q)} \frac{\vartheta_3(u, q)}{\vartheta_4(u, q)},$$

и если  $\eta = \vartheta_1(u, q)/\vartheta_4(u, q)$ , то после некоторых преобразований получаем

$$\left( \frac{d\eta}{du} \right)^2 = [\vartheta_2^2(0, q) - \eta^2 \vartheta_3^2(0, q)] [\vartheta_3^2(0, q) - \eta^2 \vartheta_2^2(0, q)].$$

Наконец, полагая  $y = [\vartheta_3(0, q)/\vartheta_2(0, q)] \eta$  и  $z = u [\vartheta_3(0, q)]^2$ , получаем для  $y$  уравнение

$$\left( \frac{dy}{dz} \right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2), \quad (4.5.71)$$

в котором  $\sqrt{k} = \vartheta_2(0, q)/\vartheta_3(0, q)$ . Все свойства эллиптической функции  $y = \operatorname{sn} z$  могут быть получены из рассмотрения быстро сходящихся рядов (4.5.68). Однако для исследования некоторых свойств удобнее в основу определения  $\operatorname{sn} z$  положить уравнение (4.5.71).

**Интегральные представления эллиптических функций.** Уравнение (4.5.71) приводит нас к третьему способу определения эллиптических функций второго порядка, самому полезному во всех случаях (исключая, может быть, задачу табулирования функций). Формальным решением дифференциального уравнения (4.5.71) является

$$z = F(k, y) = F(y) = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} \quad (4.5.72)$$

— функция, обратная эллиптической функции  $\operatorname{sn} z$ . Рассуждая так же, как на стр. 403 в случае  $\arcsin z$ , приходим к заключению, что  $y = \operatorname{sn} z$  — периодическая функция с периодом  $\tau_1 = 4K$ , где

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-vk^2)}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} | k^2 \right) \end{aligned} \quad (4.5.73)$$

[см. формулу (5.3.16)]. Важно отметить, что  $\operatorname{sn}(z + 2K) = -\operatorname{sn} z$ . Из (4.5.71) и (4.5.72) следует, что  $\operatorname{sn} z$  при действительных  $z$  не превосходит 1 по абсолютной величине.

Разложив интеграл (4.5.72) в ряд по степеням  $y$ , мы обнаружим, что  $\operatorname{sn} z = z - (1/6)(1+k^2)z^3 + \dots$ ; таким образом,  $\operatorname{sn} z$  — нечетная функция, а вычет функции  $1/\operatorname{sn} z$  в ее простом полюсе  $z = 0$  равен 1. Теперь посмотрим, как ведет себя  $\operatorname{sn} z$  вблизи точки  $z = K$ , в которой она принимает значение 1. Смещаюсь из точки  $z = K$  вдоль действительной оси, получаем меньшие по модулю значения  $\operatorname{sn} z$ , а значит смещения параллельно мнимой оси должны вызвать увеличение модуля  $\operatorname{sn} z$  (почему?). Смещаюсь из точки

$z = K$  вверх, получаем

$$z = F(y) = K + iv, \quad v = \int_1^y \frac{du}{\sqrt{(u^2 - 1)(1 - k^2 u^2)}}, \quad y = \operatorname{sn}(K + iv).$$

Дифференциальное уравнение, связывающее  $v$  и  $y$ , показывает, что  $y$  — периодическая функция от  $v$  с периодом  $2K'$ , причем

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(u^2 - 1)(1 - k^2 u^2)}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} | 1 | k'^2\right), \quad (4.5.74)$$

где  $k'^2 = 1 - k^2$ . Следовательно,  $\operatorname{sn} z$  — периодическая функция по  $z$  с периодом  $\tau_2 = 2iK'$ , причем  $\operatorname{sn} K = 1$ ,  $\operatorname{sn}(K + iK') = 1/k$  и т. д.

Наконец, чисто мнимым  $y$  соответствуют чисто мнимые значения  $z$ , и  $y$  может стремиться к бесконечности при конечном  $z$ . Это означает, что функция  $y = \operatorname{sn} z$  имеет полюс на мнимой оси, а именно, в точке  $ia$ , причем

$$a = \int_0^\infty \frac{dw}{\sqrt{(1+w^2)(1+k^2 w^2)}} = \int_1^{k/1} \frac{du}{\sqrt{(u^2 - 1)(1 - k^2 u^2)}} = K', \quad u = \left[ \frac{1+w^2}{1+k^2 w^2} \right]^{1/2}.$$

В результате этого исследования мы находим, что  $\operatorname{sn} z$  представляет собой эллиптическую функцию с действительным периодом  $\tau_1 = 4K$  и чисто мнимым периодом  $\tau_2 = 2iK'$ . Эта функция имеет простые нули в точках  $z = 0$  и  $z = 2K$  и в соответствующих точках других параллелограммов. Простые полюсы находятся в точках  $z = iK'$  и  $z = 2K + iK'$  (и в конгруэнтных с ними точках), причем вычет  $\operatorname{sn} z$  в  $z = iK'$  равен  $1/k$ , откуда следует [см. (4.5.62)], что вычет в  $z = 2K + iK'$  равен  $-1/k$ . Параметр  $k$  называется *модулем* функции  $\operatorname{sn} z$ ; последнюю обозначают  $\operatorname{sn}(z, k)$  в тех случаях, когда нужно указать значение модуля. Выражение  $k$  через  $q$  указано в связи с уравнением (4.5.71); впрочем, обычно  $k$  рассматривают как исходный параметр, а  $K$  и  $K'$  определяют по формулам (4.5.73) и (4.5.74) ( $K'$  выражается через  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  так же, как  $K$  — через  $k$ ), после чего находят  $q = e^{-\pi(K'/K)}$ . Проводя рассуждения в обратном порядке, убеждаемся в том, что уравнение (4.5.72) определяет ту же функцию  $\operatorname{sn} z$ , что (4.5.70) и (4.5.66).

Аналогично определяются и остальные функции Якоби:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(z, k) &= \frac{\vartheta_3(0, q)}{\vartheta_2(0, q)} \frac{\vartheta_1(u, q)}{\vartheta_4(u, q)}, \\ \text{обратная функция } z = F(k, y) &= \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \\ \operatorname{cn}(z, k) &= \frac{\vartheta_4(0, q)}{\vartheta_2(0, q)} \frac{\vartheta_2(u, q)}{\vartheta_4(u, q)}, \\ \text{обратная функция}^1) z &= \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 + k^2 t^2)}}, \\ \operatorname{dn}(z, k) &= \frac{\vartheta_4(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} \frac{\vartheta_3(u, q)}{\vartheta_4(u, q)}, \\ \text{обратная функция}^1) z &= \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2 + k^2 - 1)}}; \end{aligned} \quad (4.5.75)$$

<sup>1)</sup> Введенные здесь «обратные» функции могут быть, конечно, выражены обычным способом через эллиптические интегралы первого и второго рода,  $F(k, x)$  и  $E(k, x)$ . См., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, изд. 6, Гостехиздат, М., 1956, стр. 584—591.—Прим. ред.

здесь

$$u = z [\vartheta_3(0, q)]^{-2} = \frac{\pi z}{2K}, \quad q = e^{-\pi(K'/K)},$$

а  $K$  и  $K'$  задаются формулами (4.5.73) и (4.5.74).

Используя формулы (4.5.69) и наши предварительные сведения о функции  $\operatorname{sn} z$ , можно показать, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2(z, k) + \operatorname{cn}^2(z, k) &= 1, \quad \operatorname{cn}(0, k) = \operatorname{dn}(0, k) = 1, \\ k^2 \operatorname{sn}^2(z, k) + \operatorname{dn}^2(z, k) &= 1, \quad (d/dz) \operatorname{sn}(z, k) = \operatorname{cn}(z, k) \operatorname{dn}(z, k). \end{aligned} \quad (4.5.76)$$

Теперь можно было бы установить множество других свойств этих функций. Некоторые из них приведены на стр. 462—466, с другими читатель встретится в задачах. В этой книге мы еще не раз воспользуемся этими функциями.

## 4.6. Асимптотические ряды. Метод перевала

Для изучения поведения функции  $f(z)$  при больших значениях  $|z|$  часто бывает целесообразно разложить ее в ряд по степеням  $1/z$  и представить в виде

$$f(z) = \varphi(z) \left[ A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \right], \quad (4.6.1)$$

где  $\varphi(z)$  — некоторая функция, поведение которой при больших значениях  $|z|$  известно. Таково одно из выражений  $\Gamma(z)$ , указанное в предыдущем параграфе [см. формулу (4.5.50)]. В том случае, когда отношение  $f(z)/\varphi(z)$  имеет в бесконечности существенно особую точку, ряд (4.6.1) расходится. Тем не менее этот ряд может быть полезен не только для качественного исследования поведения функции, но и для вычисления ее значений при больших  $|z|$ .

Для этого нужно, чтобы разность между  $f(z)/\varphi(z)$  и первыми  $n+1$  членами ряда была порядка  $1/z^{n+1}$  и, следовательно, чтобы она могла быть сделана весьма малой при больших  $|z|$ . Выражаясь точнее, говорят, что такой ряд *асимптотически представляет* функцию  $f(z)/\varphi(z)$ , и записывают

$$f(z) \simeq \varphi(z) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p}{z^p}, \quad (4.6.2)$$

если при любом  $n$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ z^n \left[ \frac{f(z)}{\varphi(z)} - \sum_{p=0}^n \frac{A_p}{z^p} \right] \right\} = 0. \quad (4.6.3)$$

Последнее равенство утверждает, что при заданном  $n$  сумма первых  $n+1$  членов ряда при достаточно больших  $|z|$  становится сколь угодно близка к  $f(z)/\varphi(z)$ . При заданном  $n$  отклонение будет порядка  $1/z^{n+1}$ . Так как ряд  $\sum A_p/z^p$  расходится, то заданному  $z$  соответствует такое  $n$ , при котором частичная сумма  $\sum_0^n A_p/z^p$  точнее других представляет  $f(z)/\varphi(z)$ . Такое оптимальное  $n$  одновременно определяет неустранимую ошибку. С возрастанием  $z$  оптимальное  $n$  также возрастает, а неустранимая ошибка убывает.