

здесь

$$u = z [\vartheta_3(0, q)]^{-2} = \frac{\pi z}{2K}, \quad q = e^{-\pi(K'/K)},$$

а K и K' задаются формулами (4.5.73) и (4.5.74).

Используя формулы (4.5.69) и наши предварительные сведения о функции $\operatorname{sn} z$, можно показать, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2(z, k) + \operatorname{cn}^2(z, k) &= 1, \quad \operatorname{cn}(0, k) = \operatorname{dn}(0, k) = 1, \\ k^2 \operatorname{sn}^2(z, k) + \operatorname{dn}^2(z, k) &= 1, \quad (d/dz) \operatorname{sn}(z, k) = \operatorname{cn}(z, k) \operatorname{dn}(z, k). \end{aligned} \quad (4.5.76)$$

Теперь можно было бы установить множество других свойств этих функций. Некоторые из них приведены на стр. 462—466, с другими читатель встретится в задачах. В этой книге мы еще не раз воспользуемся этими функциями.

4.6. Асимптотические ряды. Метод перевала

Для изучения поведения функции $f(z)$ при больших значениях $|z|$ часто бывает целесообразно разложить ее в ряд по степеням $1/z$ и представить в виде

$$f(z) = \varphi(z) \left[A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \right], \quad (4.6.1)$$

где $\varphi(z)$ — некоторая функция, поведение которой при больших значениях $|z|$ известно. Таково одно из выражений $\Gamma(z)$, указанное в предыдущем параграфе [см. формулу (4.5.50)]. В том случае, когда отношение $f(z)/\varphi(z)$ имеет в бесконечности существенно особую точку, ряд (4.6.1) расходится. Тем не менее этот ряд может быть полезен не только для качественного исследования поведения функции, но и для вычисления ее значений при больших $|z|$.

Для этого нужно, чтобы разность между $f(z)/\varphi(z)$ и первыми $n+1$ членами ряда была порядка $1/z^{n+1}$ и, следовательно, чтобы она могла быть сделана весьма малой при больших $|z|$. Выражаясь точнее, говорят, что такой ряд *асимптотически представляет* функцию $f(z)/\varphi(z)$, и записывают

$$f(z) \simeq \varphi(z) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p}{z^p}, \quad (4.6.2)$$

если при любом n

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ z^n \left[\frac{f(z)}{\varphi(z)} - \sum_{p=0}^n \frac{A_p}{z^p} \right] \right\} = 0. \quad (4.6.3)$$

Последнее равенство утверждает, что при заданном n сумма первых $n+1$ членов ряда при достаточно больших $|z|$ становится сколь угодно близка к $f(z)/\varphi(z)$. При заданном n отклонение будет порядка $1/z^{n+1}$. Так как ряд $\sum A_p/z^p$ расходится, то заданному z соответствует такое n , при котором частичная сумма $\sum_0^n A_p/z^p$ точнее других представляет $f(z)/\varphi(z)$. Такое оптимальное n одновременно определяет неустранимую ошибку. С возрастанием z оптимальное n также возрастает, а неустранимая ошибка убывает.

Пример. В качестве простого примера, разъясняющего эти общие соображения, рассмотрим интегральную показательную функцию

$$\text{Ei}(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Асимптотический ряд для нее можно получить последовательным интегрированием по частям. Сначала получаем

$$-\text{Ei}(-x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt,$$

а затем, продолжая,

$$\begin{aligned} -\text{Ei}(-x) &= \frac{e^{-x}}{x} \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots + \frac{(-1)^n n!}{x^n} \right] + \\ &\quad + (-1)^{n+1} (n+1)! \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt. \end{aligned}$$

Ряд, получающийся при $n \rightarrow \infty$, расходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{x} \right] = \infty.$$

В частности, мы замечаем, что при $x = n$ n -й член ряда совпадает с $(n+1)$ -м по абсолютной величине; это указывает на то, что при заданном x оптимальным, грубо говоря, является значение n , ближайшее к x . Для того чтобы доказать, что полученный ряд является асимптотическим, достаточно обнаружить, что при $x \rightarrow \infty$

$$x^{n+1} e^x (n+1)! (-1)^{n+1} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt \rightarrow 0.$$

Это непосредственно вытекает из неравенства

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt < \frac{1}{x^{n+2}} \int_x^{\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^{n+2}}.$$

Ошибки приближения функции $-\text{Ei}(-x)$ частичной суммой

$$\frac{e^{-x}}{x} \sum_0^n \frac{(-1)^n n!}{x^n}$$

по абсолютной величине меньше $(n+1)! e^{-x}/x^{n+2}$. Последнее выражение, в точности равное по абсолютной величине следующему члену ряда, с возрастанием n сначала убывает, а затем неограниченно возрастает. В табл. 4.6.1 указаны приближения для значения $-4e^4 \text{Ei}(-4) = 0,82533$.

Значениям 0,87500 и 0,78125 соответствует относительная погрешность, меньшая 5%.

Таблица 4.6.1

n	n -й член ряда	n -я частичная сумма	Верхняя граница погрешности
0	1,00000	1,00000	0,25000
1	-0,25000	0,75000	0,12500
2	0,12500	0,87500	0,09375
3	-0,09375	0,78125	0,09375
4	0,09375	0,87500	0,11719
5	-0,11719	0,75781	0,17579
6	0,17579	0,93360	0,31013
7	-0,31013	0,62347	0,62026
8	0,62026	1,24373	1,39559
9	-1,39559	-0,15186	—

Усреднение последовательных членов ряда. Полученные в предыдущем примере приближенные значения лежат по разные стороны от истинного значения; это наводит на мысль, что для лучшего приближения нужно воспользоваться средними арифметическими двух последовательных сумм. В нашем примере это среднее равно 0,82812 и дает относительную погрешность, меньшую $(1/2)\%$. Вообще, если

$$S_n = \sum_{m=0}^n u_m,$$

то, положив

$$T_{n+1} = \frac{S_n + S_{n+1}}{2} = S_n + \frac{1}{2} u_{n+1}$$

мы получаем

$$T_{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} U_{m-1},$$

где

$$U_n = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}, \quad U_{-1} = \frac{1}{2} u_0. \quad (4.6.4)$$

Ряд из U_n не является асимптотическим в узком смысле, т. е. в смысле равенства (4.6.3). Однако определение асимптотического ряда можно обобщить (чтобы оно включало построенный ряд из U_n), полагая

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} \simeq \sum_{p=0}^{\infty} U_p(z),$$

если при любом n

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left\{ z^n \left[\frac{f(z)}{\varphi(z)} - \sum_{p=0}^n U_p(z) \right] \right\} = 0. \quad (4.6.5)$$

Ясно, что замечания, сопровождавшие условие (4.6.3) и относившиеся к ряду вида (4.6.1), применимы и к этому более общему случаю. Для U_p , определенных равенствами (4.6.4),

$$\sum_{p=-1}^n U_p(z) = \sum_{p=0}^{n+1} u_p(z) - \frac{1}{2} u_{n+1}(z),$$

и если $\sum u_p(z)$ — асимптотический ряд, т. е.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left\{ z^n \left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \sum_{p=0}^n u_p(z) \right] \right\} = 0,$$

то $\sum U_p(z)$ также является асимптотическим рядом. Ряд из средних арифметических, построенный согласно (4.6.4), особенно удобен тогда, когда исходный ряд — знакочередующийся. В табл. 4.6.2 приведены результаты такого преобразования (U_n и T_n), относящиеся к примеру, изображенном в табл. 4.6.1.

Таблица 4.6.2

СУММИРОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА ПРИ ПОМОЩИ ОСРЕДНЕНИЯ ЧЛЕНОВ [см. формулы (4.6.4) и табл. 4.6.1]

n	U_n	T_n	n	U_n	T_n
-1	0,50000	0,50000	4	-0,01720	0,81093
0	0,37500	0,87500	5	0,02930	0,84023
1	-0,06250	0,81250	6	-0,06717	0,77306
2	0,01562	0,82813	7	0,15508	0,92813
3	0,00000	0,82813	8	-0,38767	0,54046 .

Прежде чем приобрести уверенность в обращении с асимптотическими рядами, необходимо выяснить еще несколько вопросов. Заметим, прежде всего, что асимптотический ряд не определяет однозначно представляемую им функцию. Например, две функции

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} \text{ и } \psi(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)} + e^{-z}$$

имеют при $\operatorname{Re} z > 0$ одинаковые асимптотические разложения. Далее, очевидно, что при переходе от полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ к полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ асимптотическое разложение функции $\psi(z)$ заметно изменяется. Таким образом, если $z = |z|e^{i\theta}$, то асимптотическое выражение $\psi(z)$ резко изменяется при переходе через $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$. Такого рода «разрывы» — лишь кажущиеся и по существу обусловлены тем, что один и тот же асимптотический ряд может представлять различные функции. Однако, когда в дальнейшем мы будем обращаться к асимптотическим рядам, нам придется внимательно следить за тем, чтобы не выйти за пределы тех значений аргумента z , для которых справедливо рассматриваемое разложение. Кажущиеся разрывы асимптотических рядов часто дают о себе знать, и в главе о дифференциальных уравнениях (см. § 5.3) мы с ними встретимся в связи с явлением Стокса.

Надо отметить еще следующие общие свойства асимптотических рядов. Асимптотические ряды можно почленно складывать; их можно и перемножать. Последнее означает, что если

$$\chi(z) \simeq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p}{z^p}, \quad \psi(z) \simeq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p}{z^p},$$

то

$$\chi(z)\psi(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{z^n},$$

где $C_n = \sum_{p=0}^n A_p B_{n-p}$. Асимптотический ряд можно почленно интегрировать:

$$\int \chi(z) dz \simeq C + A_0 z + A_1 \ln z - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_{p+1}}{p z^p}.$$

С другой стороны, почленное дифференцирование асимптотического ряда приводит к асимптотическому разложению производной только в том случае, когда заранее известно, что эта производная допускает асимптотическое разложение.

Интегральные представления и асимптотические ряды. Нам часто придется выяснить асимптотическое поведение интегрального представления той или иной функции. Для этого применяется метод, называемый *методом скорейшего спуска* или *методом перевала* (седловых точек). Здесь мы рассмотрим этот метод и применим его к гамма-функции.

Прежде всего подчеркнем, что этот метод применим к функциям, допускающим интегральное представление довольно частного вида

$$J(z) = \int_C e^{zf(t)} dt, \quad (4.6.6)$$

причем контур C таков, что при приближении t к его концам подинтегральная функция стремится к нулю. Такое представление тесно связано с преобразованием Лапласа (см. § 5.3). Можно ожидать, что многие интегралы, интересующие нас в этой книге, должны иметь вид (4.6.6); в самом деле, решение ϕ скалярного уравнения Гельмгольца $(\nabla^2 + k^2)\phi = 0$ можно представить в виде наложения плоских волн $e^{ik \cdot r}$, т. е. $\phi = \int e^{ik \cdot r} f(k) d\Omega_n$, где $d\Omega_n$ — дифференциал телесного угла в направлении вектора k . Кроме того, часто удается искусственным путем придать такой вид интегралу, первоначально выглядевшему иначе. Например, гамма-функция $\Gamma(z+1)$ при $\operatorname{Re} z > -1$ представляется интегралом $\int_0^\infty e^{-t} t^z dt$, последний же подстановкой $t = tz$ приводится к виду

$$\Gamma(z+1) = z^{z+1} \int_0^\infty e^{-tz} t^z dt = z^{z+1} \int_0^\infty e^{z(\ln t - t)} dt, \quad (4.6.7)$$

и мы получаем, что функция $\Gamma(z+1)/z^{z+1}$ выражается интегралом вида (4.6.6).

Рассмотрим поведение интеграла $J(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ и при заданном значении $\varphi = \arg z$. При больших $|z|$ подинтегральная функция претерпевает обычно быстрые колебания. Если z комплексно или если $f(t)$ принимает вдоль некоторых участков контура C комплексные значения, то мнимая часть $zf(t)$, вообще говоря, возрастает вместе с $|z|$. Следовательно, множитель $\exp\{i \operatorname{Im}[zf(t)]\}$ будет быстро колебаться, причем частота колебаний будет при $|z| \rightarrow \infty$ возрастать. Наличие таких колебаний затрудняет прямое, без дальнейших преобразований, вычисление интеграла $J(z)$. Действительно, во многих случаях влияние больших положительных значений подинтегральной функции на одних участках контура при интегрировании почти полностью погашается большими по абсолютной величине отрицательными значениями на других участках. В этих условиях для получе-

ния удовлетворительного результата вычисление пришлось бы вести с устрашающей точностью. Поэтому естественно попытаться так деформировать контур, чтобы свести к минимуму вредное влияние колебаний подинтегральной функции. В дальнейшем будет предполагаться, что такие деформации возможны и что можно каким-либо способом учсть влияние особых точек, если они встречаются.

Выбор контура. Контур интегрирования, вообще говоря, пересекает как области, в которых $\operatorname{Re}[zf(t)] > 0$, так и области, где $\operatorname{Re}[zf(t)] < 0$. Первые области важнее, так как в них модуль подинтегральной функции больше, чем во вторых, а чем он больше, тем важнее уменьшить колебания. Поэтому контур следует выбирать так, чтобы $\max_{t \in C} \operatorname{Re}[zf(t)]$ был, по возможности, меньше и чтобы на участке, где $\operatorname{Re}[zf(t)]$ принимает наибольшие значения, вдоль контура *мнимая часть* $zf(t)$ была постоянна. Таким образом, на участке контура, вносящим основную долю в интеграл $J(z)$, мы будем иметь

$$J(z) = \int_C e^{zf(t)} dt = e^{i\operatorname{Im}[zf(t)]} \int_C e^{\operatorname{Re}[zf(t)]} dt. \quad (4.6.8)$$

На тех участках, где значения $\operatorname{Re}[zf(t)]$ малы, контур можно выбрать так, чтобы вдоль него $\operatorname{Im}[zf(t)]$ была переменной, если оказывается необходимым соединить отдельные участки контура. Такой выбор контура в наибольшей степени обезвредит колебания подинтегральной функции.

В точке $t = t_0$, в которой $\operatorname{Re}[zf(t)]$ достигает наибольшего значения,

$$f'(t_0) = 0. \quad (4.6.9)$$

Вблизи этой точки особенно важно избежать колебаний, а поэтому мы выберем здесь контур так, чтобы вдоль него

$$\operatorname{Im}[zf(t)] = \operatorname{Im}[zf(t_0)]. \quad (4.6.10)$$

Смысл этого условия легко пояснить геометрически. Представим себе поверхность $u = \operatorname{Re} f(t)$ в трехмерном пространстве $(\operatorname{Re} t, \operatorname{Im} t, u)$ (считая для простоты $z > 0$ вещественным). В плоскости t нанесем линии уровня функции $\operatorname{Re} f(t)$ (см. рис. 4.29). В точке $t = t_0$ эта функция, будучи действительной частью аналитической функции, в силу сказанного на стр. 349 не может иметь ни минимума, ни максимума (т. е. соответствующая поверхность не может иметь над точкой t_0 ни вершины, ни впадины); следовательно, это — *точка минимакса*, или *седловая точка*, или, употребляя топографический термин, перевал. На рис. 4.29 изображена окрестность этой точки.

В чем особенность выбранного пути $\operatorname{Im}[zf(t)] = \text{const}$? Как мы помним, если $u + iv$ — аналитическая функция, то семейства кривых $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ взаимно ортогональны. Поэтому вдоль кривой $\operatorname{Im}[zf(t)] = c$ функция $\operatorname{Re}[zf(t)]$ изменяется быстрее всего. Но при $c = \operatorname{Im}[zf(t_0)]$ эта кривая в окрестности точки $t = t_0$ распадается на кривую CD , идущую с одной «возвышенности» на другую, и на кривую AB , идущую из одной «впадины» в другую (см. рис. 4.30). Вдоль CD функция $\operatorname{Re}[zf(t)]$ быстрее всего *растет*, вдоль AB — быстрее всего *убывает*. В качестве пути должен быть выбран участок AB , а не CD , в соответствии с исходным контуром интегрирования. Таким образом, вдоль выбранного пути функция $e^{zf(t)}$ при-

ходит к своим концевым значениям, изменяясь наиболее «быстро», причем этот путь проходит через точку перевала t_0 . Основной вклад в значение интеграла дает участок контура, близкий к t_0 , так как в этой точке

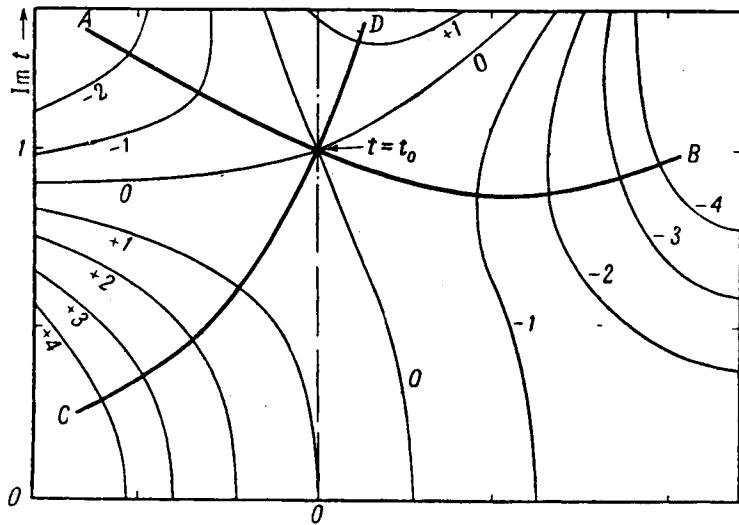


Рис. 4.29. Линии уровня $\operatorname{Re} f = \text{const}$ вблизи седловой точки $t = t_0$.

модуль подинтегральной функции принимает максимальное значение на контуре интегрирования. Последнее обстоятельство тем более заметно, чем больше $|z|$, так как при больших $|z|$ максимум оказывается особенно острым, а $|e^{zf(t)}|$ убывает к концевым значениям особенно быстро.

Первый член разложения. Воспользуемся тем, что было сказано в предыдущем пункте, для вывода общей формулы, дающей первый член асимптотического разложения $J(z)$. В окрестности точки $t = t_0$

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 f''(t_0) + \dots . \quad (4.6.11)$$

[Может случиться, что $f''(t_0) = 0$; тогда приходится действовать иначе.] Метод перевала указывает такой путь интегрирования, при котором подинтегральная функция убывает как показательная функция. Поэтому положим

$$z = |z| e^{i\varphi}, \quad \tau = \sqrt{e^{i(\pi+\varphi)} f''(t_0)} (t - t_0). \quad (4.6.12)$$

Получаем

$$J(z) \simeq \frac{e^{zf(t_0)}}{\sqrt{e^{i(\pi+\varphi)} f''(t_0)}} \int_C e^{-|z|\tau^{2/2}} d\tau.$$

Мы видим, что при больших $|z|$ подинтегральная функция имеет весьма «острый» максимум, и потому становится важной только весьма малая часть контура. Когда $|z|$ достаточно велико, подинтегральная функция практически оказывается равной нулю вне области, где справедливо приближение (4.6.11). Вследствие этого можно заменить контурный интеграл действительным интегралом, взятым в пределах от $-\infty$ до ∞ . Направление интегрирования будет определяться направлением обхода исходного контура и преобразованием (4.6.12). Допустим, что обход первоначального контура

был таков, что новый интеграл берется по t от $-\infty$ до ∞ . Тогда при $|z| \rightarrow \infty$

$$J(z) \simeq e^{zf(t_0)} \sqrt{2\pi/z e^{\pi i f''(t_0)}}. \quad (4.6.13)$$

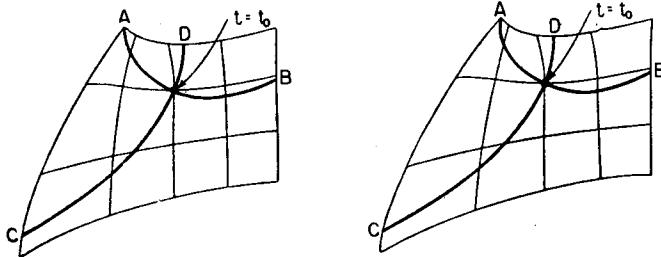


Рис. 4.30. Выбор пути, проходящего через седловую точку.

В случае гамма-функции [см. (4.6.7)] $f(t) = \ln t - t$. При этом $f'(t) = 1/t - 1$, так что $t_0 = 1$. Мы находим далее $f(t_0) = -1$ и $f''(t_0) = -1$. Переменное t изменяется от 0 до $+\infty$. Преобразование (4.6.12) принимает вид $\tau = (t-1)e^{i\varphi/2}$. Формула (4.6.13) применима и дает

$$\Gamma(z+1) \simeq \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} \quad (z \rightarrow \infty),$$

что согласуется с формулой (4.5.50), если в последней удержать лишь первый член. См. также рассуждения, относящиеся к формулам (5.3.77), где рассмотрен другой пример.

Остаток ряда. К формуле (4.6.13) мы пришли, рассматривая первый член асимптотического ряда. Обобщим наш вывод с целью получить дальнейшие члены этого ряда. Для упрощения присоединим аргумент z к $f(t)$ и будем рассматривать z как действительный параметр.

Необходимо возвратиться к формуле (4.6.11) и заменить ее на точную подстановку

$$f(t) = f(t_0) - \omega^2. \quad (4.6.14)$$

Заметим, что ω — действительное переменное в силу выбора контура, вдоль которого $\operatorname{Im} f(t) = \operatorname{Im} f(t_0)$. Вводя (4.6.14) в интеграл $J(z)$, получаем

$$J(z) = e^{zf(t_0)} \int_C e^{-zw^2} dt = e^{zf(t_0)} \int_C e^{-zw^2} \frac{dt}{d\omega} d\omega.$$

Предположим и теперь, что исходный интеграл таков, что интегрирование по w следует производить от $-\infty$ до ∞ ; таким образом,

$$J(z) = e^{zf(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zw^2} \frac{dt}{d\omega} d\omega. \quad (4.6.15)$$

Остается вычислить $dt/d\omega$. Для этого нужно выразить $dt/d\omega$ через w из уравнения (4.6.14) с помощью степенного ряда

$$\frac{dt}{d\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n. \quad (4.6.16)$$

Подставляя (4.6.16) в (4.6.15) и замечая, что после интегрирования оста-

нутся лишь четные степени w , получаем асимптотический ряд

$$J(z) \simeq e^{zf(t_0)} \sqrt{\frac{\pi a_0^2}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{a_0} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad (z \rightarrow \infty). \quad (4.6.17)$$

Коэффициенты a_n можно найти, применив способ, описанный на стр. 389. Там указывалось, что если

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (t - t_0)^n = g(t),$$

то

$$a_n = \left[\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{t-t_0}{g(t)} \right)^{n+1} \right]_{t=t_0}. \quad (4.6.18)$$

В рассматриваемом случае $g(t) = \sqrt{f(t_0) - f(t)}$. Разложив в ряд функцию

$$\frac{f(t_0) - f(t)}{(t-t_0)^2} = \sum_p A_p (t-t_0)^p,$$

приведем равенство (4.6.18) к виду

$$a_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} \left(\sum_p A_p x^p \right)^{-n/2-1/2} \right]_{x=0};$$

другими словами, a_n есть коэффициент при n -й степени x в разложении $(\sum_p A_p x^p)^{-n/2-1/2}$ в степенной ряд.

Вот первые три коэффициента, выраженные через A_p :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\sqrt{A_0}}, \\ \frac{a_2}{a_0} &= \frac{15}{8} A_1^2 A_0^{-3} - \frac{3}{2} A_2 A_0^{-2}, \\ \frac{a_4}{a_0} &= \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2^7 \cdot 3} A_1^4 A_0^{-6} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2^4} A_0^{-5} A_1^2 A_2 + \\ &\quad + \frac{5 \cdot 7}{2^3} A_0^{-4} (A_2^2 + 2A_1 A_3) - \frac{5}{2} A_0^{-3} A_4. \end{aligned} \quad (4.6.19)$$

Снова, пользуясь гамма-функцией в качестве иллюстрации, получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= \ln t - t, \quad t_0 = 1, \\ \frac{f(t_0) - f(t)}{(t-t_0)^2} &= \frac{(t-1) - \ln t}{(t-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{t-1}{3} + \frac{(t-1)^2}{4} - \dots, \end{aligned}$$

а значит, $A_n = (-1)^n / (n+2)$. Согласно (4.6.19),

$$a_0 = \sqrt{2}, \quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{6}, \quad \frac{a_4}{a_0} = \frac{1}{216}.$$

В силу (4.6.17) для $\Gamma(z+1)$ получается асимптотическое разложение

$$\Gamma(z+1) \simeq \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + \dots \right).$$

Метод перевала будет не раз еще использован в дальнейшем, в частности в § 5.3 с его помощью будет подробно исследовано асимптотическое поведение бесселевых и некоторых других связанных с ними функций.