

4.7. Конформное отображение

В большинстве интересных и важных геометрических приложений теории аналитических функций комплексного переменного к физике конформное отображение играет важную роль. В качестве примера рассмотрим электростатическое поле. Часто встречающейся задачей является отыскание поля, созданного точечным зарядом q (линейным зарядом в трехмерном пространстве) внутри замкнутой поверхности C , представляющей собой металлический проводник, поддерживаемый при нулевом потенциале (см. рис. 4.31). Силовые линии (вдоль которых направлен вектор поля E) будут исходить из источника и опускаться ортогонально на поверхность C . На рис. 4.31 написано несколько эквиди-
потенциальных и силовых линий. Конечно, семейства тех и других образуют ортогональную сеть. Можно поэтому ожидать, что существует такая аналитическая функция комплексного переменного $w(z) = u + iv$, что кривые $u(x, y) = \text{const}$ совпадают с силовыми линиями, а кривые $v(x, y) = \text{const}$ — с эквиди-
потенциальными. Эта функция, если она вообще существует, должна иметь особенность в точке $z = z_q$, в которой помещен заряд. На самом деле эта функция в точке z_q имеет логарифмическую особенность; в гл. 10 мы увидим, что она должна

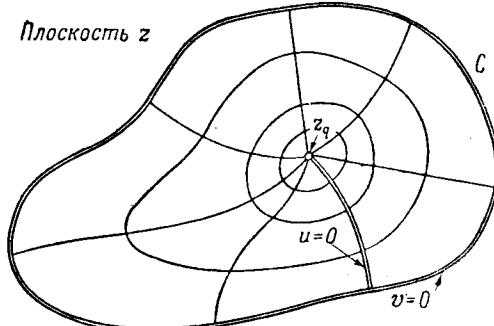


Рис. 4.31. Силовые и эквиди-
потенциальные линии в случае точечного источника, окруженного заземленным проводником.

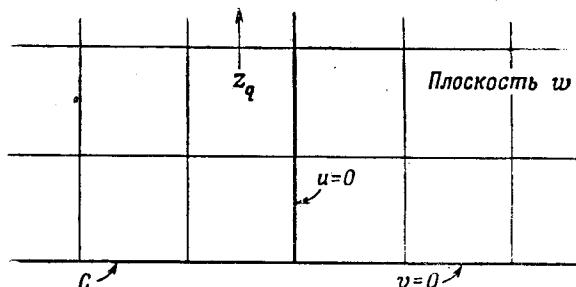


Рис. 4.32. Конформное отображение области, изображенной на рис. 4.31, на верхнюю полуплоскость $w = u + iv$.

иметь вид: $w = -2iq \ln(z - z_q)$ плюс некоторая функция, аналитическая в z_q . Конформное отображение, осуществляемое функцией $w = w(z)$, переводит линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ в прямые на плоскости w , параллельные соответственно мнимой и действительной оси. Так как $v = 0$ на C , то C отображается на действительную ось в плоскости w . Образ области плоскости z , ограниченной контуром C , изображен на рис. 4.32. Заряд q в плоскости w оказывается в бесконечно удаленной точке ($w = i\infty$). Параллельные прямые $u = \text{const}$ являются как раз силовыми линиями, которые порождены зарядом, находящимся в бесконечности.

Общие свойства отображения. Искажение пространства, производимое преобразованием, о котором идет речь, может быть описано более

наглядно; к описаниям такого рода часто прибегают, когда хотят лучше «почувствовать» преобразование. В нашем случае преобразование состоит в том, что контур C разрезается в какой-либо точке и растягивается так, чтобы он заполнил всю действительную ось, а точка разреза ушла в бесконечность. Далее, заряд передвигается бесконечно далеко вверх. При этом эквипотенциальные линии и силовые линии превращаются в прямые, параллельные соответственно действительной и мнимой осям¹⁾.

Отметим следующее чрезвычайно важное обстоятельство: *функция $w(z)$ отображает область, ограниченную контуром C , на верхнюю полуплоскость*. Для того чтобы осуществить это преобразование, нужно только найти функцию точечного источника, мнимая часть которой v ведет себя, как $-(q/2\pi) \ln |z - z_q|$ вблизи заряда в точке z_q , и удовлетворяет условию $v = 0$ на кривой C . По самому физическому смыслу задачи такая функция существует, а следовательно, существует *конформное отображение области, заключенной внутри C , на верхнюю полуплоскость*. Очевидно также, что существует множество таких отображений, так как заряд можно поместить где угодно внутри C .

Допустив существование функции $f(z)$, осуществляющей требуемое отображение, покажем, какую большую пользу можно извлечь из этой функции для решения различных задач электростатики в области внутри C . Существо дела состоит в том, что при помощи отображения возможно задачу со сложной геометрией (рис. 4.31) свести к аналогичной задаче с простой геометрией (рис. 4.32), решить которую значительно легче. Пусть, например, вдоль C задан переменный потенциал, а зарядов внутри C нет. В преобразованной задаче потенциал V будет задан вдоль действительной оси ($v = 0$), а найти нужно V в верхней полуплоскости. Так как известно, что V представляет собой мнимую часть функции, аналитической в верхней полуплоскости, то можно применить формулу (4.2.13), и мы получаем

$$V(u, v) = \frac{v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(u', 0)}{(u' - u)^2 + v^2} du'.$$

Этот пример убеждает нас в том, что коль скоро известна отображающая функция, мы можем решить любую задачу электростатики, относящуюся к первоначально заданной области.

Преобразование Шварца — Кристоффеля. Обратимся теперь к практическому отысканию требуемого преобразования. Наиболее общим контуром C , для которого эта задача может быть рассмотрена весьма детально, является многоугольник. Другим важным частным случаем, для которого решение известно, является эллипс и, в частности, окружность. Рассмотрим сейчас случай многоугольника; соответствующее преобразование называется *преобразованием Шварца — Кристоффеля*. Многоугольник изображен на рис. 4.33; вершины его обозначены a_0, a_1, \dots , соответствующие внешние углы $\varphi_0, \varphi_1, \dots$, образы этих вершин в плоскости w — b_0, b_1, \dots . Заметим, что

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \dots = 2\pi. \quad (4.7.1)$$

¹⁾ В этом описании не учтена многозначность логарифма; скорее здесь ось z и плоскости w наматываются на контур C плоскости z , как нитка на катушку. Строго говоря, отображение $w = w(z)$ не конформно, так как оно не однозначно. — Прим. ред.

Читателю следует обратить особое внимание на то, каким образом отчитываются углы φ_i , и на то, что при обходе многоугольника в направлении отсчета углов внутренность многоугольника все время остается слева. При тех вершинах, в которых контур при выбранном обходе поворачивает влево, углы φ_i оказываются положительными; те φ_i , которые соответствуют вершинам входящих углов, будут отрицательными. Возможны и «случаи вырождения», когда φ_i равно π или $-\pi$; какое из этих двух значений следует выбрать, обычно определяется соотношением (4.7.1).

Так как углы φ_i при отображении не сохраняются, то a_i должны быть особыми точками функции $w(z)$. Поэтому, обходя контур C , мы будем

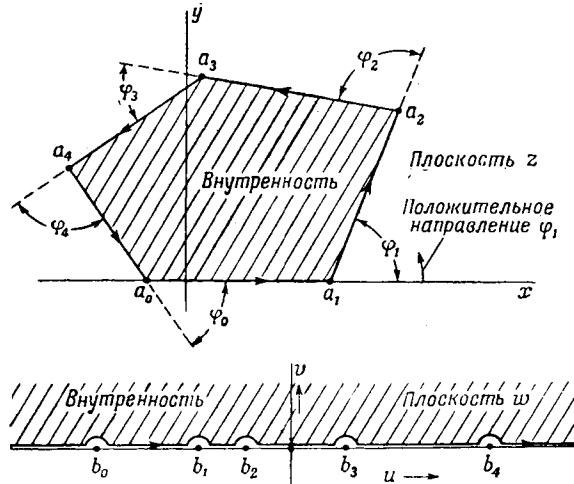


Рис. 4.33. Отображение Шварца—Кристоффеля внутренности многоугольника на верхнюю полуплоскость w .

«скруглять» вершины. Видоизменение соответствующего контура в плоскости w отмечено на рис. 4.33 маленькими полуокружностями, огибающими точки b_i . Эти полуокружности исключают особые точки b_i из верхней полуплоскости, где $w(z)$ должна быть аналитической.

Рассмотрим поведение дифференциалов dz и $d\bar{w}$ при обходе многоугольника в положительном направлении, указанном на рис. 4.33 стрелками. Левее b_0 аргумент $d\bar{w}$ равен нулю ($d\bar{w}$ действительно), тогда как аргумент dz определяется направлением отрезка a_4a_0 . В точке a_0 аргумент dz претерпевает скачок на величину φ_0 , а аргумент $d\bar{w}$ остается равным нулю. Как же должна вести себя производная $dz/d\bar{w}$ вблизи b_0 ? Согласно рис. 4.33, $dz/d\bar{w}$ на оси u должна быть действительной при $b_0 < \bar{w} < b_1$, а переход w через b_0 , т. е. изменение $\arg(w - b_0)$ на $-\pi$, вызывает приращение $\arg(dz/d\bar{w})$ на величину φ_0 . Отсюда однозначно вытекает представление $dz/d\bar{w}$ вблизи b_0 в виде

$$\frac{dz}{d\bar{w}} \simeq A(\bar{w} - b_0)^\alpha \quad (\bar{w} \rightarrow b_0).$$

Требуемое изменение аргумента в точке b_0 будет обеспечено при $\alpha = -\varphi_0/\pi$, так что

$$\frac{dz}{d\bar{w}} \simeq A(\bar{w} - b_0)^{-\varphi_0/\pi} \quad (\bar{w} \rightarrow b_0). \quad (4.7.2)$$

Применяя это рассуждение последовательно ко всем b_i , получаем

$$\frac{dz}{d\bar{w}} = A(\bar{w} - b_0)^{-\varphi_0/\pi} (\bar{w} - b_1)^{-\varphi_1/\pi} (\bar{w} - b_2)^{-\varphi_2/\pi} \dots \quad (4.7.3)$$

Так как z не должно иметь ни нулей, ни особых точек, отличных от b_i , то A в (4.7.3) есть постоянная. Согласно принципу отражения Шварца (см. стр. 372), функцию z можно продолжить на нижнюю полуплоскость, и притом z не будет иметь там новых особых точек. Проинтегрировав (4.7.3), мы получим формулу, определяющую преобразование Шварца — Кристоффеля

$$z = z_0 + A \int (w - b_0)^{-\varphi_0/\pi} (w - b_1)^{-\varphi_1/\pi} (w - b_2)^{-\varphi_2/\pi} \dots dw. \quad (4.7.4)$$

Итак, формула (4.7.4) дает отображение внутренности некоторого многоугольника с внешними углами $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ на верхнюю полуплоскость плоскости w . Выбирая постоянные $z_0, |A|$ и $\arg A$, мы можем добиться того, чтобы многоугольник в плоскости z имел нужное положение и размеры. Постоянные b_0, b_1, \dots должны соответствовать точкам a_0, a_1, \dots . Так как мы располагаем еще тремя произвольными постоянными, *то из чисел b_0, b_1, \dots три можно задать как угодно*. Остальные b_i мы найдем, проинтегрировав (4.7.3), выбрав z_0 и A и подставив значения $z = a_i$. Вообще говоря, b_i являются точками ветвления функции $z = z(w)$.

Одну из точек b_i обычно выбирают на бесконечности. Если это b_0 , то формула (4.7.4) принимает вид

$$z = z_0 + A \int (w - b_1)^{-\varphi_1/\pi} (w - b_2)^{-\varphi_2/\pi} \dots dw. \quad (4.7.5)$$

Функции (4.7.4) и (4.7.5) отображают на верхнюю полуплоскость область, лежащую внутри многоугольника. Однако часто приходится иметь дело с областью, *внешней* по отношению к многоугольнику. При этом на многоугольнике должно быть выбрано противоположное направление обхода (т. е. по часовой стрелке), чтобы его внутренность при обходе оставалась справа. Углы φ_i в (4.7.4) должны быть взяты с обратными знаками. Вызывает еще затруднение точка p в плоскости w , соответствующая бесконечно удаленной точке плоскости z . Точка $w = p$ должна быть полюсом функции $z(w)$ (заметим, что p не может лежать на действительной оси в плоскости w), и, следовательно, подинтегральные функции в (4.7.4) или (4.7.5) должны еще содержать множитель вида $1/(w - p)$. Но одного этого множителя недостаточно, потому что его аргумент нарушит соответствие между границей многоугольника в плоскости z и действительной осью плоскости w . Чтобы избежать этого, введем такой множитель, который при действительных w принимает действительные значения, т. е. не меняет аргумента произведения. Таким множителем может служить $1/[(w - p)(\bar{w} - \bar{p})]$, и вместо (4.7.4) мы возьмем

$$z = z_0 + A \int \frac{dw}{(w - p)(\bar{w} - \bar{p})} \{ (w - b_0)^{-\varphi_0/\pi} (w - b_1)^{-\varphi_1/\pi} \dots \}. \quad (4.7.6)$$

Эта функция отображает область, внешнюю по отношению к многоугольнику, на полуплоскость w . Напоминаем, что углы взяты, как указано на рис. 4.33, но с противоположными знаками.

Рассмотрим теперь несколько примеров, чтобы показать, как действует на практике изложенная теория. При этом мы ограничимся случаями, когда интегралы выражаются в элементарных трансцендентных функциях. Так бывает тогда, когда рассматриваются вырожденные треугольники и прямоугольники. В случае треугольника функция (4.7.5) принимает вид

$$z = z_0 + A \int (w - b_1)^{-\varphi_1/\pi} (w - b_2)^{-\varphi_2/\pi} dw.$$

Рассмотрим в качестве примера 1 область, изображенную на рис. 4.34. Углы φ_1 и φ_2 показаны на фигуре, угол φ_0 при бесконечно удаленной вер-

шине a_0 можно вычислить, если считать заштрихованный многоугольник пределом треугольника, вершина a_0 которого удаляется в бесконечность в направлении, отмеченном стрелкой.

В этом случае отображение задается функцией

$$z = z_0 + A \int (z - b_1)^{-1/2} (z - b_2)^{-1/2} dw.$$

Симметрия в расположении точек a_1 и a_2 позволяет принять $b_1 = -1$, $b_2 = 1$; тогда

$$z = z_0 + A \int \frac{dw}{\sqrt{w^2 - 1}} = z_0 + A \operatorname{Ar ch} w.$$

Для того чтобы вычислить z_0 и A , положим $z = 0$; этой точке соответствует $w = 1$, т. е.

$$0 = z_0 + A \operatorname{Ar ch} 1 = z_0,$$

откуда

$$z_0 = 0.$$

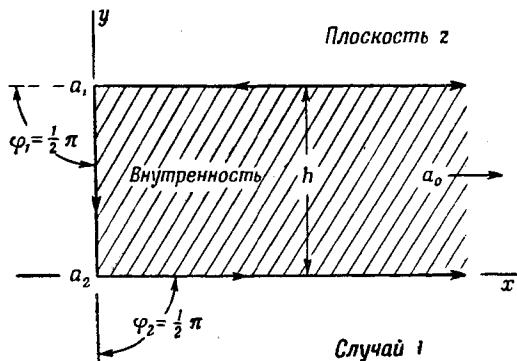


Рис. 4.34. Отображение внутренности вырожденного треугольника на верхнюю полуплоскость w (заданные углы $\varphi_0 = \pi$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$).

Далее, точке $z = hi$ соответствует $w = -1$, т. е.

$$hi = A \operatorname{Ar ch} (-1) = A\pi i$$

и, следовательно,

$$A = h/\pi.$$

Итак, мы получили преобразование

$$z = \frac{h}{\pi} \operatorname{Ar ch} w, \quad w = \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{h} z \right). \quad (4.7.7)$$

Проверить то, что эта функция отображает область, изображенную на рис. 4.34, на верхнюю полуплоскость, можно, придав z какое-нибудь конкретное значение. Пусть, например, $z = p + ih/2$. Тогда $\operatorname{ch}(\pi z/h) = \operatorname{ch}(\pi i/2 + \pi p/h) = i \operatorname{sh}(\pi p/h)$, и мы видим, что полуправая, параллельная прямым $y = 0$ и $y = h$ и проходящая посередине между ними, отображается на мнимую полуось плоскости w . Отображение (4.7.7) как бы расправляет границу полуоси и накладывает ее на действительную ось таким образом, что точки b_1 и b_2 располагаются симметрично относительно точки $w = 0$. Естественно, что при этом «средняя линия» полуоси попадает на мнимую полуось.

Если мы хотим отобразить на верхнюю полуплоскость область, внешнюю по отношению к заштрихованной на рис. 4.34 полуяйсе, то нужно положить $\varphi_0 = -\pi$, $\varphi_1 = -\pi/2$, $\varphi_2 = -\pi/2$. В этом случае p в формуле (4.7.6) можно положить равным $i\infty$ и мы получаем

$$z = z_0 + A \int V \sqrt{w^2 - 1} dw,$$

то есть

$$z = z_0 + \frac{1}{2} A (w \sqrt{w^2 - 1} - \operatorname{Ar ch} w).$$

Значению $z = 0$ соответствует $w = 1$, и поэтому $z_0 = 0$; значению $z = hi$ соответствует $w = -1$, и поэтому $hi = -\frac{1}{2} A \pi i$, откуда $A = -2h/\pi$. Итак,

$$z = \frac{h}{\pi} (\operatorname{Ar ch} w - w \sqrt{w^2 - 1}). \quad (4.7.8)$$

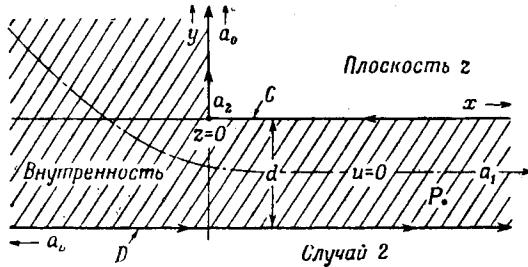


Рис. 4.35. В этом треугольнике углы таковы:
 $\varphi_0 = 3\pi/2$, $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = -\pi/2$.

В этой формуле нужно еще точно указать ветви функций $\operatorname{Ar ch} w$ и $\sqrt{w^2 - 1}$, определив их из условий задачи. Так, например, мы можем потребовать, чтобы значению $w = is$ соответствовали значения

$$\operatorname{Ar ch} w = \frac{\pi i}{2} + \operatorname{Ar sh} s, \quad \sqrt{w^2 - 1} = -i \sqrt{s^2 + 1};$$

при этом

$$z = \frac{h}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} i + \operatorname{Ar sh} s - s \sqrt{1 + s^2} \right).$$

Значения $\operatorname{Ar sh} s$ всегда меньше, чем $s \sqrt{1 + s^2}$, а поэтому z будет иметь отрицательную действительную часть. Таким образом, в плоскости w точки верхней полуплоскости, лежащие на мнимой оси, перейдут в полу-прямую, параллельную действительной оси в плоскости z и идущую от точки $ih/2$ к точке $-\infty + ih/2$. Мы можем быть уверены при этом, что незаштрихованная область рис. 4.34 отображается на верхнюю полуплоскость плоскости w .

Примеры. Для иллюстрации рассмотрим еще несколько примеров отображений настолько подробно, чтобы читатель мог следить за выводом формул. Область примера 2 изображена на рис. 4.35; это простой пример поля, «огибающего угол». Если проводящий контур $a_1a_2a_0$ несет один потенциал, скажем 0, а контур a_0a_1 — другой, скажем V_0 , то в точке P при $x \gg d$ поле однородно, тогда как вблизи a_0 силовые линии имеют форму окружностей; особый характер этого поля обусловлен нали-

чием угла в точке a_2 . Естественно ожидать, что напряженность поля в a_2 бесконечна; интересен вопрос о том, каков порядок этой бесконечности.

В этом случае, если $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, то

$$z = z_0 + A \int \frac{\sqrt{w-1}}{w} dw,$$

$$z = z_0 + 2A \left(\sqrt{w-1} - \frac{1}{2i} \ln \frac{1+i\sqrt{w-1}}{1-i\sqrt{w-1}} \right).$$

Чтобы полностью определить преобразование, нужно еще указать линии ветвления как в плоскости z , так и в плоскости w . Естественно, что для этого преобразования точки $w=0$ и $w=1$, т. е. точки b_i , а также ∞ , будут особыми. В качестве линии ветвления удобнее всего взять участок $\operatorname{Re} w < 1$ оси $\operatorname{Im} w = 0$. Из того, что при $w=1$ должно быть $z=0$, следует, что $z_0=0$. Будем приближаться к точке $w=0$ ($z=a_1$) по двум различным путям. Один путь, вдоль положительной действительной полусоси в плоскости w , соответствует пути $a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$ вдоль границы. Между a_2 и a_1 логарифм в последней формуле действителен и положителен, а поэтому $z=2A(-i\infty)$. Постоянная A должна быть чисто мнимой. Второй путь, соответствующий участку границы $a_0 \rightarrow a_1$, будет идти вдоль отрицательной действительной полусоси. При этом логарифм имеет аргумент π и $z=2A[-i\infty-(1/2i)\pi i]=-A\pi+\infty=-di+\infty$, откуда $A=di/\pi$. Таким образом,

$$z = \frac{2di}{\pi} \left(\sqrt{w-1} - \frac{1}{2i} \ln \frac{1+i\sqrt{w-1}}{1-i\sqrt{w-1}} \right).$$

Для проверки положим $w=iv$. Тогда $z \rightarrow (i-1)\infty$ при $v \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow -(1/2)di+\infty$ при $v \rightarrow 0$. Таким образом, мнимой оси в плоскости w будет в плоскости z соответствовать линия, нанесенная на рис. 4.35 пунктиром.

В плоскости w исходной физической задаче соответствует следующая: положительная действительная полусось имеет потенциал 0, отрицательная — потенциал V_0 . Решением является потенциал

$$V = \operatorname{Im} \left(\frac{V_0}{\pi} \ln w \right) = \frac{V_0}{\pi} \theta,$$

где θ — полярный угол в плоскости w .

Положим $W=U+iV$; тогда $w=e^{\pi W/V_0}$. Наиболее непосредственный физический интерес представляет электростатическое поле E . Последнее очень просто связано с функцией $dW/dz = \partial U/\partial x + i\partial V/\partial x$. В силу условий Коши — Римана [см. (4.2.1)]

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial V}{\partial y} + i \frac{\partial U}{\partial x} = -(iE_x + E_y),$$

откуда

$$E_x - iE_y = i \frac{dW}{dz}.$$

Полагая $dW/dz = (dW/dw) \cdot (dw/dz)$, можно выразить $E_x - iE_y$ через w

$$E_x - iE_y = \frac{V_0}{d\sqrt{w-1}}.$$

Вблизи $w=0$ выражение $E_x - iE_y$ оказывается чисто мнимым, E_y — постоянным, а $E_x=0$, как и подсказывают физические соображения. При $\operatorname{Re} w \gg 1$ это выражение принимает действительные значения, а $E_y=0$,

как и должно быть вдоль пути $a_2 \rightarrow a_0$. При $|w| \gg 1$ имеем

$$z = \frac{2di}{\pi} \sqrt{w} \quad \text{и} \quad E_x - iE_y \simeq \frac{V_0}{d\sqrt{w}} \simeq \frac{2iV_0}{w}.$$

Вблизи a_0 силовые линии имеют вид дуг окружностей, идущих от C к D . Рассмотрим, наконец, поле вблизи a_2 , т. е. при w , близких к 1. Как мы и предполагали, поле в этой точке бесконечно. Мы найдем поле в виде функции от z в окрестность этой точки, выразив $\sqrt{w-1}$ через z при $w \rightarrow 1$; имеем $z \simeq (2di/3\pi)(w-1)^{3/2}$, откуда $\sqrt{w-1} \simeq z^{1/3}$ и $E_x - iE_y \simeq z^{-1/3}$.

Рассмотрим пример 3 (рис. 4.36), в котором электрическое поле создается двумя бесконечными пластинами, отстоящими друг от друга на расстояние $2C$, причем одна имеет потенциал 0, а другая V_0 . Мы ограничимся лишь построением самого отображения, что же касается самой физи-

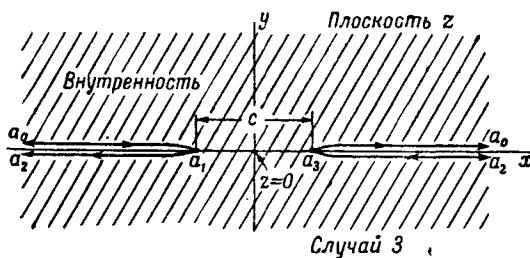


Рис. 4.36. Отображение вырожденного четырехугольника на верхнюю полуплоскость w .

«Внутренностью» четырехугольника служит вся плоскость z , за исключением точек, охватываемых линиями $a_0a_1a_2$ и $a_2a_3a_0$. В этом случае углы таковы: $\varphi_0=2\pi$, $\varphi_1=-\pi$, $\varphi_2=2\pi$, $\varphi_3=-\pi$.

ческой задачи, то она решается точно так же, как в примере 2. Сечения пластин можно рассматривать как вырожденный четырехугольник с вершинами a_0 , a_1 , a_2 , a_3 (см. рис. 4.36).

Точки b_1 и b_3 должны быть симметричны относительно b_2 , поэтому мы положим $b_1 = -1$, $b_3 = 1$. Тогда

$$z = z_0 + A \int \frac{(w-1)(w+1)}{w^2} dw,$$

то есть

$$z = z_0 + A \left(w + \frac{1}{w} \right).$$

Значению $w = 1$ соответствует $z = c/2 = z_0 + 2A$, а значению $w = -1$ соответствует $z = -c/2 = z_0 - 2A$. Отсюда следует, что $z_0 = 0$ и $A = c/4$, так что

$$z = \frac{c}{4} \left(w + \frac{1}{w} \right).$$

На рис. 4.37 изображено, как отображаются на плоскость w оси x и y плоскости z . Отрезок оси x от точки $-c/2$ до точки $c/2$ превращается в полуокружность единичного радиуса плоскости w . Ось y , «сжавшись», отображается в мнимую полусось от $w = 0$ до $w = i\infty$. Рассматриваемое отображение как бы поворачивает линии $a_3 \rightarrow a_2$ и $a_2 \rightarrow a_1$ от их исходного положения в плоскости z на 180° через нижнюю полуплоскость и соединяет их; на оси x появляется полуокруглое вздутие, которое вбирает в себя всю нижнюю полуплоскость плоскости z .

Метод инверсии. Формула Шварца — Кристоффеля может быть применена и к областям, ограниченным дугами окружностей, с помощью метода инверсии. Преобразование инверсии естественно возникает при рассмотрении изображения источника относительно круговой границы. С этим вопросом мы уже встречались (см. формулу Пуассона на стр. 353); как уже упоминалось, точка

$$w = \frac{a^2}{z} \quad (4.7.9)$$

называется изображением точки z относительно окружности радиуса a с центром в начале. Преобразование, определяемое формулой (4.7.9), называется *инверсией* (относительно указанной окружности). Оно отображает область, лежащую внутри окружности, во внешнюю область, и наоборот.

Инверсия (4.7.9) сохраняет величины углов, но изменяет направление отсчета. Действительно, она представляет собой результат двух последовательных преобразований: отображения, осуществляющего функцией a^2/z , и последующего зеркального отображения относительно действительной

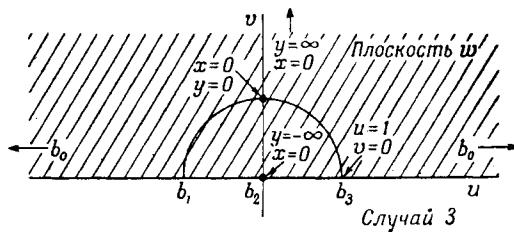


Рис. 4.37. Верхняя полуплоскость w в примере 3.
Показаны образ оси x и точки, соответствующие $z=\infty$.

оси. Первое отображение — конформное; второе сохраняет абсолютные величины углов, но изменяет их знаки.

В этом пункте нам понадобится применить преобразование (4.7.9) к окружности, проходящей через центр круга инверсии. Мы покажем, что в результате получится прямая линия, проходящая, разумеется, через точки пересечения обеих окружностей. В плоскости z окружность с центром в точке z_0 (без ущерба для общности z_0 предполагается действительным и положительным), проходящая через начало координат, имеет уравнение

$$|z - z_0|^2 = z_0^2,$$

или

$$zz - (zz_0 + \bar{z}\bar{z}_0) = 0. \quad (4.7.10)$$

Для того чтобы получить выражение соответствующего геометрического места в плоскости w , нужно выразить z и \bar{z} через w и \bar{w} , пользуясь равенством (4.7.9), и подставить в (4.7.10). При этом мы получаем

$$\frac{a^4}{ww} - z_0 \left(\frac{a^2}{w} + \frac{a^2}{\bar{w}} \right) = 0.$$

Отсюда, обозначив $u = \operatorname{Re} w$, приходим к уравнению

$$u = \frac{a^2}{2z_0},$$

что и доказывает наше утверждение.

Роль инверсии в обобщении формулы Шварца — Кристоффеля теперь ясна. Пересекающиеся дуги окружностей, такие, как P и Q на рис. 4.38,

подвергаются инверсии относительно окружности R радиуса a с центром в точке пересечения P и Q . Сама точка пересечения переходит при этом в бесконечно удаленную точку, а дуги P и Q — в части прямых P' и Q' , изображенные сплошными линиями. Теперь к этим прямым можно применить отображение Шварца — Кристоффеля.

Отображение Шварца — Кристоффеля применимо и к более сложным контурам, состоящим из дуг окружностей. Однако рассмотрение их

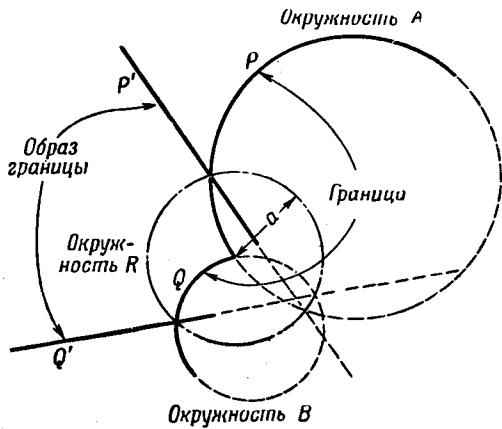


Рис. 4.38. Инверсия (относительно окружности R) дуг окружностей P и Q , превращающая их в части прямых P' и Q' .

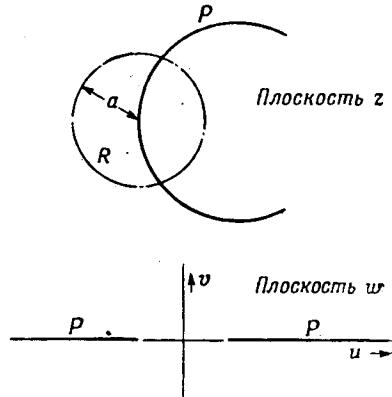


Рис. 4.39. Инверсия дуги окружности P относительно окружности R , переводящая дугу P плоскости z в участок прямой P плоскости w .

завело бы нас слишком далеко. Поэтому мы ограничимся случаем, когда имеется не более двух пересекающихся дуг окружностей, и отшлем любознательного читателя к другим руководствам, где рассмотрены более общие контуры. На рис. 4.39 изображена одна дуга и преобразованный контур, который был рассмотрен выше в примере 3.

4.8. Преобразование Фурье

В будущем нам часто придется применять преобразование Фурье, а также связанные с ним преобразования Лапласа и Меллина. В настоящем параграфе мы изучим те свойства этих преобразований, которые окажутся полезными нам в дальнейшем.

Преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется функция $F(k)$, определенная формулой

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx. \quad (4.8.1)$$

Здесь и в дальнейшем преобразование какой-либо функции будет обозначаться той же буквой, что и исходная функция, но прописной. Того же правила мы будем придерживаться, применяя другие преобразования, так как подчеркивать различие требуется не всегда. В тех случаях, когда это нужно, мы будем приписывать индексы f , L и M , обозначающие соответственно преобразования Фурье, Лапласа и Меллина. Так, F_f будет обозначать преобразование Фурье функции f . Впрочем в отдельных случаях будут употребляться буквы \mathcal{F} , \mathcal{L} и \mathcal{M} , так что преобразование Фурье функции f будет также обозначаться $\mathcal{F}(f)$.