подвергаются инверсии относительно окружности R радиуса a с центром в точке пересечения P и Q. Сама точка пересечения переходит при этом в бесконечно удаленную точку, а дуги P и Q — в части прямых P' и Q', изображенные сплошными линиями. Теперь к этим прямым можно применить отображение Шварца — Кристоффеля.

Отображение Шварца — Кристоффеля применимо и к более сложным контурам, состоящим из дуг окружностей. Однако рассмотрение их

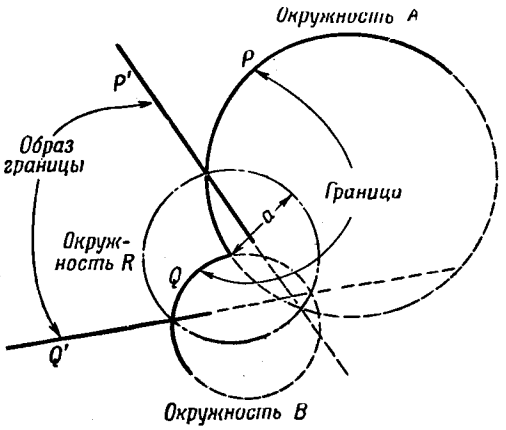

Рис. 4.38. Инверсия (относительно окружности R) дуг окружностей P и Q, превращающая их в части прямых P' и Q'.

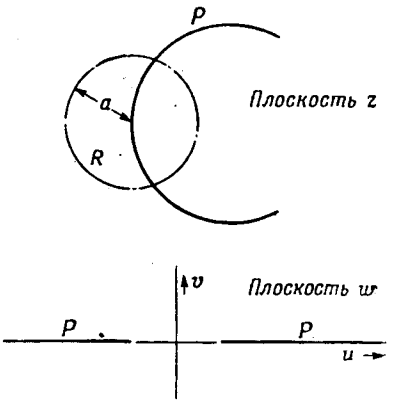

Рис. 4.39. Инверсия дуги окружности P относительно окружности R, переводящая дугу P плоскости z в участок прямой P плоскости w.

завело бы нас слишком далеко. Поэтому мы ограничимся случаем, когда имеется не более двух пересекающихся дуг окружностей, и отошлем любознательного читателя к другим руководствам, где рассмотрены более общие контуры. На рис. 4.39 изображена одна дуга и преобразованный контру, который был рассмотрен выше в примере 3.

4.8. Преобразование Фурье

В будущем нам часто придется применять преобразование Фурье, а также связанные с ним преобразования Лапласа и Меллина. В настоящем параграфе мы изучим те свойства этих преобразований, которые окажутся полезными нам в дальнейшем.

Преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется функция $F(k)$, определенная формулой

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x)dx. \tag{4.8.1}$$

Здесь и в дальнейшем преобразование какой-либо функции будет обозначаться той же буквой, что и исходная функция, но прописной. Того же правила мы будем придерживаться, применяя другие преобразования, так как подчеркивать различие требуется не всегда. В тех случаях, когда это нужно, мы будем приписывать индексы f, l и m, обозначающие соответственно преобразования Фурье, Лапласа и Меллина. Так, F_f будет обозначать преобразование Фурье функции f. Впрочем в отдельных случаях будут употребляться буквы $\mathscr{F}$, $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$, так что преобразование Фурье функции f будет также обозначаться $\mathscr{F}(f)$.

Основную роль в этой теории играет *интегральная теорема* Фурье (или интеграл Фурье), согласно которой

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(\zeta-x)}f(\zeta)\,d\zeta. \tag{4.8.2}$$

Вводя в (4.8.2) выражение для $F(k)$, получаем

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}F(k)\,dk.$$

В такой форме (4.8.2) часто называется *формулой обращения Фурье.*

Связь с рядами Фурье. Прежде чем сколько-нибудь подробно рассмотреть условия, при которых справедлива интегральная теорема Фурье, полезно рассмотреть связь этой теоремы с рядами Фурье. Рассмотрим ряд по синусам функции $h(x)$ в промежутке $0\leqslant x\leqslant l$

$$h(x)=\sum_n A_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Такого рода ряды мы рассматривали в гл. 2, где они играли важную роль в задаче о колебаниях струны; мы вернемся к ним еще в гл. 6. Из соотношений

$$\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{2}l\delta_{nm}$$

получаем выражения коэффициентов

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Подставляя эти выражения в ряд для $h(x)$, приходим к формуле

$$h(x)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^l h(\zeta)\sin\frac{n\pi\zeta}{l}\,d\zeta\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Посмотрим теперь, как будет вести себя этот ряд при $l\to\infty$. Для этого введем функцию целочисленного аргумента $k=k_n=n\pi/l$. Обозначив $\Delta k=k_{n+1}-k_n=\pi/l$, запишем

$$h(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta k\left(\int_0^l h(\zeta)\sin k_n\zeta\,d\zeta\right)\sin k_n x.$$

Довольно ясно, что при $l\to\infty$, когда $\Delta k\to 0$, этот ряд имеет своим пределом интеграл

$$h(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}dk\int_0^{\infty}h(\zeta)\sin k\zeta\sin kx\,d\zeta. \tag{4.8.3}$$

Эта формула справедлива лишь для нечетных функций. В случае четной функции $g(x)$ следует воспользоваться разложением в ряд по

косинусам, которое приводит нас к формуле

$$g(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk\int_0^\infty g(\zeta)\cos k\zeta\cos kx\,d\zeta. \tag{4.8.4}$$

Ясно, что в формулах (4.8.3) и (4.8.4) можно, введя множитель 1/4, распространить интегрирование на всю числовую ось, так что, например, первая из этих формул может быть записана в виде:

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dk\int_{-\infty}^\infty h(\zeta)\sin k\zeta\sin kx\,d\zeta.$$

Для того чтобы получить формулу, пригодную для произвольной функции, представим эту последнюю в виде суммы четной и нечетной функции, а именно

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

В силу равенств

$$\int_{-\infty}^\infty h(x)\cos kx\,dx=0,\qquad \int_{-\infty}^\infty g(x)\sin kx\,dx=0$$

мы получаем

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty dk\int_{-\infty}^\infty[f(\zeta)-f(-\zeta)]\sin k\zeta\sin kx\,d\zeta+\\&+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty dk\int_{-\infty}^\infty[f(\zeta)+f(-\zeta)]\cos k\zeta\cos kx\,d\zeta=\\&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty dk\int_{-\infty}^\infty[f(\zeta)\cos k(\zeta-x)+f(-\zeta)\cos k(\zeta+x)]\,d\zeta,\end{aligned}$$

откуда

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dk\int_{-\infty}^\infty f(\zeta)\cos k(\zeta-x)\,d\zeta. \tag{4.8.5}$$

Для того чтобы получить формулу (4.8.2), заметим, что

$$i\int_{-\infty}^\infty dk\int_{-\infty}^\infty f(\zeta)\sin k(\zeta-x)\,d\zeta=0, \tag{4.8.6}$$

если только этот интеграл сходится, так как интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty f(\zeta)\sin k(\zeta-x)\,d\zeta$$

представляет собой нечетную функцию переменного k. Предполагая, что интеграл (4.8.6) существует, сложим почленно формулы (4.8.5), (4.8.6) и получим интеграл Фурье (4.8.2).

Эти выкладки показывают, что интеграл Фурье представляет собой аналог ряда Фурье для случая непериодической функции, заданной в промежутке $-\infty<x<\infty$. В задаче о колебаниях струны интеграл Фурье

служит для описания движения бесконечной струны, простирающейся от $-\infty$ до $+\infty$. В случае полубесконечной струны, простирающейся от 0 до $+\infty$ и закрепленной в точке $x=0$, более удобна формула (4.8.3). Формулы (4.8.3) и (4.8.4) часто называются интегралами Фурье соответственно по синусам и по косинусам. Функции

$$F_s(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin kx\,dx \tag{4.8.7}$$

и

$$F_c(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos kx\,dx \tag{4.8.8}$$

называются соответственно синус- и косинус-преобразованиями Фурье функции $f(x)$. Сами формулы (4.8.3) и (4.8.4) можно трактовать как формулы обращения

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(k)\sin kx\,dk, \tag{4.8.9}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(k)\cos kx\,dk. \tag{4.8.10}$$

Некоторые интегральные теоремы. Только что приведенный вывод интеграла Фурье носит чисто эвристический характер и не дает никаких указаний относительно границ применимости этой формулы. Теперь мы должны подойти к этому вопросу с большей строгостью. Чтобы добиться наибольшей общности результатов, необходимо прибегнуть к понятию интеграла Лебега. Недостаток места не позволяет нам сколько-нибудь подробно коснуться тонких вопросов, относящихся к теории меры и интеграла Лебега. С чисто практической точки зрения интеграл Лебега отличается от обычного интеграла Римана тем, что первый определен для любой ограниченной функции, которая может реально встретиться в математическом анализе и в прикладных вопросах, каково бы ни было множество ее точек разрыва, тогда как интеграл Римана от функции, имеющей несчетное множество разрывов, вообще говоря, не существует [1]). С другой стороны, для тех функций, для которых существует интеграл Римана, интеграл Лебега также существует и совпадает с римановым интегралом. В то же время, говоря образно, интеграл Лебега можно определить даже для таких функций, которые в некоторой области колеблются «бесконечно часто». В качестве примера, иллюстрирующего различие этих интегралов, можно привести функцию $f(x)$, определенную в промежутке (0, 1) и принимающую значения 1 и 0 соответственно при рациональных и иррациональных значениях x. Интеграл Римана такой функции не определен, лебеговский же интеграл существует и равен нулю. Заметим, наконец, что интеграл Лебега обладает всеми основными свойствами интеграла Римана.

---

[1]) По поводу интегрирования функций общего вида (т. е., вообще говоря, неограниченных), играющих какую-либо роль в приложениях математики, заметим следующее. Если функция такого рода *не меняет* знака, то ее интеграл Лебега либо конечен (в этом случае функция называется интегрируемой по Лебегу), либо равен бесконечности; интеграл же Римана от такой функции может вовсе не существовать. Функция, *меняющая* знак, считается интегрируемой по Лебегу, если интегрируема ее абсолютная величина. —*Прим. ред.*

О функции $f(x)$ говорят, что она принадлежит *лебеговскому классу* L^p $(p > 0)$ на интервале (a, b), если $|f(x)|^p$ интегрируема (в смысле Лебега) на этом интервале.

Прежде чем доказывать интегральную теорему Фурье, мы выведем *формулу Парсеваля*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{4.8.11}$$

Эта формула применима, если $f(x)$ принадлежит классу L^2 на интервале $(-\infty, \infty)$. Ниже мы увидим, что интеграл Фурье является почти непосредственным следствием формулы Парсеваля. Для доказательства этой последней рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta^2 k^2/2} |F(k)|^2 dk.$$

Подставляя в I интеграл, выражающий $F(k)$, получаем

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta^2 k^2/2} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\zeta)\, d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta^2 k^2/2 + ik(x-\zeta)} dk.$$

Выполнив интегрирование по k, преобразуем I к виду

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\zeta) e^{-(x-\zeta)^2/2\delta^2} d\zeta. \tag{4.8.12}$$

Теперь мы можем показать, что $F(x)$ принадлежит классу L^2 в интервале $(-\infty, \infty)$. Записывая I в виде

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-(x-\zeta)^2/4\delta^2} \bar{f}(\zeta) e^{-(x-\zeta)^2/4\delta^2} dx\, d\zeta$$

и применяя к этому интегралу неравенство Шварца [1]), получаем

$$I \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta} \left(\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-(x-\zeta)^2/2\delta^2} dx\, d\zeta \iint_{-\infty}^{\infty} |f(\zeta)|^2 e^{-(x-\zeta)^2/2\delta^2} dx\, d\zeta \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta} \iint_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-(x-\zeta)^2/2\delta^2} dx\, d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{4.8.13}$$

В пределе при $\delta \to 0$ отсюда имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

---

[1]) Одна из форм неравенства Шварца была выведена в гл. 1. В том виде, в каком оно используется здесь, это неравенство читается так: если функции $u(x, \zeta)$ и $v(x, \zeta)$ принадлежат L^2, то

$$\left| \iint u(x, \zeta)\, v(x, \zeta)\, dx\, d\zeta \right|^2 \leqslant \left[\iint |u(x, \zeta)|^2 dx\, d\zeta \right] \left[\iint |v(x, \zeta)|^2 dx\, d\zeta \right].$$

Мы видим, что $F(k)$ принадлежит классу L^2 в интервале $(-\infty, \infty)$, коль скоро этим свойством обладает $f(x)$.

В действительности, как мы сейчас докажем, последнее соотношение сводится к равенству. Произведя в (4.8.12) замену переменной интегрирования $\zeta = x + y$, мы получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\delta^2} dy \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x+y) f(x)\, dx. \tag{4.8.14}$$

Известно, что график функции $e^{-y^2/2\delta^2}/(\sqrt{2\pi}\,\delta)$ становится все более и более заостренным при $\delta \to 0$, но интеграл ее по y при всех значениях δ равен 1. Поэтому если интеграл

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x+y) f(x)\, dx$$

представляет собой достаточно гладкую функцию вблизи $y = 0$, то естественно ожидать, что I стремится к $h(0)$ при $\delta = 0$. Справедливость этого вытекает из интегрируемости квадрата модуля функции $h(x)$, т. е. из того факта, что $h(y)$, как функция от y, принадлежит классу L^2 в интервале $(-\infty, \infty)$. Таким образом, для того чтобы получить предел функции I при $\delta \to 0$, достаточно положить $y = 0$ во внутреннем интеграле (4.8.14); при этом получаем формулу Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{4.8.15}$$

Следует подчеркнуть, что это доказательство относится как к действительным, так и к комплексным функциям f.

Интегральная теорема Фурье. Перейдем теперь к доказательству интегральной теоремы Фурье в том виде, как она была сформулирована Планшерелем.

Предположим, что функция $f(x)$ принадлежит классу L^2 на интервале $(-\infty, \infty)$, и пусть

$$F(k, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(x)\, e^{ikx} dx.$$

Тогда при $a \to \infty$ функции $F(k, a)$ сходятся в среднем к функции $F(k)$ на интервале $(-\infty, \infty)$, и если

$$f(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} F(k)\, e^{-ikx} dk,$$

то $f(x, a)$ сходятся в среднем к $f(x)$.

Сходимость в среднем $F(k, a)$ к $F(k)$ на интервале $(-\infty, \infty)$ означает, по определению, что

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k, a) - F(k)|^2 dk = 0. \tag{4.8.16}$$

Иначе говоря, функция $F(k, a)$ приближенно представляет функцию $F(k)$ со средней квадратичной погрешностью, стремящейся к нулю при $a \to \infty$.

Для доказательства этой теоремы подставляем в (4.8.15) $F+G$ вместо F и $f+g$ вместо f. Мы получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F+G|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} [|F|^2+|G|^2+2\operatorname{Re}(F\bar{G})]\,dk =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [|f|^2+|g|^2+2\operatorname{Re}(f\bar{g})]\,dx.$$

В силу формулы Парсеваля отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(F\bar{G})\,dk = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(f\bar{g})\,dx.$$

Подобным же образом, подставив в (4.8.15) $F+iG$ вместо F и $f+ig$ вместо f, приходим к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}(F\bar{G})\,dk = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}(f\bar{g})\,dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F\bar{G}\,dk = \int_{-\infty}^{\infty} f\bar{g}\,dx, \tag{4.8.17}$$

и из этой невинной маленькой формулы будут вытекать почти все нужные нам теоремы, касающиеся преобразования Фурье.

Пусть функция $g(x)$ равна 1 на интервале $(0, \zeta)$, а вне этого интервала равна нулю. Преобразованием Фурье этой функции служит

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\zeta} e^{ikx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik\zeta}-1}{ik}.$$

Отсюда, согласно предыдущему абзацу, вытекает равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \frac{1-e^{-ik\zeta}}{ik}\,dk = \int_0^{\zeta} f\,dx.$$

Взяв производные по ζ от обеих частей, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\,e^{-ik\zeta}\,dk = f(\zeta),$$

т. е. обычную формулу обращения[1]).

Нам нужно еще показать, что функция $F(k)$ существует, т. е. что $F(k, a)$ сходятся в среднем к $F(k)$ при $a \to \infty$. Так как

$$F(k, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(x)\,e^{ikx}\,dx,$$

[1]) Это рассуждение, а также некоторые последующие рассуждения в этом параграфе проведены не вполне аккуратно. См., например, книгу Е. К. Титчмарша, Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., 1948.—*Прим. ред.*

то $F(k, a)$ является преобразованием функции, равной $f(x)$ при $|x| < a$ и тождественно равной нулю при $|x| > a$. Разность же $H(k, a) = F(k, a) - F(k)$ является преобразованием функции, равной нулю при $|x| < a$ и совпадающей с $f(x)$ при $|x| > a$. Применяя формулу Парсеваля, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(k, a)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k, a) - F(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{-a} |f(x)|^2 dx + \int_{a}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Мы видим, что $\int |F(k, a) - F(k)|^2 dk \to 0$ при $a \to \infty$, т. е. соотношение (4.8.16) справедливо.

Свойства преобразования Фурье. Доказав интегральную теорему Фурье, обратимся теперь к выяснению свойств преобразования Фурье в комплексной плоскости. Особенно ценной будет для нас следующая теорема:

Пусть функция $f(z)$ $(z = x + iy)$ аналитична в полосе

$$y_- < y < y_+,$$

причем $y_+ > 0$ и $y_- < 0$. Если в любой полосе, лежащей внутри исходной полосы,

$$|f(z)| \leqslant \begin{cases} Ae^{\tau_- x} & \text{при} \quad x \to +\infty, \\ Be^{\tau_+ x} & \text{при} \quad x \to -\infty, \end{cases}$$

где $\tau_- < 0$ и $\tau_+ > 0$, то функция $F(k)$ $(k = \sigma + i\tau)$ аналитична в полосе

$$\tau_- < \tau < \tau_+,$$

причем в любой полосе, лежащей внутри этой,

$$|F(k)| < \begin{cases} Ce^{-y_+ \sigma} & \text{при} \quad \sigma \to +\infty, \\ De^{-y_- \sigma} & \text{при} \quad \sigma \to -\infty; \end{cases}$$

здесь A, B, C и D — действительные постоянные.

Для доказательства достаточно заметить, что аналитичность функции

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\tau x} e^{i\sigma x} dx$$

обусловлена характером сходимости определяющего интеграла. Если $\tau_- < \tau < \tau_+$, то модуль подинтегральной функции убывает как $e^{(\tau_- - \tau)x}$ или как $e^{(\tau_+ - \tau)x}$ соответственно при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$. Тем самым обеспечивается равномерная (относительно $k = \sigma + i\tau$) сходимость рассматриваемого интеграла и, следовательно, аналитичность функции $F(k)$. Рассмотрим теперь поведение $F(k)$ в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$. Так как $f(z)$ — аналитическая функция, то интеграл, определяющий $F(k)$, можно взять вдоль прямой, параллельной оси x и лежащей в полосе $y_- < y < y_+$. Тогда

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ikz} dz = \frac{e^{-\sigma y}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i(\sigma x - \tau y)} e^{-\tau x} dz.$$

Отсюда мы заключаем, что при $|\sigma| \to \infty$

$$|F(k)| \leqslant Ee^{-\sigma y}.$$

Для значений y, близких к y_+, сходимость рассматривается лишь при $\sigma > 0$, а для y, близких к y_-, — при $\sigma < 0$. Тем самым теорема доказана.

В том случае, когда функция $f(x)$ не принадлежит классу L^2 на интервале $(-\infty, \infty)$, например из-за ее поведения при $x \to +\infty$, может случиться, что некоторая функция вида

$$g(x) = f(x)\, e^{-\tau_0 x}$$

все-таки принадлежит классу L^2. Применяя к $g(x)$ формулу обращения, получаем

$$g(x) = f(x)\, e^{-\tau_0 x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(k)\, e^{-ikx}\, dk,$$

откуда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(k)\, e^{-i(k+i\tau_0)x}\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} G(\zeta - i\tau_0)\, e^{-i\zeta x}\, d\zeta.$$

Функция $G(\zeta - i\tau_0)$ весьма просто связана с $F(k)$. В самом деле,

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\tau_0 x} e^{ikx}\, dx$$

и

$$G(\zeta - i\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\zeta x}\, dx = F(\zeta),$$

откуда получается следующая формула обращения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F(k)\, e^{-ikx}\, dk. \tag{4.8.18}$$

Однако часто случается, что одного множителя вида $e^{-\tau_0 x}$ недостаточно для всего интервала $-\infty < x < \infty$. Тогда мы вводим функции

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x)\, e^{-\tau_0 x}, & x > 0 \qquad (\tau_0 > 0), \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ f(x)\, e^{-\tau_1 x}, & x < 0 \qquad (\tau_1 < 0). \end{cases}$$

При этом постоянная τ_0 выбирается по возможности меньшей, а τ_1 — большей, но так, чтобы $f_+(x)$ и $f_-(x)$ принадлежали L^2 при $x \to \pm\infty$. Соответствующими преобразованиями являются

$$F_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\, e^{ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-\tau x} e^{i\sigma x}\, dx \quad (\tau > \tau_0),$$

$$F_-(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{-\tau x} e^{i\sigma x}\, dx \quad (\tau < \tau_1),$$

где $k = \sigma + i\tau$.

Согласно интегральной формуле Фурье,

$$f_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_+(\sigma + i\tau_0)\, e^{-i\sigma x}\, d\sigma,$$

откуда следует, что

$$\left.\begin{matrix} f(x) & (x>0) \\ 0 & (x<0) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_+(\sigma+i\tau_0)\, e^{-i(\sigma+i\tau_0)x} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k)\, e^{-ikx}\, dk.$$

Аналогично

$$\left.\begin{matrix} 0 & (x>0) \\ f(x) & (x<0) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} F_-(k)\, e^{ikx}\, dk.$$

Складывая почленно, получаем формулу обращения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k)\, e^{-ikx}\, dk + \int_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} F_-(k)\, e^{-ikx}\, dk. \qquad (4.8.19)$$

Аналитичность функций F_+ и F_- вытекает из предыдущей теоремы. В силу определения функции F_+ интеграл, ее представляющий, сходится при $\tau > \tau_0$, а поэтому F_+ аналитична в полуплоскости $k = \sigma + i\tau$, расположенной над прямой $\tau = \tau_0$. Аналогично функция F_- аналитична в полуплоскости $\tau < \tau_1$.

Рассмотрим, например, функцию $f(x) = e^{|x|}$. В этом случае можно положить $\tau_0 = 1 + \varepsilon$ и $\tau_1 = -1 - \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Функции F_+ и F_- будут, следовательно, аналитическими соответственно при $\tau > 1$ и при $\tau < -1$. Чтобы убедиться в этом, вычислим эти функции:

$$F_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^x e^{ikx}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+ik} \qquad (\tau > 1),$$

$$F_- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-x} e^{ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-1+ik} \qquad (\tau < -1).$$

Для функций F_- и F_+ точки $k = i$ и $k = -i$ соответственно являются особыми; эти точки определяют области аналитичности F_+ и F_-. Функция F_+, например, аналитична выше прямой $\operatorname{Im} k = 1$.

Асимптотические значения преобразования. Здесь уместно рассмотреть асимптотическое поведение функций F_+ и f_+, а также функций F_- и f_-. Предположим что $F_+(k)$ можно разложить в ряд по степеням $1/k$

$$F_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(-ik)^n}, \quad \tau > \tau_0.$$

Вводя это разложение в формулу обращения (4.8.19)

$$f_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k)\, e^{-ikx}\, dk,$$

получаем

$$f_+(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_n a_n \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \frac{e^{-ikx}}{(-ik)^n}\, dk.$$

Воспользуемся теперь равенством

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,dk=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

которое получается из формулы обращения, поскольку непосредственным интегрированием легко убедиться в том, что $\left(-1/\sqrt{2\pi}\right)(1/ik)$ представляет собой преобразование функции, равной 1 при $x>0$ и 0 при $x<0$. Последовательно интегрируя по x обе части этого равенства, приходим к формуле

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0}\frac{e^{-ikx}}{(-ik)^n}\,dk=\begin{cases}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Отсюда получаем

$$e^{\tau_0 x}f_+(x)=\sum_n\frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!},$$

то есть

$$a_n=f^{(n-1)}(0).$$

Таким образом,

$$F_+(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_n\frac{f^{(n-1)}(0)}{(-ik)^n}.$$

Мы замечаем, что поведение $F_+(k)$ *при больших значениях* $|k|$ в верхней полуплоскости связано с поведением f вблизи нуля.

Общая формулировка. Рассмотрим теперь вопрос об обращении формулы (4.8.19). Предположим, что нам дано выражение

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0}G(k)\,e^{-ikx}\,dk+\int\limits_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1}H(k)\,e^{-ikx}\,dk\right).$$

При каких условиях G и H можно отождествить соответственно с F_+ и F_-? Согласно предыдущему, одна из этих функций должна быть аналитической выше некоторой прямой, параллельной действительной оси, а другая — ниже некоторой другой прямой, также параллельной действительной оси. Далее если области аналитичности этих функций перекрываются, то должно быть $F_+=-F_-$ и, следовательно, $G=-H$. Это следует из определения функций F_+ и F_-, так как, разлагая f в ряд по степеням x и интегрируя почленно (если это возможно), мы получим для F_+ и $-F_-$ одно и то же разложение по степеням $1/iK$. Таким образом, F_+ и $-F_-$ совпадают в общей части их области аналитичности и, следовательно, F_+ служит аналитическим продолжением функции $-F_-$ в верхней полуплоскости, а F_- — аналитическим продолжением $-F_+$ в нижней полуплоскости. Отсюда мы можем заключить, что если G не равна $-H$, то G и H могут быть отождествлены с F_+ и F_- лишь в том случае, когда не существует области, в которой обе эти функции были бы аналитичны.

Функции G и H не могут быть отождествлены с F_+ и F_- и тогда, когда G и H являются аналитическими не в полуплоскостях, а в неперекрывающихся полосах. Однако в этом случае важный вывод можно сделать тогда, когда $f=0$, т. е. при условии

$$\int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0}G(k)\,e^{-ikz}\,dk+\int\limits_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1}H(k)\,e^{-ikz}\,dk=0. \qquad (4.8.20)$$

Точнее говоря, предположим, что выполняется (4.8.20) и, кроме того:

1) G аналитична в полосе $\tau_0' \leqslant \tau \leqslant \tau_0''$, содержащей прямую $\tau = \tau_0$;

2) H аналитична в полосе $\tau_1' \leqslant \tau \leqslant \tau_1''$, содержащей прямую $\tau = \tau_1$;

3) $\tau_1'' < \tau_0'$;

4) G и H принадлежат классу L^1 в интервале $(-\infty, \infty)$;

5) G и H стремятся к нулю, когда $|\sigma| \to \infty$ в соответствующей полосе $(k = \sigma + i\tau)$.

При выполнении всех этих условий можно показать следующее:

1) функции G и H обе аналитичны в полосе $\tau_1' < \tau < \tau_0''$,

2) в этой полосе $G + H = 0$.

Области, о которых идет речь в условиях и в утверждении теоремы, изображены на рис. 4.40 соответственно слева и справа.

Для доказательства умножим (4.8.20) на $e^{i\zeta z}$ и проинтегрируем по z. В силу абсолютной сходимости интегралов в (4.8.20) порядок интегрирования можно обратить. При этом мы получаем

$$\int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \frac{G(k)}{k-\zeta}\,dk + \int\limits_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} \frac{H(k)}{k-\zeta}\,dk = 0. \tag{4.8.21}$$

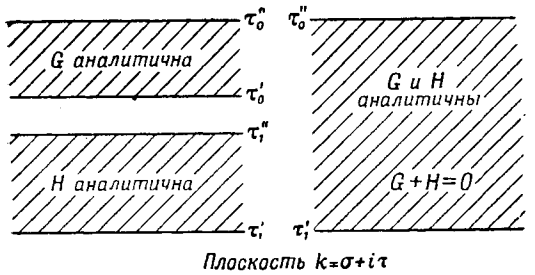

Рис. 4.40. Области аналитичности функций G и H.

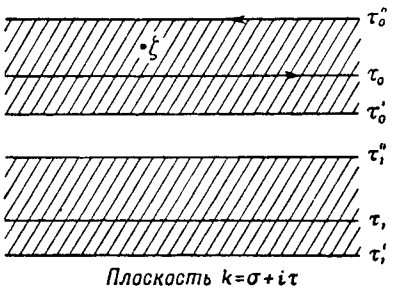

Рис. 4.41. Контуры при аналитическом продолжении функций G и H.

Выберем ζ так, чтобы $\operatorname{Im}\zeta$ была заключена между τ_0 и τ_0''. Применяя интеграл Коши к контуру, изображенному на рис. 4.41, получаем

$$\int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \frac{G(k)}{k-\zeta}\,dk - \int\limits_{-\infty+i\tau_0''}^{\infty+i\tau_0''} \frac{G(k)}{k-\zeta}\,dk = 2\pi i G(\zeta).$$

Отсюда

$$\int\limits_{-\infty+i\tau_0''}^{\infty+i\tau_0''} \frac{G(k)}{k-\zeta}\,dk + \int\limits_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} \frac{H(k)}{k-\zeta}\,dk = -2\pi i G(\zeta), \tag{4.8.22}$$

где $\tau_1'' > \tau_1 > \tau_1'$. Значение $\operatorname{Im}\zeta$ в левой части может быть любым между τ_0'' и τ_1, а следовательно, формула (4.8.22) дает аналитическое продолжение функции $G(\zeta)$ за пределы ее исходной области аналитичности.

Точно так же

$$\int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \frac{G(k)}{k-\zeta}\,dk + \int\limits_{-\infty+i\tau_1'}^{\infty+i\tau_1'} \frac{H(k)}{k-\zeta}\,dk = 2\pi i H(\zeta), \tag{4.8.23}$$

где $\tau_1' < \operatorname{Im}\zeta < \tau_0$.

Мы видим, что при $\tau_1 < \operatorname{Im}\zeta < \tau_0$ справедливы обе формулы (4.8.23) и (4.8.22). Фиксировав ζ в этой области, вычитаем (4.8.22) из (4.8.23):

$$2\pi i\,[H(\zeta)+G(\zeta)] = \int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \frac{G(k)}{k-\zeta}\,dk - \int\limits_{-\infty+i\tau_0''}^{\infty+i\tau_0''} \frac{G(k)}{k-\zeta}\,dk +$$

$$+ \int\limits_{-\infty+i\tau_1'}^{\infty+i\tau_1'} \frac{H(k)}{k-\zeta}\,dk - \int\limits_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} \frac{H(k)}{k-\zeta}\,dk = \oint \frac{G(k)}{k-\zeta}\,dk + \oint \frac{H(k)}{k-\zeta}\,dk.$$

Так как ζ лежит вне контуров интегрирования, то оба последних интеграла равны нулю. Тем самым теорема доказана.

Полученных сведений из общей теории для нас достаточно. Мы познакомились с интегралом Фурье, выяснили аналитические свойства преобразования Фурье и получили выражения преобразований и формулы обращения для тех случаев, когда из-за поведения функции при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ не удовлетворяются условия теоремы Фурье. Теперь мы перейдем к приложениям.

Свертка. Интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\,h(x-y)\,dy \tag{4.8.24}$$

называется *сверткой* функций f и h. Название связано с тем, что аргумент $x-y$ функции h свернут по y. Мы покажем, что если и f и h принадлежат классу L^2 в интервале $(-\infty, \infty)$, то преобразованием Фурье этого интеграла служит $F(k)H(k)$, т. е. произведение преобразований функций f и h. Эта теорема оказывается чрезвычайно полезной при решении некоторых интегральных уравнений (см. § 8.4). Вытекает она непосредственно из формулы Парсеваля (4.8.17). В самом деле, если $\bar{g}(y) = h(x-y)$, то

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{+iky}\bar{h}(x-y)\,dy,$$

$$\bar{G} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iky}h(x-y)\,dy.$$

Положим $x-y=\xi$, так что

$$\bar{G} = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi}h(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда в силу (4.8.17)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\,h(x-y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k)\,H(k)\,e^{-ikx}\,dk, \tag{4.8.25}$$

что и требовалось доказать. Таким образом, интеграл (4.8.24) является как раз обратным преобразованием Фурье функции FH. В силу взаимности, существующей между функциями и их преобразованиями Фурье, формуле (4.8.25) можно придать иной вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,h(x)\,e^{ikx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(l)\,H(k-l)\,dl,$$

так что преобразованием произведения fh служит свертка преобразований функций f и h (т. е. свертка функций F и H).

Эту теорему можно обобщить. Рассматривая правую часть формулы (4.8.25) как функцию от x, умножим обе части этой формулы на $p(z-x)$ и возьмем интеграл по x. Получим функцию от z, равную

$$\iint_{-\infty}^{\infty} p(z-x)\,h(x-y)\,f(y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(k)\,H(k)\,F(k)\,e^{-ikz}\,dk.$$

В качестве примера применения формулы (4.8.25) рассмотрим простое интегральное уравнение

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,h(x-y)\,dy,$$

в котором функции g и h даны, а искомой является функция f. Подвергая обе его части преобразованию Фурье, приходим к уравнению

$$G(k) = \sqrt{2\pi}\,F(k)\,H(k),$$

откуда

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{G(k)}{H(k)}$$

и

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k)}{H(k)}\,e^{-ikx}\,dk.$$

Это, конечно, только частное решение рассматриваемого интегрального уравнения; кроме того, оно годится лишь в том случае, когда функция G/H принадлежит классу L^2 в интервале $(-\infty, \infty)$. Уравнения такого вида будут рассмотрены более полно в § 8.4.

Формула суммирования Пуассона. Интеграл Фурье иногда помогает также при вычислении сумм рядов. Так, например, сумма ряда весьма общего вида $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n)$ может быть вычислена следующим образом. Допустим, что f принадлежит классу L^2 в интервале $(-\infty, \infty)$. Если взять функции

$$f_+(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ f, & x > 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} f, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

то

$$f_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k)\,e^{-ikx}\,dk, \tag{4.8.26}$$

где в силу предположения относительно f постоянную τ_0 можно считать отрицательной. Преобразование $F_+(k)$ представляет собой аналитическую функцию при $\tau > \tau_0'$, где $\tau_0 > \tau_0'$ (см. рис. 4.41). Мы имеем также

$$f_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} F_-(k)\,e^{-ikx}\,dk, \tag{4.8.27}$$

где τ_1 можно выбрать положительным, и $F_-(k)$ аналитична в области $\tau < \tau_1''$, где $\tau_1 < \tau_1''$.

Имея это в виду, расщепим S на две суммы

$$S_+ = \sum_{n=0}^{\infty} f_+(\alpha n), \quad S_- = \sum_{n=-\infty}^{-1} f_-(\alpha n).$$

Сначала рассмотрим S_+. Вводя (4.8.26) в выражение S_+, получаем

$$S_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k) e^{-ik\alpha n} dk.$$

В силу абсолютной сходимости интеграла, представляющего f_+, суммирование можно внести под знак интеграла

$$S_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ik\alpha n} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \frac{F_+(k)}{1-e^{-ik\alpha}} dk.$$

Функция F_+ аналитична в верхней полуплоскости, и, если она достаточно быстро убывает при $|k| \to \infty$, мы можем в правой части прибавить интеграл по полуокружности бесконечно большого радиуса, лежащей в полуплоскости над прямой $\tau = \tau_0$ и соединяющей точки $-\infty + i\tau_0$ и $\infty + i\tau_0$. Постоянная τ_0 отрицательна, поэтому мы можем применить теорему Коши и найти вычеты подинтегральной функции в нулях знаменателя, т. е. в точках $k = 2m\pi/\alpha$, где m принимает целые значения, положительные и отрицательные. Таким образом, мы получаем, что

$$S_+ = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_+\left(\frac{2m\pi}{\alpha}\right).$$

Аналогично

$$S_- = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_-\left(\frac{2m\pi}{\alpha}\right).$$

Следовательно,

$$S_+ + S_- = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (F_+ + F_-) = S,$$

то есть

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2m\pi}{\alpha}\right), \tag{4.8.28}$$

где F — преобразование Фурье функции f. Это и есть *формула суммирования Пуассона*.

Возьмем в качестве простого примера функцию $f(n) = 1/(1+n^2)$. Преобразование Фурье

$$F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

этой функции легко найти с помощью теории вычетов. Применяя фор-

мулу (4.8.28), получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+a^2n^2} = \frac{\pi}{a}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-2m\pi/a} + \sum_{m=-\infty}^{-1} e^{2m\pi/a}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi/a}} + \frac{e^{-2\pi/a}}{1-e^{-2\pi/a}}\right),$$

или

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+a^2n^2} = \frac{\pi}{a}\operatorname{cth}\frac{\pi}{a}. \tag{4.8.29}$$

В последующих главах мы часто будем пользоваться формулой Пуассона [см., в частности, формулу (7.2.30)].

Преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа функции $f(x)$ определяется формулой

$$F_l(p) = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx. \tag{4.8.30}$$

Изучение свойств преобразования Лапласа может быть сведено к изучению свойств преобразования Фурье, потому что, как мы увидим, первое приводится ко второму. В самом деле, рассмотрим функцию

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Взяв ее преобразование Фурье

$$F_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\, e^{ikx}\, dx$$

и сопоставив это выражение с (4.8.30), мы замечаем, что

$$F_l(p) = \sqrt{2\pi}\, F_+(ip). \tag{4.8.31}$$

Вооруженные этим соотношением, мы сможем, исходя из известных теорем для преобразования Фурье F_+, получить соответствующие теоремы для преобразования Лапласа F_l. Например, из формулы обращения (4.8.19)

$$f_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k)\, e^{-ikx}\, dk$$

посредством подстановки $k = ip$ получаем формулу обращения преобразования Лапласа

$$f_+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0-i\infty}^{\tau_0+i\infty} F_l(p)\, e^{px}\, dp \quad (\operatorname{Re} x > 0). \tag{4.8.32}$$

Рассмотрим в качестве примера функцию $f(x) = e^{iqx}$. Для нее

$$F_l(p) = \frac{1}{p-iq}.$$

Подставляя это преобразование в формулу (4.8.32), получаем интеграл

$$f_+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0-i\infty}^{\tau_0+i\infty} \frac{e^{px}}{p-iq}\, dp,$$

который легко вычисляется с помощью теории вычетов. При $x > 0$ мы замыкаем контур интегрирования полуокружностью, лежащей в левой полуплоскости, и получаем выражение $f_+ = e^{iqx}$. При $x < 0$ вспомогательную полуокружность следует взять в правой полуплоскости, а так как в этой области подинтегральная функция аналитична, то $f_+ = 0$, когда $x < 0$, как и следовало ожидать.

Теорема о свертке играет важнейшую роль в приложениях преобразования Лапласа. Так как $f_+(y) = 0$ при $y < 0$ и $h_+(x-y) = 0$ при $x < y$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_+(y)\, h_+(x-y)\, dy = \int_0^x f(y)\, h(x-y)\, dy.$$

Подставляя это выражение в формулу (4.8.25), получаем теорему о свертке для преобразования Лапласа

$$\int_0^x f(y)\, h(x-y)\, dy = \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k)\, H_+(k)\, e^{-ikx}\, dk,$$

или

$$\int_0^x f(x)\, h(x-y)\, dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0-i\infty}^{\tau_0+i\infty} F_l(p)\, H_l(p)\, e^{px}\, dp. \qquad (4.8.33)$$

Иначе говоря, преобразование Лапласа функции $\int_0^x f(y)\, h(x-y)\, dy$ равно произведению преобразований Лапласа функций f и h.

В качестве примера применения этой теоремы возьмем интегральное уравнение типа Вольтерра, встречающееся в теории начальных задач:

$$f(t) = \int_0^t k(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau;$$

здесь f — заданная функция, а g — искомая. Это уравнение будет рассмотрено в гл. 8. Здесь же мы, без доказательства, ограничимся лишь указанием на то, как можно его решить. Следует подвергнуть обе части уравнения преобразованию Лапласа, в результате чего получим

$$F(p) = K(p)\, G(p).$$

Отсюда

$$G(p) = \frac{F(p)}{K(p)}$$

и

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0-i\infty}^{\tau_0+i\infty} \frac{F(p)}{K(p)}\, e^{pt}\, dp.$$

Дальнейшее рассмотрение преобразования Лапласа и его применений читатель найдет в гл. 5, 8, 11 и 12.

Преобразование Меллина. Другое важное преобразование, тоже тесно связанное с преобразованием Фурье, определяется формулой

$$F_m(s) = \int_0^{\infty} f(x)\, x^{s-1}\, dx. \qquad (4.8.34)$$

Так, например, преобразованием Меллина функции e^{-x} служит $\Gamma(s)$. Для того чтобы установить связь преобразования (4.8.34) с преобразованием Фурье, положим $x=e^z$. Тогда

$$F_m(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(e^z)\,e^{sz}\,dz=\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\,e^{sz}\,dz,$$

где $g(z)=f(e^z)$. Сравнивая это выражение с преобразованием Фурье

$$G(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\,e^{ikz}\,dz$$

функции $g(z)$, замечаем, что

$$F_m(s)=\sqrt{2\pi}\,G(-is). \tag{4.8.35}$$

Теперь можно перефразировать теоремы, относящиеся к преобразованию Фурье, применительно к преобразованию Меллина. Начнем с рассмотрения условий существования преобразования. Существование интеграла (в смысле Лебега)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(z)|^2\,dz$$

эквивалентно существованию интеграла

$$\int_{0}^{\infty} |f(x)|^2\,\frac{dx}{x}. \tag{4.8.36}$$

Теперь выведем формулу обращения. Так как

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz}\,G(k)\,dk=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-sz}\,F_m(s)\,ds,$$

то

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{F_m(s)}{x^s}\,ds. \tag{4.8.37}$$

Если условие (4.8.36) не выполнено, то интеграл (4.8.34) может существовать лишь в некоторой полуплоскости вида $\operatorname{Re} s>\sigma_0$, а вне этой полуплоскости функция $F_m(s)$ может быть определена путем аналитического продолжения. Пример такого рода мы имели в § 4.5 при рассмотрении гамма-функции. При этих условиях формула обращения (4.8.37) перестает быть справедливой. Однако в этом случае наши выводы могут быть применены к функции $x^{\sigma_0'}f(x)$, где $\sigma_0'>\sigma_0$. Преобразованием ее является функция $F_m(s+\sigma_0')$. Формула (4.8.37) при этом дает

$$x^{\sigma_0'}f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{F_m(s+\sigma_0')}{x^s}\,ds,$$

откуда, положив $s+\sigma_0'=\xi$, мы получаем

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0'-i\infty}^{\sigma_0'+i\infty}\frac{F_m(\xi)}{x^\xi}\,d\xi. \tag{4.8.38}$$

В тех случаях, когда нет такого значения $\operatorname{Re} s$, при котором интеграл (4.8.34) сходится при всех x, приходится разрезать область определения $f(x)$ и брать две различные функции, обладающие каждая своим множителем, которым обеспечивается сходимость, так же, как это делалось с преобразованием Фурье [см. формулу (4.8.18) и следующие за ней абзацы]. Это построение, вполне аналогичное приведенному выше, вынесено в задачи.

Обратимся, наконец, к теореме о свертке, относящейся к преобразованию Меллина. Взяв формулу (4.8.25) и осуществив подстановки

$$e^y = \eta, \qquad f(y) = v(\eta),$$
$$e^x = \xi, \qquad h(x-y) = w(e^{x-y}) = w(\xi/\eta),$$

приходим к формуле

$$\int_0^\infty v(\eta)\, w\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0'-i\infty}^{\sigma_0'+i\infty} V_m(s)\, W_m(s)\,\frac{ds}{\xi^s}, \tag{4.8.39}$$

которой можно придать еще такой вид

$$\int_0^\infty v(\xi)\, w(\xi)\,\xi^{s-1}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_0'-i\infty}^{\tau_0'+i\infty} V_m(\rho)\, W_m(s-\rho)\, d\rho. \tag{4.8.40}$$

В качестве примера применения формулы (4.8.40) вычислим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0'-i\infty}^{\sigma_0'+i\infty} \Gamma(a+\rho)\,\Gamma(s-\rho)\, d\rho \qquad (-a < \sigma_0' < s).$$

Заметив, что $f(x) = e^{-x}x^a$, если $F_m(s) = \Gamma(a+s)$, воспользуемся формулой (4.8.40):

$$I = \int_0^\infty e^{-x}\, x^a\, e^{-x}\, x^{s-1}\, dx = \int_0^\infty e^{-2x}\, x^{a+s-1}\, dx = \frac{\Gamma(a+s)}{2^{a+s}}.$$

Положим $s = a$ в I и вычислим интеграл вдоль мнимой оси. Мы получим следующее интересное соотношение между значениями $\Gamma(z)$ при действительных $z = a$ и комплексных $z = a + i\tau$:

$$\int_0^\infty |\Gamma(a+i\tau)|^2\, d\tau = \frac{\pi\Gamma(2a)}{2^{2a}}.$$

Изучив поведение функций комплексного переменного, мы перейдем в следующей главе к исследованию их связи с дифференциальными уравнениями.

Задачи к главе 4

4.1. Доказать, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right) \qquad (a > b > 0).$$