

ГЛАВА 5

Обыкновенные дифференциальные уравнения

После обзора видов полей, встречающихся в физике, и описывающих их уравнений с частными производными, после исследования аналитического характера различного рода решений этих уравнений мы должны теперь перейти к центральной части нашей работы, именно, к нахождению решения конкретных уравнений поля. Для этого обычно требуется два основных шага: первый, исследуемый в настоящей главе, состоит в нахождении всех (или почти всех) возможных решений уравнения, а второй, изучаемый в дальнейших главах, — в выборе из них того частного решения, которое удовлетворяет краевым условиям рассматриваемой задачи.

Уравнения, которые мы предполагаем изучать в данной книге, приведены в таблице на стр. 260, 261. Мы уже указали, что они являются далеко не единственными встречающимися в физике уравнениями поля, но мы отметили и то, что они составляют неожиданно большую часть важных в современной физике уравнений поля. Зная, как найти решение приведенных уравнений, мы будем в состоянии изучать многочисленные теоретические проблемы во всех важных в настоящее время областях физики.

Все приведенные в таблице уравнения имеют несколько существенных общих свойств, которые дадут нам возможность сузить круг вопросов, изучаемых здесь и далее. Эти уравнения можно единообразно записать в виде

$$\mathcal{H}\phi = F.$$

где поле ϕ представляет собой скалярную либо векторную функцию координат и времени (рассматриваемые векторы могут принадлежать как обычному пространству, так и абстрактному векторному пространству или обоим). Оператор \mathcal{H} представляет собой комбинацию функций координат и времени, частных производных по пространственным координатам и времени, а также иногда векторных операторных функций в обычном или абстрактном векторном пространстве. Величина F представляет собой скалярную или векторную функцию пространства и времени. \mathcal{H} и F известны; поле ϕ неизвестно.

Первым общим свойством, на которое надо указать, является то, что такие уравнения линейны относительно неизвестной ϕ ; ни один из членов не содержит ϕ^2 , или произведений двух компонент ϕ , или высших степеней. Обычно линейные уравнения решаются значительно проще, чем нелинейные, и мы в наших рассмотрениях будем много раз пользоваться этим свойством линейности.

Если F равно нулю, уравнение называется *однородным*, так как каждый из его членов содержит ϕ . Однородные линейные уравнения обладают следующим чрезвычайно полезным свойством: если ϕ_1, ϕ_2, \dots являются решениями уравнения, то любая линейная комбинация $\sum a_n \phi_n$ этих решений также представляет собой решение. Читатель легко проведет доказательство этого утверждения.

Если F не равно нулю, уравнение называется *неоднородным*, так как некоторые из его членов не содержат ϕ . Неоднородные линейные уравнения также обладают полезными свойствами: если ψ_i является решением неоднородного уравнения $\mathcal{H}\psi_i = F$, а ψ_h — каким-либо решением соответствующего однородного уравнения $\mathcal{H}\psi_h = 0$, то сумма $\psi_i + \psi_h$ представляет собой решение неоднородного уравнения; если ψ_1 является решением уравнения $\mathcal{H}\psi_1 = F_1$, ψ_2 — решением уравнения $\mathcal{H}\psi_2 = F_2$ и т. д., то сумма $\psi = \sum a_n \psi_n$ представляет собой решение неоднородного уравнения $\mathcal{H}\psi = \sum a_n F_n$. Оба эти результата, которые нетрудно доказать, окажутся в дальнейших исследованиях весьма полезными.

Другим свойством уравнений, приведенных в таблице на стр. 260, 261, является то, что *ни одно из них не имеет порядка выше второго*, то есть ни одно из них не содержит производных выше второго порядка. Число уравнений поля порядка выше второго, используемых в физике, невелико (например, уравнение поперечных колебаний упругой пластинки); наиболее важные уравнения, которые рассматриваются в нашей книге, имеют порядок либо первый, либо второй. Это также позволит нам сберечь время и место за счет проведения общих рассмотрений только для этих случаев.

Уравнения с частными производными, содержащие более одного независимого переменного, решить значительно сложнее, чем обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие только одно независимое переменное. За исключением небольшого числа случаев, когда решение удается угадать, а затем проверить, известно только два общих эффективных метода решения, именно *интегральное представление решения и решение при помощи разделения переменных*¹⁾. Пример интегрального представления решения приведен на стр. 47 для уравнения Пуассона $\nabla^2\psi = -q(x, y, z)$. Решение можно записать, как было показано выше, в виде

$$\psi(x, y, z) = \iiint [q(x', y', z')/4\pi R] dx' dy' dz',$$

где R — расстояние между точками (x, y, z) и (x', y', z') . Это — типичная запись решения в виде интеграла. Неоднородная часть уравнения q находится под знаком интеграла, а остальная часть подинтегральной функции $1/4\pi R$, называемая функцией Грина, одна и та же для любой функции q . Решения аналогичного типа можно получить также для однородных уравнений, причем тогда функция q определяется по краевым условиям, а функция Грина — по виду решаемого уравнения.

Преимуществом метода интегрального представления решения является общность этого метода, так как обычно интеграл остается инвариантным при преобразовании координат, и, построив функцию Грина один раз, как показано в гл. 7, в принципе можно найти любое требуемое решение однородного или неоднородного уравнения. Однако выражение «в принципе» указывает, что интегральное представление решения не всегда является достаточно удовлетворительным, так как во многих случаях интеграл не берется и тогда численные значения решения получить чрезвычайно трудно.

Другим методом решения линейных уравнений с частными производными является метод разложения на множители или разделения переменных, в котором исходное уравнение, содержащее несколько независимых переменных, разбивается (*разделяется*) на ряд обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит только одно незави-

¹⁾ Имеется в виду получение точного решения. Существует также ряд эффективных приближенных методов, часть которых освещена и в этой книге.—*Прим. перев.*

смое переменное. Этот прием не обладает такой универсальностью, как предыдущий (основанный на интегральном представлении решения), так как разделение переменных проходит различным образом для различных систем координат и возможно лишь для немногих таких систем. Однако если этот метод применим, то он обычно является значительно более удовлетворительным, так как решения обыкновенных дифференциальных уравнений найти гораздо легче, чем решения уравнений с частными производными.

В этой главе мы будем изучать метод разделения переменных. Мы укажем, в каких системах координат уравнение допускает разделение переменных, после чего перейдем к изучению получающихся обыкновенных дифференциальных уравнений и покажем, как их можно решить и как можно связать аналитические свойства решений с характеристиками уравнений и, в конечном счете, с геометрией выбранной системы координат.

5.1. Координаты, в которых переменные разделяются

Чтобы не ограничиваться замечаниями столь общими, что их затруднительно понять и применить, мы проведем исследование для одного из уравнений общего вида $\mathcal{H}\phi = F$; оно послужит нам примером, с которым можно сравнивать остальные уравнения. Дифференциальный оператор $\mathcal{H} = (\nabla^2 + k^2)$, соответствующий линейному однородному уравнению второго порядка вида

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \quad (5.1.1)$$

для скалярного поля ψ , где ∇^2 — оператор Лапласа (см. стр. 18), является достаточно типичным; поэтому его рассмотрение представляет общий интерес. Если $k = 0$, уравнение превращается в уравнение Лапласа для статических потенциальных полей; если k — положительная постоянная, имеем волновое уравнение для синусоидальной зависимости от времени (уравнение Гельмгольца) или уравнение диффузии для показательной зависимости от времени; а если k^2 представляет собой функцию координат, то получается уравнение Шредингера для частицы с постоянной энергией E (тогда k^2 пропорционально разности между E и потенциальной энергией частицы).

Уравнение вида (5.1.1) обладает бесконечным множеством различных решений, что затрудняет выбор одного из них. Бесконечности и нули решений могут быть расположены где угодно; можно найти решение, имеющее любое заданное, достаточно (а иногда и недостаточно) непрерывное распределение его значений на произвольным образом выбранной поверхности. Поэтому вопрос состоит не в нахождении всех решений, а в нахождении частного решения или решений, соответствующих той частной задаче, которую мы хотим решить.

Эти различные частные задачи обычно отличаются одна от другой по характеру налагаемых *краевых условий*; меняется либо вид границы, либо заданное поведение поля на границе. (Начальные условия являются, конечно, краевыми условиями, заданными на поверхности $t = 0$.) Это наводит на мысль классифицировать решения различных уравнений с частными производными в соответствии с видом граничных поверхностей, «порождающих» решение, а также в соответствии с характером краевых условий на этих поверхностях. Такая классификация утомительна и сложна; мы обсудим ее здесь только в объеме, необходимом для наших текущих целей. В дальнейшем изложении этому вопросу будет посвящено еще несколько параграфов.

Границные поверхности и системы координат. Прежде всего надо различать два общих класса граничных поверхностей: *открытые* и *замкнутые* поверхности. Замкнутая граничная поверхность — это такая поверхность, которая окружает поле со всех сторон, заключая его в конечный пространственный объем. В этом случае граничная поверхность расположена вне поля и вся уходящая из поля энергия поглощается на границе. Открытая же поверхность не вполне ограничивает поле, а оставляет его простирающимся в бесконечность по крайней мере в одном направлении, так что поле занимает бесконечный объем и энергия может уходить «в бесконечность» равно как и поглощаться границей. Это определение открытой поверхности несколько отличается от обычного смысла этого термина; например, сфера является замкнутой поверхностью по отношению к содержащемуся внутри нее полю, но открытой для поля, находящегося вне ее.

Рассмотрим сначала открытые границы. Краевые условия, обычно накладываемые на поле, состоят в задании значения поля в каждой точке граничной поверхности, или в задании нормальной составляющей градиента на этой поверхности, или же и того и другого. В *краевой задаче Дирихле* задаются значения ϕ на поверхности; в *краевой задаче Неймана* на ней задаются значения $\partial\phi/\partial n$; в *задаче Коши* на ней задаются как значения поля, так и значения нормальной составляющей его градиента. Каждое из этих условий свойственно различным типам уравнений и различным граничным поверхностям. Например, условия Дирихле на замкнутой поверхности однозначно определяют решение уравнения Лапласа внутри этой поверхности, в то время как условия Коши для этого поля были бы «переопределющими». Эти вопросы будут детально обсуждаться в гл. 6.

Можно было бы ожидать, что для открытой поверхности требуется задание на ней значений решения и его градиента (то есть условий Коши), чтобы однозначно определить решение дифференциального уравнения второго порядка вне этой поверхности. Это верно, однако имеются другие способы однозначного определения решения. Чтобы упростить исследование, целесообразно, если только это возможно, на границе «соорудить» координатную систему, приспособленную к этой границе. Под этим мы понимаем такой выбор системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 , чтобы граничная поверхность стала одной из координатных поверхностей, скажем, $\xi_1 = X$, где X — постоянная. (Имеются варианты, в которых методика несколько усложняется, хотя принципиально и не изменяется: например, можно одну часть поверхности записать в виде $\xi_1 = X$, другую — в виде $\xi_2 = Y$ и т. д.) Если граничная поверхность не слишком «патологического» вида, можно найти по крайней мере одну подходящую ортогональную систему координат (см. стр. 17). Во многих случаях можно найти более одной такой системы; это не должно нас беспокоить, надо выбрать одну из них и придерживаться ее.

Уравнение с частными производными [например, уравнение (5.1.1), которое мы выбрали как пример] можно записать в новых координатах, причем решения будут функциями этих переменных ξ . Конечно, в виде функций от ξ можно выразить всевозможные решения уравнения, однако мы теперь в состоянии классифицировать решения в соответствии с краевыми условиями, которые должны удовлетворяться на поверхности $\xi_1 = X$. Например, имеются решения, обращающиеся в нуль на поверхности $\xi_1 = X$; они должны содержать $(\xi_1 - X)$ в качестве множителя. Имеются также решения с нулевой нормальной составляющей градиента на поверхности; в-третьих, имеются решения с постоянными значениями самого решения и нормальной составляющей его градиента на всей поверхности.

Как мы указали выше и докажем позже, для решений третьего вида осуществляется взаимно однозначное соответствие между решениями и краевыми условиями: каждой паре значений ϕ , $\partial\phi/\partial n$ на поверхности соответствует одно и только одно решение. Некоторые из них являются кратными других и не должны рассматриваться как новые решения. Например, решение, соответствующее условиям $\phi = aa$, $\partial\phi/\partial n = ab$ на поверхности $\xi_1 = X$, получается умножением на a решения при условиях $\phi = a$, $\partial\phi/\partial n = b$. Эти решения нельзя рассматривать как независимые, так же как вектор \mathbf{A} нельзя рассматривать как независимый с единичным вектором \mathbf{a} , направленным вдоль \mathbf{A} . Однако мы получим различные решения, если будем менять отношение ϕ к $\partial\phi/\partial n$.

Допустим, что мы упорядочим эти решения в соответствии со значением отношения $[\phi_X / (\partial\phi/\partial n)_X] = P$. Решение для $P = 0$ (имеется бесконечное число решений для $P = 0$, но все они различаются только постоянным множителем, так что могут рассматриваться как одно решение) соответствует граничному условию $\phi = 0$ при $\xi_1 = X$. Если взять теперь решения, когда P убывает, принимая отрицательные значения, то мы обнаружим, что поверхность $\phi = 0$ удаляется от поверхности $\xi_1 = X$. Вообще говоря, семейство порожденных таким образом поверхностей не совпадает с семейством поверхностей $\xi_1 = \text{const}$, но в некоторых случаях такое совпадение имеет место. В этих специальных случаях решение ϕ должно обладать множителем $F_1(\xi_1)$, функциональный вид которого зависит от P . Если $F_1(\xi_1)$ равно нулю, соответствующая поверхность $\phi = 0$ совпадает с одной из координатных поверхностей $\xi_1 = \text{const}$.

Поверхность $\phi = 0$ называется *узловой поверхностью* (или *узлом*) для ϕ . Семейство поверхностей, порожденное при изменении P , может не включать все узловые поверхности. Вообще говоря, эти дополнительные поверхности не будут ортогональными к поверхности $\xi_1 = \text{const}$, так что они не совпадают и с другими координатными поверхностями.

До сих пор мы говорили о решениях специального вида, имеющих на поверхности $\xi_1 = X$ постоянные значения или постоянную нормальную составляющую градиента. Для большинства решений значения и градиент вдоль граничной поверхности меняются, то есть являются функциями координат ξ_2 и ξ_3 . Их узловые поверхности, вообще говоря, не связаны простыми соотношениями с координатными поверхностями ξ_1 . Однако в некоторых случаях и для некоторых простых граничных поверхностей из всей совокупности различных решений можно выделить множество таких, для которых все узлы либо совпадают с координатными поверхностями ξ_1 , либо же ортогональны к ним. Такими будут решения, представляющие собой произведение двух сомножителей

$$\phi = F_1(\xi_1)\Phi(\xi_2, \xi_3),$$

один из которых F_1 является функцией одного ξ_1 , нули которой порождают узлы, совпадающие с поверхностями ξ_1 , а другой Φ является функцией ξ_2 и ξ_3 , но не ξ_1 , и порождает узлы, ортогональные к поверхностям ξ_1 .

Для еще более ограниченного множества систем координат можно найти совокупность решений ϕ , у которых все узловые поверхности совпадают с координатными поверхностями всех трех семейств и которые можно выразить в виде произведения трех сомножителей

$$\phi = F_1(\xi_1)F_2(\xi_2)F_3(\xi_3).$$

Такие решения являются *разделенными* на множители, каждый из которых зависит только от одной координаты. Для большого числа систем координат можно найти лишь небольшое число решений, у которых не-

которые узловые поверхности совпадают с координатными, и только в немногих координатах можно найти достаточно полное семейство решений, все узлы которых имеют такой вид.

Конечно, даже в этих специальных координатах семейство разделенных (на множители, зависящие от одной координаты) решений образует небольшую часть множества всех решений уравнения (5.1.1). Однако интересным и важным свойством этого подмножества является то, что *все решения уравнения с частными производными могут быть получены из линейных комбинаций членов семейства разделенных решений*. Вычислив разделенные решения, мы можем найти и остальные.

Системы координат, обладающие семействами разделенных решений данного уравнения, при помощи которых можно построить все решения уравнения, называются *разделяющими системами координат для рассматриваемого уравнения*. Только в таких системах возможно получить решения в более удобной для применения форме, чем в виде громоздких рядов или интегралов со многими переменными.

Для представления картины в целом рассуждения, приведенные на последних страницах, проводились догматически. Для анализа и доказательства всего нами сказанного потребуется несколько глав. В дальнейшей части этого параграфа мы покажем, как находить разделяющие системы координат и как можно получить разделенные решения.

Двумерные разделяющие координаты. Начнем со случая двух измерений, когда выбранное для рассмотрения уравнение (5.1.1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = 0. \quad (5.1.2)$$

Если k постоянно, это уравнение допускает разделение переменных в прямоугольных координатах x, y , так как, подставляя $\psi = X(x)Y(y)$ в уравнение (5.1.2), после простых преобразований получаем

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 = 0.$$

Первый член этого уравнения является функцией только x , второй — только y , а третий постоянен. Чтобы это уравнение удовлетворялось *при всех x и y , необходимо, чтобы каждый член был постоянным*, а сумма всех трех постоянных равнялась нулю. Отсюда

$$(1/X)(d^2 X/dx^2) = -\alpha^2, \quad (1/Y)(d^2 Y/dy^2) = -\beta^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = k^2$$

или

$$(d^2 X/dx^2) + \alpha^2 X = 0, \quad (d^2 Y/dy^2) + (k^2 - \alpha^2) Y = 0. \quad (5.1.3)$$

Таким образом, мы расщепили уравнение с частными производными по двум переменным на два обыкновенных дифференциальных уравнения, каждого из которых содержит лишь одно независимое переменное. Постоянная α^2 называется *константой разделения*. Семейство разделенных решений уравнения (5.1.2) состоит из произведений решений уравнений (5.1.3) для всех значений параметра α . Общее решение уравнения (5.1.2) можно представить в виде линейной комбинации разделенных решений для различных значений параметра α . Другими словами, так как произведение решений уравнений (5.1.3) имеет вид $e^{i\alpha x+u} V^{\alpha^2-k^2}$, то общее решение можно представить в виде интеграла

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{i\alpha x+u} V^{\alpha^2-k^2} d\alpha, \quad (5.1.4)$$

имеющего вид интеграла Фурье (см. стр. 428). Этот интеграл иногда берется как контурный по комплексным значениям α .

Если k^2 является функцией координат [когда уравнение (5.1.2) представляет собой уравнение Шредингера], то для возможности разделения переменных надо, чтобы она имела общий вид $k^2 = \varepsilon^2 + f(x) + g(y)$, где f и g — произвольные функции одного переменного. Тогда разделенные уравнения приобретают вид

$$(d^2X/dx^2) + [\alpha^2 + f(x)] X = 0, \quad (d^2Y/dy^2) + [\varepsilon^2 - \alpha^2 + g(y)] Y = 0,$$

где α^2 опять константа разделения.

Чтобы исследовать другие координаты, можно для упрощения применить аппарат теории аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$, так как уравнение (5.1.2) можно выразить через производные по z и по его комплексно сопряженному $\bar{z} = x - iy$ (являющимися независимыми переменными). В соответствии с уравнением (4.1.11) можно преобразовать уравнение (5.1.2) в

$$4(\partial^2\psi/\partial z \partial \bar{z}) + k^2\psi = 0.$$

Произведем теперь конформное преобразование координат, перейдя от x, y к ξ_1, ξ_2 . Поскольку преобразование конформное, функция $w = \xi_1 + i\xi_2$ должна быть аналитической функцией $z = x + iy$ (а сопряженная функция $\bar{w} = \xi_1 - i\xi_2$ — аналитической функцией $\bar{z} = x - iy$). Новые координатные линии задаются уравнениями $\xi_1(x, y) = \text{const}$, $\xi_2(x, y) = \text{const}$. Так как $\partial/\partial z = (dw/dz)(\partial/\partial w)$ и $\partial/\partial \bar{z} = (\partial \bar{w}/d\bar{z})(\partial/\partial \bar{w})$ ($\partial w/\partial z$ и $\partial \bar{w}/\partial z$ равны нулю), то преобразованное уравнение примет вид

$$4 \frac{\partial^2\psi}{\partial w \partial \bar{w}} = \frac{\partial^2\psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial \xi_2^2} = -\frac{k^2\psi}{|dw/dz|^2} = -\frac{dz}{dw} \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} k^2\psi, \quad (5.1.5)$$

где мы выражаем теперь z как функцию w (а \bar{z} как функцию \bar{w}).

Разделяющие координаты для двумерного уравнения Лапласа. Заметим прежде всего, что для уравнения Лапласа, когда $k=0$, все координаты, полученные конформным преобразованием из прямоугольных координат x, y , являются разделяющими координатами для уравнения Лапласа в случае двух измерений. Разделенные решения имеют общий вид

$$\psi = Ae^{\pm i\alpha\xi_1 \pm i\beta\xi_2} \text{ или } ae^{\gamma w} + be^{\gamma \bar{w}},$$

где константа разделения α может иметь любое вещественное или комплексное значение. При помощи интегралов или сумм этих элементарных решений для различных значений α, β или γ можно представить любое решение двумерного уравнения Лапласа. Этот вопрос будет детально исследован в § 10.2.

Надо заметить, что имеется тесная связь между геометрическими свойствами координат и поведением решений. Геометрические свойства координат ξ_1, ξ_2 наиболее ясно выражаются при помощи коэффициентов Ламе $h_1 = V(\partial x/\partial \xi_1)^2 + (\partial y/\partial \xi_1)^2$ и h_2 (см. стр. 34). Так как преобразование конформное, то коэффициенты Ламе h_1 и h_2 должны быть одинаковы, а используя условия Коши — Римана, легко показать, что эти коэффициенты равны $|dz/dw|$. В точках, где $w(z)$ имеет полюс, коэффициент Ламе $|dz/dw|$ обращается в нуль и система координат ξ имеет точку концентрации. Обратно, там, где система координат имеет точку концентрации, функция $w(z)$ имеет полюс, а решение $\psi = e^{\pm \alpha w}$ — существенную особенность.

Разделение переменных в волновом уравнении. Для двумерного уравнения Гельмгольца (волнового уравнения с синусоидальным временем множителем) k постоянно и равно ω/c . В этом случае уравнение (5.1.5) не допускает разделения переменных, если только произведение $(dz/dw)(d\bar{z}/d\bar{w})$, представляющее собой функцию ξ_1 и ξ_2 , не является суммой функций, одна из которых зависит только от ξ_1 , а другая — только от ξ_2 . Другими словами,

$$k^2 |dz/dw|^2 = f(\xi_1) + g(\xi_2)$$

или, в дифференциальной форме,

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \left(| \frac{dz}{dw} |^2 \right) = 0, \quad (5.1.6)$$

и чтобы найти, чему может равняться $|dz/dw|^2$ для разделяющих координат, надо решить это уравнение.

Так как величина

$$\left| \frac{dz}{dw} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_2} \right)^2}$$

[здесь мы применили условия (4.2.1) Коши — Римана] представляет собой коэффициент Ламе $h_1 = h_2$ для обеих координат ξ_1, ξ_2 (для конформного преобразования коэффициенты Ламе обязательно равны, см. стр. 440), то нами тем самым получено уравнение для коэффициента Ламе разделяющей системы координат, для уравнения (5.1.5). Неудивительно, что мы пришли к такой задаче; мы уже говорили на стр. 34, что если мы знаем коэффициенты Ламе, то мы знаем также все важнейшие свойства соответствующей системы координат.

Уравнение для h_1, h_2 нуждается в дальнейшем преобразовании. Так как величина dz/dw является функцией w , а $d\bar{z}/d\bar{w}$ — функцией \bar{w} , то дифференциальный оператор надо преобразовать к переменным w, \bar{w} . Имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = i \frac{\partial^2}{\partial w^2} - i \frac{\partial^2}{\partial \bar{w}^2},$$

и так как dz/dw не зависит от \bar{w} , а $d\bar{z}/d\bar{w}$ от w , то уравнение (5.1.6) приобретает вид

$$\left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right) \frac{d^2}{d\bar{w}^2} \left(\frac{dz}{dw} \right) = \left(\frac{dz}{dw} \right) \frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right)$$

или

$$\frac{1}{dz/dw} \frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{dz}{dw} \right) = \frac{1}{d\bar{z}/d\bar{w}} \frac{d^2}{d\bar{w}^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right).$$

Левая часть последнего уравнения зависит только от w . Чтобы она равнялась правой части (зависящей только от \bar{w}) для всех значений w и \bar{w} , надо, чтобы обе части равнялись одной и той же постоянной, которую мы обозначим λ . Таким образом, мы получаем

$$\frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{dz}{dw} \right) = \lambda \left(\frac{dz}{dw} \right), \quad \frac{d^2}{d\bar{w}^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right) = \lambda \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right). \quad (5.1.7)$$

Только если dz/dw удовлетворяет первому уравнению (а $d\bar{z}/d\bar{w}$ — сопряженному уравнению), то $|dz/dw|$ является коэффициентом Ламе для разделяющей системы координат. Чтобы определить, какие координаты

являются разделяющими для уравнения (5.1.1), надо решить полученные уравнения (5.1.7).

Прямоугольные и параболические координаты. Простейшим, конечно, является случай $\lambda = 0$. Тогда решением уравнения для dz/dw служит $\beta + \gamma w$, и если γ принять равным нулю, получим ($\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$)

$$z = \alpha + \beta w, \quad x = a + c\xi_1 - d\xi_2, \quad y = b + c\xi_2 + d\xi_1. \quad (5.1.8)$$

Это соответствует простому вращению, изменению масштаба и переносу, причем координаты остаются прямоугольными. Новый коэффициент Ламе равен $|dz/dw| = |\beta| = \sqrt{c^2 + d^2}$, а новое уравнение имеет тот же вид, что и (5.1.2), но k^2 заменяется на $k^2 |\beta|^2$.

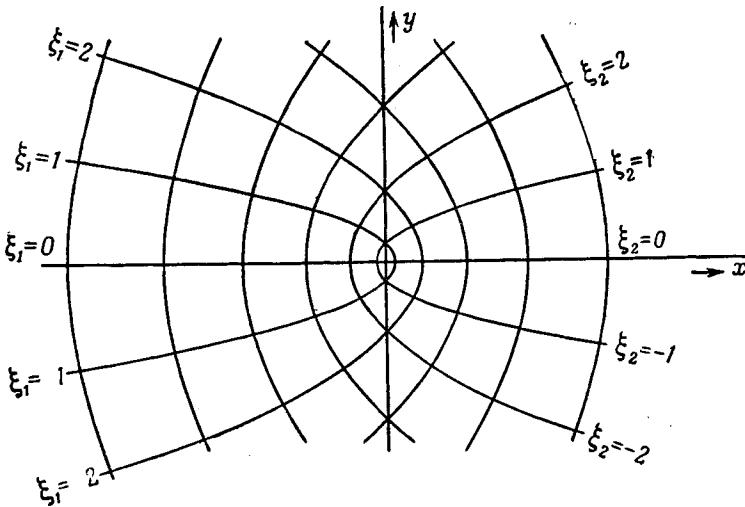


Рис. 5.1. Параболические координаты.

Если γ не равно нулю, достаточно рассмотреть лишь член с γ , так как члены с α и β добавляют просто вращение и перенос. Так как изменение масштаба также несущественно, то для простоты положим $\gamma = 1$ (и опустим постоянные интегрирования). Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} w^2, \quad x = \frac{1}{2} (\xi_1^2 - \xi_2^2), \quad y = \xi_1 \xi_2, \\ |dz/dw| &= h_1 = h_2 = |w| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Получились параболические координаты, координатные линии для которых образуют два ортогональных семейства софокусных парабол, осью которых служит ось x . Эти линии определяются уравнениями $\xi_1 = [\sqrt{x^2 + y^2} + x]^{1/2} = \text{const}$ и $\xi_2 = \pm [\sqrt{x^2 + y^2} - x]^{1/2} = \text{const}$, как показано на рис. 5.1. Такие координаты удобны, например, для границы, состоящей из отрицательной полуоси (которой соответствует уравнение $\xi_1 = 0$).

Уравнение (5.1.5) теперь приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} + (\xi_1^2 + \xi_2^2) k^2 \psi = 0, \quad (5.1.10)$$

который допускает разделение переменных, как это и должно быть. Применяя обычный прием, видим, что разложенное на множители решение имеет вид $\phi = F(\xi_1)G(\xi_2)$, где сомножители удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(d^2F/d\xi_1^2) + (x^2 + k^2\xi_1^2)F = 0, \quad (d^2G/d\xi_2^2) + (-x^2 + k^2\xi_2^2)G = 0 \quad (5.1.11)$$

Решения этих уравнений мы исследуем в настоящей главе позже.

Надо сделать несколько замечаний. Прежде всего, хотя функция $z = \frac{1}{2}w^2$ аналитична всюду, за исключением бесконечности, точка $w = 0$ является точкой ветвления конформного преобразования, так как в ней коэффициент Ламе h обращается в нуль. Мы избежали двузначности, приняв, что ξ_1 принимает только положительные значения, в то время как ξ_2 может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, линия $\xi_1 = 0$, представляющая собой отрицательную полуось x , производит разрез, выше которого ξ_2 принимает положительные значения, а ниже — отрицательные. Мы будем, если только это возможно, исключать этот разрез из рассматриваемой области, полагая, что граница поля совпадает с одной из линий $\xi_1 = \text{const}$, а само поле расположено во внешней части этой параболы, что можно сделать в значительном числе случаев, когда граница открыта; однако для замкнутых границ, состоящих из линий $\xi_1 = \text{const}$, $\xi_2 = \text{const}$, когда поле расположено внутри границы, часть разреза попадает в интересующую нас область. В этом случае мы избегнем разрыва решения вдоль разреза, положив, что G является четной или нечетной функцией ξ_2 , и выбирая затем соответствующую функцию $F(\xi_1)$ так, чтобы если G четная, то $dF/d\xi_1 = 0$ при $\xi_1 = 0$, и если G нечетная, то $F(0) = 0$ (этот вопрос детально исследуется в § 11.2).

В соответствии с единственной особенностью функции w^2 , расположенной на бесконечности, мы покажем позже, что решения F и G также имеют особенности только при бесконечных значениях ξ_1 и ξ_2 .

Для уравнения Шредингера в параболических координатах функция k^2 должна иметь вид $\varepsilon^2 + [f(\xi_1) + g(\xi_2)]/(\xi_1^2 + \xi_2^2)$. В этом случае разделенными уравнениями будут

$$(d^2F/d\xi_1^2) + [\alpha^2 + \varepsilon^2\xi_1^2 + f(\xi_1)]F = 0, \quad (d^2G/d\xi_2^2) + [-\alpha^2 + \varepsilon^2\xi_2^2 + g(\xi_2)]G = 0,$$

где f и g — любые функции одного переменного. Функции F и G будут иметь особенности при $\xi = \infty$ и в каждой особой точке соответственно f и g .

Полярные и эллиптические координаты. Возвращаясь к уравнению (5.1.7), исследуем теперь случай, когда λ не равно нулю. Примем сначала, что λ положительно, и положим $\lambda = 1$, так как изменение численного значения λ меняет только масштаб и не дает новых систем координат (а поскольку λ больше нуля, оно может быть и единицей). Имеем

$$dz/dw = e^{\pm w} \text{ или } z = ae^w + be^{-w}.$$

Возьмем сначала крайнее значение $b = 0$ (и положим $a = 1$, так как изменение a меняет только масштаб). Тогда преобразование в координатах задается соотношениями

$$\begin{aligned} z &= e^w = e^{\xi_1 + i\xi_2}, \quad x = e^{\xi_1} \cos \xi_2, \quad y = e^{\xi_1} \sin \xi_2; \\ r &= e^{\xi_1} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \xi_2 = \arctg(y/x); \\ |dz/dw| &= h_1 = h_2 = e^{\xi_1} = r. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Получились полярные координаты, причем семейство $\xi_1 = \text{const}$ (или $r = \text{const}$) — состоит из концентрических окружностей, а множество $\xi_2 = \varphi = \text{const}$ —

из радиальных лучей, как показано на рис 5.2 (заметим, что коэффициент Ламе h_1 равен r для координаты ξ_1 , а не для координаты r , для которой скалярный множитель $h_r = 1$). Эти координаты применимы для круговых границ и для границ, состоящих из двух лучей, образующих угол.

Уравнение (5.1.5) принимает вид

$$(\partial^2\psi/\partial\xi_1^2) + (\partial^2\psi/\partial\xi_2^2) + e^{2\xi_1}k^2\psi = 0 \quad (5.1.13)$$

и разделяется на уравнения

$$\phi = F(\xi_1)G(\xi_2), \quad (d^2F/d\xi_1^2) + (k^2e^{2\xi_1} - \alpha^2)F = 0, \quad (d^2G/d\xi_2^2) + \alpha^2G = 0, \quad (5.1.14)$$

где постоянная α^2 опять является константой разделения.

Для общего случая, когда $z = ae^w + be^{-w}$, можно получить результаты в более удобной форме, положив

$$a = \frac{1}{2}de^{-\beta} = \frac{1}{2}e^{\alpha-\beta}, \quad b = \frac{1}{2}de^\beta = \frac{1}{2}e^{\alpha+\beta}, \quad d = e^\alpha = \sqrt{4ab}, \quad e^\beta = \sqrt{b/a},$$

так что если d , α и β вещественны, то

$$\begin{aligned} z &= d \operatorname{ch}(w - \beta) = e^\alpha \operatorname{ch}(\xi_1 + i\xi_2 - \beta), \\ x &= d \operatorname{ch}(\xi_1 - \beta) \cos(\xi_2), \quad y = d \operatorname{sh}(\xi_1 - \beta) \sin \xi_2, \\ |dz/dw| &= h_1 = h_2 = d \sqrt{\operatorname{ch}^2(\xi_1 - \beta) - \cos^2 \xi_2}. \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

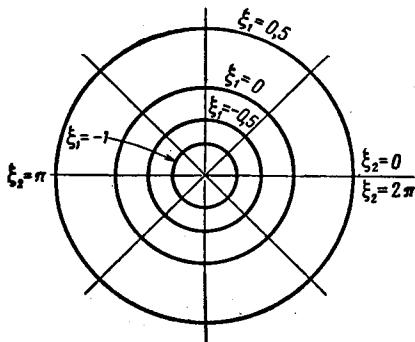


Рис. 5.2. Полярные координаты.

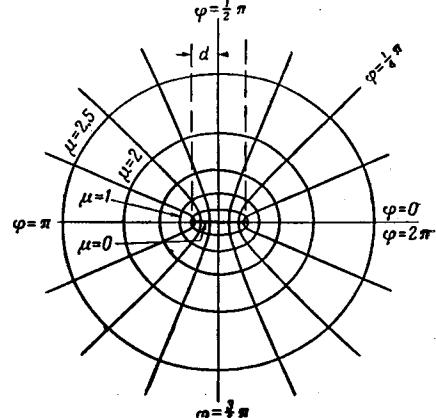


Рис. 5.3. Эллиптические координаты.

Это — эллиптические координаты, состоящие из софокусных эллипсов и гипербол с фокусами в точках $x = \pm d$, $y = 0$, как показано на рис. 5.3. Постоянная β обычно для удобства полагается равной нулю. (Однако надо заметить, что если положить $\alpha = \beta + \ln 2$ и затем устремить β к отрицательной бесконечности, то фокусы эллипса сольются с началом координат и вся система координат перейдет в пределе в полярную.) Уравнение с частными производными в рассматриваемых координатах и обыкновенные дифференциальные уравнения, полученные в результате разделения переменных, имеют вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_2^2} + d^2k^2 [\operatorname{ch}^2(\xi_1 - \beta) - \cos^2 \xi_2] \psi = 0,$$

$$\begin{aligned} \phi &= F(\xi_1)G(\xi_2), \quad (d^2F/d\xi_1^2) + [d^2k^2 \operatorname{ch}^2(\xi_1 - \beta) - \alpha^2]F = 0, \quad (5.1.16) \\ (d^2G/d\xi_2^2) &- [d^2k^2 \cos^2 \xi_2 - \alpha^2]G = 0, \end{aligned}$$

где α^2 вновь является константой разделения.

Коэффициенты Ламе и геометрия систем координат. Мы увидим в этой главе позже, что вид уравнений, полученных при помощи разде-

ления переменных в полярных или эллиптических координатах и имеющих в качестве коэффициентов при F и G показательные (или гиперболические) функции, не является наиболее удобным для исследования. Трудность проистекает прежде всего из геометрии систем координат и из того, что они получены при помощи конформного преобразования. Обе эти системы имеют точки концентрации, где коэффициент Ламе $|dz/dw|$ обращается в нуль. Вблизи таких точек в соответствии с малостью коэффициента Ламе координатные линии расположены очень густо, а так как преобразование конформное, то в этих точках обращаются в нуль коэффициенты Ламе для обеих координат.

Однако, поскольку мы определили геометрию разделяющих систем координат, мы можем видоизменить коэффициенты Ламе для каждой координаты в отдельности так, чтобы сохранить геометрию координат и в то же время привести разделенные уравнения к более удобному для исследования виду. Например, так как в разделенных уравнениях в качестве коэффициентов при F и G более желательны алгебраические функции, чем показательные, мы можем принять в полярных координатах $e^{\pm i\theta}$ за новую координату r , а в эллиптических координатах $\operatorname{ch}(\xi_1 - \beta)$ — за μ . Преобразование тогда не будет конформным, но вид координатных линий остается неизменным и координаты все равно будут разделяющими.

Возвращаясь вновь к уравнению (5.1.6), мы видим, что как для волнового уравнения, так и для уравнения Шредингера в случае разделения переменных должно быть $k^2 |dz/dw|^2 = k^2 h^2 = f(\xi_1) + g(\xi_2)$. В этом случае разделенные уравнения имеют вид

$$(d^2F/d\xi_1^2) + [-\alpha^2 + f(\xi_1)] F = 0, \quad (d^2G/d\xi_2^2) + [\alpha^2 + g(\xi_2)] G = 0, \quad \phi = F(\xi_1)G(\xi_2). \quad (5.1.17)$$

В соответствии со сказанным выше выберем некоторую функцию $\mu(\xi_1)$ от переменной ξ_1 , для которой функция $f(\xi_1)$, выраженная как $f(\mu)$, является простой алгебраической функцией μ . Так как $f+g$ пропорционально коэффициенту Ламе $|dz/dw|^2$, то в точках концентрации системы координат f и g могут одновременно обратиться в нуль. Можно выбрать новую координату μ так, чтобы точка концентрации получилась при некотором стандартном значении μ , например 0 или 1 (или, может быть, бесконечности). Коэффициент Ламе для μ связан с коэффициентом h для ξ_1 и ξ_2 следующим соотношением:

$$h_\mu = \sqrt{(\partial x/\partial \mu)^2 + (\partial y/\partial \mu)^2} = h\Phi_\mu, \quad \Phi_\mu = d\xi_1/d\mu, \quad (5.1.18)$$

так как $\partial x/\partial \mu = (\partial x/\partial \xi_1)(d\xi_1/d\mu)$. Если h_μ не обращается в нуль в точке концентрации системы координат (где h равно нулю), то в этой точке $\Phi_\mu = h_\mu/h$ обращается в бесконечность.

Чтобы перейти в первом уравнении (5.1.17) к независимой переменной μ , применим формулы

$$\frac{d}{d\mu} = \frac{d\xi_1}{d\mu} \frac{d}{d\xi_1}, \quad \frac{d}{d\xi_1} = \frac{1}{\Phi_\mu} \frac{d}{d\mu}, \quad \frac{d^2}{d\xi_1^2} = \frac{1}{\Phi_\mu^2} \frac{d^2}{d\mu^2} - \frac{\Phi'_\mu}{\Phi_\mu^3} \frac{d}{d\mu}, \quad \Phi'_\mu = \frac{d^2\xi_1}{d\mu^2}.$$

Мы можем, если нужно, сделать то же для ξ_2 , перейдя к новой функции $\eta(\xi_2)$ и получив новый коэффициент Ламе $h_\eta = h\Phi_\eta$, и т. д. Тогда новое преобразование и получающиеся разделенные уравнения приобретают вид

$$\omega(z) + \xi_1(\mu) + i\xi_2(\eta), \quad h_\mu = \sqrt{(\partial x/\partial \mu)^2 + (\partial y/\partial \mu)^2} = \Phi_\mu h, \quad h_\eta = \Phi_\eta h, \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z_2^2} = -h^2 k^2 \psi = -[p(\xi_1) + q(\xi_2)] \psi, \quad \psi = F(\mu)G(\eta), \quad (5.1.19)$$

$$\frac{d^2F}{d\mu^2} - \frac{\Phi'_\mu}{\Phi_\mu} \frac{dF}{d\mu} + \Phi_\mu^2 [-\alpha^2 + f(\mu)] F = 0, \quad \frac{d^2G}{d\eta^2} - \frac{\Phi'_\eta}{\Phi_\eta} \frac{dG}{d\eta} + \Phi_\eta^2 [\alpha^2 + g(\eta)] G = 0.$$

Последние два обыкновенных дифференциальных уравнения выглядят более сложными, чем уравнения (5.1.17), однако если Φ'_μ/Φ_μ и $\Phi_\mu^2[-\alpha^2 + f(\mu)]$ станут алгебраическими функциями μ , вместо трансцендентных, то уравнения (5.1.19) легче исследовать и решить.

Как мы указали выше, при значениях μ , соответствующих точкам концентрации системы координат, функция Φ_μ^2 , или функция Φ'_μ/Φ_μ , или обе вместе могут обратиться в бесконечность, так что особенности коэффициентов при $dF/d\mu$ и F в уравнении для F тесно связаны с геометрией, соответствующей системе координат. На эту связь мы будем ссылаться в данной главе позже.

Для конкретизации рассуждений применим их к полярным координатам (5.1.12). Мы хотим так изменить шкалу радиальной координаты, чтобы функция $e^{2\xi_1}$ стала алгебраической. Очевидно, можно выбрать $\mu = r = e^{\xi_1}$ или $\xi_1 = \ln \mu$, где μ (или r) — обычное расстояние. Начало координат — единственная точка концентрации для этой системы координат — получится тогда при $r = 0$. Коэффициентом Ламе и результирующим уравнением для F тогда будут

$$\xi_1 = \ln r, \quad \Phi_r = \frac{1}{r}, \quad \Phi'_r = -\frac{1}{r^2}, \quad h_r = 1, \quad \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \frac{1}{r^2} f(r) F = 0, \quad (5.1.20)$$

где для случая волнового уравнения $f(r) = r^2 k^2 - \alpha^2$. Следовательно, мы видим, что оба коэффициента при dF/dr и при F имеют особенности в полярном центре, при $r = 0$.

Шкала координаты ξ_2 не нуждается в изменении, так как последнее из уравнений (5.1.14) не имеет трансцендентных коэффициентов. Тем не менее ξ_2 представляет собой угол, так что решение G является периодической функцией, а w — многозначной функцией z . Для устранения этой многозначности иногда бывает полезно совершить преобразование $\eta = \cos \xi_2$, причем η меняется от -1 до $+1$. Соответствующими уравнениями будут

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \arccos \eta, \quad \Phi_\eta = -(1 - \eta^2)^{-1/2}, \quad \Phi'_\eta = -\eta(1 - \eta^2)^{-3/2}, \\ h_\eta &= -r/V\sqrt{1 - \eta^2}, \quad \frac{d^2G}{d\eta^2} - \frac{\eta}{1 - \eta^2} \frac{dG}{d\eta} + \frac{g(\eta)}{1 - \eta^2} G = 0, \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

где для волнового уравнения $g(\eta)$ равно α^2 , константе разделения. Коэффициенты здесь имеют особенности при $\eta = \pm 1$, т. е. на концах интервала изменения η .

Теперь очевидно, что для случая эллиптических координат простейшее преобразование имеет вид $\operatorname{ch}(\xi_1 - \beta) = \mu$, $\cos \xi_2 = \eta$, причем μ меняется от 1 до ∞ , а η — от -1 до $+1$. Преобразование и видоизмененные уравнения таковы (для $\beta = 0$):

$$\begin{aligned} x &= d\mu\eta, \quad y = dV\sqrt{(\mu^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad \xi_1 = \operatorname{Ar ch} \mu, \quad \xi_2 = \arccos \eta, \\ \Phi_\mu &= \frac{1}{V\sqrt{\mu^2 - 1}}, \quad h_\mu = d\sqrt{\frac{\mu^2 - \eta^2}{\mu^2 - 1}}, \quad h_\eta = d\sqrt{\frac{\mu^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \\ \frac{d^2F}{d\mu^2} + \frac{\mu}{\mu^2 - 1} \frac{dF}{d\mu} + \frac{f(\mu)}{\mu^2 - 1} F &= 0, \quad \frac{d^2G}{d\eta^2} - \frac{\eta}{1 - \eta^2} \frac{dG}{d\eta} + \frac{g(\eta)}{1 - \eta^2} G = 0, \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

где для волнового уравнения $f(\mu) = d^2 k^2 \mu^2 - \alpha^2$, $g(\eta) = -d^2 k^2 \eta^2 + \alpha^2$. Здесь опять коэффициенты этих уравнений имеют особенности только в точках концентрации координат ($\mu = 1$, $\eta = \pm 1$).

Следует также заметить, что $\mu + \eta = (1/d)\sqrt{(x+d)^2 + y^2} = r_1/d$, $\mu - \eta = (1/d)\sqrt{(x-d)^2 + y^2} = r_2/d$, то есть

$$\mu = (r_1 + r_2)/2d, \quad \eta = (r_1 - r_2)/2d, \quad (5.1.23)$$

где r_1, r_2 — расстояния от точки (x, y) до обоих координатных фокусов $(x = \pm d, y = 0)$. Отсюда линия $\mu = \text{const}$ представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний которых до обоих фокусов постоянна, то есть является эллипсом. Подобным образом уравнение линии $\eta = \text{const}$ содержит разность расстояний и представляет гиперболу.

Константы разделения и граничные условия. Если в координатах, приспособленных к граничной поверхности данной задачи, переменные разделяются, то в принципе возможно удовлетворить разумно поставленным граничным условиям посредством правильной комбинации решений разделенных уравнений (какие граничные условия являются «разумными» и как находить «правильные комбинации», будет сказано в гл. 6 и 7). Например, границей может служить линия $\xi_1 = \text{const}$ в одной из рассмотренных разделяющих двумерных систем координат. Эта граница может иметь конечную длину (такой будет замкнутая граница); в этом случае множитель $G(\xi_2)$ должен быть непрерывным, когда мы, меняя ξ_2 , обходим линию $\xi_1 = \text{const}$, начиная движение в некоторой точке и заканчивая его в ней же.

Например, для полярных координат r, φ линия $r = \text{const}$ представляет собой окружность конечного радиуса, которая полностью пробегается при изменении угла φ от 0 до 2π . Разделенное уравнение для множителя, зависящего от φ , имеет вид

$$(d^2\Phi/d\varphi^2) + \alpha^2\Phi = 0,$$

где α — константа разделения, и имеет решением $\cos(\alpha\varphi), \sin(\alpha\varphi)$ и их линейные комбинации. Чтобы Φ была непрерывной вдоль границы $r = \text{const}$, это решение должно при $\varphi = 2\pi$ иметь то же значение, что при $\varphi = 0$; другими словами, решение Φ должно быть периодическим по φ с периодом 2π . Это требование периодичности накладывает ограничение на допустимые значения константы разделения α . В нашем примере, чтобы функция $\cos(\alpha\varphi)$ или $\sin(\alpha\varphi)$ была периодичной по φ с периодом 2π , константа разделения α должна равняться целому $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. И в других случаях, когда ξ_2 является периодической координатой, накладываются аналогичные ограничения на значения константы разделения для решений, остающихся непрерывными при обходе границы $\xi_1 = \text{const}$.

Мы всегда можем упорядочить эти допустимые значения, обозначив наименьшее через α_1 и т. д., так что $\alpha_{n+1} > \alpha_n$, а соответствующие множители в решениях — через $X_2^1(\xi_2), X_2^2(\xi_2), \dots$. Множитель с ξ_1 также зависит от α , так что полное решение, соответствующее допустимому значению α_n константы разделения, имеет вид $X_1^n(\xi_1)X_2^n(\xi_2)$.

В гл. 6 будет показано, что каждую функцию периодической координаты ξ_2 , удовлетворяющую разумным ограничениям, можно разложить в ряд по указанным допустимым функциям

$$f(\xi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_2^n(\xi_2).$$

Правило для подсчета коэффициентов A_n будет также дано позже. Отсюда, если интересующее нас решение $\psi(\xi_1, \xi_2) = f(\xi_2)$ должно удовлетворять граничному условию $\psi(c, \xi_2) = f(\xi_2)$ вдоль границы $\xi_1 = c$, то это решение можно выразить через разделенные решения, взятые для допустимых значений константы разделения

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \sum A_n \left[\frac{X_1^n(\xi_1)}{X_1^n(c)} \right] X_2^n(\xi_2). \quad (5.1.24)$$

Другим, более сложными граничным условиям можно удовлетворить подобным же образом.

Заметим, что окончательное решение $\phi(\xi_1, \xi_2)$ не является разделенным, но может быть выражено в виде ряда из разделенных решений. В каждом случае условия периодичности выделяют последовательность допустимых значений константы разделения, и общее решение получается в виде ряда по этим допустимым значениям. Даже для открытых границ обобщенные условия периодичности также дают возможность выразить решение, удовлетворяющее определенным граничным условиям, в виде ряда (или интеграла) из разделенных решений, взятых для допустимых значений константы разделения.

Однако эти рассмотрения увяли нас в сторону от того, что здесь необходимо; сейчас мы должны исследовать вопрос о разделении переменных для уравнений с частными производными в трехмерном случае.

Разделение для трех измерений. Разделение переменных для двух измерений особенно просто по следующим причинам. Прежде всего имеется только одна константа разделения, так что разложенные на множители решении образуют однопараметрическое семейство, в результате чего применение граничных условий приводит к относительно простым рядам. Во-вторых, условия разделения просты; так, для уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + k^2 \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 \psi = 0$$

член $k^2 |dz/dw|^2$ должен просто представлять собой сумму функций, зависящих только от u и только от v , в противном случае переменные не разделяются. И, в-третьих, семейства узловых поверхностей, совпадающих с координатными, получаются только в случае, когда решения представлены в виде $X_1(\xi_1)X_2(\xi_2)$.

Во всех этих трех отношениях трехмерная проблема разделения переменных оказывается сложнее. Так как имеется три разделенных уравнения, то констант разделения вместо одной будет две. Каждое из трех уравнений может содержать обе константы, и в этом случае каждый из трех множителей в разделенном решении сложным образом зависит от обеих констант разделения, в результате чего удовлетворить граничным условиям даже в виде ряда из разделенных решений — утомительное и трудное дело. Однако для некоторых систем координат получается, что одно (или два) из разделенных уравнений содержит только одну константу разделения; в этих случаях ряд, представляющий общее решение, принимает более простой и удобный для применения вид.

Что касается третьего пункта, то оказывается, что для трехмерного уравнения Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$ имеются такие координатные системы, в которых решение принимает более сложный вид $R(\xi_1, \xi_2, \xi_3)X_1(\xi_1)X_2(\xi_2)X_3(\xi_3)$, где дополнительный множитель R (который можно назвать *модуляционным множителем*) не зависит от констант разделения. Для этих систем разделение происходит с точностью до общего множителя, и граничным условиям все равно можно удовлетворить, так как после вынесения этого общего множителя R за знак суммы, взятой по всем допустимым значениям констант разделения, эта сумма принимает тот же общий вид, как и в случае, когда модуляционный множитель отсутствует.

Возвращаясь ко второму из перечисленных пунктов, отметим, что для трехмерного уравнения с частными производными член, соответствующий слагаемому $k^2 |dz/dw|^2$ для двумерного случая, не обязан быть простой суммой функций, каждая из которых зависит только от одной координаты; разделения можно достичь и в более сложных случаях, чем этот.

Определитель Штеккеля. Общий метод разделения для нашего стандартного трехмерного уравнения с частными производными

$$\nabla^2\psi + k_1^2\psi = 0$$

связан со свойствами определителей третьего порядка. Такой определитель S строится по своим элементам Φ_{mn} при помощи следующего соотношения:

$$S = |\Phi_{mn}| = \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{vmatrix} = \Phi_{11}\Phi_{22}\Phi_{33} + \Phi_{12}\Phi_{23}\Phi_{31} + \Phi_{13}\Phi_{21}\Phi_{32} - \Phi_{13}\Phi_{22}\Phi_{31} - \Phi_{11}\Phi_{23}\Phi_{32} - \Phi_{12}\Phi_{21}\Phi_{33}. \quad (5.1.25)$$

Алгебраическим дополнением элемента Φ_{mn} называется множитель при элементе Φ_{mn} , если Φ_{mn} вынести за скобки из членов, где он встречается. Например, алгебраическими дополнениями элементов первого столбца Φ_{11} , Φ_{21} , Φ_{31} будут

$$\begin{aligned} M_1 &= \partial S / \partial \Phi_{11} = \Phi_{22}\Phi_{33} - \Phi_{23}\Phi_{32}, \\ M_2 &= \partial S / \partial \Phi_{21} = \Phi_{13}\Phi_{32} - \Phi_{12}\Phi_{33}, \\ M_3 &= \partial S / \partial \Phi_{31} = \Phi_{12}\Phi_{23} - \Phi_{13}\Phi_{22}. \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

Так как нам потребуются здесь только алгебраические дополнения элементов первого столбца, то мы не будем писать у M двойных индексов.

Важным свойством определителей, которое мы будем применять при разделении переменных для уравнений с тремя аргументами, является свойство ортогональности, связывающее элементы и алгебраические дополнения. Так, для (5.1.26) имеем

$$\sum_{n=1}^3 M_n \Phi_{n1} = S, \quad \sum_{n=1}^3 M_n \Phi_{nm} = 0, \quad m = 2, 3, \quad (5.1.27)$$

как если бы Φ_{n2} или Φ_{n3} были компонентами векторов, перпендикулярных вектору с компонентами M_n .

Значит, если бы разделенными уравнениями для трехмерного случая были

$$\frac{1}{f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[f_n \frac{\partial X_n}{\partial \xi_n} \right] + [k_1^2 \Phi_{n1} + k_2^2 \Phi_{n2} + k_3^2 \Phi_{n3}] X_n = 0, \quad (5.1.28)$$

то мы могли бы скомбинировать эти три уравнения таким образом, чтобы исключить константы разделения k_2^2 и k_3^2 . Действительно, умножая уравнение для X_1 на $(M_1/S)X_2X_3$ и т. д. и складывая, получаем

$$\sum_n \frac{M_n}{S f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[f_n \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right] + k_1^2 \psi = 0, \quad \psi = X_1 X_2 X_3. \quad (5.1.29)$$

Это уравнение соответствует нашему стандартному уравнению $\nabla^2\psi + k_1^2\psi = 0$, если выражение для оператора Лапласа в координатах ξ

$$\nabla^2\psi = \sum_n \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right] \quad (5.1.30)$$

совпадает с первым слагаемым в уравнении (5.1.29).

Чтобы это было так, надо наложить некоторые ограничения на коэффициенты Ламе h и на элементы Φ_{nm} определителя S . Во-первых, так как уравнения (5.1.28) предполагались разделенными, все функции f_n , Φ_{n1} , Φ_{n2} и Φ_{n3} должны зависеть только от ξ_n . Определитель, элементы Φ_{1m} верхней строки которого являются функциями только ξ_1 , элементы Φ_{2m}

второй строки — функциями только ξ_2 и элементы Φ_{3m} нижней строки — только ξ_3 , называется *определителем Штеккеля*. Он является основным понятием при изучении разделения переменных в трехмерном случае. Заметим также, что если Φ_{1m} является функцией ξ_1 и т. д., то первый минор M_1 зависит от ξ_2 и ξ_3 , но не зависит от ξ_1 и т. д.

Далее, величина $h_1 h_2 h_3 / h_n^3$ должна равняться произведению функции f_n только от ξ_n на некоторую функцию g_n от остальных ξ . Тогда, например, член с ξ_1 в операторе Лапласа приобретает вид

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_1^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right] = \frac{g_1(\xi_2, \xi_3)}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[f_1(\xi_1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right] = \frac{1}{h_1^2 f_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[f_1 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right]$$

и имеет ту же общую форму, что и член $(M_1/S f_1)[\partial(f_1 \partial \psi / \partial \xi_1) / \partial \xi_1]$ в уравнении (5.1.29). Чтобы эти члены совпадали, должно быть

$$1/h_n^3 = M_n/S, \quad (5.1.31)$$

а это вместе с исходным ограничением на $h_1 h_2 h_3 / h_n^3$ приводит¹⁾ к условию Робертсона

$$h_1 h_2 h_3 / S = f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) f_3(\xi_3), \quad (5.1.32)$$

которое дает выражение для определителя Штеккеля и одновременно ограничивает виды систем координат, допускающих разделение переменных. Если оно имеет место, то величина $h_1 h_2 h_3 / h_1^2$ равна произведению f_1 , функции ξ_1 , на функцию $M_1 f_2 f_3$ от ξ_2 и ξ_3 , но не ξ_1 и, таким образом, удовлетворяет сформулированному выше требованию.

Эти требования, наложенные на коэффициенты Ламе, резко ограничивают число независимых систем координат, отвечающих условиям задачи. Детальный анализ того, какие системы удовлетворяют этим требованиям, является значительно более громоздким, чем соответствующее исследование, проведенное на стр. 475 для двумерного случая. Там мы показали, что разделяющие координатные системы (для волнового уравнения) состоят из *софокусных конических сечений* (эллипсов и гипербол) или их вырожденных форм (окружностей и радиусов, софокусных парабол или параллельных прямых). Детальный анализ трехмерного случая приводит к аналогичному утверждению: в евклидовом пространстве координатные поверхности системы разделяющих координат для волнового уравнения состоят из софокусных поверхностей второго порядка или их вырожденных форм.

Софокусные поверхности второго порядка. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - b^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - c^2} = 1, \quad a \geq b \geq c \geq 0, \quad (5.1.33)$$

при различных значениях параметра ξ представляет три семейства софокусных поверхностей второго порядка. Для $\xi > a$ получается полное семейство софокусных эллипсоидов, пересечение которых с плоскостью yz дает эллипсы с фокусами в точках $y=0, z=\pm\sqrt{b^2 - c^2}$, с плоскостью xz — эллипсы с фокусами в точках $x=0, z=\pm\sqrt{a^2 - c^2}$ и с плоскостью xy — эллипсы с фокусами в точках $x=0, y=\pm\sqrt{a^2 - b^2}$. Предельная поверхность этого семейства получается при $\xi \rightarrow a$ и представляет собой

¹⁾ Из этих условий вытекает, что $g_1/(M_1 f_2 f_3) = g_2/(M_2 f_1 f_3) = g_3/(M_3 f_1 f_2)$, откуда следует, что эти отношения постоянны и получается соотношение (5.1.32) с точностью до несущественного постоянного множителя.—Прим. перев.

часть плоскости yz , расположенную внутри эллипса с большой осью $2\sqrt{a^2 - c^2}$ вдоль оси z и малой осью $2\sqrt{a^2 - b^2}$ вдоль оси y .

Для $a > \xi > b$ получается полное семейство софокусных однополостных гиперболоидов, пересечение которых с плоскостью yz дает эллипсы с фокусами в точках $y=0, z=\pm\sqrt{b^2 - c^2}$, с плоскостью xz — гиперболы с фокусами в точках $x=0, z=\pm\sqrt{a^2 - c^2}$ и с плоскостью xy — гиперболы с фокусами в точках $x=0, y=\pm\sqrt{a^2 - b^2}$. Одна из предельных поверхностей получается при $\xi \rightarrow a$ и представляет собой часть плоскости yz , расположенную вне эллипса с большой осью $2\sqrt{a^2 - c^2}$ вдоль оси z и малой осью $2\sqrt{a^2 - b^2}$ вдоль оси y ; другая предельная поверхность получается при $\xi \rightarrow b$ и представляет собой часть плоскости xz , расположенную вне гиперболы с вещественной осью $2\sqrt{b^2 - c^2}$ вдоль оси z и мнимой осью $2\sqrt{a^2 - b^2}$ вдоль оси x .

Наконец для $b > \xi > c$ имеем полное семейство софокусных двуполостных гиперболоидов, пересечение которых с плоскостью yz дает гиперболы с фокусами в точках $y=0, z=\pm\sqrt{b^2 - c^2}$, с плоскостью xz — гиперболы с фокусами в точках $x=0, z=\pm\sqrt{a^2 - c^2}$, а с плоскостью xy эти гиперболоиды не пересекаются. Одна из предельных поверхностей получается при $\xi \rightarrow b$ и представляет собой часть плоскости xz , расположенную внутри гиперболы с вещественной осью $2\sqrt{b^2 - c^2}$ вдоль оси z и мнимой осью $2\sqrt{a^2 - b^2}$ вдоль оси x ; другая поверхность получается при $\xi \rightarrow c$ и совпадает с плоскостью xy . Между прочим, без ограничения общности мы можем положить $c=0$.

Так как построенные три семейства поверхностей попарно ортогональны, можно положить, что указанным трем интервалам изменения параметра ξ соответствуют три семейства координатных поверхностей: параметру ξ_1 ($\xi_1 > a$) соответствуют эллипсоиды, ξ_2 ($a > \xi_2 > b$) — однополостные гиперболоиды и ξ_3 ($b > \xi_3 > c$) — двуполостные гиперболоиды. Легко убедиться, что соотношения между координатами x, y, z и эллипсоидальными координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 (для $c=0$) с их коэффициентами Ламе таковы:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_2^2 - a^2)(\xi_3^2 - a^2)}{a^2(a^2 - b^2)}}, \quad \xi_1 > a > \xi_2 > b > \xi_3 > 0, \\ y &= \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - b^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_3^2 - b^2)}{b^2(b^2 - a^2)}}, \quad z = \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3}{ab}, \\ h_1 &= \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)}{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{(\xi_2^2 - \xi_3^2)(\xi_2^2 - \xi_1^2)}{(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)}}, \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

Следуя проведенным выше рассуждениям, найдем, что $h_1 h_2 h_3 / h_1^2$ равно произведению

$$\sqrt{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)}$$

на функцию $\sqrt{-(\xi_3^2 - \xi_2^2)^2 / (\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_3^2 - a^2)(\xi_3^2 - b^2)}$, не содержащую ξ_1 . Следовательно, функция

$$f_n(\xi_n) = \sqrt{|(\xi_n^2 - a^2)(\xi_n^2 - b^2)|} \quad (5.1.35)$$

является одной из функций, участвующих в уравнении (5.1.32). Это в свою очередь дает значение определителя Штеккеля

$$S = \frac{h_1 h_2 h_3}{f_1 f_2 f_3} = \frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)(\xi_3^2 - \xi_1^2)}{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_2^2 - a^2)(\xi_3^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_3^2 - b^2)},$$

откуда, учитывая соотношения (5.1.31),

$$M_1 = \frac{S}{h_1^2} = -\frac{\xi_2^2 - \xi_3^2}{(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_2^2 - b^2)} \text{ и т. д.,}$$

что дает возможность найти элементы определителя Штеккеля. Они равны

$$\Phi_{n1}(\xi_n) = 1, \quad \Phi_{n2}(\xi_n) = \frac{1}{\xi_n^2 - a^2}, \quad \Phi_{n3}(\xi_n) = \frac{1}{(\xi_n^2 - b^2)(a^2 - b^2)}. \quad (5.1.36)$$

Поэтому уравнение Гельмгольца и получающиеся разделенные обыкновенные дифференциальные уравнения в этих координатах имеют вид

$$\sum_n \frac{G_n f_n}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)(\xi_1^2 - \xi_3^2)} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[f_n \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right] + k_1^2 \phi = 0,$$

$$G_1 = (\xi_2^2 - \xi_3^2), \quad G_2 = (\xi_1^2 - \xi_3^2), \quad G_3 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{|(\xi_n^2 - a^2)(\xi_n^2 - b^2)|}} \frac{d}{d\xi_n} \left[\sqrt{|(\xi_n^2 - a^2)(\xi_n^2 - b^2)|} \frac{dX_n}{d\xi_n} \right] + \\ & + \left[k_1^2 + \frac{k_2^2}{(\xi_n^2 - a^2)} + \frac{k_3^2}{(\xi_n^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \right] X_n = 0. \end{aligned} \quad (5.1.37)$$

Этот вид обыкновенных дифференциальных уравнений встретится нам в дальнейшем.

Заметим, что в случае трехмерного уравнения Шредингера для частицы член k^2 (который мы обозначили через k_1^2) не является постоянным, а представляет собой разность между постоянной k_1^2 (полной энергией частицы) и зависящей от ξ потенциальной энергией частицы. Для возможности разделения переменных потенциальная энергия частицы должна быть такой, чтобы в уравнении (5.1.37) из коэффициента при X_n вычиталась некоторая функция $\mu_n(\xi_n)$, зависящая только от ξ_n . Это означает, что допустимым видом потенциальной энергии будет

$$V = \sum_{n=1}^3 \frac{\mu_n(\xi_n)}{h_n^2}. \quad (5.1.38)$$

Заметим также, что для эллипсоидальных координат каждое из трех разделенных обыкновенных дифференциальных уравнений содержит k_1 и обе константы разделения k_2 и k_3 . Напоминая наши квантово-механические рассуждения гл. 2, мы можем рассматривать процесс разделения как процесс вращения, переводящий множество векторов в абстрактном векторном пространстве, определенных координатами x, y, z (или ξ_1, ξ_2, ξ_3), в множество векторов, определенных параметрами k_1, k_2, k_3 . Разлагающиеся на множители решения представляют собой функции преобразования (направляющие косинусы) от собственных значений для координат к собственным значениям для k . То, что мы нашли, означает, что это преобразование в случае эллипсоидальных координат приводит к функциям преобразования, разделяющимся (на множители) относительно координат, но не разделяющимся относительно параметров k . Для некоторых вырожденных форм эллипсоидальных координат разложенные на множители решения разделяются также относительно параметров, что значительно упрощает манипуляции с решениями.

Эти вырожденные формы эллипсоидальных координат, полученные, когда a, b, c полагаются равными друг другу, нулю или бесконечности, более полезны и интересны, чем общая форма. Имеется 10 таких форм, признающихся «различными» системами координат и обладающих специальными наименованиями. Эти 11 систем (общая эллипсоидальная система

и 10 вырожденных форм) являются единственными системами, допускающими разделение переменных для волнового уравнения или уравнения Шредингера в трехмерном случае [причем уравнение Шредингера разделяется, только если потенциальная энергия имеет определенный функциональный вид, см. (5.1.38)]. Эти формы вместе с отвечающим им видом коэффициентов Ламе h , определителя S и т. д. приведены в таблице в конце этой главы.

Вырожденные формы эллипсоидальных координат. Отправляясь от преобразования

$$x' = \sqrt{\frac{(x_1^2 - \alpha^2)(x_2^2 - \alpha^2)(x_3^2 - \alpha^2)}{\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2)}},$$

$$y' = \sqrt{\frac{(x_1^2 - \beta^2)(x_2^2 - \beta^2)(x_3^2 - \beta^2)}{\beta^2(\beta^2 - \alpha^2)}}, \quad z' = \frac{x_1 x_2 x_3}{\alpha \beta}$$

для общих эллипсоидальных координат, мы можем получить все десять вырожденных форм, приведенных в конце главы, при помощи растяжения, сжатия и переноса. Например, бесконечное растяжение всех фокальных расстояний дает у центра эллипсоидов:

I. Прямоугольные координаты. Положим x_1^2 в приведенных выше соотношениях равным $\alpha^2 + \xi_1^2$, $x_2^2 = \beta^2 + \xi_2^2$, а $x_3 = \xi_3$; положим $\beta = \alpha \sin \varphi$, где φ может быть произвольным, и после этого устремим α к бесконечности. Это даст координаты, приведенные под номером 1 в конце главы. С другой стороны, стремление β к нулю симметризует эллипсоиды, выравнивая их в поверхности вращения.

IX. Сплющенные сфериоидальные координаты. Полагая $\alpha = a$, $x_1^2 = a^2 + \xi_1^2$, $x_2^2 = a^2 - a^2 \xi_2^2$, $x_3 = \beta \xi_3$ и устремляя β к нулю, мы перейдем от эллипсоидов к сплющенным (выровненным) сфероидам, от однополостных гиперболоидов к гиперболоидам вращения (также однополостным) и от двуполостных гиперболоидов к парам плоскостей, проходящих через ось вращения. Чтобы получить форму, данную в таблице в конце главы, надо положить еще $x' = z$, $y' = y$, $z' = x$, что делает ось z осью вращения. Если превратить эллипсоид в поверхность вращения около большой оси, мы получим

VIII. Вытянутые сфериоидальные координаты. Они получаются при $\beta \rightarrow \alpha$, согласно формулам $\alpha = a$, $\beta^2 = a^2 - \varepsilon$, $x_1 = \xi_1$, $x_2^2 = a^2 - \varepsilon \xi_2^2$, $x_3^2 = a^2 \xi_3^2$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Бесконечное вытягивание при этом большой оси даст

II. Круговые цилиндрические координаты. Если обозначить $\alpha = a$, $\beta^2 = a^2 - \varepsilon$, $x_1^2 = a^2 + \xi_1^2$, $x_2^2 = a^2 - \varepsilon \xi_2^2$, $x_3 = \xi_3$ и положить $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем $a \rightarrow \infty$, то получатся простейшие координаты вращения. Бесконечное вытягивание большой оси до симметризации дает

III. Эллиптические цилиндрические координаты. К такой системе мы приходим, обозначая $\beta^2 = \alpha^2 + a^2$, $x_1^2 = a^2 + \xi_1^2$, $x_2^2 = \alpha^2 + a^2 \xi_2^2$, $x_3 = \xi_3$ и полагая $\alpha \rightarrow \infty$, но оставляя при этом a конечным. С другой стороны, если мы вместо удлинения укоротим большую ось вытянутых сфероидальных координат, то мы получим полностью симметричные

V. Сферические координаты. Обозначив $\alpha = a$, $\beta^2 = a^2 - \varepsilon$, $x_1 = \xi_1$, $x_2^2 = a^2 - \varepsilon \xi_2^2$, $x_3 = a \xi_3$, мы положим сначала $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем $a \rightarrow 0$, что даст

полную симметрию. Полагая, наконец, β пропорциональным α и устремляя их одновременно к нулю, получим

VI. Конические координаты. Они имеют своими координатными поверхностями сферы и эллиптические конусы, а получаются, если обозначить $a = ka$, $\beta = k'a$, $k^2 + k'^2 = 1$, $x_1^2 = \xi_1^2 / (k^2 - k'^2)$, $x_2^2 = a^2 [2k^2k'^2 + (k^2 - k'^2)\xi_2^2]$, $x_3^2 = a^2 [2k^2k'^2 - (k^2 - k'^2)\xi_3^2]$ и затем положить $a \rightarrow 0$.

Параболические системы получаются, если переместить положение начала координат на «край» эллипсоида до удлинения последнего. Самым общим случаем являются

XI. Параболоидальные координаты. Здесь мы полагаем $\alpha^2 = d^2 + a^2d$, $\beta^2 = d^2 + b^2d$ и помещаем новое начало координат в точку $z' = d$, так что $x = x'$, $y = y'$ и $z = z' - d$. Обозначим $x_1^2 = d^2 + \eta_1^2 d$, $x_2^2 = d^2 + \eta_2^2 d$, $x_3^2 = d^2 + \eta_3^2 d$ и примем, наконец, что $d \rightarrow \infty$. Новыми координатами будут

$$x = \sqrt{\frac{(\eta_1^2 - a^2)(\eta_2^2 - a^2)(\eta_3^2 - a^2)}{a^2 - b^2}}, \quad y = \sqrt{\frac{(\eta_1^2 - b^2)(\eta_2^2 - b^2)(\eta_3^2 - b^2)}{b^2 - a^2}}, \\ z = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 - a^2 - b^2);$$

они соответствуют поверхностям

$$\frac{x^2}{\eta^2 - a^2} + \frac{y^2}{\eta^2 - b^2} = \eta^2 - 2z.$$

Для $\eta = \eta_1 > a$ получается семейство эллиптических параболоидов, пересекающихся с плоскостями xz и yz по параболам, а с плоскостью xy — по эллипсам. Для $\eta = \eta_2$ (где $a > \eta_2 > b$) поверхности представляют собой гиперболические параболоиды, пересекающиеся с плоскостями xz и yz по параболам, а с плоскостью xy — по гиперболам. Наконец, для $\eta = \eta_3 < b$ (мы должны допускать для η_3^2 и отрицательные значения, чтобы исчерпать все это семейство) вновь получаются эллиптические параболоиды, направленные относительно оси z в противоположную сторону.

Предельная поверхность при $\eta_1 \rightarrow a$ представляет собой часть плоскости yz , расположенную внутри параболы с вершиной при $z = \frac{1}{2}a^2$ и с фокусом при $z = \frac{1}{2}b^2$; при $\eta_2 \rightarrow a$ — остальную часть плоскости yz ; при $\eta_2 \rightarrow b$ — часть плоскости xz , расположенную вне параболы с вершиной при $z = \frac{1}{2}b^2$ и с фокусом при $z = \frac{1}{2}a^2$; наконец, при $\eta_3 \rightarrow b$ предельная поверхность представляет собой остальную часть плоскости xz . Коэффициенты Ламе и связанные с ними функции этих координат приведены на стр. 620.

Как и выше, другие координатные системы можно получить при помощи изменения междуфокусных расстояний. Например, полагая $a = b$, получаем координаты вращения, именно

VII. Параболические координаты. Обозначив $b^2 = a^2 - \varepsilon$, $\eta_1^2 = \xi_1^2 + a^2$, $\eta_2^2 = a^2 - \varepsilon\xi_3^2$, $\eta_3^2 = b^2 - \xi_2^2$ и положив затем $\varepsilon \rightarrow 0$, получим эту более простую систему. С другой стороны, если мы будем растягивать большую ось эллипсов, то в конце концов получим

IV. Параболические цилиндрические координаты. Здесь мы обозначаем $\eta_1^2 = a^2 + \xi_3^2$, $\eta_2^2 = b^2 + \xi_1^2$, $\eta_3^2 = b^2 - \xi_2^2$, $x = z' - \frac{1}{2}b^2$, $y = y'$, $z = x'/a$ и затем полагаем $a \rightarrow \infty$.

Этим исчерпываются все различные вырожденные системы, которые можно получить из эллипсоидальных координат. Было бы интересно исследовать определители Штеккеля и окончательно разделенные уравнения для этих случаев, чтобы узнать, имеются ли у них характерные общие черты.

Слияние особенностей. Мы выбрали шкалу всех рассмотренных здесь координат так, чтобы функции f_n и Φ_{nm} представляли собой алгебраические функции ξ_n , а если разделенные уравнения записать в виде

$$\frac{d^2X_n}{d\xi_n^2} + p_n(\xi_n) \frac{dX_n}{d\xi_n} + q_n(\xi_n) X_n = 0, \quad p_n = \frac{d}{d\xi_n} [\ln f_n(\xi_n)],$$

$$q_n = \sum_{m=1}^3 k_m^2 \Phi_{nm}(\xi_n), \quad (5.1.39)$$

то функции p и q имеют особенности в точках концентрации соответствующих систем координат. Например, для эллипсоидальных координат p и q имеют полюсы при $\xi = \pm a, \pm b$ и на бесконечности (то есть если сделать замену переменной $u = 1/\xi$, то соответствующие функции p и q будут иметь полюс при $u = 0$ или, что то же, $\xi = \infty$). Вырожденные формы систем координат получаются при сближении до совпадения двух или более из этих особенностей. Точки, в которых p или q имеет особенность, называются *особыми точками* соответствующего уравнения, а указанный процесс сближения особых точек называется *слиянием* особых точек.

В случае вытянутых сфероидальных координат, например, имеет место слияние особых точек a и b , а также $-a$ и $-b$; это вместе с заменой шкалы приводит к тому, что уравнение для ξ_1 имеет особые точки $\pm a$ и на бесконечности, а уравнение для ξ_2 и ξ_3 — особые точки ± 1 и ∞ . В сферических координатах a становится равным нулю, так что уравнение для ξ_1 имеет особые точки в 0 и в ∞ и т. д.

Где бы ни была особая точка дифференциального уравнения, там общее решение этого уравнения имеет особенность (полюс, точку ветвления или существенную особенность). Следовательно, можно сказать, что разложенное на множители решение $\phi = X_1 X_2 X_3$ обычно имеет особенность во всех точках концентрации соответствующей системы координат. Можно также сказать, что все обыкновенные дифференциальные уравнения, на которые разделяется уравнение $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$ (включающее большую часть уравнений, которые мы будем изучать), получаются из общего уравнения с пятью особыми точками при помощи слияния их до четырех, трех или двух. Так же как указание нулей и особенностей определяет функцию комплексного переменного, указание положения и строения особых точек дифференциального уравнения, как мы увидим позже в этой главе, определяет само уравнение и его решения. Это является, конечно, совсем другим путем выражения того обстоятельства, что геометрия системы координат определяет структуру решений разделенных уравнений, что не удивительно.

Константы разделения. Рассмотрение определителей Штеккеля для 11 систем координат, приведенных в конце главы, показывает, что среди элементов этих определителей имеется целый ряд равных нулю. Например, для всех координат вращения $\Phi_{31} = \Phi_{32} = 0$. Это значит, что множители $X_3(\xi_3)$ для координат вращения включают только константу разделения k_3 . Так как для координат вращения ξ_3 соответствует углу вокруг оси вращения, то не удивительно, что этот множитель особенно прост. Мы видим также, что

для всех цилиндрических координат два из трех элементов $\Phi_{n1}(\xi_n)$ равны нулю; это означает, что только один из множителей X_n зависит от k_1 .

Таким образом, для некоторых вырожденных форм эллипсоидальных координат решения, разложенные на множители, осуществляют определенное разделение параметров k .

Другим путем это можно установить посредством самого процесса (в его обычном виде) разделения переменных в уравнении. Возьмем уравнение

$$\nabla^2 \psi + k_1^2 \psi = \sum_{n=1}^3 \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right] + k_1^2 \psi = 0,$$

и пусть $\psi = X_1 X_2 X_3$. Если координаты разделяются, так что выполняются соотношения (5.1.29) и (5.1.31), то имеем

$$\sum_{n=1}^3 \frac{1}{h_n^2 f_n X_n} \frac{d}{d \xi_n} \left(f_n \frac{d X_n}{d \xi_n} \right) + k_1^2 = 0. \quad (5.1.40)$$

В некоторых случаях представляется возможным умножить это уравнение на некоторую функцию от ξ так, что *по крайней мере один* из четырех членов полученного уравнения зависит только от одной координаты, в то время как остальные члены от нее не зависят. Мы можем тогда этот член положить равным постоянной α (так, как функция от одного ξ_n может совпадать с функцией от остальных ξ , только если эта функция представляет собой не зависящую от ξ постоянную), и тогда соответствующий множитель X будет зависеть только от одной постоянной α (которая является тогда константой разделения, либо k_2^2 , либо k_3^2).

Возможность разделения уравнения таким способом зависит от строения коэффициентов Ламе h_n , на что ясно указывает уравнение (5.1.40) (все остальные множители в n -м члене зависят только от ξ_n , так что если h_n постоянно или является функцией одного ξ_n , то этот член уже готов для разделения без каких-либо преобразований). Здесь можно различить три случая:

A. Решение, вполне разделяющее константы разделения. В этом случае можно найти такой множитель $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, что каждый из двух членов зависит от одной координаты (допустим, что так будет для ξ_2 и ξ_3). Тогда член с ξ_2 , то есть $(\mu/h_2^2 f_2 X_2) [d(f_2 dX_2/d\xi_2)/d\xi_2]$ можно положить равным постоянной k_2^2 , а соответствующий член с X_3 — равным постоянной k_3^2 . Следовательно, для X_1 получается уравнение

$$\frac{\mu}{h_1^2 f_1 X_1} \frac{d}{d \xi_1} \left(f_1 \frac{d X_1}{d \xi_1} \right) + k_2^2 + k_3^2 + \mu k_1^2 = 0,$$

а решение, разложенное на множители, принимает вид

$$(A) \quad \psi = X_1(\xi_1; k_1, k_2, k_3) X_2(\xi_2; k_2) X_3(\xi_3; k_3), \quad (5.1.41)$$

где два из множителей зависят только от одного параметра k , так же точно, как и от одной координаты ξ . Сравнение с методом разделения при помощи определителя Штеккеля показывает, что решение может иметь вид (5.1.41), только если каждая из двух строк определителя Штеккеля имеет два нуля, и просмотр таблицы в конце главы показывает, что этим простым поведением обладают только решения для прямоугольных и круговых цилиндрических координат. [Сферические координаты имеют решение вида $X_1(\xi_1; k_1, k_2) X_2(\xi_2; k_2, k_3) X_3(\xi_3; k_3)$, который для уравнения

Лапласа, когда $k_1 = 0$, так же прост, как и (5.1.41)]. Этот тип разделения требует высокую степень симметрии системы координат.

Б. Решение, частично разделяющее константы разделения. В этом случае только один член (например, с ξ_3) можно отделить непосредственно; оставшееся уравнение

$$\frac{\mu}{h^2 f_1 X_1} \frac{d}{d\xi_1} \left(f_1 \frac{dX_1}{d\xi_1} \right) + \frac{\mu}{h^2 f_2 X_2} \frac{d}{d\xi_2} \left(f_2 \frac{dX_2}{d\xi_2} \right) + \mu k_1^2 + k_3^2 = 0^1)$$

должно быть умножено на другой множитель $\psi(\xi_1, \xi_2)$, чтобы можно было отделить другой член. Поэтому решения, разложенные на множители, имеют один из следующих видов:

$$\begin{aligned} (\text{B}_1) \quad & \psi = X_1(\xi_1; k_2, k_3) X_2(\xi_2; k_2, k_3) X_3(\xi_3; k_1, k_3), \\ (\text{B}_2) \quad & \psi = X_1(\xi_1; k_1, k_2, k_3) X_2(\xi_2; k_1, k_2, k_3) X_3(\xi_3; k_3). \end{aligned} \quad (5.1.42)$$

Просмотр таблицы показывает, что виду (B₁) соответствуют параболические цилиндрические координаты, а виду (B₂) — эллиптические цилиндрические, параболические, сплющенные сфероидальные и вытянутые сфероидальные (то есть все оставшиеся цилиндрические координаты и координаты вращения). Здесь только последняя строка определителя Штеккеля имеет два нуля.

В. Решение, не разделяющее констант разделения. В этом случае ни один из элементов второго и третьего столбцов не равен нулю и для осуществления разделения надо применить всю технику, связанную с определителем Штеккеля. Возможные виды таковы:

$$\begin{aligned} (\text{B}_1) \quad & \psi = X_1(\xi_1; k_1, k_2, k_3) X_2(\xi_2; k_2, k_3) X_3(\xi_3; k_2, k_3), \\ (\text{B}_2) \quad & \psi = X_1(\xi_1; k_1, k_2, k_3) X_2(\xi_2; k_1, k_2, k_3) X_3(\xi_3; k_1, k_2, k_3). \end{aligned} \quad (5.1.43)$$

Форму (B₁) имеют только конические координаты. Эллипсоидальные и параболоидальные координаты имеют вид (B₂), где ни один из элементов определителя Штеккеля не равен нулю.

Должно быть очевидным, что вид (A) сравнительно прост для применения к рассматриваемой задаче, виды (B) более сложны, а виды (B) несравненно сложнее для применения.

Уравнение Лапласа для трех измерений, модуляционный множитель. Очевидно, что уравнение Лапласа $\nabla^2 \phi = 0$, к которому приводится наше стандартное уравнение при $k_1 = 0$, допускает разделение переменных в каждой из 11 систем координат, перечисленных в таблице. Но так как двумерное уравнение Лапласа допускает разделение переменных для большего числа систем, чем двумерное волновое уравнение, то нам следует проверить, не будет ли это верно и для трех измерений. Исследования показывают, что систем координат, в которых решения уравнения Лапласа принимают вид $X_1(\xi_1) X_2(\xi_2) X_3(\xi_3)$ типа (A), (B) и (B), больше нет. Однако обнаруживается, что можно найти другие системы, в которых можно построить множество решений уравнения Лапласа, имеющих более общий вид.

$$\phi = X_1(\xi_1) X_2(\xi_2) X_3(\xi_3) / R(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (5.1.44)$$

где R не зависит от констант разделения k_2 и k_3 (см. стр. 482). То же исследование показывает, что волновое уравнение не допускает этого

¹⁾ Член μk_1^2 может отсутствовать; это приводит к случаю (B₁). — Прим. перев.

общения, так что дополнительные системы координат являются разделяющими только для уравнения Лапласа.

Множитель R можно назвать *модуляционным множителем*; он изменяет все семейство разложенных решений одним и тем же образом. Его присутствие несколько видоизменяет технику применения определителя Штеккеля. Например, теперь мы полагаем [вместо (5.1.32)]

$$h_1 h_2 h_3 / S = f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) f_3(\xi_3) R^2 u, \quad (5.1.45)$$

где u — функция ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Мы также требуем, чтобы [вместо (5.1.31)]

$$1/h_n^2 = M_n / Su, \quad (5.1.46)$$

причем в этих двух уравнениях определитель Штеккеля S и его алгебраические дополнения M_n удовлетворяют тем же условиям, что и выше (элементы Φ_{nm} этого определителя являются функциями только ξ_n , и потому M_n не зависят от ξ_n). Подставляя все это в уравнение Лапласа, мы сначала получим уравнение

$$\sum_n \frac{1}{h_n^2 f_n X_n} \frac{d}{d\xi_n} \left[f_n \frac{dX_n}{d\xi_n} \right] = \sum_n \frac{1}{h_n^2 f_n R} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[f_n \frac{\partial R}{\partial \xi_n} \right].$$

Получившееся разделение членов с X и членов с R является причиной включения R в оба соотношения (5.1.44) и (5.1.45). Если теперь мы сможем найти функцию R , удовлетворяющую уравнению

$$\sum_n \frac{1}{h_n^2 f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[f_n \frac{\partial R}{\partial \xi_n} \right] + \frac{k_1^2 R}{u} = 0, \quad (5.1.47)$$

то, применяя (5.1.46), мы получим в результате уравнение

$$\sum_n \frac{M_n}{S f_n X_n} \frac{d}{d\xi_n} \left[f_n \frac{dX_n}{d\xi_n} \right] + k_1^2 = 0, \quad (5.1.48)$$

которое, подобно волновому уравнению, разделяется на обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{1}{f_n} \frac{d}{d\xi_n} \left(f_n \frac{dX_n}{d\xi_n} \right) + [k_1^2 \Phi_{n1} + k_2^2 \Phi_{n2} + k_3^2 \Phi_{n3}] X_n = 0, \quad (5.1.49)$$

из коих можно определить множители X_n .

Софокусные циклиды. Циклиды — это класс поверхностей четвертого порядка, очень близких по своим свойствам к поверхностям второго порядка (эллипсоидам, гиперболоидам, параболоидам). Одним из интересных свойств поверхностей этого класса является то, что их инверсия в сфере снова представляет собой циклиду. Уравнение этих поверхностей просто выражается в *однородных координатах* λ, μ, ν, ρ

$$x = \lambda/\rho, \quad y = \mu/\rho, \quad z = \nu/\rho \quad (5.1.50)$$

или в «пентасферических координатах»

$$\begin{aligned} x_1 &= i(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2) = i\rho^2(x^2 + y^2 + z^2 + 1), \\ x_2 &= (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \rho^2) = \rho^2(x^2 + y^2 + z^2 - 1), \\ x_3 &= 2\rho\lambda = 2\rho^2x, \quad x_4 = 2\rho\mu = 2\rho^2y; \quad x_5 = 2\rho\nu = 2\rho^2z. \end{aligned} \quad (5.1.51)$$

Поверхность, определенная уравнением

$$\sum_{n=1}^5 \frac{x_n^2}{\xi - a_n} = 0, \quad a_{n+1} \geq a_n, \quad (5.1.52)$$

где ξ и a постоянны, и называется *цикличидой*. Поверхности, полученные при выборе различных значений ξ для фиксированных a , образуют семейство поверхностей, которое можно назвать *семейством софокусных циклид*.

Одно полное семейство получается, если брать все значения ξ между a_2 и a_3 , другое — если брать все значения между a_3 и a_4 и третье — между a_4 и a_5 . Оказывается, что эти семейства попарно ортогональны, так что они могут быть приняты за семейства координатных поверхностей. Мы обозначим $\xi = \xi_1$ между a_2 и a_3 , ξ_2 между a_3 и a_4 и ξ_3 между a_4 и a_5 .

Так как $x = x_3/2\rho^2$, $y = x_4/2\rho^2$, $z = x_5/2\rho^2$, $\rho = -(x_2 + ix_1)/2\rho$, то уравнение Лапласа $\nabla^2\psi = 0$ равносильно уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_5^2} = 0.$$

Одновременно, так как x_1 и x_2 входят в комбинации $x_2 + ix_1$, мы видим, что

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = 0.$$

Этот результат можно обобщить следующим образом: если x_1, \dots, x_5 — пентасферические координаты, связанные с четырьмя однородными координатами λ, μ, ν, ρ при помощи уравнений второго порядка так, что

$$\sum_{n=1}^5 x_n^2 = 0, \quad (5.1.53)$$

то решение уравнения Лапласа удовлетворяет также уравнению

$$\sum_{n=1}^5 \frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2} = 0. \quad (5.1.54)$$

Для окончания рассуждения надо перейти от пентасферических координат к софокусным цикличидным координатам ξ . Для этого рассмотрим сначала координаты x_n , как обычные ортогональные координаты в пятимерном пространстве, не требуя, чтобы удовлетворялось уравнение (5.1.53). Совершим тогда переход к другим пяти координатам, определенным пятью уравнениями:

$$x_1^2 = \xi_5 \frac{(\xi_1 - a_1)(\xi_2 - a_1)(\xi_3 - a_1)(\xi_4 - a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)} \text{ и т. д.} \quad (5.1.55)$$

или равносильными уравнениями

$$\sum_{n=1}^5 \frac{x_n^2}{\xi_m - a_n} = 0 \quad (m = 1, \dots, 4), \quad \sum_{n=1}^5 \frac{x_n^2}{\xi_5 - a_n} = \xi_5 \frac{(\xi_1 - \xi_5)(\xi_2 - \xi_5)(\xi_3 - \xi_5)(\xi_4 - \xi_5)}{(\xi_5 - a_1)(\xi_5 - a_2)(\xi_5 - a_3)(\xi_5 - a_4)}.$$

Заметим, что при этом $\xi_5 = \sum_{n=1}^5 x_n^2$ в конечном счете обратится в нуль.

Уравнение, соответствующее уравнению (5.1.54), получается после ряда алгебраических преобразований и имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{f(\xi_1)}}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_1)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\sqrt{f(\xi_1)} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right] + \dots + \\ & + \frac{\sqrt{f(\xi_4)}}{(\xi_1 - \xi_4)(\xi_2 - \xi_4)(\xi_3 - \xi_4)} \frac{\partial}{\partial \xi_4} \left[\sqrt{f(\xi_4)} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_4} \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\xi_5}} \frac{\partial}{\partial \xi_5} \left[(\xi_5)^{5/2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_5} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.1.56)$$

где

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5).$$

Оно равносильно пятимерному уравнению Лапласа в новых координатах.

Но мы не занимаемся пятимерным уравнением, а хотим в конце концов получить трехмерное уравнение в координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Однако эти координаты тесно связаны, так как, решив уравнения

$$\sum_{n=1}^5 \frac{x_n^2}{\xi_m - a_n} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \quad \sum_{n=1}^5 x_n^2 = 0,$$

мы получим соотношения

$$x_1^2 = - \left[\sum_{n=1}^5 a_n x_n^2 \right] \frac{(\xi_1 - a_1)(\xi_2 - a_1)(\xi_3 - a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)} \text{ и т. д.,} \quad (5.1.57)$$

которые определяют x_n через трехмерные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 и в конечном счете определяют x, y, z через циклические координаты.

Заметим, что преобразование (5.1.57) связано с (5.1.55). В последнем случае лишь три координаты присутствуют явно, то есть можно сказать, что преобразование (5.1.57) представляет трехмерное подпространство преобразования, данного в уравнении (5.1.55). Оно и ясно, так как мы знали, что $\xi_5 = \sum x_n^2$ должно быть равно нулю, а ξ_4 также должно быть положено равным некоторой постоянной, чтобы мы могли получить в результате трехмерное уравнение. Сравнение уравнений (5.1.57) и (5.1.55) показывает, что если мы одновременно устремим ξ_5 к нулю, а ξ_4 к бесконечности так, что $\xi_4 \xi_5 \rightarrow - \sum a_n x_n^2$, то мы придем к циклическим координатам.

Возможно, что ϕ будет функцией ξ_4 и ξ_5 . Если она является функцией произведения $\xi_4 \xi_5$, то усложнения в виде дополнительных нулей или бесконечностей не будет. В частности, если ϕ содержит множитель $(\xi_4 \xi_5)^\alpha$, то в пределе этот множитель обратится в $[\sum a_n x_n^2]^\alpha$. Если мы хотим, чтобы на больших расстояниях потенциал обращался в нуль, как $1/r$, то показатель α может равняться $-1/4$ и мы можем положить

$$\psi = (\xi_4 \xi_5)^{-\frac{1}{4}} \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\sum_{n=1}^5 a_n x_n^2 \right)^{-\frac{1}{4}} \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (5.1.58)$$

Подставляя эту форму для решения в (5.1.56) и устремляя ξ_4 к бесконечности, получаем в результате уравнение с частными производными для φ . Умножим его на $\xi_4^{5/4}$ и произведем разложение по степеням $1/\xi_4$. Члены с первой степенью ξ_4 исчезнут автоматически. Члены же с нулевой степенью ξ_4 дадут уравнение для φ

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{f(\xi_1)}}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\sqrt{f(\xi_1)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right] + \\ & + \frac{\sqrt{f(\xi_2)}}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\sqrt{f(\xi_2)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right] + \\ & + \frac{\sqrt{f(\xi_3)}}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left[\sqrt{f(\xi_3)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3} \right] + \\ & + \left[\frac{5}{16} (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) - \frac{3}{16} \sum_{n=1}^5 a_n \right] \varphi = 0, \quad (5.1.59), \end{aligned}$$

где $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5)$. В этом уравнении можно разделить переменные при помощи определителя Штеккеля, так же как и для уравнения в эллипсоидальных координатах. Однако в этом случае

полное решение ψ будет произведением неразделенной части $[\sum a_n x_n^2]^{-\frac{1}{4}} = 1/R$ на разделенную часть φ , как мы уже установили.

Можно получить различные вырожденные формы цикloid, полагая одну или более из постоянных a_n равными друг другу или бесконечности. При этом эллипсоидальные координаты и все их вырожденные формы включаются в качестве частного случая. Включаются также тороидальные координаты, определенные следующими уравнениями:

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2}{\xi_1^2} - \frac{4a^2(x^2 + y^2)}{\xi_1^2 - 1} = 0, \quad \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2}{\xi_2^2} + \frac{4a^2z^2}{\xi_2^2 - 1} = 0. \quad (5.1.60)$$

Это — вырожденные формы уравнения (5.1.52) причем мы применили обозначения ξ_n^2 и a^2 вместо ξ_n и a_n ; им соответствуют (для $\xi_1 = \text{const}$) тороиды, полученные вращением вокруг оси z окружности радиуса $a/\sqrt{\xi_1^2 - 1}$ с центром $z = 0$, $x = a\xi_1/\sqrt{\xi_1^2 - 1}$, и (для $\xi_2 = \text{const}$) сферы радиуса $a/\sqrt{1 - \xi_2^2}$ с центром $x = y = 0$, $z = a\xi_2/\sqrt{1 - \xi_2^2}$ (все эти сферы проходят через окружность $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, соответствующую предельному тороиду $\xi_1 = \infty$).

Выражения x , y , z через ξ , а также вид скалярных множителей h , модуляционного множителя R и определителя Штеккеля для этого полезного частного случая приведены на стр. 621 и 622 этой главы. На этих страницах приведен также другой полезный частный случай бисферических координат.

Представляется, что общие цикloidные координаты (и их вырожденные формы) содержат все системы координат, в которых уравнение Лапласа разделяется с модуляционным множителем или без него, так же как эллипсоидальные координаты содержат все системы, в которых разделяется волновое уравнение. Теперь мы должны перейти к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных в результате разделения переменных.

5.2. Общие свойства, решение при помощи рядов

Мы должны теперь перейти к изучению обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных при разделении переменных в уравнении с частными производными $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ в различных разделяющих координатах. Как мы показали на стр. 483, все разделенные уравнения имеют общий вид

$$\mathcal{L}(\psi) = \frac{d^2\psi}{dz^2} + p(z) \frac{d\psi}{dz} + q(z)\psi = 0 = \frac{1}{f_n} \frac{d}{dz} \left(f_n \frac{d\psi}{dz} \right) + q\psi, \quad (5.2.1)$$

где

$$p = \frac{d}{dz} \ln f_n = \left(\frac{1}{f_n} \right) \left(\frac{df_n}{dz} \right), \quad q = \sum_m k_m^2 \Phi_{nm},$$

а f_n и Φ_{nm} — функции ξ (обозначенной здесь через z). Мы выбрали шкалу координат так, чтобы функции p и q представляли собой простые алгебраические функции z с конечным числом полюсов, соответствующих точкам концентрации системы координат.

Уравнение (5.2.1) является линейным однородным уравнением второго порядка. Как указано на стр. 469, такие уравнения могут иметь раз-