где $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)$. В этом уравнении можно разделить переменные при помощи определителя Штеккеля, так же как и для уравнения в эллипсоидальных координатах. Однако в этом случае полное решение ψ будет произведением неразделенной части $[\sum a_n x_n^2]^{-\frac{1}{4}}=1/R$ на разделенную часть φ, как мы уже установили.

Можно получить различные вырожденные формы циклид, полагая одну или более из постоянных a_n равными друг другу или бесконечности. При этом эллипсоидальные координаты и все их вырожденные формы включаются в качестве частного случая. Включаются также тороидальные координаты, определенные следующими уравнениями:

$$\frac{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}{\xi_1^2}-\frac{4a^2(x^2+y^2)}{\xi_1^2-1}=0,\quad \frac{(x^2+y^2+z^2-a^2)^2}{\xi_2^2}+\frac{4a^2z^2}{\xi_2^2-1}=0. \quad (5.1.60)$$

Это — вырожденные формы уравнения (5.1.52) причем мы применили обозначения ξ_n^2 и a^2 вместо ξ_n и a_n; им соответствуют (для $\xi_1=\text{const}$) тороиды, полученные вращением вокруг оси z окружности радиуса $a/\sqrt{\xi_1^2-1}$ с центром $z=0$, $x=a\xi_1/\sqrt{\xi_1^2-1}$, и (для $\xi_2=\text{const}$) сферы радиуса $a/\sqrt{1-\xi_2^2}$ с центром $x=y=0$, $z=a\xi_2/\sqrt{1-\xi_2^2}$ (все эти сферы проходят через окружность $z=0$, $x^2+y^2=a^2$, соответствующую предельному тороиду $\xi_1=\infty$).

Выражения x, y, z через ξ, а также вид скалярных множителей h, модуляционного множителя R и определителя Штеккеля для этого полезного частного случая приведены на стр. 621 и 622 этой главы. На этих страницах приведен также другой полезный частный случай бисферических координат.

Представляется, что общие циклидные координаты (и их вырожденные формы) содержат все системы координат, в которых уравнение Лапласа разделяется с модуляционным множителем или без него, так же как эллипсоидальные координаты содержат все системы, в которых разделяется волновое уравнение. Теперь мы должны перейти к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных в результате разделения переменных.

5.2. Общие свойства, решение при помощи рядов

Мы должны теперь перейти к изучению обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных при разделении переменных в уравнении с частными производными $\nabla^2\psi+k^2\varphi=0$ в различных разделяющих координатах. Как мы показали на стр. 483, все разделенные уравнения имеют общий вид

$$\mathscr{L}(\psi)=\frac{d^2\psi}{dz^2}+p(z)\frac{d\psi}{dz}+q(z)\psi=0=\frac{1}{f_n}\frac{d}{dz}\left(f_n\frac{d\psi}{dz}\right)+q\psi, \quad (5.2.1)$$

где

$$p=\frac{d}{dz}\ln f_n=\left(\frac{1}{f_n}\right)\left(\frac{df_n}{dz}\right),\quad q=\sum_m k_m^2\Phi_{nm},$$

а f_n и Φ_{nm} — функции ξ (обозначенной здесь через z). Мы выбрали шкалу координат так, чтобы функции p и q представляли собой простые алгебраические функции z с конечным числом полюсов, соответствующих точкам концентрации системы координат.

Уравнение (5.2.1) является линейным однородным уравнением второго порядка. Как указано на стр. 469, такие уравнения могут иметь раз-

личные решения. При этом, если $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ — решения уравнения $\mathscr{L}(\psi)=0$, то и $\sum_m A_m\psi_m$ (где A_m — произвольные постоянные коэффициенты) также есть решение. Иногда встречается соответствующее неоднородное уравнение $\mathscr{L}(\psi)=r(z)$. Мы уже указали раньше, что если Ψ_n — решение уравнения $\mathscr{L}(\psi)=r_n$, то $\Psi_n+\sum_m A_m\psi_m$ — также решение уравнения $\mathscr{L}(\psi)=r_n$, а $\sum_n \Psi_n+\sum_m B_m\psi_m$ — решение уравнения $\mathscr{L}(\psi)=\sum_n r_n$.

Таким образом, имеется бесконечное число различных решений уравнения (5.2.1), соответствующих различным выборам постоянных A_n. Однако в действительности многие из этих решений различаются только постоянным множителем. Картина станет, пожалуй, более ясной, если рассмотреть ее с точки зрения абстрактных векторных пространств. Каждой функции $y(z)$ можно поставить в соответствие вектор $\mathbf{Y}$ несчетномерного пространства, причем для каждого z величина $y(z)$ принимается за компоненту $\mathbf{Y}$ вдоль направления, соответствующего этому значению z (см., например, стр. 134). Дифференциальной операции $\mathscr{L}$ соответствует векторная операция, которая, вообще говоря, преобразует каждый вектор $\mathbf{A}(z)$ в некоторый другой вектор. Однако если y представляет собой решение уравнения $\mathscr{L}(y)=0$, то соответствующий вектор $\mathbf{Y}$ при помощи этой векторной операции переводится в нуль. Каждому решению $u(z)$, отличающемуся от $y(z)$ постоянным множителем, соответствует вектор $\mathbf{U}$, имеющий *то же направление*, что и $\mathbf{Y}$, хотя и другую *длину*. Возникает вопрос: сколько *различных направлений* могут иметь векторы, соответствующие решениям уравнения (5.2.1)?

Определитель Вронского. Если двум решениям y_1 и y_2 соответствуют векторы одного направления, то $y_2=ay_1$ и $y_2'=ay_1'$ (в этой главе мы будем применять краткие обозначения $y'=dy/dz$ и $y''=d^2y/dz^2$) и выражение

$$\Delta(y_1, y_2)=y_1y_2'-y_2y_1' \tag{5.2.2}$$

обращается в нуль для всех значений z. С другой стороны, если $\mathbf{Y}_2$ имеет отличное от $\mathbf{Y}_1$ направление, то $\Delta(y_1, y_2)$ нигде *не равно нулю*. Выражение $\Delta(y_1, y_2)$, определенное формулой (5.2.2) (где y_1 и y_2 оба являются решениями уравнения $\mathscr{L}(y)=0$), называется *определителем Вронского* для решений y_1 и y_2 данного однородного уравнения. Если определитель Вронского равен нулю, то одно решение отличается от другого постоянным множителем. Если определитель Вронского отличен от нуля для любого интервала изменения z, то $\mathbf{Y}_2$ имеет отличное от $\mathbf{Y}_1$ направление и два решения y_1 и y_2 называются *независимыми*.

При помощи свойств определителя Вронского можно непосредственно показать, что имеется по крайней мере одно решение, независимое с $y_1 \not\equiv 0$. Предположим, что решение y_1 известно, и попробуем построить другое решение y_2, связанное с y_1 в некоторой начальной точке $z=z_0$ соотношениями $y_2=\alpha y_1$, $y_2'=\beta y_1'$ $(\alpha\neq\beta)$. Тогда определитель Вронского $\Delta(y_1\ y_2)=(\beta-\alpha)\,y_1y_1'$ в точке $z=z_0$ отличен от нуля (мы допускаем, что ни y_1, ни y_1' не равно нулю при $z=z_0$). Посмотрим, какие значения принимает Δ для других значений z, если y_2 является решением уравнения $\mathscr{L}(y)=0$. Взяв производную от Δ по z и применив уравнение (5.2.1), получим

$$\frac{d\Delta}{dz}=y_1y_2''-y_2y_1''=-y_1(py_2'+qy_2)+y_2(py_1'+qy_1)=$$
$$=-p\Delta=-\Delta\frac{d}{dz}(\ln f).$$

Это уравнение для Δ можно проинтегрировать, что дает

$$\Delta(z)=\Delta(z_0)e^{-\int_{z_0}^{z} p\,dz}=\Delta(z_0)\frac{f(z_0)}{f(z)}. \tag{5.2.3}$$

Отсюда, за исключением того несчастного случая, когда f при выбранном z_0 равно нулю, если Δ отлично от нуля при $z=z_0$, то оно отлично от нуля и при других значениях z, пока $f(z)\neq 0$; таким образом возможно найти второе решение, независимое от y_1.

Так как $\Delta(z)=y_1y_2'-y_2y_1'=y_1^2(z)\,d\,[y_2(z)/y_1(z)]/dz$, то немедленно получаем, что

$$y_2(z)=y_1(z)\int_{z_0}^{z}\frac{\Delta(u)}{y_1^2(u)}du=\Delta(z_0)\,y_1(z)\int_{z_0}^{z}\frac{e^{-\int_{z_0}^{u}p(w)dw}}{y_1^2(u)}du=$$

$$=\Delta(z_0)\,f(z_0)\,y_1(z)\int_{z_0}^{z}\frac{du}{f(u)\,y_1^2(u)}. \tag{5.2.4}$$

Нетрудно убедиться в том, что выражение (5.2.4) представляет собой решение уравнения (5.2.1), так как если подставить $y=uv$, то уравнение (5.2.1) принимает вид

$$v\mathscr{L}(u)+uv''+puv'+2u'v'=0,\quad y=uv,\quad \mathscr{L}(y)=0. \tag{5.2.5}$$

Полагая $u=y_1$, $\mathscr{L}(u)=0$, а $v=\int(\Delta/y_1^2)dz$, мы легко убедимся в том, что уравнение (5.2.5) удовлетворяется. Таким образом, y_2, определенное формулой (5.2.4), представляет собой решение уравнения $\mathscr{L}(y)=0$, независимое с y_1; соответствующий вектор $\mathbf{Y}_2$ в абстрактном векторном пространстве имеет направление, отличное от $\mathbf{Y}_1$. Если имеем два независимых решения, то, так как уравнение (5.2.1) линейное, любая комбинация Ay_1+By_2 также является решением. Отсюда *каждому вектору в плоскости, определенной векторами* $\mathbf{Y}_1$ *и* $\mathbf{Y}_2$, отвечает решение соответствующего уравнения.

Независимые решения. Мы только что показали, что если одно решение $y_1(z)$ уравнения $\mathscr{L}(y)=0$ известно, то второе решение можно получить посредством интегрирования

$$y_2(z)=By_1(z)\int e^{-\int p\,dz}\frac{dz}{y_1^2(z)} \tag{5.2.6}$$

Это решение независимо с $y_1(z)$, так как определитель Вронского $\Delta(y_1,y_2)$ равен $Be^{-\int p\,dz}$. Далее возникает следующий вопрос: нельзя ли *все возможные* решения уравнения (5.2.1) выразить в виде линейной комбинации Ay_1+By_2 или же можно найти решение, у которого соответствующий вектор не лежит в плоскости, определенной векторами $\mathbf{Y}_1$ и $\mathbf{Y}_2$. Возьмем какое-нибудь решение y_3 и посмотрим, можно ли его выразить через y_1 и y_2. Выбрав точку $z=z_0$, мы всегда можем найти значения A и B, для которых

$$y_3(z_0)=Ay_1(z_0)+By_2(z_0),\quad y_3'(z_0)=Ay_1'(z_0)+By_2'(z_0). \tag{5.2.7}$$

Это можно сделать, поскольку определитель Вронского $\Delta(y_1,y_2)$ отличен от нуля или, другими словами, поскольку y_1 и y_2 — независимые решения.

Итак, всегда можно найти такую комбинацию y_1 и y_2, что определитель Вронского y_3 и этой комбинации равен нулю при $z=z_0$. Но чтобы убедиться, что функция y_3 действительно равна Ay_1+By, надо проверить, что их высшие производные при $z=z_0$ также равны. Однако, применяя уравнения (5.2.1) и (5.2.7), мы видим, что

$$y_3''(z_0)=-py_3'-qy_3=-p[Ay_1'+By_2']-q[Ay_1+By_2]=Ay_1''(z_0)+By_2''(z_0).$$

Продолжая дифференцирование и применяя уравнение (5.2.1), находим, что если имеют место соотношения (5.2.7), то и n-я производная от y_3 в точке z_0 равна такой же комбинации n-х производных от y_1 и y_2. Следовательно, ряд Тейлора около точки $z=z_0$ дает

$$\begin{aligned} y_3(z)&=y_3(z_0)+(z-z_0)y_3'(z_0)+\frac{1}{2}(z-z_0)^2y_3''(z_0)+\ldots=\\ &=A[y_1(z_0)+(z-z_0)y_1'(z_0)+\ldots]+B[y_2(z_0)+(z-z_0)y_2'(z_0)+\ldots]=\\ &=Ay_1(z)+By_2(z), \end{aligned}$$

так что решение y_3 представимо в виде комбинации Ay_1+By_2 во всей области изменения z, где сходится ряд Тейлора.

Таким образом, в этом смысле *каждое решение y_3 уравнения $\mathscr{L}(y)=0$ представимо в виде линейной комбинации двух независимых решений y_1 и y_2*. С точки зрения абстрактного векторного пространства получается, что векторы, представляющие решения уравнения $\mathscr{L}(y)=0$, *все лежат в одной плоскости*. Нетрудно показать, что при рассмотрении уравнения третьего порядка потребуется уже три независимых решения для построения базисной системы, через которую можно выразить все остальные решения; другими словами, в этом случае векторы, соответствующие решениям, все лежат в трехмерном подпространстве абстрактного векторного пространства; для дифференциальных уравнений высшего порядка размерность этого подпространства равна порядку линейного дифференциального уравнения, порождающего решения.

Интегрирующие множители и сопряженные уравнения. Выражение решения незнакомого дифференциального уравнения через известные алгебраические или трансцендентные функции является обычно более сложной задачей, чем интегрирование незнакомой функции; действительно, определению первообразной функции $u=\int v\,dz$ соответствует решение очень простого дифференциального уравнения первого порядка $du/dz-v(z)=0$. Для интегрирования в замкнутом виде обычно, по существу, просто испытывают несколько возможных решений u, чтобы проверить, не будет ли производная u' какого-нибудь из них равна v. Результаты этого исследования собраны в таблицах интегралов. Если требуемый интеграл не содержится в таблицах, обычно необходимо прибегнуть к разложению в ряд (при этом область применимости ряда ограничивается областью его сходимости) или к численному подсчету (с аналогичными или более жесткими ограничениями).

Основной задачей этой главы будет классификация уравнений (то есть составление таблицы, аналогичной таблице интегралов), по которой можно было бы узнавать виды уравнений, имеющие известные и табулированные решения, а также исследование различных общих методов решения таких уравнений, что позволит нам найти общий характер поведения решений других незнакомых уравнений. Во многих случаях мы будем считать решение найденным, если его можно выразить через один или более интегралов, даже если интегрирование возможно осуществить только при помощи разложения в ряды (или численного подсчета). Это называется

«приведением к квадратурам»—выражение, посредством которого математик как бы уклоняется от остальной части задачи нахождения решения. Например, простейшее линейное дифференциальное уравнение

$$(dy/dz) + p(z)\,y = 0 \tag{5.2.8}$$

можно привести к квадратурам посредством перегруппировки членов

$$\int (dy/y) = -\int p(z)\,dz, \quad \ln y = -\int p\,dz + C, \quad y = Ae^{-\int p\,dz} \tag{5.2.9}$$

или при помощи *интегрирующего множителя*. Для этого заметим, что если умножить уравнение (5.2.8) на множитель $e^{\int p\,dz}$, то результат будет представлять собой полный дифференциал, который можно немедленно проинтегрировать

$$e^{\int p\,dz}y' + e^{\int p\,dz}py = (d/dz)\,[ye^{\int p\,dz}] = 0, \quad ye^{\int p\,dz} = A, \quad y = Ae^{-\int p\,dz}$$

Имеется обширная литература, в которой излагаются полезные приемы нахождения интегрирующего множителя для более сложных уравнений первого порядка.

Уравнения второго порядка вида (5.2.1) также иногда можно привести к квадратурам при помощи интегрирующего множителя. Из тождеств

$$y''v - v''y = (d/dz)\,(y'v - v'y), \quad (d/dz)\,(pyv) = vpy' + y\,(pv)'$$

получаем следующее тождество для любых разумных функций y и v переменной z:

$$v\,[y'' + py' + qy] - y\,[v'' - (pv)' + qv] = (d/dz)\,[vy' - v'y + vpy],$$

которое можно символически записать в виде

$$v\mathscr{L}(y) - y\tilde{\mathscr{L}}(v) = (d/dz)\,P(v,\ y), \tag{5.2.10}$$

где оператор $\mathscr{L}$ тот же, что и в исходном дифференциальном уравнении $\mathscr{L}(y) = y'' + py' + qy = 0$. Дифференциальный оператор $\tilde{\mathscr{L}}$, преобразующий v по формуле

$$\tilde{\mathscr{L}}(v) = \frac{d^2v}{dz^2} - \frac{d}{dz}(pv) + qv = v'' - pv' + (q - p')\,v \tag{5.2.11}$$

называется *сопряженным* оператору $\mathscr{L}(y)$, преобразующему функцию y, а дифференцируемое по z выражение

$$P = vy' - v'y + vpy = vy\left[\frac{y'}{y} - \frac{v'}{v} + p\right] \tag{5.2.12}$$

называется *присоединенной билинейной формой*, зависящей от функций v и y и независимой переменной z.

Если мы можем решить сопряженное уравнение $\tilde{\mathscr{L}}(v) = 0$, то решение исходного уравнения $\mathscr{L}(y) = 0$ сводится к решению уравнения первого порядка

$$P = vy\,[(y'/y) - (v'/v) + p] = \text{const}.$$

Так как годится любое решение последнего уравнения, то мы выберем простейшее, положив постоянную равной нулю, так что если v — решение уравнения $\tilde{\mathscr{L}}(v) = 0$, то

$$\frac{dy}{y} = \frac{dv}{v} - p\,dz, \quad y_1 = ve^{-\int p\,dz} \tag{5.2.13}$$

(мы не обращаем внимания на произвольные постоянные, так как можем ввести их позже). Второе, независимое от y_1 решение можно найти по формуле (5.2.6)

$$y_2 = ve^{-\int p\,dz} \int e^{\int p\,dz} \frac{dz}{v^2}, \tag{5.2.14}$$

причем надо выполнить еще одно интегрирование. Тогда общим решением будет $\psi = Ay_1 + By_2$.

К общему типу дифференциальных уравнений второго порядка, которые можно решить таким путем, принадлежит случай, когда $q = dp/dz$, так как тогда сопряженное уравнение [см. (5.2.11)] принимает простой вид

$$v'' - pv' = 0, \quad v' = e^{\int p\,dz}, \quad v = \int e^{\int p\,dz} dz$$

и двумя независимыми решениями для y будут

$$y_1 = e^{-\int p\,dz} \int e^{\int p\,dz} dz = \frac{v}{v'},$$

$$y_2 = -e^{-\int p\,dz} \left(\int e^{\int p\,dz} dz \right) \int \frac{e^{\int p\,dz} dz}{\left(\int e^{\int p\,dz} dz \right)^2} = \frac{1}{v'} \tag{5.2.15}$$

при подходящем выборе постоянных интегрирования.

В некоторых из наших разделенных уравнений множитель f_n имеет вид $(\xi - a)^\alpha$, так что соответствующее выражение p в уравнении равно $d \ln f/d\xi = \alpha/(\xi - a)$. Если при этом элементы определителя Штеккеля таковы, что $q = -\alpha/(\xi - a)^2$, то уравнение $\mathscr{L}(y) = 0$ приобретает вид

$$y'' + (\alpha/z)\, y' - (\alpha/z^2)\, y = 0, \quad z = \xi - a;$$

тогда условие $q = p'$ удовлетворяется и можно применить формулы (5.2.15). В этом случае $\int p\,dz = \alpha \ln z$, $v' = z^\alpha$, $v = z^{\alpha+1}/(\alpha + 1)$, так что общим решением уравнения $\mathscr{L}(y) = 0$ будет

$$\psi = A'y_1 + B'y_2 = Az + (B/z^\alpha), \tag{5.2.16}$$

которое имеет точки ветвления (если α не целое) порядка α при $z = 0$ (то есть при $\xi = a$, в точке концентрации координат) и при $z = \infty$, полюс порядка α при $z = 0$ и простой полюс при $z = \infty$ (то есть после подстановки $z = 1/w$ функция ψ имеет простой полюс при $w = 0$), если α целое положительное, и полюс порядка $|\alpha|$ при $z = \infty$, если $\alpha \leqslant -2$ целое.

Решение (5.2.16) имеет место, *кроме случая* $\alpha = -1$, когда член $Bz^{-\alpha}$ не является независимым с первым решением Az. В этом случае $p = -1/z$ и второе решение можно получить прямо из (5.2.6)

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dz}}{y_1^2} dz = z \int \frac{z\,dz}{z^2} = z \ln z,$$

так что общее решение будет тогда равно

$$\psi = z(A + B \ln z) \tag{5.2.17}$$

и опять будет иметь точки ветвления при $z = 0$ и $z = \infty$.

Решение неоднородного уравнения. Зная два независимых решения y_1 и y_2 однородного уравнения $\mathscr{L}(y) = 0$, мы можем найти общее решение неоднородного уравнения $\mathscr{L}(\psi) = r(z)$ при помощи дополнительного инте-

грирования. Аналогично уравнению (5.2.5) подставляем $\psi = uv$ в уравнение $\mathscr{L}(\psi) = r$ и получаем

$$v\mathscr{L}(u) + uv'' + (up + 2u')\,v' = r.$$

Если теперь положить u равным одному из решений y_1 однородного уравнения $\mathscr{L}(y) = 0$, получится

$$v'' + [p + 2(y_1'/y_1)]\,v' = r/y_1. \tag{5.2.18}$$

Однако так как второе решение и определитель Вронского связаны соотношением $(y_2/y_1)' = \Delta/y_1^2$, то из указанного на стр. 497 свойства определителя Вронского вытекает, что

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'' = \left(\frac{\Delta}{y_1^2}\right)' = \frac{\Delta'}{y_1^2} - 2\frac{y_1'\Delta}{y_1^3} = -p\frac{\Delta}{y_1^2} - 2\frac{y_1'}{y_1}\frac{\Delta}{y_1^2},$$

откуда $(y_2/y_1)'' + [p + 2(y_1'/y_1)]\,(y_2/y_1)' = 0$. Умножая это уравнение на v', а уравнение (5.2.18) на $(y_2/y_1)'$ и вычитая, получаем

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' v'' - v'\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'' = \left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\right]^2 \frac{d}{dz}\left[\frac{v'}{(y_2/y_1)'}\right] = \frac{r}{y_1}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{r}{y_1}\frac{\Delta}{y_1^2}.$$

При помощи этого преобразования мы привели исходное неоднородное уравнение второго порядка $\mathscr{L}(\psi) = r$ к простому неоднородному уравнению первого порядка

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{v'}{(y_2/y_1)'}\right] = \frac{ry_1}{\Delta},$$

где y_1, y_2 и $\Delta = y_1y_2' - y_2y_1'$ получены из однородного уравнения $\mathscr{L}(y) = 0$ и предполагаются известными функциями z. Интегрируя это уравнение первого порядка без больших усилий, получаем

$$v' = \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right]\int \frac{ry_1}{\Delta}\,dz \quad \text{или} \quad v' + \frac{ry_2}{\Delta} = \frac{d}{dz}\left(\frac{y_2}{y_1}\int\frac{ry_1}{\Delta}\,dz\right).$$

Так как $v = \psi/y_1$, то мы отсюда получаем формальное решение неоднородного уравнения $\mathscr{L}(\psi) = r$

$$\psi = vy_1 = y_1\left[c_1 - \int\frac{ry_2\,dz}{\Delta(y_1, y_2)}\right] + y_2\left[c_2 + \int\frac{ry_1\,dz}{\Delta(y_1, y_2)}\right], \tag{5.2.19}$$

где интегралы неопределенные, а постоянные c выбираются в соответствии с краевыми условиями. В соответствии с обсуждением на стр. 496 это решение состоит из суммы частного решения

$$\int^z r(w)\left[\frac{y_1(w)\,y_2(z) - y_2(w)\,y_1(z)}{y_1(w)\,y_2'(w) - y_2(w)\,y_1'(w)}\right]dw$$

и произвольного решения однородного уравнения $\mathscr{L}(y) = 0$.

Решение при помощи рядов около обыкновенных точек. Как мы указали несколько выше и докажем вскоре, общее решение уравнения $\mathscr{L}(y) = 0$ имеет особенности в точках полюсов функций p и q. Все другие значения z, в которых p и q являются аналитическими функциями, называются *обыкновенными точками уравнения*. Точки, в которых p или q (или обе) имеют особенности, называются *особыми точками уравнения*.

Чтобы показать, что общее решение в обыкновенной точке аналитично, и также проиллюстрировать один из приемов решения дифференциальных уравнений, подсчитаем разложение в ряд решения уравнения (5.2.1) в обыкновенной точке $z = a$. Так как $z = a$ — обыкновенная точка, то как p, так и q аналитичны и могут быть около $z = a$ разложены

в ряды Тейлора

$$p(z) = p(a) + (z-a)\,p'(a) + \frac{1}{2}(z-a)^2 p''(a) + \ldots,$$

$$q(z) = q(a) + (z-a)\,q'(a) + \frac{1}{2}(z-a)^2 q''(a) + \ldots .$$

Решение y (если оно аналитично) также можно выразить в виде ряда

$$y = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots .$$

Подставляя его в уравнение (5.2.1), получаем

$$0 = [2a_2 + a_1 p(a) + a_0 q(a)] + \\ + [6a_3 + 2a_2 p(a) + a_1 p'(a) + a_0 q'(a) + a_1 q(a)]\,(z-a) + \ldots .$$

Приравнивая коэффициенты при каждой степени $z-a$ нулю, получаем последовательность уравнений для определения коэффициентов a_n ряда, представляющего решение. Первое уравнение выражает a_2 через a_0 и a_1 [и известные величины $p(a)$ и $q(a)$]. Из второго можно выразить a_3 через a_2, a_1 и a_0 и потому через a_0 и a_1 и т. д. Эти уравнения можно решить, что и даст ряд для y.

Таким образом, разложение y в ряд можно записать в виде

$$\begin{aligned} y &= a_0 y_1 + a_1 y_2, \\ y_1 &= 1 - \frac{1}{2} q(a)(z-a)^2 + \frac{1}{6}[q(a)\,p(a) - q'(a)](z-a)^3 + \ldots, \\ y_2 &= (z-a) - \frac{1}{2} p(a)(z-a)^2 + \frac{1}{6}[p^2(a) - p'(a) - q(a)](z-a)^3 + \ldots, \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

где y_1 и y_2 — независимые решения. Они образуют особенно удобную для применений пару решений, так как одно имеет единичное значение и нулевую производную при $z=a$, а другое — нулевое значение и единичную производную; эта пара называется *основной системой* решений для обыкновенной точки $z=a$. Любому начальному условию $y(a)=A$, $y'(a)=B$ легко удовлетворить, положив $y = Ay_1 + By_2$. Решение, представленное в виде ряда, пригодно внутри круга сходимости радиуса, равного расстоянию от a до ближайшей особой точки дифференциального уравнения. Например, основной системой решений дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ в обыкновенной точке $z=0$ служит $y_1 = \cos z$, $y_2 = \sin z$. Так как ближайшая особая точка находится на бесконечности, то ряды, в которые разлагаются косинус и синус, пригодны на всей конечной части плоскости z.

Интересно отметить, что если p имеет при $z=a$ полюс, в то время как q аналитична в a, то *одно решение* уравнения аналитично, а второе имеет особенность. Подставляя $p = F(z)/(z-a)^n$, где F — аналитическая функция, отличная от нуля при $z=a$, а затем проводя такое же разложение в ряд, как и выше, мы найдем в общем случае, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, в то время как a_{n+1}, a_{n+2} и т. д. можно выразить через a_0. Например, если в выражении для p будет $n=2$, то ряд, соответствующий уравнению $\mathscr{L}(y) = 0$, имеет вид

$$0 = \frac{1}{(z-a)^2} a_1 F(a) + \frac{1}{(z-a)}[2a_2 F(a) + a_1 F'(a)] + \\ + [2a_2 + q(a)\,a_0 + 3a_3 F(a) + 2a_2 F'(a) + \frac{1}{2} a_1 F''(a)] + \ldots,$$

так что одно из решений уравнения будет (полагая $a_0 = 1$)

$$y_1 = 1 - \frac{q(a)}{3F(a)}(z-a)^3 + \left[\frac{q(a)}{2F^2(a)} + \frac{q(a)\,F'(a)}{4F^2(a)} - \frac{q'(a)}{4F(a)}\right](z-a)^4 + \ldots .$$

Второе решение можно подсчитать, применяя формулу (5.2.6). Так как $\int p\,dz = -\frac{F(a)}{z-a} + F'(a)\ln(z-a) + \frac{1}{2}F''(a)(z-a) + \ldots$, то интеграл $\int dz\, e^{-\int p\,dz}/y_1^2$ имеет существенную особенность общего вида $(z-a)^{2-F'(a)}\times$ $\times e^{F(a)/(z-a)}$. Поэтому общее решение $Ay_1 + By_2$ имеет при $z=a$ существенную особенность.

Особые точки, определяющие уравнение. Мы только что увидели, что вблизи такой особой точки, где q аналитична, а p имеет полюс, одно решение аналитично, в то время как второе имеет точку ветвления (или полюс), если p имеет простой полюс, или существенную особенность, если p имеет полюс высшего порядка (эта особенность может одновременно являться точкой ветвления). Это исследование имеет значение с общей точки зрения: можно определить *регулярную особую точку* как такую, в которой общее решение имеет полюс или точку ветвления (или их комбинацию), а иррегулярную особую точку как такую, в которой общее решение имеет существенную особенность.

Чтобы найти, какой тип особых точек получается при различном поведении p и q, выделим особенность у y, положив $y = uv$, где u предполагается аналитической и $u(a) \neq 0$. Применяя формулу (5.2.5), получаем

$$u'' + Hu' + Ju = 0, \quad H = p + 2(v'/v), \quad J = q + (v''/v) + p(v'/v). \tag{5.2.21}$$

Теперь предположим, что уравнение $\mathscr{L}(y) = 0$ имеет при $z=a$ особую точку, то есть $p = F(z)/(z-a)^m$, $q = G(z)/(z-a)^n$, где F и G аналитичны при $z=a$. Чтобы функция u была аналитической, потребуем, чтобы коэффициент J был аналитическим: u может тогда быть аналитическим решением уравнения $u'' + Hu' + Ju = 0$, у которого коэффициент J аналитический, а H имеет полюс.

Прежде всего посмотрим, какие ограничения надо наложить на p и q (то есть на m и n), чтобы $z=a$ была регулярной особой точкой. В этом случае, по определению, $v = (z-a)^s$, $v'/v = s/(z-a)$, $v''/v = s(s-1)/(z-a)^2$. Чтобы функция J была аналитической, полюс q должен быть не выше второго порядка ($n=2$), а полюс p — не выше первого ($m=1$). Таким образом, если *p имеет вид $F(z)/(z-a)$, а q — вид $G(z)/(z-a)^2$*, где функции F и G аналитичны при $z=a$, *то точка $z=a$ является регулярной особой точкой для уравнения $\mathscr{L}(y)=0$ и общее решение имеет в ней точку ветвления* (*или полюс*). Уравнение для s получается из (5.2.21)

$$s^2 + [F(a) - 1]s + G(a) = 0, \tag{5.2.22}$$

и оно называется *определяющим уравнением* для решения. Два корня s_1 и s_2 ($s_1 > s_2$) соответствуют двум решениям $y_1 = (z-a)^{s_1}u_1$, $y_2 = (z-a)^{s_2}u_2$, где u_1 и u_2 — функции, аналитические в точке a.

Если $s_1 = s_2$ и, во многих случаях, если $s_1 - s_2$ — целое, u_2 оказывается равным $(z-a)^{s_1-s_2}u_1$, так что определяющее уравнение и ряд для u дают одно решение, но не дают второго. В этом случае для получения y_2 применяется формула (5.2.6). Так как $e^{-\int p\,dz}$ равно произведению $(z-a)^{-F(a)}$ на аналитическую функцию и так как $1 - F(a) = s_1 + s_2$, то подинтегральная функция в формуле (5.2.6) имеет вид

$$\frac{(z-a)^{s_1+s_2-1}\ (\text{аналитическая функция})}{(z-a)^{2s_1}u_1^2} = \frac{(\text{аналитическая функция})}{(z-a)^{s_1-s_2+1}}$$

Если $s_1 - s_2$ целое, то подинтегральная функция имеет при $z=a$ полюс, а не точку ветвления и, разложив аналитическую функцию в ряд

$b_0+b_1(z-a)\ldots$, получим ряд для второго решения в виде

$$(z-a)^{s_2}u_1\left[-\frac{b_0}{s_1-s_2}-\frac{b_1(z-a)}{s_1-s_2+1}-\ldots+b_{s_1-s_2}(z-a)^{s_1-s_2}\ln(z-a)+\ldots\right];$$

он имеет характерный член $u_1(z-a)^{s_1}\ln(z-a)$.

Этот логарифмический член обязательно появляется во втором решении, если $s_1=s_2$ (см. стр. 500), и почти обязательно, если s_1-s_2 целое. Поэтому можно сказать, что общее решение уравнения (5.2.1) имеет в регулярной особой точке уравнения точку ветвления, так как если s_1 и s_2 оба целые и можно было бы ожидать отсутствие точки ветвления, то как раз в этом случае во втором решении появляется логарифмический член, приносящий вместе с собой свою точку ветвления. Это правило имеет исключения, одно из них дается формулой (5.2.16).

Если q имеет полюс выше второго порядка, или если p имеет полюс выше первого порядка, или если имеет место и одно и другое, то одно решение или оба должны иметь существенную особенность и особая точка является иррегулярной. Если при этом порядок полюса q не превосходит более чем на единицу порядок полюса p, то только одно из решений имеет существенную особенность.

Это можно просто показать, подставив ряд

$$y=(z-a)^s\sum_{i=0}^{\infty}c_i(z-a)^i,\quad \text{то есть } v=(z-a)^s,\quad u=\sum c_i(z-a)^i$$

в уравнение (5.2.1). Тогда, если p и q можно представить рядами Лорана,

$$p=a_{-m}(z-a)^{-m}+a_{-m+1}(z-a)^{-m+1}+\ldots,$$
$$q=b_{-n}(z-a)^{-n}+b_{-n+1}(z-a)^{-n+1}+\ldots,\quad m,\ n\text{ — целые},$$

то следующий ряд

$$c_0s(s-1)(z-a)^{s-2}+c_1(s+1)s(z-a)^{s-1}+\ldots+$$
$$+c_0a_{-m}s(z-a)^{s-m-1}+[c_0a_{-m+1}s+c_1a_{-m}(s+1)](z-a)^{s-m}+\ldots+$$
$$+c_0b_{-n}(z-a)^{s-n}+[c_0b_{-n+1}+c_1b_{-n}](z-a)^{s-n+1}+\ldots$$

должен равняться нулю для тех z, для которых ряд для u сходится. Следовательно, коэффициент при каждой степени $z-a$ должен обращаться в нуль. Если полученная бесконечная последовательность уравнений неразрешима, то наше исходное предположение о форме y нереализуемо и y должен иметь существенную особенность при $z=a$.

Оказывается, что если коэффициент при младшей степени $z-a$ можно сделать равным нулю, то всем дальнейшим уравнениям можно удовлетворить при помощи подходящего выбора коэффициентов c_i. Это основное уравнение для низшей степени $z-a$ как раз совпадает с определяющим уравнением (5.2.22), если m и n таковы, что удовлетворяют условиям, при которых это определяющее уравнение было введено. Мы видели, что если $m\leqslant 1$ и $n\leqslant 2$, то это уравнение относительно s имеет вторую степень; например, для $m=1$ и $n=2$ имеем

$$c_0[s^2+(a_{-1}-1)s+b_{-2}]=0,$$

что позволяет найти для s два значения, следовательно, *оба* независимые решения y_1 и y_2 имеют указанный вид (точку ветвления при $z=a$), то есть точка $z=a$, по определению, является *регулярной особой точкой*. (Если корни равны, то мы уже видели, что второе решение имеет логарифмический член.)

Если $1 < m \geqslant n-1$, то уравнение для низшей степени $z-a$ линейно по s, так что *только одно* решение y может иметь указанный вид, а если $2 < n > m+1$, то определяющее уравнение отсутствует и *ни одно* решение не имеет указанного вида. Такая точка является *иррегулярной особой точкой*, так как одно или оба решения должны иметь при $z=a$ существенную особенность. Имеется определенная иерархия иррегулярных особых точек, основанная на виде существенной особенности, которой обладает решение. Например, если решение в некоторой иррегулярной особой точке имеет вид

$$y=[c_0(z-a)^s+c_1(z-a)^{s+1}+\ldots]\exp[A_0(z-a)^{-k}+A_1(z-a)^{-k+1}+\ldots],$$

то характер существенной особенности y при $z=a$ определяется значением k. Можно распределить особые точки по различным *видам* в соответствии с требуемым значением k. Если p или q имеет точку ветвления или существенную особенность, то y имеет еще более «патологическую» особенность. К счастью, нам не потребуется забираться в эти дебри осложнений, чтобы решать уравнения, с которыми мы работаем.

Классификация уравнений, стандартные формы. Теперь очевидно, что первое, с чего надо начинать, приступая к решению линейного дифференциального уравнения неизвестного вида, состоит в выяснении положения всех особенностей функций p и q. Если все эти особенности являются полюсами, то можно перейти к следующему шагу; если некоторые из них являются точками ветвления или существенными особенностями, то надо попытаться так заменить независимое переменное z, чтобы все они стали полюсами (если этого нельзя сделать, что иногда бывает, то приходится применять численное интегрирование). Затем мы разделяем регулярные особые точки и иррегулярные и, решая определяющие уравнения для всех регулярных точек, находим значения *индексов* s, определяющих структуру точек ветвления решений вблизи этих значений z. Если это иррегулярные особые точки, мы также определяем характер существенной особенности при помощи упомянутых выше методов.

Характер бесконечно удаленной точки определяется при помощи подстановки $z=1/w$, в результате чего получается уравнение

$$\frac{d^2y}{dw^2}+P(w)\frac{dy}{dw}+Q(w)y=0,\quad P(w)=\frac{2}{w}-\frac{1}{w^2}p\left(\frac{1}{w}\right),\quad Q(w)=\frac{1}{w^4}q\left(\frac{1}{w}\right). \tag{5.2.23}$$

По структуре полюсов P и Q при $w=0$ мы узнаем характер особой точки на бесконечности. Например, если решением определяющего уравнения для $w=0$ будет s_1, то решение y имеет вид $w^{s_1}F(w)=(1/z)^{s_1}F(1/z)$, где функция $F(w)$ аналитична при $w=0$.

Особые точки всех уравнений, получающихся при разделении переменных в уравнении $\nabla^2\psi+k^2\psi=0$, приведены в таблице в конце этой главы.

Обычно лучше всего оказывается преобразовать уравнение к стандартному виду, со стандартным положением особых точек и по возможности с более простыми индексами s решений. Например, если имеется только две особых точки, то обычно лучше расположить их в нуле и в бесконечности; если их три, то их обычно размещают в нуле, единице и бесконечности. Это делается при помощи замены независимой переменной. Если особыми точками первоначально были a, b и c, то преобразование

$$z=(w-a)\gamma/(w-c),\quad w=(\gamma a-cz)/(\gamma-z),\quad \gamma=(b-c)/(b-a) \tag{5.2.24}$$

меняет положение особых точек, не изменяя их структуры, то есть определяющего уравнения в каждой точке. Уравнения для нового и старого независимого переменного связаны следующим образом:

$$\frac{d^2\psi}{dw^2}+P(w)\frac{d\psi}{dw}+Q(w)\psi=0,\quad \frac{d^2\psi}{dz^2}+p(z)\frac{d\psi}{dz}+q(z)\psi=0,$$

$$p(z)=\frac{\gamma(a-c)}{(\gamma-z)^2}P\left(\frac{\gamma a-cz}{\gamma-z}\right)-\frac{2}{\gamma-z},$$
$$q(z)=\frac{\gamma^2(a-c)^2}{(\gamma-z)^4}Q\left(\frac{\gamma a-cz}{\gamma-z}\right). \tag{5.2.25}$$

Здесь и до конца этой главы мы будем обозначать через ψ общее решение, а через y — частные решения специального вида.

Найти преобразование, перемещающее четыре произвольные точки в четыре стандартные позиции и не меняющее индексов, невозможно, так что не существует простой стандартной формы уравнений, имеющих более трех особых точек. Мы обычно располагаем иррегулярную особую точку (если она единственная) на бесконечности, так как тогда рассмотренный выше множитель v имеет сравнительно простой вид

$$\exp(a_kz^k+a_{k-1}z^{k-1}+\ldots+a_{k-s}z^{k-s}).$$

Если особая точка в нуле регулярна, то обычно целесообразно заменить искомую функцию, положив $\psi=vu$, чтобы, используя равенства (5.2.21), получить сравнительно просто решаемое уравнение для u. Обычно при этом полагают, что v имеет точку ветвления, соответствующую меньшему корню определяющего уравнения для нулевой особой точки, так что одно из решений уравнения для u аналитично при $z=0$. Однако детальные соображения, которыми надо руководствоваться при выборе преобразования независимой и зависимой переменных, лучше всего могут быть показаны на примерах.

По этой и другим причинам полезно более или менее систематически исследовать некоторые из менее сложных уравнений, чтобы познакомиться с их видом и кое-что узнать о поведении их решений. Мы приступим к рассмотрению различных случаев в порядке возрастания числа и сложности особых точек. Для этих случаев мы сначала исследуем общий вид, а затем преобразование к стандартному виду, для которого мы определим стандартные решения. Простейшим является, конечно, случай *одной регулярной особой точки*. Если этой точкой будет $w=a$, уравнение имеет вид

$$\psi''+[2/(w-a)]\psi'=0, \tag{5.2.26}$$

где коэффициент при члене $\psi'/(w-a)$ должен равняться 2, чтобы не было особой точки на бесконечности [см. (5.2.23)]. Общим решением служит $\psi=A+B/(w-a)$. Стандартная форма для этого уравнения могла бы быть с особой точкой на бесконечности; уравнением и решениями будут тогда

$$\psi''=0,\quad \psi=A+Bz. \tag{5.2.27}$$

Две регулярные особые точки. Здесь общей формой уравнения будет

$$\frac{d^2\psi}{dw^2}+\frac{2w+c(\lambda+\mu-1)-a(\lambda+\mu+1)}{(w-a)(w-c)}\frac{d\psi}{dw}+\frac{\lambda\mu(a-c)^2}{(w-a)^2(w-c)^2}\psi=0, \tag{5.2.28}$$

причем коэффициент $P(w)$ выбран в таком специальном виде (в частности, член $2w$ в числителе), чтобы на бесконечности была обыкновенная точка.

Определяющее уравнение (5.2.22) для $w=a$ имеет вид $s^2-(\lambda+\mu)s+\lambda\mu=0$ и корни λ и μ, так что решениями служат $y_1=(w-a)^\lambda u_1^a$, $y_2=(w-a)^\mu u_2^a$. Определяющее уравнение для $w=c$ имеет вид $\alpha^2+(\lambda+\mu)\alpha+\lambda\mu=0$ и корни $-\lambda$ и $-\mu$, так что решениями будут $y_1=(w-c)^{-\lambda}u_1^c$, $y_2=(w-c)^{-\mu}u_2^c$. Прямая подстановка (или решение с помощью ряда) показывает, что $u_1^a=(w-c)^{-\lambda}$, $u_1^c=(w-a)^\lambda$, $u_2^a=(w-c)^{-\mu}$, $u_2^c=(w-a)^\mu$, так что общее решение имеет вид

$$\psi=A\left(\frac{w-a}{w-c}\right)^\lambda+B\left(\frac{w-a}{w-c}\right)^\mu. \tag{5.2.29}$$

Однако задача о нахождении решения была бы проще, если бы мы совершили преобразование $z=(w-a)/(w-c)$, переводящее одну особую точку в нуль, а другую на бесконечность. Преобразованное уравнение тогда имело бы вид

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}-\frac{\lambda+\mu-1}{z}\frac{d\psi}{dz}+\frac{\lambda\mu}{z^2}\psi=0. \tag{5.2.30}$$

Из этой стандартной формы нетрудно вывести, что решением будет $\psi=Az^\lambda+Bz^\mu$. Таким образом, если имеются только две особые точки и они регулярны, то решение должно иметь особенно простой вид, а индексы в одной из особых точек лишь знаком отличаются от индексов в другой.

Исключительный случай здесь будет, если $\lambda=\mu$. В этом случае решение, полученное по формуле (5.2.6), имеет вид

$$\psi=z^\lambda(A+B\ln z)=\left(\frac{w-a}{w-c}\right)^\lambda\left[A+B\ln\frac{w-a}{w-c}\right]. \tag{5.2.31}$$

Одна иррегулярная особая точка. Вот уравнение с единственной иррегулярной особой точкой $w=a$:

$$\frac{d^2\psi}{dw^2}+\frac{2}{w-a}\frac{d\psi}{dw}-\frac{k^2}{(w-a)^4}\psi=0. \tag{5.2.32}$$

Множитель $(w-a)^{-4}$ указывает на иррегулярность особой точки, а из-за коэффициента $2/(w-a)$ не возникает особой точки при $w=\infty$. Решение этого уравнения таково:

$$\psi=Ae^{k/(w-a)}+Be^{-k/(w-a)}, \tag{5.2.33}$$

что можно найти прямой подстановкой или при помощи преобразования к $z=1/(w-a)$, так как стандартная форма уравнений этого типа получается при перемещении иррегулярной особой точки на бесконечность

$$(d^2\psi/dz^2)-k^2\psi=0. \tag{5.2.34}$$

Следует заметить, что уравнение (5.2.34) не является единственным уравнением, имеющим одну иррегулярную особую точку на ∞, так как могут быть различные *виды* иррегулярных особых точек. Например, уравнение, получающееся из волнового уравнения в параболических цилиндрических координатах

$$y''+(a^2+b^2z^2)y=0,$$

имеет одну иррегулярную особую точку на ∞, но его решения не являются простыми показательными функциями.

Интересная взаимосвязь между регулярными и иррегулярными особыми точками обнаруживается, если посмотреть, что будет в случае двух регулярных особых точек, если эти особые точки сближать до совпадения, сохраняя при этом коэффициенты дифференциального уравне-

ния конечными. В уравнении (5.2.28) положим $a=c-\varepsilon$, $\lambda=-\mu=k/\varepsilon$ и затем устремим ε к нулю; получится уравнение (5.2.32). Решение

$$\phi=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[A\left(1+\frac{\varepsilon}{\omega-c}\right)^{k/\varepsilon}+B\left(1+\frac{\varepsilon}{\omega-c}\right)^{-k/\varepsilon}\right]$$

соответствует одному из известных определений показательной функции

$$e^x=\lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon x)^{1/\varepsilon}.$$

Такое сближение двух особых точек с соответствующим изменением индексов называется *слиянием* (конфлюенцией) особых точек.

Три регулярные особые точки. Уравнения, более сложные, чем приведенные выше, имеют решения, которые нельзя выразить через элементарные функции. Однако таблица в конце этой главы показывает, что большинство приведенных там уравнений, получающихся при разделении переменных, имеет либо три регулярные особые точки, либо же одну регулярную и одну иррегулярную особые точки, так что нам следует детально рассмотреть эти случаи.

Для дальнейшего ознакомления с методами исследования особых точек уравнений построим уравнение (с независимой переменной w), имеющее три регулярные особые точки при $w=a$, b, c. Это означает, что функция $p(w)$ должна иметь простые полюсы при $w=a$, b, c и больше нигде. Отсюда $p(w)$ должна иметь одну из двух равносильных форм

$$p(w)=\frac{Aw^3+Bw^2+Cw+D}{(w-a)(w-b)(w-c)}=\frac{\alpha}{w-a}+\frac{\beta}{w-b}+\frac{\gamma}{w-c}+\delta.$$

Мы будем применять вторую форму, так как с ней легче работать. Обращаясь к уравнению (5.2.23) мы видим, что для того, чтобы бесконечность была обыкновенной точкой, функция ($w=1/u$)

$$\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}p\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{2}{u}-\frac{\alpha/u}{1-au}-\frac{\beta/u}{1-bu}-\frac{\gamma/u}{1-cu}-\frac{\delta}{u^2}$$

должна быть аналитической при $u=0$. Отсюда вытекает, что $\delta=0$ и $\alpha+\beta+\gamma=2$.

Аналогично так как q может иметь в точках a, b, c полюсы не выше второго порядка и так как функция $q(1/u)/u^4$ должна быть аналитической при $u=0$, то q должна иметь вид

$$q(w)=\frac{1}{(w-a)(w-b)(w-c)}\left[\frac{d}{w-a}+\frac{e}{w-b}+\frac{f}{w-c}\right].$$

Чтобы найти связь между индексами решения при $w=a$ и постоянными α, β, γ, d, e, f, обратимся к уравнению (5.2.22). Вблизи точки $w=a$

$$p=\frac{F(w)}{w-a},\quad F(a)=\alpha,\quad q=\frac{G(w)}{(w-a)^2},\quad G(a)=\frac{d}{(a-b)(a-c)}.$$

Если два индекса при $w=a$ должны быть равными $s=\lambda$ и $s=\lambda'$ (то есть если два решения вблизи $w=a$ имеют вид $y_1=(w-a)^{\lambda}u_1(w)$ и $y_2=(w-a)^{\lambda'}u_2(w)$, где u_1 и u_2 аналитичны и отличны в точке a от нуля), то в уравнении $s^2+[F(a)-1]s+G(a)=0$ член $1-F(a)$ должен равняться сумме корней $\lambda+\lambda'$, а член $G(a)$ — произведению корней $\lambda\lambda'$. Отсюда $\alpha=1-\lambda-\lambda'$, а $d=\lambda\lambda'(a-b)(a-c)$. Если индексы в точке b равны μ и μ', а в точке c — ν и ν', то остальные постоянные также выражаются через эти индексы. Однако, как мы показали, чтобы бесконечно

удаленная точка была обыкновенной, должно быть $\alpha+\beta+\gamma=2$, то есть

$$\lambda+\lambda'+\mu+\mu'+\nu+\nu'=1. \tag{5.2.35}$$

Предполагая выполненным это условие, мы можем теперь написать самое общее уравнение с тремя регулярными особенностями

$$\frac{d^2\psi}{dw^2}-\left[\frac{\lambda+\lambda'-1}{w-a}+\frac{\mu+\mu'-1}{w-b}+\frac{\nu+\nu'-1}{w-c}\right]\frac{d\psi}{dw}+$$
$$+\left[\frac{\lambda\lambda'(a-b)(a-c)}{(w-a)^2(w-b)(w-c)}+\frac{\mu\mu'(b-a)(b-c)}{(w-a)(w-b)^2(w-c)}+\right. \tag{5.2.36}$$
$$\left.+\frac{\nu\nu'(c-a)(c-b)}{(w-a)(w-b)(w-c)^2}\right]\psi=0.$$

Оно называется уравнением Папперица. Как мы видели, это уравнение (и потому его решения) вполне определяется указанием положений трех его особых точек и значением обоих индексов в каждой из трех точек (или, скорее, пяти из шести индексов, поскольку шестой получается из соотношения (5.2.35)). Другими словами, символическая табличная запись

$$\psi=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & z \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{matrix}\right\} \tag{5.2.37}$$

полностью равносильна (если сумма элементов второй и третьей строки равна единице) утверждению, что ψ является решением уравнения (5.2.36). Этот символ, введенный Риманом, будет иногда применяться для сокращения записи.

Решение уравнения (5.2.36) при помощи ряда было бы очень громоздким, и поэтому мы поместим особые точки в их стандартные положения. Полагая $a=0$, $b=1$, $c\to\infty$ и вводя z вместо w, получаем

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}-\left[\frac{\lambda+\lambda'-1}{z}+\frac{\mu+\mu'-1}{z-1}\right]\frac{d\psi}{dz}-$$
$$-\left[\frac{\lambda\lambda'}{z}-\frac{\mu\mu'}{z-1}+\nu(\lambda+\lambda'+\mu+\mu'+\nu-1)\right]\frac{\psi}{z(z-1)}=0 \tag{5.2.38}$$

или

$$\psi=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ \lambda & \mu & \nu & z \\ \lambda' & \mu' & 1-\lambda-\lambda'-\mu-\mu'-\nu & \end{matrix}\right\}.$$

Рекурсивные формулы. Теперь мы знаем, что решение ψ можно выразить при помощи следующих разложений вблизи особых точек:

$$\psi=z^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^0z^n+z^{\lambda'}\sum_{n=0}^{\infty}b_n^0z^n=$$
$$=(z-1)^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1(z-1)^n+(z-1)^{\mu'}\sum_{n=0}^{\infty}b_n^1(z-1)^n= \tag{5.2.39}$$
$$=\left(\frac{1}{z}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\left(\frac{1}{z}\right)^{1-\lambda-\lambda'-\mu-\mu'-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

или через фундаментальную систему решений вблизи любой обыкновенной точки (см. стр. 502). Сейчас мы должны определить соотношение между

коэффициентами рядов a_n и b_n при различных n, так чтобы можно было выразить a_n через a_0 и b_n через b_0 и тем самым получить ряд для решения. Подстановка любого из шести возможных рядов в уравнение и приравнивание коэффициентов при степенях z, $z-1$ или $1/z$ нулю дают последовательность уравнений общего вида

$$D_n(a_n) = \Gamma_{n1}a_{n-k+1} + \Gamma_{n2}a_{n-k+2} + \ldots + \Gamma_{nk}a_n = 0, \qquad (5.2.40)$$

которые надо решить, чтобы выразить a_n через a_0 (или b_n через b_0). Такие уравнения называются *k-членными рекурсивными формулами*. Коэффициенты Γ_{nj} являются функциями постоянных, входящих в уравнение, различны для различных особых точек и выбранных индексов и зависят также от своих значков n и j ($j=1, 2, \ldots, k$). Так как ряды (5.2.39) являются решениями, то $\Gamma_{nj}=0$ ($n \geqslant 1$, $n-k+j<0$); это означает, что нет надобности в a с отрицательными значками.

Например, для уравнения (5.2.38), точки $z=0$ и индекса λ рекурсивная формула имеет вид

$$D_n(a_n) = [n(n+\lambda-\lambda'-\mu-\mu'+1)-(\nu+\lambda)(\lambda'+\mu+\mu'+\nu-1)]\,a_n -$$
$$-[(n+1)(2n+2\lambda-2\lambda'-\mu-\mu'+3)-\mu\mu'-(\nu+\lambda)(\lambda'+\mu+\mu'+\nu-1)]a_{n+1}+$$
$$+(n+2)(n+\lambda-\lambda'+2)\,a_{n+2}=0. \qquad (5.2.41)$$

Однако с помощью такой трехчленной рекурсивной формулы получить явное выражение для a_n/a_0 чрезвычайно сложно.

Во всяком случае, мы привели задачу о нахождении решения дифференциального уравнения к задаче о решении бесконечной последовательности алгебраических уравнений, определяющих последовательные коэффициенты ряда для решения. Другими словами, мы совершили еще одно преобразование от непрерывной переменной z к последовательности целых значений индексов n коэффициентов a_n и b_n степенных рядов; соответственно совершается переход от дифференциального уравнения $\mathscr{L}_z(\psi)=0$ к *разностному уравнению* $D_n(a_n)=0$. Коэффициенты разностного уравнения соответствуют коэффициентам p и q дифференциального уравнения и определяются ими. Взаимосвязь между дифференциальным уравнением и рекурсивной формулой становится более ясной, если выразить D_n через *разностные операторы*

$$\delta(a_n) = a_n - a_{n+1}, \quad \delta(na_n) = na_n - (n+1)\,a_{n+1} \text{ и т. д.},$$
$$\delta^2(a_n) = \delta(\delta(a_n)) = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \text{ и т. д.}$$

Например, рекурсивная формула (5.2.41) для ряда, определяющего решение уравнения (5.2.38), может быть переписана так:

$$D_n(a_n) = (n+\lambda-\lambda'+2)\,\delta^2(na_n) - (\mu+\mu'+3)\,\delta(na_n) +$$
$$+(\lambda+\nu)(\lambda+\nu')\,\delta(a_n) - \mu\mu'\delta(a_n) + (\mu\mu'+2n)\,a_n = 0$$
$$(\nu' = 1-\lambda-\lambda'-\mu-\mu'-\nu).$$

Если ограничиваться построением решений в виде степенных рядов, то желательно преобразовать независимое и зависимое переменные в дифференциальном уравнении к виду, порождающему по возможности более простую рекурсивную формулу. Например, трехчленная рекурсивная формула (5.2.41) соответствует разностному уравнению второго порядка; возможно, что преобразование зависимой переменной заменит ее на двучлен-

ную рекурсивную формулу, которой соответствовало бы разностное уравнение первого порядка; последнее же решить гораздо проще.

Гипергеометрическое уравнение. Преобразовав независимое переменное так, чтобы особые точки попали в их стандартные положения, мы теперь преобразуем зависимую переменную, чтобы сделать по возможности более простыми индексы в особых точках, расположенных в конечной части плоскости. Такая замена переменной ψ может изменить только сумму индексов в особой точке, но не может изменить их разности. Однако мы можем произвести деление на $z^\lambda(z-1)^\mu$, так что в обеих особых точках одно решение станет аналитичным, в то время как второе будет иметь индексы $\lambda'-\lambda$ или $\mu'-\mu$. Другими словами, наше решение приобретает вид $\psi = z^\lambda(z-1)^\mu y$, где символом Римана для y будет

$$y = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \nu+\lambda+\mu & z \\ \lambda'-\lambda & \mu'-\mu & 1-\lambda'-\mu'-\nu & \end{array}\right\}.$$

Соответствующее уравнение для y (полученное подстановкой $\psi = z^\lambda(z-1)^\mu y$ в уравнение (5.2.38) или изменением этого уравнения в соответствии с новым символом P) имеет вид

$$y'' + \left[\frac{\lambda-\lambda'+1}{z} + \frac{\mu-\mu'+1}{z-1}\right] y' + \frac{(\nu+\lambda+\mu)(1-\lambda'-\mu'-\nu)}{z(z-1)} y = 0.$$

Однако здесь слишком много постоянных фиксируемых величин. Для фиксирования индексов нужны только три постоянные: имеется четыре индекса, не положенных равными нулю (по одному при 0 и при 1 и два при ∞), однако их сумма должна равняться единице, так что достаточно трех постоянных. Более удобно положить два индекса на ∞ равными a и b, один при 0 равным $1-c$, так что один при 1 равен $c-a-b$. Символ Римана P тогда приобретает вид

$$F = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{array}\right\},$$

а соответствующее дифференциальное уравнение

$$z(z-1)F'' + [(a+b+1)z - c]F' + abF = 0, \qquad (5.2.42)$$

называемое *гипергеометрическим уравнением*, является стандартным уравнением для случая трех регулярных особых точек.

Аналитическое вблизи $z \doteq 0$ решение этого уравнения называется *гипергеометрической функцией*. Чтобы получить разложение ее в ряд, полагаем $F = \sum a_n z_n$ и подставляем в (5.2.42). Коэффициент при z^n порождает рекурсивную формулу для ряда

$$D_n(a_n) = (n+a)(n+b)a_n - (n+1)(n+c)a_{n+1} =$$
$$= (n+c)(n+1)\delta(a_n) + [n(a+b-1) - (n+1)c + ab]a_n = 0. \qquad (5.2.43)$$

Это — *двучленная рекурсивная формула*, то есть разностное уравнение первого порядка, с простым решением

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\cdot c(c+1)\ldots(c+n-1)}.$$

Соответствующий ряд

$$F(a, b \mid c \mid z) = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{2!c(c+1)} z^2 + \ldots \tag{5.2.44}$$

называется *гипергеометрическим рядом* (см. стр. 367). Он является аналитическим вблизи $z=0$ решением уравнения (5.2.42). Он сходится при $|z|<1$, так как ближайшей особой точкой служит $z=1$. Через этот ряд можно выразить все решения уравнения (5.2.42) вблизи любой их особенности.

Например, если в уравнение (5.2.42) подставить функцию $z^{1-c}F_2$ (где F_2 должна быть аналитической, так как второй индекс при $z=0$ равен $1-c$), получим уравнение

$$z(z-1)F_2'' + [(a+b-2c+3)z - 2 + c]F_2' + (a-c+1)(b-c+1)F_2 = 0,$$

которое является другим гипергеометрическим уравнением с аналитическим решением в виде гипергеометрического ряда $F_2 = F(b-c+1, a-c+1 \mid 2-c \mid z)$. Поэтому общее решение уравнения (5.2.42) имеет вид

$$AF(a, b \mid c \mid z) + Bz^{1-c}F(b-c+1, a-c+1 \mid 2-c \mid z). \tag{5.2.45}$$

Возвращаясь к предыдущим уравнениям, получаем общее решение уравнения (5.2.38) вблизи $z=0$

$$Az^{\lambda}(z-1)^{\mu}F(\lambda+\mu+\nu, 1-\nu-\lambda'-\mu' \mid \lambda-\lambda'+1 \mid z) +$$
$$+ Bz^{\lambda'}(z-1)^{\mu}F(\lambda'+\mu+\nu, 1-\nu-\lambda-\mu' \mid \lambda'-\lambda+1 \mid z),$$

а общее решение уравнения Папперица (5.2.36) вблизи $w=a$ равно

$$A\left(\frac{w-a}{w-c}\right)^{\lambda}\left(\frac{w-b}{w-c}\right)^{\mu}F\left(\lambda+\mu+\nu, 1-\nu-\lambda'-\mu' \mid \lambda-\lambda'+1 \mid \frac{w-a}{w-c}\,\frac{b-c}{b-a}\right) +$$
$$+ B\left(\frac{w-a}{w-c}\right)^{\lambda'}\left(\frac{w-b}{w-c}\right)^{\mu}F\left(\lambda'+\mu+\nu, 1-\nu-\lambda-\mu' \mid \lambda'-\lambda+1 \mid \frac{w-a}{w-c}\,\frac{b-c}{b-a}\right). \tag{5.2.46}$$

Решения уравнения Папперица вблизи $w=b$ или $w=c$ можно получить заменой λ, λ' на μ, μ' и т. д., так как уравнение симметрично относительно перестановки особых точек и соответствующих индексов (если иметь в виду, что $\nu' = 1-\lambda-\lambda'-\mu-\mu'-\nu$).

Формула (5.2.45) дает общее решение, за исключением случая, когда c целое, так как в этом случае ряд для одного из решений будет иметь во всех членах, начиная с некоторого, нулевой множитель в знаменателе (а при $c=1$ эти ряды совпадают). Например, для $c=3$ ряд для второго решения будет иметь два первых члена конечными, а все высшие члены бесконечными из-за сомножителя $2-c+1$ в знаменателе. Это — пример того специального случая, указанного на стр. 500, когда индексы в данной особой точке различаются на целое число. Как указано на стр. 503, в этом случае надо находить второе решение при помощи формулы (5.2.6).

Здесь $y_1 = F(a, b \mid c \mid z)$ и $p = (c/z) + [(a+b+1-c)/(z-1)]$, так что $e^{-\int p\,dz} = z^{-c}(1-z)^{c-a-b-1}$. Вторым решением будет

$$y_2 = F(a, b \mid c \mid z) \int [F(a, b \mid c \mid z)]^{-2} z^{-c} (1-z)^{c-a-b-1}\, dz.$$

Если $|z|<1$, можно разложить $(1-z)^{c-a-b-1}[F(a, b \mid c \mid z)]^{-2}$ в ряд по степеням z, который можно записать в виде $g_0 + g_1 z + \ldots$. Ряд для под-

интегральной функции тогда имеет вид

$$\frac{g_0}{z^c}+\frac{g_1}{z^{c-1}}+\ldots+\frac{g_{c-1}}{z}+g_c+g_{c+1}z+\ldots,$$

причем мы предположили c целым положительным, так что g_c множится на нулевую степень z, g_{c-1} делится на первую степень z и т. д., а дробные степени не участвуют. В этом случае g_{c-1}/z даст при интегрировании логарифмический член и вторым решением будет

$$y_2=F(a,\,b\,|\,c\,|\,z)\,[g_{c-1}\ln z+(1/z^{c-1})\,(h_0+h_1z+\ldots+h_{c-2}z^{c-2}+h_cz^c+\ldots)],$$

где коэффициенты h_n являются функциями a, b, c и n.

Функции, представимые гипергеометрическими рядами. При помощи рядов (5.2.44) можно выразить большое число функций. Например, простейшими случаями являются

$$(1+z)^n=F(-n,\,b\,|\,b\,|-z);\quad \ln(1+z)=zF(1,\,1\,|\,2\,|-z).$$

Разделенное уравнение для ξ_2 в круговых цилиндрических координатах и для ξ_3 в сферических, параболических, вытянутых и сплющенных сфероидальных координатах имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{d}{d\xi}\left[\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{dX}{d\xi}\right]+\frac{k_3^2}{1-\xi^2}X=0$$

или

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}+\left[\frac{1/2}{\xi+1}+\frac{1/2}{\xi-1}\right]\frac{dX}{d\xi}-\frac{k_3^2}{\xi^2-1}X=0.$$

Оно имеет общий вид уравнения (5.2.36), причем $a=+1$, $b=-1$, $c=\infty$, $\lambda+\lambda'-1=-1/2=\mu+\mu'-1$, $\lambda\lambda'=\mu\mu'=0$, $\nu\nu'=-k_3^2$ (и, конечно, обычное условие (5.2.35): $\lambda+\lambda'+\mu+\mu'+\nu+\nu'=1$). Поэтому символ Римана для его решения будет

$$X=P\left\{\begin{matrix}1 & -1 & \infty & \\ 1/2 & 1/2 & k_3 & \xi\\ 0 & 0 & -k_3 & \end{matrix}\right\},$$

а общее решение вблизи $\xi=+1$ (из формулы (5.2.46))

$$X=A\sqrt{1-\xi^2}\,F\left(1+k_3,\,1-k_3\,\middle|\,\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{1-\xi}{2}\right)+$$
$$+B\sqrt{1+\xi}\,F\left(\frac{1}{2}+k_3,\,\frac{1}{2}-k_3\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1-\xi}{2}\right).$$

Эти решения называются *функциями Чебышева*. Оказывается [см. формулы (5.2.54)], что они пропорциональны соответственно $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$, дде $\xi=\cos\varphi$, что можно показать и преобразованием приведенного выше гифференциального уравнения. Эти функции будут исследованы в § 5.3.

Разделенное уравнение для ξ_3 в сферических координатах, а также в сфероидальных координатах в случае $k_1=0$ имеет вид

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}+\left[\frac{1}{\xi-1}+\frac{1}{\xi+1}\right]\frac{dX}{d\xi}+\left[\frac{-k_2^2}{\xi^2-1}+\frac{k_3^2/2}{(\xi^2-1)(\xi+1)}-\frac{k_3^2/2}{(\xi^2-1)(\xi-1)}\right]X=0$$

и называется *уравнением Лежандра*. Ему отвечает уравнение (5.2.36) с $a=+1$, $b=-1$, $c=\infty$, $\lambda=-\lambda'=m/2=\mu=-\mu'$, $\nu=-n$, $\nu'=n+1$, где мы положили $k_3=m$ и $k_2^2=n(n+1)$, чтобы результаты было легче

выписать. Поэтому решение соответствует символу Римана

$$X = P\left\{\begin{array}{cccc} 1 & -1 & \infty & \\ m/2 & m/2 & -n & \xi \\ -m/2 & -m/2 & n+1 & \end{array}\right\}$$

и общее решение вблизи $\xi = 1$ равно [см. также формулу (5.2.52)]

$$X = A(1-\xi^2)^{m/2} F\left(m-n,\ m+n+1 \,|\, 1+m \,|\, \frac{1-\xi}{2}\right) + \\ + B\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{m/2} F\left(-n,\ n+1 \,|\, 1-m \,|\, \frac{1-\xi}{2}\right). \quad (5.2.47)$$

Первое решение называется *функцией Лежандра первого рода*, а второе — *функцией Лежандра второго рода*. Если m целое положительное, то так записанное второе решение теряет смысл и тогда второе решение надо строить при помощи формулы (5.2.6) (см. стр. 503). Эти функции Лежандра и связанные с ними функции Гегенбауера будут вновь рассмотрены через несколько страниц и очень детально в § 5.3 и 10.3, так как они имеют очень большое значение для наших дальнейших исследований.

Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда. В качестве упражнения в действиях с этими решениями мы выведем выражение, описывающее поведение гипергеометрического ряда, когда z стремится к единице. Обращаясь к символу Римана, указанному перед уравнением (5.2.42), мы видим, что индексы в особой точке $z = 1$ равны 0 и $c - a - b$. Применяя уравнение (5.2.46) с $a = 1$, $b = 0$, $c = \infty$, $\lambda = 0$, $\lambda' = c - a - b$, $\mu = 0$, $\mu' = 1 - c$, $\nu = a$, $\nu' = b$ (другими словами, меняя ролями особые точки 0 и 1), видим, что общим решением гипергеометрического уравнения (5.2.42) вблизи $z = 1$ является

$$AF(a,\ b \,|\, a+b-c+1 \,|\, 1-z) + B(1-z)^{c-a-b} F(c-b,\ c-a \,|\, c-a-b+1 \,|\, 1-z).$$

Однако гипергеометрический ряд $F(a,\ b \,|\, c \,|\, z)$ является решением уравнения (5.2.42), и потому после аналитического продолжения он должен равняться некоторой комбинации двух решений вблизи $z = 1$. Другими словами, должно быть

$$F(a,\ b \,|\, c \,|\, z) = \alpha F(a,\ b \,|\, a+b-c+1 \,|\, 1-z) + \\ + \beta(1-z)^{c-a-b} F(c-b,\ c-a \,|\, c-a-b+1 \,|\, 1-z). \quad (5.2.48)$$

Если бы мы смогли как-то определить значения коэффициентов α и β, то мы имели бы средство подсчета точного поведения $F(a,\ b \,|\, c \,|\, z)$ при $z = 1$ и даже за этим значением, почти вплоть до $z = 2$.

На стр. 367 мы показали, что при $b < c < a + b$

$$F(a,\ b \,|\, c \,|\, z)/(1-z)^{c-a-b} \xrightarrow[z \to 1]{} \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},$$

где мы подставили гамма-функцию вместо факториалов, чтобы a, b и c могли иметь нецелые значения. Это соотношение показывает только, что если $c < a + b$, то главный член вблизи $z = 1$ имеет вид $(1-z)^{c-a-b}$, что позволяет определить коэффициент при нем. Конечно, имеются другие члены вида $(1-z)^{c-a-b+1}$, $(1-z)^{c-a-b+2}$ и т. д., часть которых может также стремиться к бесконечности при $z \to 1$, но в достаточной близости от $z = 1$ они «поглощаются» членом $(1-z)^{c-a-b}$. Остальные члены можно получить при помощи формулы (5.2.48).

Так как $F(c-b, c-a \mid c-a-b+1 \mid 1-z) \xrightarrow[z\to 1]{} 1$, то при $z \to 1$ главный член правой части равенства (5.2.48) равен $\beta(1-z)^{c-a-b}$, если только $c < a+b$. Сравнивая это с предыдущим результатом, мы видим, что

$$\beta = \Gamma(c)\Gamma(a+b-c)/[\Gamma(a)\Gamma(b)],$$

откуда определяются коэффициенты во всех членах с отрицательными степенями $1-z$.

Однако в случае $c > 1$ можно пойти дальше. Можно применить приведенную выше предельную формулу в обратном порядке, чтобы посмотреть, что будет с равенством (5.2.48) при $z \to 0$. Левая часть, конечно, при этом стремится к единице. Применяя же предельную формулу, приведенную на стр. 367 к правой части, получаем

$$1/z^{1-c} \xrightarrow[z\to 0]{} \alpha \frac{\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} + \beta \frac{\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Отсюда если $c > 1$, то оба члена в правой части должны взаимно уничтожиться. Это дает соотношение между α и β, на основании которого можно решить задачу. Подставляя уже полученное значение β и применяя свойство гамма-функции $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$, получаем

$$1/z^{1-c} \xrightarrow[z\to 0]{} (a+b-c)\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left[\alpha - \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\right].$$

Чтобы это имело место при $c > 1$, выражение, стоящее в квадратных скобках, должно обратиться в нуль, откуда и получаем α. Следовательно, по крайней мере при $1 < c < a+b$ получаем полезную формулу

$$F(a, b \mid c \mid z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b \mid a+b-c+1 \mid 1-z) +$$
$$+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b \mid c-a-b+1 \mid 1-z), \quad (5.2.49)$$

которая позволяет продолжить решение через особую точку $z = 1$. В следующем параграфе мы покажем, что это соотношение справедливо для значительно более обширной области значений c, чем мы сейчас полагали (например, для c, больших чем $a+b$). В действительности эта формула имеет место всегда, за исключением тех случаев, когда гамма-функция в числителях обращается в бесконечность.

Другие полезные формулы для гипергеометрических рядов можно получить при помощи «уравнения связи» и некоторого преобразования гипергеометрического уравнения (5.2.42). В этом уравнении мы полагаем $a = 2\alpha$, $b = 2\beta$, $c = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$ и переходим от z к новой независимой переменной $u = 4z(1-z)$; это дает уравнение

$$u(u-1)\frac{d^2F}{du^2} + \left[(\alpha+\beta+1)u - \left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\right]\frac{dF}{du} + \alpha\beta F = 0,$$

которое вновь является гипергеометрическим уравнением с новыми параметрами α, β и $\alpha+\beta+\frac{1}{2}$, вместо a, b и c. Значит, функция

$$F\left(\alpha, \beta \,\middle|\, \alpha+\beta+\frac{1}{2} \,\middle|\, 4z-4z^2\right)$$

является решением уравнения (5.2.42) при $a = 2\alpha$, $b = 2\beta$, $c = \alpha+\beta+\frac{1}{2}$ и должна выражаться через два решения вблизи $z = 0$ [см. (5.2.45)]

$$AF\left(2\alpha,\ 2\beta\left|\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right|z\right)+Bz^{\frac{1}{2}-\alpha-\beta}F\left(\beta-\alpha+\frac{1}{2},\ \alpha-\beta+\frac{1}{2}\left|\frac{3}{2}-\alpha-\beta\right|z\right).$$

Однако $F\left(\alpha,\ \beta\left|\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right|4z-4z^2\right)$ является аналитической функцией z вблизи $z=0$; отсюда второе решение, имеющее точку ветвления, не может присутствовать и B равно нулю. Кроме того, так как $F=1$ при $z=0$, то A должно равняться единице. Отсюда имеем

$$F\left(2\alpha,\ 2\beta\left|\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right|z\right)=F\left(\alpha,\ \beta\left|\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right|4z-4z^2\right). \qquad (5.2.50)$$

Эту формулу, связывающую значение F для 2α, 2β и z с значением F для α, β и z^2, можно назвать *формулой удвоения* для гипергеометрической функции.

Функции Гегенбауера. Мы указали раньше, что иногда желательно иметь такую каноническую форму для трех регулярных особых точек, в которой две из них равнялись бы $+1$ и -1, а не 0 и 1. Так будет, в частности, если индексы при $+1$ те же, что и при -1. Это порождает символ Римана

$$\psi=P\left\{\begin{array}{cccc} -1 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -\alpha & z \\ -\beta & -\beta & \alpha+2\beta+1 & \end{array}\right\}.$$

Соответствующее уравнение

$$(z^2-1)\psi''+2(\beta+1)z\psi'-\alpha(\alpha+2\beta+1)\psi=0 \qquad (5.2.51)$$

называется *уравнением Гегенбауера* (ср. с уравнением Лежандра на стр. 513). Оно является хорошей формой уравнения для ξ_2 в круговых цилиндрических и сферических координатах. Решения, конечно, можно выразить через гипергеометрические функции

$$AF\left(-\alpha,\ \alpha+2\beta+1\,|\,1+\beta\,|\,\frac{1+z}{2}\right)+$$
$$+B(1+z)^{-\beta}F\left(-\alpha-\beta,\ \alpha+\beta+1\,|\,1-\beta\,|\,\frac{1+z}{2}\right)$$

или

$$aF\left(-\alpha,\ \alpha+2\beta+1\,|\,1+\beta\,|\,\frac{1-z}{2}\right)+$$
$$+b(1-z)^{-\beta}F\left(-\alpha-\beta,\ \alpha+\beta+1\,|\,1-\beta\,|\,\frac{1-z}{2}\right).$$

Решение, которое будет для нас очень полезным, можно дать в различных формах:

$$T_\alpha^\beta(z)=\frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1)}{2^\beta\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}F\left(\alpha+2\beta+1,\ -\alpha\,|\,1+\beta\,|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right), \qquad (5.2.52)$$

$$T_\alpha^\beta(z)=\frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1)}{2^\beta\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}\frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\sin(\pi\beta)}F\left(\alpha+2\beta+1,\ -\alpha\,|\,1+\beta\,|\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right)-$$
$$-\frac{(1+z)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\sin(\pi\alpha)}{\sin(\pi\beta)}F\left(-\alpha-\beta,\ \alpha+\beta+1\,|\,1-\beta\,|\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right),$$

причем мы применили равенства (5.2.49) и $\sin(\pi u)\,\Gamma(u)\,\Gamma(1-u)=\pi$, чтобы получить вторую форму. Функция $T_\alpha^\beta(z)$ называется функцией Геген-

бауера. Если α не целое, T имеет точку ветвления в $z=-1$ (если только β не целое). Если α равно нулю или целое положительное, T является конечным полиномом относительно z и, конечно, аналитично при $z=\pm 1$.

Иногда применяется второе решение вблизи $z=1$, причем это решение, умноженное на $(1-z^2)^{\beta/2}$

$$P^{\beta}_{\alpha+\beta}(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{1}{2}\beta} F\left(-\alpha-\beta,\ \alpha+\beta+1\,|\,1-\beta\,|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right)=$$

$$=\frac{(\alpha+2\beta+1)\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}\beta}}{2^{\beta}\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\sin(\pi\alpha)}F\left(\alpha+2\beta+1,\ -\alpha\,|\,1+\beta\,|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(\pi\beta)}{\sin(\pi\alpha)}F\left(\alpha+2\beta+1,\ -\alpha\,|\,1+\beta\,|\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right)\right\},$$

часто называют *обобщенной функцией Лежандра* от z.

Если α равно целому $n=0, 1, 2, \ldots$, то при помощи разложения многочлена и почленного сравнения можно показать, что

$$F\left(n+2\beta+1,\ -n\,|\,1+\beta\,|\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right)=$$

$$=(-1)^n F\left(n+2\beta+1,\ -n\,|\,1+\beta\,|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right)=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+1)}{2^n\Gamma(n+\beta+1)\,(1-z^2)^{\beta}}\frac{d^n}{dz^n}(1-z^2)^{n+\beta}$$

и, следовательно,

$$T^{\beta}_n(z)=\frac{(-1)^n\Gamma(n+2\beta+1)}{2^{n+\beta}n!\,\Gamma(n+\beta+1)}(1-z^2)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}(1-z^2)^{n+\beta} \tag{5.2.53}$$

Этот многочлен можно назвать *многочленом Гегенбауера* (он отличается численным множителем от многочлена $C_n^{\beta+\frac{1}{2}}$, часто также называемого многочленом Гегенбауера).

Если β равно целому $m=0, 1, 2, \ldots$, а α не таково, то, как будет показано в следующем параграфе, T^m_α имеет логарифмические точки ветвления при $z=\pm 1$, в то время как $(1-z^2)^{-m/2}P^m_n(z)$ аналитична во всей области $-1\leqslant z\leqslant 1$. Наконец, если *оба* α и β целые положительные (или равны нулю), то $T^m_n(z)=(1-z^2)^{-m/2}P^m_n(z)$ и обе функции аналитичны в этой области изменения z. Так как

$$\frac{1}{(1-z^2)^m}\frac{d^n}{dz^n}(1-z^2)^{n+m}=(-1)^n\frac{n!}{(n+2m)!}\frac{d^{n+2m}}{dz^{n+2m}}(z^2-1)^{n+m},$$

то

$$T^m_n(z)=\frac{1}{2^{n+m}(n+m)!}\frac{d^{n+2m}}{dz^{n+2m}}(z^2-1)^{n+m};$$

эти полиномы иногда называются *тессеральными* (*клеточными*) *полиномами*. Особенно важен случай $m=0$; он настолько важен, что многочленам присваивается специальное обозначение и наименование. Функция

$$P_n(z)=T^0_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$$

называется *многочленом Лежандра* [см. формулу (5.2.47)]. В нашей книге эти многочлены будут в дальнейшем часто встречаться. Мы видим, что

$$T_n^m(z) = \frac{d^m}{dz^m} P_{n+m}(z).$$

В следующем параграфе нам придется много говорить об этих функциях.

В специальном случае $\beta = \pm \frac{1}{2}$, $\alpha = n = 1, 2, 3, \ldots$ можно показать (при помощи прямого разложения), что многочлены T имеют следующий вид:

$$T_n^{-1/2}(z) = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{ch}\,(n\,\mathrm{Ar\,ch}\,z),$$

$$T_n^{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2/\pi}{z^2-1}}\,\mathrm{sh}\,[(n+1)\,\mathrm{Ar\ ch}\,z]; \tag{5.2.54}$$

такие многочлены называются *многочленами Чебышева*.

Отметим, между прочим, что общее решение уравнения для ξ_2 при разделении в круговых цилиндрических координатах и для ξ_3 в параболических и вытянутых и сплющенных сфероидальных координатах

$$(z^2-1)\psi'' + z\psi' - \alpha^2\psi = 0$$

имеет вид

$$\psi = AT_\alpha^{-1/2}(z) + B\sqrt{1-z^2}\,T_{\alpha-1}^{1/2}(z),$$

как это показывает сравнение с уравнением для T.

Одна регулярная и одна иррегулярная особые точки. Для таких уравнений обычно располагают регулярную особую точку при $z=0$, а иррегулярную при $z=\infty$. Уравнения этого вида появляются при разделении переменных в следующих системах координат:

1. Для волнового уравнения в круговых цилиндрических ($z = k_1\xi_1$, $\kappa = X_1$), сферических ($z = k_1\xi_1$, $\psi = \sqrt{z}X_1$) и конических ($z = k_1\xi_1$, $\psi = \sqrt{z}X_1$) координатах получается уравнение Бесселя

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\psi}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)\psi = 0.$$

2. Для волнового уравнения в параболических цилиндрических координатах ($z = \xi_1^2/2$, $\xi_2^2/2$; $\psi = X_1, X_2$)

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\psi}{dz} + \left(k^2 + \frac{2\alpha}{z}\right)\psi = 0.$$

3. Для волнового уравнения в параболических координатах ($z = \xi_1^2$, ξ_2^2; $\psi = X_1, X_2$)

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\psi}{dz} + \left(k^2 + \frac{2\alpha}{z} - \frac{m^2}{z^2}\right)\psi = 0;$$

это уравнение включает параболические цилиндрические функции как частный случай.

4. Для уравнения Шредингера в случае одной частицы в кулоновском поле $1/r$ в сферических координатах для радиального множителя ($z = \xi_1$, $\psi = X_1$)

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d\psi}{dz} + \left[-E + \frac{2\alpha}{z} - \frac{n(n+1)}{z^2}\right]\psi = 0.$$

Это приводит к исследованию общего уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}+p(z)\frac{d\psi}{dz}+q(z)\psi=0,\quad p=\frac{1-\lambda-\lambda'}{z},\qquad (5.2.55)$$
$$q=-k^2+\frac{2\alpha}{z}+\frac{\lambda\lambda'}{z^2}.$$

Это не самое общее уравнение с регулярной особой точкой при $z=0$ и иррегулярной на бесконечности. К выражениям, указанным в (5.2.55), можно было бы прибавить постоянную (к функции p), члены az и bz (к обеим p и q) и т. д. Однако эти дополнительные члены сделали бы существенную особенность решения при $z=\infty$ еще более «особой», и так как ни одно из уравнений, полученных при разделении волнового уравнения, не имеет этих дополнительных членов, то мы и не включаем их здесь. Все же некоторые более сложные случаи будут включены в упражнения!

Возвращаясь к уравнению (5.2.55), мы видим, что в силу определяющего уравнения разложения около регулярной особой точки $z=0$ имеют вид $z^{\lambda}u_1(z)$ и $z^{\lambda'}u_2(z)$, где u_1 и u_2 аналитичны при $z=0$. Как и раньше, мы переходим к случаю, когда одно решение аналитично, положив $\psi=z^{\lambda}f(z)$, так что $f(z)=Au_1(z)+Bz^{\lambda'-\lambda}u_2(z)$. Уравнение для f имеет тогда вид

$$f''+[(1+\lambda-\lambda')/z]f'+[(2\alpha/z)-k^2]f=0. \qquad .56$$

Для исследования особой точки на бесконечности мы полагаем $s=1/w$. Уравнение относительно аргумента w приобретает вид

$$\frac{d^2f}{dw^2}+\left[\frac{1+\lambda'-\lambda}{w}\right]\frac{df}{dw}+\left[\frac{2\alpha}{w^3}-\frac{k^2}{w^4}\right]f=0,$$

который в соответствии с членами $2\alpha/w^3$ и k^2/w^4 указывает на иррегулярность особой точки $w=0$. Однако, полагая $f=e^{-k/w}F$, мы можем перейти к уравнению

$$F''+\left[\frac{2k}{w^2}+\frac{1-\lambda+\lambda'}{w}\right]F'-\left[\frac{k(1+\lambda-\lambda')-2\alpha}{w^3}\right]F=0,$$

которое имеет определяющее уравнение с одним корнем

$$2ks-[k(1+\lambda-\lambda')-2\alpha]=0.$$

Следовательно, имеется решение $F=w^{\beta}v_1(w)$, где v_1 — аналитическая при $w=0$ функция, а $\beta=[(1+\lambda-\lambda')/2]-(\alpha/k)$. Другим решением для f будет $e^{k/w}w^{\beta'}v_2(w)$, где $\beta'=[(1+\lambda-\lambda')/2]+(\alpha/k)$, а v_2 аналитична при $w=0$. Таким образом, существенная особенность при $w=0$ $(z\to\infty)$ имеет вид $e^{\pm k/w}=e^{\pm kz}$.

Мы можем теперь возвратиться к уравнению (5.2.56) с аргументом z и, положив $f=e^{-kz}F(z)$ (или $\psi=z^{\lambda}e^{-kz}F$), можем быть уверенными, что одно из решений для F аналитично при $z=0$ и имеет точку ветвления только при $z\to\infty$. Уравнение для F с аргументом z имеет вид

$$F''+\left[\frac{1+\lambda-\lambda'}{z}-2k\right]F'-\left[\frac{k(1+\lambda-\lambda')-2\alpha}{z}\right]F=0$$

и приводится к простейшей форме, если положить $z=x/2k$, $c=1+\lambda-\lambda$, $a=[(1+\lambda-\lambda')/2]-(\alpha/k)$,

$$x\frac{d^2F}{dx^2}+(c-x)\frac{dF}{dx}-aF=0; \qquad (5.2.57)$$

последнее уравнение называется *вырожденным* или *конфлюентным* (полученным в результате слияния) *гипергеометрическим уравнением*. Это наи-

менование связано с тем, что уравнение (5.2.57) получается из гипергеометрического уравнения (5.2.42) при помощи соответствующего слияния особых точек $z=1$ и $z=\infty$.

Легче увидеть слияние, если отправляться от уравнения Папперица (5.2.36) в случае $a=0$, $c=\infty$

$$\psi''+\left[\frac{1-\lambda-\lambda'}{z}+\frac{1-\mu-\mu'}{z-b}\right]\psi'+$$
$$+\left[\frac{-\lambda\lambda' b}{z^2(z-b)}+\frac{\mu\mu' b}{z(z-b)^2}+\frac{\nu(1-\lambda-\lambda'-\mu-\mu'-\nu)}{z(z-b)}\right]\psi=0.$$

Положим теперь $\lambda=0$, $1-\lambda'=c$ (здесь c — новая постоянная, а не аффикс третьей особой точки, расположенной на бесконечности), $\mu'=-b$ и $\mu=a-\nu$ (здесь a тоже новая постоянная, а не аффикс первой особой точки). Мы придем теперь к вырожденному гипергеометрическому уравнению (5.2.57), если заставим вторую особую точку стремиться к совпадению с третьей на бесконечности, то есть если положим $b\to\infty$. При этом в процессе совпадения особых точек один из индексов в каждой из них (то есть μ' и ν') также стремится к бесконечности.

Одно из решений уравнения (5.2.57), аналитичное при $x=0$, можно найти подстановкой ряда общего вида $F=\sum a_n x^n$ в уравнение. Коэффициент при x^n порождает рекурсивную формулу

$$(n+1)(n+c)\,a_{n+1}-(n+a)\,a_n=0, \tag{5.2.58}$$

которая вновь является двучленной и имеет простое решение. Следовательно, аналитическое при $z=0$ решение дается рядом

$$F(a\,|\,c\,|\,x)=1+\frac{a}{c}x+\frac{a(a+1)}{2!c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3+\ldots, \tag{5.2.59}$$

который называется *вырожденным гипергеометрическим рядом*. Этот ряд сходится при $-\infty<x<\infty$. Применяя методы, приведенные на стр. 367, можно получить сведения об асимптотическом поведении этого ряда. Для больших значений z превалируют члены с высшими степенями z. Но в качестве первого приближения относительно z/n, если a и c целые, член ряда с z^n (n большое) приобретает вид

$$\frac{(c-1)!\,(a+n)!}{n!\,(a-1)!\,(c+n)!}z^n\simeq\frac{(c-1)!}{(a-1)!}\frac{n^{a-c}}{n!}z^n\simeq\frac{(c-1)!}{(a-1)!}\frac{z^n}{(n-a+c)!}.$$

Следовательно, для достаточно больших z ряд аппроксимируется рядом

$$\frac{(c-1)!}{(a-1)!}\sum_n\frac{z^n}{(n-a+c)!}\simeq\frac{(c-1)!}{(a-1)!}z^{a-c}\sum_m\frac{z^m}{m!}=\frac{(c-1)!}{(a-1)!}z^{a-c}e^z.$$

Подставляя гамма-функцию вместо факториалов, получаем в результате, что

$$F(a\,|\,c\,|\,z)/z^{a-c}e^z\xrightarrow[z\to\infty]{}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}. \tag{5.2.60}$$

В следующем параграфе мы покажем, что эта асимптотическая формула справедлива для более широкой области значений a, c и z, чем это допускалось при нашем выводе.

Вспоминая связь между функциями F и ψ, мы видим, что общее решение уравнения (5.2.55) вблизи $z=0$ имеет вид

$$\psi=Ae^{-kz}z^{\lambda}F\left(\frac{1+\lambda-\lambda'}{2}-\frac{\alpha}{k}\,|\,1+\lambda-\lambda'\,|\,2kz\right)+$$
$$+Be^{-kz}z^{\lambda'}F\left(\frac{1-\lambda+\lambda'}{2}-\frac{\alpha}{k}\,|\,1-\lambda+\lambda'\,|\,2kz\right), \tag{5.2.61}$$

если только $\lambda - \lambda'$ не целое; в последнем случае второе решение содержит логарифмический член и должно быть получено при помощи формулы (5.2.6).

Из этого общего решения можно также видеть, что вторым решением вырожденного гипергеометрического уравнения является

$$x^{1-c}F(a-c+1\,|\,2-c\,|\,x).$$

Однако можно видеть также и то, что если в уравнении (5.2.57) положить $x=-\xi$, $F=e^{-\xi}F_2$, то уравнение для F_2 снова определяет вырожденную гипергеометрическую функцию. Другими словами, еще одним решением уравнения (5.2.57) будет $e^x F(c-a\,|\,c\,|-x)$. Однако это не третье независимое решение, так как разложение в ряды и умножение рядов показывают, что

$$e^x F(c-a\,|\,c\,|-x) = F(a\,|\,c\,|\,x). \tag{5.2.62}$$

Между прочим, сравнение с формулой (5.2.60) показывает, что асимптотическая формула, которая может быть удовлетворительной для z больших положительных, может в то же время быть совершенно неудовлетворительной для z больших отрицательных. Действительно, поскольку соотношение (5.2.62) справедливо, а (5.2.60) имеет место при $\operatorname{Re} z \to \infty$, то

$$F(a\,|\,c\,|\,z)/(-z)^{-a} \xrightarrow[z\to-\infty]{} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}. \tag{5.2.63}$$

Однако мы отложим дальнейшее обсуждение этого вопроса до следующего параграфа, когда мы будем подготовлены к этому значительно лучше.

Сравнение уравнений на стр. 518 с равенством (5.2.61) показывает, что общим решением уравнения Бесселя является

$$\psi = e^{-iz}\left[Az^n F\left(\frac{1}{2}+n\,|\,1+2n\,|\,2iz\right) + Bz^{-n}F\left(\frac{1}{2}-n\,|\,1-2n\,|\,2iz\right)\right]$$

или, применяя соотношение (5.2.62),

$$\psi = Ae^{-iz}z^n F\left(\frac{1}{2}+n\,|\,1+2n\,|\,2iz\right) + Be^{iz}z^{-n}F\left(\frac{1}{2}-n\,|\,1-2n\,|\,-2iz\right).$$

Общее решение уравнения, получающегося при разделении переменных в волновом уравнении в параболических координатах, включающее решение уравнения, получающегося при разделении в параболических цилиндрических координатах, имеет вид

$$\psi = Ae^{-ikz}z^m F\left(\frac{1}{2}+m+\frac{i\alpha}{k}\,|\,1+2m\,|\,2ikz\right) + \\ + Be^{ikz}z^{-m}F\left(\frac{1}{2}-m-\frac{i\alpha}{k}\,|\,1-2m\,|\,-2ikz\right),$$

а общее решение уравнения Шредингера для частицы в кулоновом потенциальном поле при $E=-k^2$ таково:

$$\psi = Ae^{-ikz}z^n F\left(n+1+\frac{i\alpha}{k}\,|\,2n+2\,|\,2ikz\right) + \\ + Be^{ikz}z^{-n-1}F\left(-n-\frac{i\alpha}{k}\,|\,-2n\,|\,-2ikz\right).$$

Много других функций (таких, как функция ошибок и неполная гамма-функция) можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию.

Асимптотические ряды. Хотя мы отложили полное рассмотрение поведения вырожденной гипергеометрической функции вблизи $z=\infty$, мы ис-

следуем разложение решений в надлежащим образом выбранные ряды вблизи особой точки $z=\infty$. Совершая в уравнении (5.2.57) преобразование $w=1/x$, мы видим, что вблизи бесконечности вырожденное гипергеометрическое уравнение имеет вид

$$\frac{d^2F}{dw^2}+\left[\frac{2-c}{w}+\frac{1}{w^2}\right]\frac{dF}{dw}-\frac{a}{w^3}F=0. \tag{5.2.64}$$

Хотя бесконечность — иррегулярная особая точка, все же имеется одно решение $s=a$ определяющего уравнения. Подставляя $F=\sum a_n w^{a+n}$ в уравнение (5.2.64), мы вновь найдем двучленную рекурсивную формулу для a_n

$$(n+1)\,a_{n+1}+(n+a)\,(n+a-c+1)\,a_n=0.$$

Отсюда разложение F в ряд вблизи $w=0$ $(z=\infty)$ имеет вид

$$F_1=Az^{-a}\left[1-\frac{a\,(a-c+1)}{1!}\,\frac{1}{z}+\frac{a\,(a+1)\,(a-c+1)\,(a-c+2)}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}-\ldots\right], \tag{5.2.65}$$

где мы опять вместо w подставили $1/z$. [Этот ряд следует сравнить с формулой (5.2.63).] Сравнение с формулой (5.2.60) приводит к мысли, что второе решение должно иметь вид $w^{c-a}e^{1/w}\sum b_n w^n$. При подстановке для b_n получается двучленная рекурсивная формула, подобная приведенной выше. Отсюда вторым решением, построенным в виде ряда, вблизи $z=\infty$ является

$$F_2=Bz^{a-c}e^{z}\left[1+\frac{(1-a)\,(c-a)}{1!}\,\frac{1}{z}+\frac{(1-a)\,(2-a)\,(c-a)\,(c-a+1)}{2!}\,\frac{1}{z^2}+\ldots\right].$$

Главное несчастье с этими двумя рядами для решений состоит в том, что *они нигде не сходятся*, кроме точки $z=\infty$. Однако эта расходимость особого типа, так как если z большое, но конечное, то ряд *сначала сходится*, а затем, если брать все больше и больше членов, *в конце концов расходится*. Точнее говоря, оказывается, что разность $\Delta_n(z)$ между F_1 и суммой первых n членов ряда (5.2.65) при возрастании n сначала уменьшается, а затем беспредельно возрастает. Для малых значений z наименьшее значение Δ_n получается при относительно малом значении n, и это наименьшее значение относительно велико. Если z возрастает, то минимум Δ_n достигается при все больших и больших значениях n и значение этого минимума становится все меньше и меньше. Поэтому для любого конечного значения z возможно получить довольно точное значение F, взяв конечное число членов, в то время как повышение числа членов даст менее точный результат. Пока z конечное, имеется некоторая непреодолимая ошибка в результате подсчета, даже если взято оптимальное число членов, однако эта ошибка быстро уменьшается с возрастанием z. Во многих интересных случаях эта непреодолимая ошибка во всяком случае меньше 0,1, когда z больше 10. Во многих таких случаях один первый член разложения дает удовлетворительное приближение при $z>20$.

Такие ряды, которые расходятся, но могут быть применены для подсчета значений, не точно равных «истинным» значениям, но быстро приближающихся к «истинным» значениям при возрастании z, называются *асимптотическими рядами*. Они были детально исследованы в § 4.6. В некоторых отношениях они оказываются полезней сходящихся рядов, если с ними обращаться с тактом и пониманием. Кое-что необходимое для понимания будет приведено в следующем параграфе; такт же должен проявить тот, кто их применяет.

Две регулярные, одна иррегулярная особые точки. Уравнение для ξ_1 и ξ_2 в эллиптических цилиндрических координатах имеет вид ($\psi = X_1, X_2$; $z = \xi_1/d$, ξ_2)

$$(z^2-1)\psi'' + z\psi' + (h^2z^2 - b)\psi = 0,$$

а уравнения для ξ_1 и ξ_2 в вытянутых и сплющенных сфероидальных координатах — вид ($X = (z^2-1)^{a/2}\psi$)

$$(z^2-1)\psi'' + 2(a+1)z\psi' + (h^2z^2 - b)\psi = 0. \tag{5.2.66}$$

Первое уравнение является частным случаем второго $\left(a = -\frac{1}{2}\right)$. Чтобы выяснить, каковы особые точки, перепишем второе уравнение так:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(\frac{a+1}{z-1} + \frac{a+1}{z+1}\right)\frac{d\psi}{dz} + \left(h^2 + \frac{h^2-b}{z^2-1}\right)\psi = 0.$$

Оно имеет регулярные особые точки $z = \pm 1$ с индексами 0 и $-a$ в обеих и иррегулярную особую точку при $z = \infty$. Это уравнение не является самым общим из тех, которые имеют две регулярные и одну иррегулярную особые точки, но оно встретилось в нашей работе. Особые точки находятся в стандартных положениях (мы могли бы поместить регулярные точки в 0 и 1, но ± 1 удобнее), и одно решение в каждой регулярной точке аналитично, как мы раньше требовали для канонического вида; таким образом, мы будем рассматривать уравнение (5.2.66) в качестве канонического вида уравнений этого типа.

Если подставить в уравнение (5.2.66) ряд по степеням z, получится трехчленная рекурсивная формула

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + [b - n(n+2a+1)]a_n - h^2a_{n-2} = 0,$$

из которой можно получить два фундаментальных решения около регулярной точки $z = 0$. Разложения в ряды около особых точек по степеням $1-z$ или $1+z$ порождают четырехчленные рекурсивные формулы, которые еще труднее для подсчета и анализа.

В таких случаях мы пытаемся произвести разложение в ряд по соответственно выбранным функциям, а не в ряд по степеням $1 \pm z$. Например, преобразовав независимое переменное в случае эллиптических цилиндрических координат ($a = -1/2$), мы можем получить

$$z = \cos\varphi, \quad \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + (b - h^2\cos^2\varphi)\psi = 0, \tag{5.2.67}$$

$$z = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad x = e^{i\varphi},$$

$$x^2\frac{d^2\psi}{dx^2} + x\frac{d\psi}{dx} + \left(\frac{h^2}{4}x^2 + \frac{h^2}{2} - b + \frac{h^2}{4}\frac{1}{x^2}\right)\psi = 0.$$

Первое из этих уравнений называется *уравнением Матье*. Второе очень интересно тем, что оно по форме алгебраическое, и переход от z к x так изменил особые точки, что теперь имеется две *иррегулярные особые точки*, одна при 0, другая при ∞.

С помощью первой формы уравнения можно получить интересное свойство решений. Так как функция $\cos^2\varphi$ периодична по φ с периодом π, то если $\psi(\varphi)$ является решением уравнения, то и $\psi(\varphi+\pi)$ также. Например, если ψ_1 и ψ_2 — два независимых решения, то будем иметь

$$\psi_1(\varphi+\pi) = \alpha_{11}\psi_1(\varphi) + \alpha_{12}\psi_2(\varphi)$$

и

$$\psi_2(\varphi+\pi) = \alpha_{21}\psi_1(\varphi) + \alpha_{22}\psi_2(\varphi).$$

где α — постоянные, определяемые параметрами b и h и частным выбором решений ψ_1 и ψ_2.

Отсюда можно показать, что возможно найти решение уравнения (5.2.67), равное произведению $e^{is\varphi}$ на функцию, периодическую по φ. Это решение (назовем его Ψ), конечно, должно быть некоторой комбинацией ψ_1 и ψ_2, $\Psi = A\psi_1(\varphi) + B\psi_2(\varphi) = e^{is\varphi}F(\varphi)$, где функция F периодична по φ с периодом π, то есть $F(\varphi+\pi) = F(\varphi)$. Применяя свойства функций ψ, имеем, что

$$\begin{aligned} e^{is(\varphi+\pi)}F(\varphi+\pi) &= A\psi_1(\varphi+\pi) + B\psi_2(\varphi+\pi) = \\ &= (A\alpha_{11} + B\alpha_{21})\psi_1(\varphi) + (A\alpha_{12} + B\alpha_{22})\psi_2(\varphi) = \\ &= e^{\pi is}e^{is\varphi}F(\varphi) = e^{\pi is}[A\psi_1(\varphi) + B\psi_2(\varphi)]. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при $\psi_1(\varphi)$ и $\psi_2(\varphi)$, мы получаем систему двух уравнений для A, B и $e^{\pi is}$

$$A(\alpha_{11} - e^{\pi is}) + B\alpha_{21} = 0, \quad A\alpha_{12} + B(\alpha_{22} - e^{\pi is}) = 0.$$

Чтобы она имела ненулевое решение, определитель из коэффициентов должен равняться нулю

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - e^{\pi is} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - e^{\pi is} \end{vmatrix} = 0.$$

Получилось квадратное уравнение относительно $e^{\pi is}$ с двумя корнями, соответствующими двум независимым решениям уравнения (5.2.66). Теорема о существовании таких решений уравнения (5.2.67) называется *теоремой Флоке*.

Для второй формы уравнения (5.2.67) теорема Флоке устанавливает, что можно выбрать два независимых решения, равных произведению $x^s (x = e^{i\varphi})$ на ряд Лорана по x^2, так как ряд Лорана по x^2 содержит все положительные и отрицательные степени x^2 и потому одновременно является рядом Фурье по 2φ. Такой ряд периодичен по φ с периодом π, как и должно быть, согласно предыдущему, и может представлять функцию вблизи обеих иррегулярных особых точек $x = 0$ и $x = \infty$. Поэтому мы берем в качестве решения

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^{s+2n} = e^{is\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2in\varphi}. \tag{5.2.68}$$

Подставляя этот ряд во второе уравнение (5.2.67), мы приходим к основной рекурсивной формуле

$$\begin{gathered} h^2 a_{n+1} + \left[2h^2 - 4b + 16\left(n + \frac{1}{2}s\right)^2\right]a_n + h^2 a_{n-1} = 0, \\ \delta^2(a_n) + \frac{4}{h^2}\left[h^2 - b + 4\left(n + \frac{1}{2}s\right)^2\right]a_n = 0. \end{gathered} \tag{5.2.69}$$

Это — трехчленная рекурсивная формула с неизвестными a_n и s. Было бы желательней совершить другое преобразование зависимой и независимой переменных, чтобы получить двучленную рекурсивную формулу. К несчастью, как будет показано позже в этом параграфе, такой приятный результат невозможен для столь сложных уравнений, и потому мы принуждены взяться за анализ трехчленных рекурсивных формул.

Если мы начнем с произвольно выбранных значений a_0, a_1, и s, то мы можем подсчитать все другие a для положительных и отрицательных n. Но в этом случае коэффициенты a не будут обязательно уменьшаться

с возрастанием n, так что ряд, вообще говоря, не будет сходиться. Только для некоторых значений s и a_1/a_0 ряд будет сходиться, и нам надо найти путь подсчета этих значений.

Непрерывные дроби. Прежде всего, конечно, мы должны убедиться в том, что ряд *может* сходиться для некоторых значений a_1/a_0 и s. Для этого мы подсчитаем значение a_n/a_{n-1} для больших положительных n и a_n/a_{n+1} для больших отрицательных n. Если эти значения с достаточной скоростью стремятся к нулю при $n \to \pm\infty$, то можно быть уверенным в сходимости ряда при $0 < x < \infty$. Однако

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{-h^2}{16\,[n+(s/2)]^2+2h^2-4b+h^2a_{n+1}/a_n}, \\ \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{-h^2}{16\,[n+(s/2)]^2+2h^2-4b+h^2a_{n-1}/a_n}. \end{aligned} \tag{5.2.70}$$

Первое из этих равенств показывает, что для больших положительных n отношение a_n/a_{n-1} стремится к нулю, как $1/n^2$, *если только отношение* a_{n+1}/a_n *ограничено*, так как тогда для достаточно больших n член $16\,[n+(s/2)]^2$ превалирует над всеми остальными членами знаменателя и $n^2a_n/a_{n-1} \to -h^2/16$. Применение метода, приведенного на стр. 367, показывает, что для больших значений x (т. е. для φ, больших по модулю и расположенных на отрицательной мнимой полуоси) функция ψ приблизительно пропорциональна $x^s\cos(hx/4)$.

Подобным образом второе равенство (5.2.70) показывает, что если a_{n-1}/a_n ограничено для больших отрицательных n, то $n^2a_n/a_{n+1} \to -h^2/16$. Отсюда для очень малых x (для φ больших по модулю и расположенных на положительной мнимой полуоси) ψ приблизительно пропорциональна $x^s\cos(h/4x)$. Однако нам надо еще узнать, как подсчитывать отношение a_n/a_{n-1} для малых значений n, а также, как определять нужные значения s.

Тем не менее равенства (5.2.70) дают способ стать на правильный путь. Если мы не можем начать с a_0, a_1 и идти вперед, то, может быть, можно начать с очень больших значений n и идти назад. Предположим, что мы начинаем с настолько большого значения n, что a_{n+1}/a_n очень близко от $-h^2/16\,[n+(s/2)]^2$. Подстановка в первое равенство дает почти точное выражение для a_n/a_{n-1}; подстановка его в аналогичную формулу для a_{n-1}/a_{n-2} дает еще более точное выражение для a_{n-1}/a_{n-2} и т. д., так что мы приходим к значению

$$\frac{a_1}{a_0} = \cfrac{-h^2}{16\left(1+\frac{1}{2}s\right)^2+2h^2-4b-\cfrac{h^4}{16\left(2+\frac{1}{2}s\right)^2+2h^2-4b-\cfrac{h^4}{16\left(3+\frac{1}{2}s\right)^2+2h^2-4b-\ldots}}}.$$

Подобным образом применение второго равенства для отрицательных n дает нам

$$\frac{a_{-1}}{a_0} = \cfrac{-h^2}{16\left(1-\frac{1}{2}s\right)^2+2h^2-4b-\cfrac{h^4}{16\left(2-\frac{1}{2}s\right)^2+2h^2-4b-\cfrac{h^4}{16\left(3-\frac{1}{2}s\right)^2+2h^2-4b-\ldots}}}$$

Эти выражения называются *непрерывными дробями*. На вопросы об их сходимости можно ответить, применяя соответствующие правила для рядов.

Применение уравнения (5.2.69) для $n=0$ дает формулу, связывающую a_1/a_0 и a_{-1}/a_0,

$$s^2 = b - \frac{h^2}{4}\left[2 + \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_{-1}}{a_0}\right]. \tag{5.2.71}$$

Эта формула вместе с двумя предыдущими приводит к уравнению, из которого можно определить s через b и h. Подсчитаем непрерывные дроби для предполагаемого значения s и затем проверим результат при помощи равенства (5.2.71). Если оно не удовлетворится точно, возьмем квадратный корень из правой части равенства за новое значение s и подставим его в непрерывные дроби и т. д. Если только первоначальный выбор не слишком плох, то этот процесс последовательных подстановок быстро сходится и значение, верное с точностью до пяти или шести значащих цифр, можно обычно получить меньше чем за дюжину шагов.

Конечно, для малого h этот итеративный процесс можно осуществить аналитически. С точностью до первого порядка относительно h^2 имеем $s = \sqrt{b} - (h^2/4\sqrt{b})$. Подставляя это в обе непрерывные дроби (и опуская в них члены с h^4), получаем

$$s^2 \simeq b - \frac{1}{2}h^2 + \frac{h^4/64}{1+\sqrt{b}} + \frac{h^4/64}{1-\sqrt{b}}$$

или

$$s \simeq \sqrt{b}\left(1 - \frac{h^2}{4b} - \frac{h^4}{64b^2}\,\frac{2-3b}{1-b}\right),$$

если только b не близко к 1; в противном случае нужно включить высшие степени h^2.

Заметим, что из симметрии соотношения (5.2.71) и непрерывных дробей [или из формулы (5.2.68)] следует, что если s является решением, то и $-s$ также; также и $\pm s \pm 2m$, где m любое целое число, является решением.

Если s подсчитано, то a_1 и a_{-1} можно выразить через a_0 (которое можно положить равным 1), а остальное a можно подсчитать при помощи вспомогательных непрерывных дробей

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \cfrac{-h^2}{16\left(\frac{1}{2}s+n\right)^2 + 2h^2 - 4b - \cfrac{h^4}{16\left(\frac{1}{2}s+n+1\right)^2 + 2h^2 - 4b - \ldots}},$$

$$\frac{a_{-n}}{a_{-n+1}} = \cfrac{-h^2}{16\left(\frac{1}{2}s-n\right)^2 + 2h^2 - 4b - \cfrac{h^4}{16\left(\frac{1}{2}s-n-1\right)^2 + 2h^2 - 4b - \ldots}}$$

и тем самым вычислить весь ряд. Соответствующая функция

$$\mathscr{S}(b, h, e^{i\varphi}) = e^{is\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2in\varphi}, \tag{5.2.72}$$

включающая эти значения s и a, является одним из решений уравнения (5.2.66). Другое решение получается при противоположном знаке s и перемене мест a_n и a_{-n}

$$\mathscr{S}(b, h, e^{-i\varphi}) = e^{-is\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-2in\varphi};$$

оно комплексно сопряжено с первым. Соответствующие вещественные функции получаются при сложении или вычитании

$$
\begin{aligned}
Se(b, h; z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos[(s+2n)\varphi], \quad z = \cos\varphi, \\
So(b, h; z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sin[(s+2n)\varphi].
\end{aligned}
\tag{5.2.73}
$$

Эти функции четны или нечетны относительно $\varphi = 0$, но не периодичны по φ с периодом π или 2π, если только s не целое.

Для некоторых областей значений b (например, для отрицательных b или для b, близких к 1, 4, 9 и т. д.) s оказывается комплексным числом. В этом случае вещественные решения Se и So имеют несколько более сложный вид. При увеличении h увеличивается также область значений b, где s комплексно. Эти области называются *областями неустойчивости* решений, так как вещественный показательный множитель, присутствующий тогда в решениях, становится как угодно большим для больших z, положительных или отрицательных.

Определитель Хилла. Прежде чем продолжить наше исследование решения уравнения Матье, мы рассмотрим совершенно иной метод подсчета s и коэффициентов a_n, успех которого проистекает из особенной симметрии рекурсивных формул (5.2.69). Эти формулы образуют, конечно, систему однородных уравнений первой степени относительно a_n (в бесконечном числе, поскольку число коэффициентов a_n бесконечно). Чтобы ее можно было решить и выразить, например, a_n через a_0, определитель из коэффициентов при неизвестных a_n должен равняться нулю. Он является бесконечным определителем, так что надо проследить за его сходимостью. Однако для улучшения сходимости можно до образования определителя разделить n-ю рекурсивную формулу на $2h^2 - 4b + 16n^2$. Получающийся определитель

$$
\Delta(s) = \begin{vmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \dfrac{(\sigma+2)-\alpha^2}{2^2-\alpha^2} & \dfrac{\beta^2}{2^2-\alpha^2} & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & \dfrac{\beta^2}{1^2-\alpha^2} & \dfrac{(\sigma+1)^2-\alpha^2}{1^2-\alpha^2} & \dfrac{\beta^2}{1^2-\alpha^2} & 0 & \cdot \\
\cdot & 0 & \dfrac{\beta^2}{-\alpha^2} & \dfrac{\sigma^2-\alpha^2}{-\alpha^2} & \dfrac{\beta^2}{-\alpha^2} & \cdot \\
\cdot & 0 & 0 & \dfrac{\beta^2}{1^2-\alpha^2} & \dfrac{(\sigma-1)^2-\alpha^2}{1^2-\alpha^2} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix},
\tag{5.2.74}
$$

где $\sigma = \frac{1}{2}s$, $\alpha^2 = \frac{1}{4}b - \frac{1}{8}h^2$ и $\beta = h/4$, называется *определителем Хилла*.

Нам остается лишь разрешить уравнение $\Delta(s) = 0$ относительно s!

Замечательным является то, что из-за периодического характера зависимости от α, устанавливающего связь Δ с тригонометрическими функциями, такое решение возможно. Прежде всего, упростив наш опре-

делитель при помощи умножения n-й строки (считая от строки $n=0$) на $(n^2-\alpha^2)/[(\sigma+n)^2-\alpha^2]$, получим новый определитель $D(\sigma)$, где

$$\Delta(s)=D(\sigma)\prod_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(\sigma+n)^2-\alpha^2}{n^2-\alpha^2}=D\frac{\sigma^2-\alpha^2}{-\alpha^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{[1-\{(\sigma+\alpha)/n\}^2][1-\{(\sigma-\alpha]/n\}^2]}{[1-(\alpha/n)^2]^2}.$$

Определитель $D(\sigma)$ имеет вдоль главной диагонали последовательность единиц, на обеих соседних диагоналях — последовательность вида $\beta^2/[(\sigma+n)^2-\alpha^2]$, а все остальные элементы равны нулю. На основании формулы (4.3.9) мы видим, что

$$\Delta(s)=-D(\sigma)\frac{\sin\pi(\sigma+\alpha)\sin\pi(\sigma-\alpha)}{\sin^2(\pi\alpha)}=D(\sigma)\frac{\sin^2(\pi\alpha)-\sin^2(\pi\sigma)}{\sin^2(\pi\alpha)};\quad(5.2.75)$$

это соотношение уже говорит кое-что о периодической зависимости от α и σ.

Однако определитель $D(\sigma)$ также имеет определенную периодичность по σ и простые полюсы при $\sigma=\pm n\pm\alpha$, порожденные элементами $\beta^2/[(\sigma+n)^2-\alpha^2]$. При этом полюсы $D(\sigma)$ расположены только в этих точках, и к этой функции, очевидно, применимы рассмотрения стр. 360—364. Мы сперва вычтем функцию, имеющую такие же полюсы,

$$K(\sigma)=D(\sigma)-C\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\sigma+n)^2-\alpha^2}=D(\sigma)+\frac{C}{2\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{2}{\sigma+\alpha+n}-\frac{1}{\sigma-\alpha+n}\right],$$

где C равно вычету в каждом полюсе D. Однако подобно тому как мы пришли к соотношению (4.3.7) (см. задачу 4.21, стр. 449), мы получим

$$\pi\operatorname{ctg}(\pi x)=\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2-4}+\ldots=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x+n},$$

так что функцию $K(\sigma)$ можно переписать. Эта функция

$$K(\sigma)=D(\sigma)+\frac{\pi C}{2\alpha}[\operatorname{ctg}\pi(\sigma+\alpha)-\operatorname{ctg}\pi(\sigma-\alpha)]$$

не имеет полюсов ни для одного значения s и ограничена при $s\to\infty$. По теореме Лиувилля (стр. 360) она должна быть постоянной, и, полагая $\sigma\to\infty$, мы видим, что постоянная K равна единице. Отсюда получаем довольно удивительный результат

$$D(\sigma)=1-\frac{\pi C}{2\alpha}[\operatorname{ctg}\pi(\sigma+\alpha)-\operatorname{ctg}\pi(\sigma-\alpha)].$$

Возвращаясь к равенству (5.2.75), мы видим, что

$$\Delta(s)=1-\frac{\sin^2(\pi\sigma)}{\sin^2(\pi\alpha)}-\frac{\pi C}{\alpha}\operatorname{ctg}(\pi\alpha),$$

где единственной еще не определенной постоянной является постоянная C, вычет в полюсах $D(\sigma)$. Его можно подсчитать, положив $\sigma=0$; получится $(\pi C/\alpha)\operatorname{ctg}(\pi\alpha)=1-\Delta(0)$. Следовательно, возвращаясь к исходным обозначениям, получаем, что функциональная зависимость исходного опреде-

лителя от s относительно проста

$$\Delta(s) = \Delta(0) - \frac{\sin^2(\pi s/2)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{b-\frac{1}{2}h}\right)}, \tag{5.2.76}$$

где

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \frac{h^2}{144+2h^2-4b} & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \frac{h^2}{64+2h^2-4b} & 1 & \frac{h^2}{64+2h^2-4b} & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \frac{h^2}{16+2h^2-4b} & 1 & \frac{h^2}{16+2h^2-4b} & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \frac{h^2}{2h^2-4b} & 1 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{16+2h^2-4b} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

представляет собой сходящийся определитель, не зависящий от s. Так как $\Delta(s)$ должно равняться нулю, то соотношение (5.2.71), из которого определяется s, равносильно уравнению

$$\sin^2(\pi s/2) = \Delta(0)\sin^2[\pi\sqrt{b-(h^2/2)}/2].$$

Функции Матье. Теперь мы готовы вновь обратиться к нашему предыдущему исследованию допустимых значений s и решений S. Величина

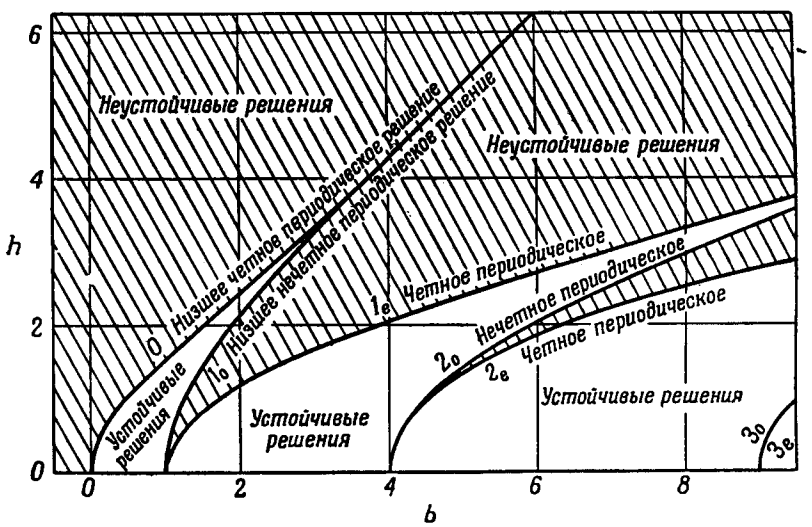

Рис. 5.4. Значения констант разделения для периодических решений уравнения Матье.

$\Delta(0)\sin^2[\pi\sqrt{b-(h^2/2)}/2]$ является периодической функцией $\alpha=\sqrt{b-(h^2/2)}/2$ с периодом 1. Для $h=0$ будет $\Delta(0)=1$ и $s=\pm 2\alpha=\pm\sqrt{b}$; это — предельный случай, когда уравнение (5.2.66) приводится к виду $(d^2\psi/d\varphi^2)+b\psi=0$. Если $b-(h^2/2)$ достаточно большое отрицательное, то $\Delta(0)\sin^2(\pi\alpha)$ отрицательно и s чисто мнимое. Вся область значений h и b на рис. 5.4,

лежащая слева от линии 0 и заштрихованная, соответствует неустойчивым решениям с вещественным показательным множителем.

Для некоторого значения b, зависящего от h и изображаемого на рис. 5.4 кривой 0, произведение $\Delta(0)\sin^2(\pi\alpha)$ равно нулю, так что и s равно нулю. В этом случае решение $\mathscr{S}(b, h; e^{i\varphi})$ вещественно, симметрично по φ и *периодично по* φ *с периодом* π [так как $a_n = a_{-n}$ и $\mathscr{S}$ является рядом Фурье по $\cos(2n\varphi)$]. Эта функция называется *функцией Матье нулевого порядка* и обозначается специальным символом

$$Se_0(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}\cos(2n\varphi), \quad z = \cos\varphi,$$

где B пропорциональны a, но подобраны так, что $Se_0(h, 1) = 1$. Если $s = 0$, то два решения $\mathscr{S}(b, h; e^{i\varphi})$ и $\mathscr{S}(b, h; e^{-i\varphi})$ равны и второе решение, независимое от Se_0, надо находить при помощи формулы (5.2.6). Оно содержит логарифмический член и потому не периодично по φ.

В области изменения b, h, которой на рис. 5.4 соответствует незаштрихованная область между линиями 0 и 1_0, выражение $\Delta(0)\sin^2(\pi\alpha)$ меньше единицы, и потому уравнение для s имеет решение, которое вещественно и меньше единицы. Функции Se и So, данные формулами (5.2.73), являются независимыми решениями, а наилучший способ подсчета s и коэффициентов a_n основан на применении непрерывных дробей в соотношении (5.2.71).

Для множества значений b, h, изображаемого кривой 1_0, произведение $\Delta(0)\sin^2(\pi\alpha)$, а потому и s равно единице. Оказывается, что $a_n = -a_{-n-1}$, так что оба решения $\mathscr{S}(b, h, e^{i\varphi})$ и $\mathscr{S}(b, h, e^{-i\varphi})$ пропорциональны функции

$$So_1(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}\sin(2n+1)\varphi,$$

которая называется *нечетной функцией Матье первого порядка*. За ним, в следующей заштрихованной области, $\Delta(0)\sin^2(\pi\alpha)$ больше единицы, s комплексно и имеет значение $1 + \varepsilon i$ и, следовательно, решение неустойчиво. На правом краю этой области неустойчивости s опять равно единице, но в то же время $a_n = a_{-n-1}$, так что оба решения $\mathscr{S}$ пропорциональны

$$Se_1(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}\cos(2n+1)\varphi$$

четной функции Матье первого порядка. Второе решение вновь имеет логарифмический член.

Такое поведение продолжается и для возрастающих значений b: чередующиеся области устойчивости и неустойчивости, разделяемые граничными линиями, соответствующими тому специальному случаю, когда s целое и когда одно решение периодично и является либо четной функцией (разлагающейся в ряд Фурье по косинусам), либо нечетной функцией (разлагающейся по синусам), а другое решение непериодично и содержит логарифм. Для остальной части области изменения b, h, вне граничных линий, решение непериодично, колеблется и имеет вид (5.2.73) или же непериодично, неустойчиво и является произведением комплексного показательного множителя на ряд Фурье.

Во многих случаях, имеющих физический интерес, координата, соответствующая φ, является периодической и повторяется при возрастании φ на 2π. В этом случае единственно пригодными являются периодические решения, названные нами *функциями Матье*, для целых

значений s (одна нечетная функция So_m и одна четная функция Se_m для каждого целого значения $s=m$). Если h обращается в нуль, то Se_m становится равной $\cos m\varphi$, а So_m — равной $\sin m\varphi$.

Чтобы подсчитать допустимые значения константы разделения b, соответствующей этим периодическим функциям, можно вместо определителя Хилла применять формулу (5.2.71), включающую непрерывные дроби, причем, в отличие от предыдущего, находя b при данном s. Полагая s равным целому m, находим при помощи последовательных приближений решение уравнения

$$b=m^2+\frac{1}{4}h^2\left[2+\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_{-1}}{a_0}\right],$$

где отношения a_1/a_0, a_{-1}/a_0 приведены на стр. 526 в виде непрерывных дробей. Для каждого значения m, за исключением $m=0$, имеется два различных решения, из которых одно порождает ряд по синусам, а другое — по косинусам (т. е. $a_n=\pm a_{2m-n}$).

Если $s=0$, то $a_1/a_0=a_{-1}/a_0$, и мы решаем уравнение

$$2b=h^2-\cfrac{h^4}{16+2h^2-4b-\cfrac{h^4}{16\cdot 4+2h^2-4b-\ldots}};$$

отсюда

$$Se_0(h,z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}\cos 2n\varphi,\quad B_{2n}=a_n\Big/\sum_{n=0}^{\infty}a_n,$$

где коэффициенты B нормированы так, что $Se_0=1$ при $\varphi=0$. Соответствующее значение b в этом случае можно обозначить $be_0(h)$.

Однако если мы интересуемся только функциями Матье, т. е. периодическими решениями, то мы можем значительно упростить выкладки, используя тот факт, что решения являются суммами рядов Фурье. Преобразуем первое из уравнений (5.2.67) в

$$(d^2\psi/d\varphi^2)+\left(b-\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}h^2\cos 2\varphi\right)\psi=0.$$

Как мы показали, имеется четыре различных типа периодических решений этого уравнения:

I. Четные решения периода π, $s=$ целому четному $=2m$, соответствующее значение $b=be_{2m}$

$$Se_{2m}(h,\cos\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}\cos(2n\varphi).$$

II. Четные решения периода 2π, $s=$ целому нечетному $=2m+1$, для $b=be_{2m+1}$

$$Se_{2m+1}(h,\cos\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}\cos(2n+1)\varphi.$$

III. Нечетные решения периода π, $s=$ целому четному $=2m$, для $b=bo_{2m}$

$$So_{2m}(h,\cos\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{2n}\sin(2n\varphi).$$

IV. Нечетные решения периода 2π, s = нечетному целому $= 2m+1$, для $b = bo_{2m+1}$

$$So_{2m+1}(h, \cos\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \sin(2n+1)\varphi,$$

где коэффициенты B зависят от h, m (то есть от значения s или от связанного с ним значения b) и, конечно, от n.

Подставляя ряд Фурье типа I в дифференциальное уравнение и применяя тождество $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$, имеем

$$B_2 = k_0 B_0, \quad B_4 = k_2 B_2 - 2B_0, \quad k_{2n} B_{2n} = B_{2n+2} + B_{2n-2},$$

где

$$k_m = h^{-2}(4b - 2h^2 - 4m^2).$$

Из этих уравнений, преобразованных в непрерывные дроби, мы можем подсчитать отношение коэффициентов, а также соответствующее значение b, то есть be_{2m}. Полагая отношение представленным в виде

$$G_m = B_m/B_{m-2}, \qquad (1/G_0) = 0,$$

имеем две возможные совокупности уравнений для G:

$$G_2 = \cfrac{2}{k_2 - \cfrac{1}{k_4 - \cfrac{1}{k_6 - \cdots}}}, \qquad G_{2n} = \cfrac{1}{k_{2n} - \cfrac{1}{k_{2n+2} - \cfrac{1}{k_{2n+4} - \cdots}}}, \quad n > 1 \tag{5.2.77}$$

или $G_2 = k_0$, $G_4 = k_2 - (2/k_0)$,

$$G_{2n} = k_{2n-2} - \cfrac{1}{k_{2n-4} - \cfrac{1}{k_{2n-6} - \cdots \cfrac{1}{k_2 - (2/k_0)}}}, \quad n > 2, \tag{5.2.78}$$

причем можно пользоваться той или иной в зависимости от относительной простоты выкладок и от скорости сходимости.

Приравнивание двух выражений для G_2 дает уравнение с непрерывной дробью для определения соответствующего значения b. Полагая $\alpha = b - \frac{1}{2}h^2$, $\theta = \frac{1}{4}h^2$, имеем уравнение

$$\alpha = \cfrac{2\theta^2}{\alpha - 4 - \cfrac{\theta^2}{\alpha - 16 - \cfrac{\theta^2}{\alpha - 36 - \cdots}}}$$

которое равносильно уравнению стр. 531. Можно найти бесконечную последовательность решений α в виде функций θ, откуда можно определить значения be_{2m}. Некоторые из этих значений имеются в таблицах. Эти значения показаны также графически на рис. 5.4.

Для решений типа II при помощи тех же методов можно прийти к следующим уравнениям для отношений коэффициентов G и для константы разделения $be_{2m+1} = \alpha + \frac{1}{2}h^2$:

$$G_3 = \frac{B_3}{B_1} = k_1 - 1, \quad G_{2n+1} = k_{2n-1} - \cfrac{1}{k_{2n-3} - \cfrac{1}{k_{2n-5} - \cdots - \cfrac{1}{k_1 - 1}}}, \quad n > 1,$$

$$G_{2n-1}=\frac{1}{k_{2n-1}-}\,\frac{1}{k_{2n+1}-}\,\frac{1}{k_{2n+3}-}\ldots,\qquad n>0,$$

$$a=1+\theta+\frac{\theta^2}{a-9-}\,\frac{\theta^2}{a-25-}\,\frac{\theta^2}{a-49-}\ldots$$

В обоих этих случаях удобно нормировать функцию так, что $Se_m=1$ при $\varphi=0$. Это означает, что $\Sigma B_n=1$.

Для решений типа III имеем $B_0=0$, и уравнениями для G и bo будут

$$\frac{1}{G_2}=0,\qquad G_4=k_2,\qquad G_{2n}=k_{2n-2}-\frac{1}{k_{2n-4}-\ldots-\frac{1}{k_2}},\qquad n>2,$$

$$G_{2n}=\frac{1}{k_{2n}-}\,\frac{1}{k_{2n+2}-}\ldots,\qquad k_m=\frac{a-m^2}{\theta},$$

$$a=4+\frac{\theta^2}{a-16-}\,\frac{\theta^2}{a-36-}\ldots$$

Наконец, для решений типа IV имеем:

$$G_3=k_1+1,\qquad G_{2n+1}=k_{2n-1}-\frac{1}{k_{2n-3}-\ldots-\frac{1}{k_1+1}},\qquad n>1,$$

$$G_{2n-1}=\frac{1}{k_{2n-1}-}\,\frac{1}{k_{2n+1}-}\ldots,\qquad n>0,$$

$$a=1-\theta-\frac{\theta^2}{a-9-}\,\frac{\theta^2}{a-25-}\ldots$$

Для обоих рядов по синусам удобно провести нормировку так, чтобы скорость изменения функции $dSo_m/d\varphi$ равнялась единице при $\varphi=0$. Это означает, что $\sum\limits_n B_n=1$.

При вычислении значений a (и тем самым b) мы можем преобразовать непрерывные дроби, чтобы облегчить работу. Например, для решений типа I при значении a, близком к 16, можно в уравнении (5.2.77) дважды перейти к обратным величинам, что даст

$$a=16+\frac{\theta^2}{a-4-(2\theta^2/a)}+\frac{\theta^2}{a-36-}\,\frac{\theta^2}{a-64-}\ldots$$

Оказывается, что (если только h не слишком велико) значения B_n наибольшие при $n\simeq m$. Поэтому $G_n=B_n/B_{n-2}$ мало́ для $n>m$ и велико для $n<m$. Опыт показывает, что конечные непрерывные дроби, подобные (5.2.78), лучше применять при подсчете G_n для $n<m$, а бесконечные дроби, подобные (5.2.77), лучше для значений n, бо́льших m.

Функции Матье второго рода. Как мы указали на стр. 526, если s целое, то *обе функции* $\mathscr{S}(b, h, e^{i\varphi})$ *и* $\mathscr{S}(b, h, e^{-i\varphi})$ пропорциональны Se_m или So_m, то есть функции Матье первого рода, отвечающей значению $b=be_m$ или bo_m, соответственно. Для этих частных значений b второе решение имеет логарифмическую особенность относительно $z=e^{i\varphi}$ (другими словами, оно не периодично по φ), и мы должны ввести специальные

решения в этих специальных случаях. Мы укажем здесь метод для получения вторых решений, соответствующих четным функциям $Se_{2m}(h, \cos\varphi)$.

Так как $\varphi = 0$ представляет собой обыкновенную точку для уравнения Матье

$$\psi'' + \left(b - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^2\cos 2\varphi\right)\psi = 0,$$

то можно построить фундаментальную систему решений, из которых одно имеет единичное значение и нулевую производную, а другое нулевое значение и единичную производную при $\varphi = 0$. Для $b = be_{2m}$ первым решением будет функция $Se_{2m}(h, \cos\varphi)$, имеющая единичное значение и нулевую производную. Второе решение должно быть общего вида

$$Fe_{2m}(h, \cos\varphi) = \gamma_{2m}\left[\varphi Se_{2m}(h, \cos\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n}\sin(2n\varphi)\right], \qquad (5.2.79)$$

имеющего логарифмическую особенность относительно z при $\varphi = \arccos z = 0$. Оно также не периодично по φ. Подставляя это выражение в уравнение Матье и вспоминая, что $Se_{2m} = \sum B_{2n}\cos 2n\varphi$ представляет собой решение того же уравнения для того же значения b, в конце концов получаем

$$\gamma_{2m}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-4nB_{2n} - (2n)^2 D_{2n} + \frac{1}{4}h^2 D_{2n-2} + \right.$$
$$\left. + \left(be_{2n} - \frac{1}{2}h^2\right)D_{2n} + \frac{1}{4}h^2 D_{2n+2}\right]\sin(2n\varphi) = 0$$

причем член D_{2n-2} для $n = 1$ отсутствует. Отсюда вытекает система совокупных уравнений

$$\left[be_2 - \frac{1}{2}h^2 - 4\right]D_2 + \frac{1}{4}h^2 D_4 = 4B_2,$$
$$\frac{1}{4}h^2 D_2 + \left[be_{2n} - \frac{1}{2}h^2 - 16\right]D_4 + \frac{1}{4}h^3 D_6 = 8B_4 \text{ и т. д.},$$

из которых можно выразить D через B (это не просто, но тем не менее можно найти решение, для которого ряд сходится). Мы выберем значение постоянной γ_{2m}, положив, что производная Fe при $\varphi = 0$, равная $\gamma_{2m}[1 + \Sigma 2nD_{2n}]$, должна обратиться в единицу, то есть

$$\gamma_{2m} = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2nD_{2n}\right]^{-1}.$$

Отсюда имеем фундаментальную систему решений относительно φ

$$\left.\begin{array}{ll} Se_{2m} = 1, & dSe_{2m}/d\varphi = 0 \\ Fe_{2m} = 0, & dFe_{2m}/d\varphi = 1 \end{array}\right\} \varphi = 0.$$

Определитель Вронского $\Delta(Se, Fe)$ относительно φ постоянен и потому

$$Se_{2m}(h, \cos\varphi)\frac{d}{d\varphi}Fe_{2m}(h, \cos\varphi) - Fe_{2m}(h, \cos\varphi)\frac{d}{d\varphi}Se_{2m}(h, \cos\varphi) = 1$$

для всех значений φ. [См. также соотношение (5.3.91 и далее.]

Вторые решения для других функций Матье получаются подобным образом. Например, для $b = bo_{2m+1}$ второе решение имеет вид

$$Fo_{2m+1}(h, \cos\varphi) = \delta_{2m+1}\left[\varphi So_{2m+1}(h, \cos\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1}\cos(2n+1)\varphi\right],$$

где уравнения для D подобны написанным выше. В этом случае нормировка такова, что $Fo_{2m+1}=1$ при $\varphi=0$ (и имеет там нулевую производную), что приводит к уравнению для

$$\delta_{2m+1}=\left[\sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1}\right]^{-1},$$

а определитель Вронского для этой пары решений равен -1.

Итак, мы во всяком случае указали вид вторых решений для тех значений b, для которых функции $\mathscr{S}(b, h, e^{-i\varphi})$ и $\mathscr{S}(b, h, e^{i\varphi})$ не независимы. Для всех остальных значений b обе функции $\mathscr{S}$ независимы и образуют требуемую пару.

Еще о рекурсивных формулах. Теперь мы в состоянии несколько больше разобраться в решениях дифференциальных уравнений при помощи рядов и в связанных с ними рекурсивных формулах. Пусть нам дано дифференциальное уравнение $\mathscr{L}(\psi)\equiv\psi''+p\psi'+q\psi=0$, для которого мы хотим получить решение, разложенное в ряд около одной из его особых точек. Для простоты подсчета мы поместим рассматриваемую особую точку в начало координат, что можно сделать без изменения прочих особых точек. Тогда p, или q, или обе эти функции имеют полюс при $z=0$. Если p имеет только простой полюс, а q — полюс не выше второго порядка при $z=0$, то данная особая точка регулярная и мы можем при желании представить решение прямо в виде суммы двух рядов по степеням z. Каждый из рядов имеет вид $z^s\sum a_n z^n$, где s является одним из двух корней определяющего уравнения

$$s^2+(P-1)s+Q=0,$$

причем $P=\lim zp(z)$, а $Q=\lim z^2q(z)$. Приравнивание нулю коэффициента при z^{n+s} в ряде, полученном после применения $\mathscr{L}(\psi)$ к ряду $\sum a_n z^{n+s}$, дает *рекурсивную формулу* $D_n(a_n)=0$ для степенного ряда вблизи особенности $z=0$. Эта формула вместе с формулами для других значений n образует бесконечную последовательность линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_n. Если p, или q, или обе эти функции z требуют для своего представления бесконечный ряд, то каждая рекурсивная формула $D_n=0$ включает все a от a_0 до a_n (возможно, даже дальше).

В принципе, эти совокупные уравнения всегда можно решить, получив тем самым отношения a_n к a_0. Однако если каждая из рекурсивных формул содержит более двух членов (то есть включает более чем пару смежных a), то задача о подсчете ряда и об испытании его на сходимость, асимптотическое поведение и т. д. становится гораздо более сложной. Посмотрим, что мы можем сказать о возможности получения двучленных формул.

Короткие рекурсивные формулы можно получить только если p и q представляют собой рациональные функции z, то есть отношения многочленов относительно z (см. стр. 361). Если они не являются рациональными функциями, то можно пытаться так преобразовать независимое переменное, чтобы новые p и q стали рациональными функциями; если это можно сделать, то можно продолжать далее, в противном случае мы принуждены иметь дело с бесконечными рекурсивными формулами.

Знаменатели p и q, если эти функции рациональны, определяются положением особых точек уравнения. По крайней мере один из этих знаменателей имеет z множителем, так как хотя бы одна из двух функций

имеет при $z=0$ полюс. Если имеются другие особые точки для конечных значений z (скажем, для $z=z_i$; $i=1, 2, \ldots, N$), то знаменатели p, или q, или обеих этих функций должны содержать множители вида $z-z_i$. Во всяком случае если мы избавимся в уравнении $\mathscr{L}(\phi)=0$ от дробей, то оно приобретает вид

$$\prod_{i=0}^{N}(z-z_i)^{n_i}\phi''+F(z)\phi'+G(z)\phi=0, \quad M=\sum_{i=0}^{N}n_i, \quad z_0=0,$$

где F и G — многочлены относительно z. Отметим, между прочим, что если на бесконечности нет особой точки, то многочлен $G(z)$ должен иметь степень $M-4$ или меньше, а F должен быть многочленом степени $M-1$ и иметь старший член $2z^{M-1}$ (почему?).

Нетрудно видеть, что, вообще говоря, такое уравнение будет иметь M-членную рекурсивную формулу. Если бесконечность является регулярной точкой, то количество членов в этой формуле можно понизить на один или два посредством преобразования $w=z/(z-z_j)$ независимого переменного, переводящего j-ю особую точку на бесконечность. Когда это сделано (если только это возможно) и особые точки имеются и в нуле, и в бесконечности, то уравнение все еще будет иметь указанный выше вид, но степени многочленов, на которые множатся ϕ'', ϕ' и ϕ, будут наименьшими возможными степенями для рассматриваемого частного уравнения.

Теперь можно усмотреть, что обычно *получить двучленную рекурсивную формулу возможно только тогда, когда имеется лишь одна особая точка*, помимо расположенных в нуле и в бесконечности, так как коэффициент при ϕ'' должен иметь вид $z^{n_0}(z-z_1)$, многочлен F должен иметь вид $az^{n_0}+bz^{n_0-1}$, а G — вид $\alpha z^{n_0-1}+\beta z^{n_0-2}$, для того чтобы степени z в разложении $\mathscr{L}(\phi)$ в ряд располагались так, чтобы был возможен вывод двучленных рекурсивных формул. Другой, несколько худший случай — это если имеются *две* другие особые точки, расположенные симметрично (то есть $z_2=-z_1$), так что коэффициент при ϕ'' имеет вид $z^{n_0}(z^2-z_1^2)$. Если тогда $F=az^{n_0+1}+bz^{n_0-1}$, а $G=\alpha z^{n_0}+\beta z^{n_0-2}$, то получается двучленная формула, связывающая a_n и a_{n+2} (а не a_n и a_{n+1}).

Даже если другая особая точка только одна, то функции F и G могут не иметь требуемого простого вида. В этом случае иногда может помочь преобразование зависимой переменной по формуле $\phi=u(z)f(z)$, где u представляет собой произведение некоторых степеней z и $z-z_1$. Обычно в качестве показателей степеней подходят какие-либо из индексов s в каждой из особых точек, так что уравнение для новой зависимой переменной f имеет как при $z=0$, так и при $z=z_1$ одно из решений аналитическим. Это часто понижает степень многочлена G и дает двучленную рекурсивную формулу. Этот прием был нами успешно применен при преобразовании уравнения Папперица в гипергеометрическое уравнение.

Если имеется более одной иррегулярной особой точки, то F или G не имеют вида, приводящего к двучленной рекурсивной формуле. Как мы видели, лучшее, что можно сделать в случае двух иррегулярных точек, равно как и в случае двух регулярных и одной иррегулярной точки, — это получить трехчленную формулу. Большее число особых точек или высший вид иррегулярности порождают еще более сложные формулы. К счастью, оказывается, что такие случаи не приобрели до сих пор большого практического значения, так что мы их опустим без дальнейших церемоний, заметив только, что если эти случаи приобретут значение, то потребуются дальнейшие исследования для создания техники работы с этими более сложными рекурсивными формулами.

Функциональные ряды. Нам, однако, не обязательно ограничиваться рядами по степеням z; можно также применять ряды по некоторой системе функций f_n

$$\psi = \sum A_n f_n(z).$$

Чтобы увидеть, как можно осуществить это обобщение, возвратимся к методу степенных рядов и спросим, почему множество функций

$$f_n = z^n$$

было таким полезным. Очевидный ответ гласит, что в этом случае функции f_n удовлетворяют чрезвычайно простым *рекуррентным соотношениям*

$$zf_n = f_{n+1}, \quad f_n' = nf_{n-1}.$$

Применяя эти соотношения, возможно привести дифференциальный оператор $\mathscr{L}$ к виду, содержащему только различные степени z^n. Чтобы применить другое множество функций f_n для представления решений, это новое множество также должно удовлетворять рекуррентным соотношениям.

Другое важное и полезное свойство степенных рядов — это свойство *полноты*. Под полнотой мы понимаем то, что при выполнении определенных условий линейную комбинацию степеней z можно применить для представления любой функции. Это утверждение является следствием теоремы Лорана [см. (4.3.4)] и имеет место при выполнении условий этой теоремы. Прежде чем применять другие множества функций, мы должны выяснить, какие функции могут быть представлены с их помощью, а какие нет. Позже, в главе о собственных функциях, мы уделим значительное внимание исследованию этого вопроса. Однако стоит рассмотреть, что можно сделать в этом отношении при помощи уже развитой нами техники. Мы приведем несколько примеров, после чего возвратимся к исходному вопросу о решении уравнений при помощи функциональных рядов.

Обычно применяемый метод состоит в установлении связи между используемым функциональным рядом и степенным рядом. Тогда на основании известных свойств степенного ряда возможно получить сведения и о множестве f_n. В качестве первого примера установим полноту рядов Фурье по $e^{in\theta}$ прямо из рядов Лорана. Из формулы (4.3.4) имеем

$$\psi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Рассмотрим теперь значения $\psi(z)$ на единичной окружности, $z = e^{i\theta}$. Тогда

$$\psi(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Из свойства полноты степенных рядов мы можем теперь заключить, что с помощью множества функций $e^{in\theta}$ можно представить любую достаточно хорошую периодическую функцию θ периода 2π. Необходимость периодичности проистекает из того, что ряд Фурье представляет значения ψ на окружности, при обходе которой эти значения повторяются. При рассмотрении четных или нечетных функций θ мы немедленно приходим к рядам Фурье по косинусам или синусам.

В качестве второго примера исследуем первое решение уравнения Лежандра (5.2.47) для $m = 0$ и целых значений n

$$X = F\left(-n,\ n+1 \,|\, 1 \,|\, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right).$$

Для целых значений n X является многочленом относительно z; *полиномы Лежандра* P_n будут более детально исследованы позже, на стр. 558. Подсчитаем несколько первых из этих функций:

$$P_0 = 1, \qquad P_3 = (5z^3 - 3z)/2,$$
$$P_1 = z, \qquad P_4 = (35z^4 - 30z^2 + 3)/8,$$
$$P_2 = (3z^2 - 1)/2, \qquad P_5 = (63z^5 - 70z^3 + 15z)/8 \text{ и т. д.}$$

На основании этой последовательности можно доказать, что любую степень z^n можно выразить в виде линейной комбинации многочленов P_n. Для 1 и z это очевидно. Выпишем результат для нескольких следующих степеней:

$$1 = P_0,$$
$$z = P_1,$$
$$z^2 = \frac{1}{3}(2P_2 + P_0),$$
$$z^3 = \frac{1}{5}(2P_3 + 3P_1),$$
$$z^4 = \frac{1}{35}(8P_4 + 20P_2 + 7P_0),$$
$$z^5 = \frac{1}{63}(8P_5 + 28P_3 + 27P_1) \text{ и т. д.}$$

Из того что степенные ряды по положительным степеням z полны для функций, не имеющих особенностей, можно заключить, что эти функции можно равным образом выразить через полиномы Лежандра. Чтобы охватить функции с особенностями, было бы необходимо вовлечь в наше исследование второе решение уравнения Лежандра (соответствующее отрицательным степеням z).

В данный момент нет необходимости определять явно коэффициенты указанных выше разложений. Достаточно показать возможность такого представления. Например, при решении уравнения Бесселя для целого n (см. стр. 521) мы получаем одну совокупность решений

$$J_n(z) = e^{-iz} z^n F\left(\frac{1}{2} + n \,|\, 1 + 2n \,|\, 2iz\right) = z^n(1 + \ldots),\ z \to 0$$

[см. формулу (5.2.63) и далее]. Можно полагать, что посредством подходящей комбинации этих функций было бы возможно представить z^n. Аналогично для z^{-n} были бы пригодны вторые решения, функции Неймана (см. стр. 585). Это утверждение проверить несколько труднее, чем подобное утверждение для функций Лежандра, так как функции Бесселя представляют собой не многочлены, а суммы бесконечных рядов. Однако относительно просто доказать, что *принципиально* представление через функции Бесселя возможно.

Теперь мы в состоянии обратиться к некоторым примерам применения функциональных рядов, откуда мы сможем вывести способ рассуждений, который должен обычно применяться. Как первый пример, рассмотрим исследованное ранее (стр. 523) уравнение Матье

$$\psi'' + \left[b - \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{2}\cos 2\varphi\right]\psi = 0.$$

Это уравнение до некоторой степени походит на уравнение, которому удовлетворяют показательные функции:

$$f_n = e^{i2(n+s)\varphi}, \qquad f_n'' + [4(n+s)^2] f_n = 0$$

(член $\cos 2\varphi$ отсутствует). Подставим $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} A_n f_n$ в уравнение Матье

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n \left\{ \left[-4(n+s)^2 + \left(b - \frac{h^2}{2} \right) \right] e^{2i(n+s)\theta} - \frac{h^2}{4} e^{2i(n+s+1)\theta} - \right.$$
$$\left. - \frac{h^2}{4} e^{2i(n+s-1)\theta} \right\} = 0.$$

Группируя члены с общим множителем $e^{2i(n+s)\theta}$, получаем

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{h^2}{4} A_{n-1} - \frac{h^2}{4} A_{n+1} + A_n \left[b - \frac{h^2}{2} - 4(n+s)^2 \right] \right\} e^{2i(n+s)\theta} = 0.$$

На основании полноты системы функций $e^{i(n+s)\theta}$ коэффициент при каждом члене должен равняться нулю. (Здесь мы используем тот результат, что если сумма степенного ряда тождественно равна нулю, то коэффициент при каждой степени должен равняться нулю.) Таким образом, мы получаем трехчленную рекурсивную формулу

$$\frac{h^2}{4} A_{n+1} + A_n \left[4(n+s)^2 - b + \frac{h^2}{2} \right] + \frac{h^2}{4} A_{n-1} = 0.$$

Она тождественна с (5.2.69) (естественно).

В качестве второго примера рассмотрим специальный вид уравнения, полученного в результате разделения в сфероидальных координатах

$$(z^2 - 1)\psi'' + 2z\psi' + (h^2 z^2 - b)\psi = 0.$$

Сравним его с уравнением, которому удовлетворяют полиномы Лежандра P_n

$$(z^2 - 1) P_n + 2zP_n' - n(n+1) P_n = 0.$$

Если потребовать, чтобы ψ не имела особенностей в ± 1, то есть в особых точках дифференциального уравнения, то естественно ожидать, что выбор $f_n = P_n$ окажется полезным; итак, положим

$$\psi = \sum_{0}^{\infty} A_n P_n.$$

Здесь применимо следующее рекуррентное соотношение, которое будет выведено позже:

$$z^2 P_n = \frac{n(n-1)}{4n^2-1} P_{n-2} + \left[\frac{n^2}{4n^2-1} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \right] P_n + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}.$$

Подстановка в дифференциальное уравнение дает

$$\sum_{0}^{\infty} P_n \left\{ A_{n+2} h^2 \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+5)} + \right.$$
$$\left. + A_n \left[n(n+1) - b + h^2 \left(\frac{n^2}{4n^2-1} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \right) \right] + A_{n-2} \frac{h^2 (n-1) n}{(2n-1)(2n-3)} \right\} = 0.$$

Полученная трехчленная рекурсивная формула теперь должна быть разрешена относительно A_n при условии, что $A_{-1} = A_{-2} = 0$.

То, что здесь сделано, сводится к указанию полного множества функций $f_n(z)$, по которым мы хотим разложить наше решение. На практике

мы выбираем функции f так, что их дифференциальное уравнение $\mathscr{M}_n(f_n)=0$ не очень отличается от уравнения $\mathscr{L}(\psi)=0$, которое мы хотим решить. После этого мы применяем соотношения между последовательными f_n, чтобы выразить разность между $\mathscr{L}(f_n)$ и $\mathscr{M}_n(f_n)$ в виде ряда по f_n

$$[\mathscr{L}-\mathscr{M}_m]f_m=\sum_n \gamma_{mn}f_n. \tag{5.2.80}$$

Например, для рядов по полиномам Лежандра, о которых мы говорили выше, $[\mathscr{L}-\mathscr{M}_n](P_n)=[h^2z^2-b+n(n+1)]P_n$, что можно подставить в ряд вида (5.2.80), включающий только три члена (с P_{n-2}, P_n и P_{n+2}).

В случае удачного выбора ряды по f_n будут конечными с небольшим числом членов. Мы назовем эти формулы, выражающие результат применения простых операторов к f_n в виде простых рядов по f_m, *рекуррентными* формулами, чтобы отличать их от *рекурсивных формул* (5.2.40). Подставляя наш ряд в оператор $\mathscr{L}$, имеем

$$\mathscr{L}\left(\sum a_m f_m\right)=\sum_m(\mathscr{L}-\mathscr{M}_m)a_mf_m+\sum_m a_m\mathscr{M}_m(f_m)=$$
$$=\sum_m a_m\sum_n \gamma_{mn}f_n=\sum_n\left(\sum_m a_m\gamma_{mn}\right)f_n=0,$$

где $\mathscr{M}_m(f_m)=0$ по определению. Если множество f_n полное, то можно каждый коэффициент при f_n последнего ряда приравнять в отдельности нулю

$$\sum_m a_m\gamma_{mn}=0,$$

что дает *рекурсивные* формулы для коэффициентов a_m. Если эти формулы можно разрешить, мы получаем решение уравнения $\mathscr{L}(\psi)=0$.

Общая применимость разложения рассматриваемого вида зависит, конечно, от скорости сходимости, которая в свою очередь зависит от поведения a_n при $n\to\infty$. Чтобы его получить, рассмотрим указанное выше уравнение в пределе при $n\to\infty$

$$A_{n+2}\frac{h^2}{4}+A_n\left[n^2-b+\frac{h^2}{2}\right]+h^2\frac{A_{n-2}}{4}=0\quad(n\to\infty).$$

Это — как раз рекурсивное соотношение (5.2.69), выведенное для функций Матье, если совершить подстановку

$$s=0,\quad A_{n+2}=\frac{1}{2}C_{n+2},\quad n=2\beta.$$

Напомним, что рекурсивные соотношения для уравнения Матье влекут за собой сходимость для a_n при $n\to\infty$, если b при данном s принимает только некоторые частные значения. Эти значения следует определять из рекурсивных формул для a_n при помощи методов, описанных в разделе о непрерывных дробях.

Далее в этой книге будет указано много иных случаев разложения функции в ряд по другим функциям. Особенно полезными будут ряды по функциям Лежандра (гипергеометрическим функциям, см. стр. 557) и по функциям Бесселя (вырожденным гипергеометрическим функциям, см. стр. 579).

Вообще то, что мы можем пытаться сделать при помощи таких рядов, — это применить решения уравнения с данным множеством особых точек для выражения решений уравнений, имеющих на одну особую точку больше (или имеющих более сложные особые точки). Например, согласно уравнению (5.2.30), степень z является решением дифференциального уравнения с двумя регулярными особыми точками в 0 и ∞. Отсюда ре-

шения уравнения с тремя регулярными точками (гипергеометрические функции) или с одной регулярной и одной иррегулярной точкой (вырожденные гипергеометрические функции) можно выразить сравнительно просто в виде рядов по степеням z. С другой стороны, решения уравнения с двумя регулярными точками и одной иррегулярной точкой (сфероидальные функции) можно наиболее просто выразить в виде ряда по гипергеометрическим функциям (функциям Гегенбауера) или по вырожденным гипергеометрическим функциям (функциям Бесселя). Мы рассмотрим ряды по функциям Бесселя и ряды по любым другим более сложным функциям в этой книге позже [см. формулы (5.3.82) и (11.3.87)].

В заключение заметим, что можно обобщить ряд $\sum a_n f_n(z)$, перейдя к интегралу, так же как, обобщая ряд Фурье, мы приходим к интегралу Фурье. Например, вместо $\psi(z) = \sum_n a_n f_n(z)$ мы могли написать

$$\psi(z) = \int K(z, t)\, v(t)\, dt.$$

Ясно, что здесь целочисленная переменная n заменилась на непрерывную переменную t, функции $f_n(z)$ перешли в $K(z, t)$, а коэффициенты a_n превратились в $v(t)$. Сравнивая это с аналогичным процессом для рядов, мы можем наметить способ получения *интегрального представления* ψ (как называется приведенный выше интеграл).

Прежде всего применяем оператор $\mathscr{L}$, причем теперь для указания того, что $\mathscr{L}$ действует только по переменной z, мы будем писать $\mathscr{L}_z$ вместо $\mathscr{L}$. Имеем

$$\mathscr{L}_z \psi = \int \mathscr{L}_z [K(z, t)]\, v(t)\, dt = 0.$$

В нашем исследовании $\mathscr{L}_z [f_n(z)]$ мы применяли рекуррентные соотношения для f_n, чтобы заменить дифференциальный оператор на систему разностных операторов при помощи рекуррентных соотношений

$$\mathscr{L}_z [f_n] = \sum_p \gamma_{np} f_p$$

с численными коэффициентами γ_{np}. Это привело к замене операции по переменному z *на операцию по индексу* n. В случае интегрального представления это означает, что мы можем выразить $\mathscr{L}_z [K(z, t)] = \mathscr{M}_t [K(z, t)]$, где $\mathscr{M}_t$ представляет собой дифференциальный оператор по t, так что

$$0 = \int \mathscr{M}_t [K(z, t)]\, v(t)\, dt.$$

Следующим шагом в представлении в виде ряда f_n была перегруппировка членов ряда, в результате чего f_n становился общим множителем; приравнивание нулю коэффициента при f_n, включающего несколько a_n, приводило к *рекурсивным соотношениям* для a_n. Таким образом, операция над f_n была преобразована в операцию над a_n. Подобным образом здесь операция $\mathscr{M}_t$ должна быть преобразована теперь в операцию над v. Это можно осуществить при помощи интегрирования по частям или, что равносильно, при помощи определенного ранее (стр. 000) оператора сопряженного с $\mathscr{M}_t$. Напомним, что

$$v\mathscr{M}_t [u] - u\mathscr{M}_t^* [v] = \frac{d}{dt} P(u, v).$$

Отсюда

$$0 = \int K(z, t)\, \mathscr{M}_t^* (v)\, dt + [P(u, v)],$$

где второй член зависит от пределов интегрирования. Выберем теперь пределы или контур интегрирования так, чтобы член с $P(u, v)$ обратился в нуль; тогда исходное дифференциальное уравнение удовлетворится, если «амплитуда» $v(t)$ в интегральном представлении удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{M}_t^*(v) = 0.$$

Это уравнение аналогично рекурсивным формулам для a_n. Если мы сможем решить дифференциальное уравнение для $v(t)$, то мы получим решение исходного дифференциального уравнения для $\psi(z)$, имеющее некоторые преимущества перед решением, представленным в виде ряда. Однако это достаточно обширная тема, и мы лучше посвятим ей отдельный параграф.

5.3. Интегральные представления

Теперь у нас достаточно данных, чтобы увидеть, к чему приводит способ нахождения решений в форме рядов. Разложение около обыкновенной точки осуществляется непосредственно. Необычные случаи осуществляются вблизи особых точек дифференциального уравнения, где общее решение имеет особенность. Мы указали, как можно получить вблизи каждой особой точки два независимых решения в виде рядов, сходящихся вплоть до ближайшей особой точки (или в виде асимптотических рядов, из которых можно подсчитать достаточно точные значения решений в более ограниченной области). Другими словами, мы выработали средство для анализа поведения любого решения линейного дифференциального уравнения второго порядка в непосредственной близости любой точки комплексной плоскости. В частности, мы можем применить разложения в ряд для нахождения частного решения, удовлетворяющего любому допустимому краевому условию (в гл. 6 будет исследовано, что означает «допустимость» для краевых условий).

Очень часто эти краевые условия ставятся в особых точках дифференциального уравнения. Мы видели, что такие особые точки соответствуют геометрическим «точкам концентрации» соответствующей системы координат. Часто вид физической границы можно идеализировать так, чтобы ей, в силу ее простоты, соответствовала особая точка в одном из измерений (например, значению $r = 0$ в сферических координатах соответствует начало координат, значению $\mu = 0$ в сплющенных сфероидальных координатах — диск, значению $\varphi = 0, \pi$ в эллиптических цилиндрических координатах — плоская щель и т. д.). Часто только одно решение лишь с одним из индексов (если особая точка регулярная) может быть приспособлено к краевым условиям, так что будет пригодным одно из решений, исследованных в предыдущем параграфе.

Если нам требуются значения рассматриваемого решения вблизи особой точки, то разложение в ряды пригодно и, более того, является единственным путем подсчета этих промежуточных значений. Но очень часто нам бывает нужно вычислить значения решения и его производной вблизи следующей особой точки, где ряд, пригодный для первой особой точки, либо сходится чрезвычайно медленно, либо даже расходится. Например, мы часто должны удовлетворять краевым условиям в обоих концах области изменения переменной, соответствующих двум последовательным особым точкам. При этом требуются коэффициенты перехода, связывающие ряд около одной из особых точек с двумя решениями около другой точки, так как тогда нет нужды добиваться сходимости ряда. Пусть u_1, v_1 — два независимых разложения в ряды около особой точки $z = a_1$,