

где второй член зависит от пределов интегрирования. Выберем теперь пределы или контур интегрирования так, чтобы член с $P(u, v)$ обратился в нуль; тогда исходное дифференциальное уравнение удовлетворится, если «амплитуда» $v(t)$ в интегральном представлении удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{M}_t^*(v) = 0.$$

Это уравнение аналогично рекурсивным формулам для a_n . Если мы сможем решить дифференциальное уравнение для $v(t)$, то мы получим решение исходного дифференциального уравнения для $\phi(z)$, имеющее некоторые преимущества перед решением, представленным в виде ряда. Однако это достаточно обширная тема, и мы лучше посвятим ей отдельный параграф.

5.3. Интегральные представления

Теперь у нас достаточно данных, чтобы увидеть, к чему приводит способ нахождения решений в форме рядов. Разложение около обыкновенной точки осуществляется непосредственно. Необычные случаи осуществляются вблизи особых точек дифференциального уравнения, где общее решение имеет особенность. Мы указали, как можно получить вблизи каждой особой точки два независимых решения в виде рядов, сходящихся вплоть до ближайшей особой точки (или в виде асимптотических рядов, из которых можно подсчитать достаточно точные значения решений в более ограниченной области). Другими словами, мы выработали средство для анализа поведения любого решения линейного дифференциального уравнения второго порядка в непосредственной близости любой точки комплексной плоскости. В частности, мы можем применить разложения в ряд для нахождения частного решения, удовлетворяющего любому допустимому краевому условию (в гл. 6 будет исследовано, что означает «допустимость» для краевых условий).

Очень часто эти краевые условия ставятся в особых точках дифференциального уравнения. Мы видели, что такие особые точки соответствуют геометрическим «точкам концентрации» соответствующей системы координат. Часто вид физической границы можно идеализировать так, чтобы ей, в силу ее простоты, соответствовала особая точка в одном из измерений (например, значению $r = 0$ в сферических координатах соответствует начало координат, значению $\mu = 0$ в сплющеных сфериодальных координатах — диск, значению $\varphi = 0, \pi$ в эллиптических цилиндрических координатах — плоская щель и т. д.). Часто только одно решение лишь с одним из индексов (если особая точка регулярная) может быть приспособлено к краевым условиям, так что будет пригодным одно из решений, исследованных в предыдущем параграфе.

Если нам требуются значения рассматриваемого решения вблизи особой точки, то разложение в ряды пригодно и, более того, является единственным путем подсчета этих промежуточных значений. Но очень часто нам бывает нужно вычислить значения решения и его производной вблизи следующей особой точки, где ряд, пригодный для первой особой точки, либо сходится чрезвычайно медленно, либо даже расходится. Например, мы часто должны удовлетворять краевым условиям в обоих концах области изменения переменной, соответствующих двум последовательным особым точкам. При этом требуются коэффициенты перехода, связывающие ряд около одной из особых точек с двумя решениями около другой точки, так как тогда нет нужды добиваться сходимости ряда. Пусть u_1, v_1 — два независимых разложения в ряды около особой точки $z = a_1$,

а u_2 , v_2 — ряды около $z = a_2$. Если мы можем найти соотношения вида $u_1 = \gamma_{11}u_2 + \gamma_{12}v_2$ и т. д., то мы можем тогда при подстановке краевых условий в a_1 пользоваться решениями u_1 , v_1 , а при подстановке условий в a_2 — решениями u_2 , v_2 . Не будет никаких проблем сходимости, если мы сможем выразить каждое решение у одного конца через решения у другого.

Для простейших видов дифференциальных уравнений эта связь между поведением у одной особой точки и поведением у другой проста. Поскольку решения представляют собой либо рациональные функции (5.2.29), либо элементарные трансцендентные функции (5.2.33), то мы знаем поведение решений в обоих концах; «связь» уже нам дана. Для дальнейших более сложных уравнений эта связь не так проста. Примером такой связи служит формула (5.2.49), однако наш вывод этой формулы на основе разложения решений в ряды не был вполне строгим и не годился для всей области изменения параметров. Решение при помощи рядов, как выразился Стокс, «имеет преимущество в широкой приложимости, но совершенно лишено элегантности». Мы предпочли бы выразить решения через рациональные или элементарные трансцендентные функции каким-либо конченным способом, сходящимся как в одной особой точке, так и в другой. Для некоторых уравнений это можно сделать, если перейти от рядов к интегралам.

Выражение

$$\psi(z) = \int K(z, t) v(t) dt \quad (5.3.1)$$

является достаточно общим для хорошего представления любого решения. Если функции K и v оказываются рациональными или элементарными трансцендентными, то мы имеем «замкнутый» вид, который можно применить для подсчета решения где угодно в комплексной плоскости. Нам остается только установить, как надо находить правильный вид K и v для данного уравнения.

Некоторые простые примеры. Наше знакомство с техникой контурного интегрирования дает возможность составить несколько простых примеров для иллюстрации взаимосвязи между интегральным представлением и решением при помощи рядов. Например, так как

$$\pi \operatorname{ctg} \pi t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-n} \quad \text{или} \quad \pi \operatorname{cth} \pi t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-in}$$

(см. стр. 528), то можно применить вычеты этой функции для получения ряда Фурье. Так, интеграл

$$I(z) = \oint_C \operatorname{cth} \pi t \cdot F(t) e^{zt} dt$$

можно разложить в ряд, если F представляет собой рациональную функцию t (см. стр. 390), имеющую все полюсы справа от мнимой оси и при этом такую, что $tF(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Контур C включает прямую, проходящую справа от мнимой оси, в ее непосредственной близости от $-i\infty$ до $i\infty$, а затем возвращается к $-i\infty$, проходя вдоль полуокружности бесконечного радиуса, расположенной в полуплоскости $\operatorname{Re} t < 0$. Так как $t^2 \cdot F(t)$ не обращается в бесконечность при $|t| \rightarrow \infty$, то интеграл по бесконечной полуокружности равен нулю (поскольку $\operatorname{ctg} \pi t \rightarrow -1$ при $|t| \rightarrow \infty$ для $\operatorname{Re} t < 0$), если $z > 0$.

Поэтому полюсы внутри контура совпадают с полюсами $\operatorname{cth} \pi t$, то есть имеют вид $\pm in$. Внутри контура мы предположили F всюду аналитиче-

ской. Вдоль мнимой оси (в случае вещественных коэффициентов) F имеет симметричную и антисимметричную части

$$F(t) = s(t) + u(t), \quad s(t) = \frac{1}{2} F(t) + \frac{1}{2} \bar{F}(t) = \operatorname{Re} F,$$

$$u(t) = \frac{1}{2} F(t) - \frac{1}{2} \bar{F}(t) = i \operatorname{Im}(F).$$

Контурный интеграл равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов по всем полюсам $\operatorname{cth} \pi z$

$$\int_{-\infty+i\epsilon}^{i\infty+i\epsilon} \operatorname{cth}(\pi t) F(t) e^z dt = 2i \operatorname{Re} F_0 + 4i \sum_{n=0}^{\infty} [\operatorname{Re} F_n \cos(nz) - \operatorname{Im} F_n \sin(nz)], \quad (5.3.2)$$

где $F_n = F(in)$.

Более непосредственное применение интегрального представления можно получить из свойств гамма-функции $\Gamma(-t)$. Функция

$$\Gamma(-t) = \frac{-\pi}{\Gamma(i+1) \sin(\pi t)} \underset{t \rightarrow n}{\simeq} -(-1)^n \frac{1}{(t-n)\Gamma(t+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

имеет простые полюсы при $t = 0, 1, 2, \dots$. Если после включения в подинтегральную функцию множителя z^t интеграл будет сходиться, то сумма вычетов превратится в ряд по целым степеням z . Как было указано на стр. 462, асимптотическое выражение для $\Gamma(t+1)$ имеет вид

$$\Gamma(t+1) \underset{t \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{2\pi} e^{-t-1} t^{t+\frac{1}{2}}.$$

Значит, если функция $G(t)$ такова, что $G(t) z^t / \Gamma(t+1) \sin \pi t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для $\operatorname{Re} t > 0$, и если все особенности G расположены слева от мнимой оси, то

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} G(t) \Gamma(-t) (-z)^t dt = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} G(n) z^n / n!, \quad (5.3.3)$$

где контур проходит слева от полюса при $t = 0$ и дополняется полуокружностью бесконечного радиуса, проходящей в полуплоскости $\operatorname{Re}(t) > 0$ от $+i\infty$ обратно к $-i\infty$. Тем самым мы получаем способ непосредственного перехода от ряда к интегралу. Если $G(n)$ является «замкнутой функцией» n (то есть если последовательные коэффициенты связаны простой формулой, вроде двучленной рекурсивной формулы), то подинтегральная функция имеет замкнутый вид.

Применения такой формулы и предосторожности, необходимые для обеспечения сходимости, хорошо иллюстрируются на приложении ее к гипергеометрическому ряду (5.2.44)

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)n!} z^n.$$

Ясно, что функция G должна равняться $\frac{\Gamma(c)/2\pi i}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)}{\Gamma(c+t)}$, если последняя имеет полюсы слева от мнимой оси и если частное $Gz^t / \Gamma(t+1) \sin \pi t$ ведет себя требуемым образом при $t \rightarrow \infty$. Применяя асимптотическую формулу для гамма-функции, находим, что если $t = \operatorname{Re}^{i\theta} = R \cos \theta + iR \sin \theta$,

то для достаточно больших R

$$\frac{\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)}{\Gamma(c+t)\Gamma(t+1)} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} e^{t+c-a-b} R^{a+b-c-1} e^{i(a+b-c-1)t}.$$

Кроме того, если $z = re^{i\varphi}$ и $-z = re^{i\varphi-i\pi} = e^{\ln r+i(\varphi-\pi)}$, то

$$(-z)^t = \exp\{R[(\ln r)\cos\theta + (\pi - \varphi)\sin\theta] + iR[(\varphi - \pi)\cos\theta + (\ln r)\sin\theta]\},$$

$$\frac{1}{\sin(\pi t)} = \begin{cases} -2i \exp[i\pi R \cos\theta - \pi R \sin\theta], & 0 < \theta < \pi, \\ 2i \exp[-i\pi R \cos\theta + \pi R \sin\theta], & 0 > \theta > -\pi. \end{cases}$$

Отсюда, отбрасывая мнимую часть в показателе, оцениваем модуль подинтегральной функции

$$\left| \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+t)}{\Gamma(c+t)\Gamma(t+1)} \frac{(-z)^t}{\sin(\pi t)} \right| \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} 2 \left(\frac{R}{e} \right)^{a+b-c-1} e^{R \ln r \cos\theta} \begin{cases} e^{-R\varphi \sin\theta}, & 0 < \theta < (\pi/2), \\ e^{R(2\pi-\varphi) \sin\theta}, & 0 > \theta > -(\pi/2). \end{cases}$$

Отсюда если модуль z меньше единицы (то есть $\ln r < 0$), а аргумент z больше нуля и меньше 2π ($0 < \varphi < 2\pi$), то подинтегральная функция обра-

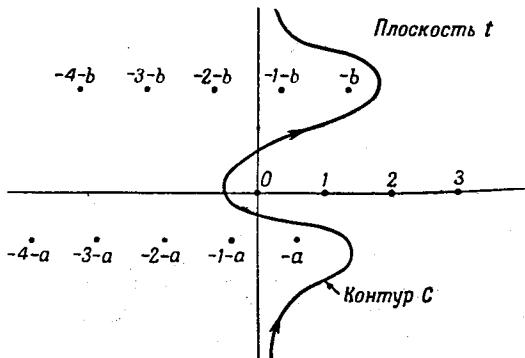


Рис. 5.5. Контур для интегрального представления гипергеометрической функции при помощи преобразования Мэллина.

щается в нуль на полуокружности, входящей в контур ($R \rightarrow \infty$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$). Поскольку эти условия выполнены, интегральное представление гипергеометрического ряда имеет вид

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)}{2\pi i \Gamma(c+t)} \Gamma(-t) (-z)^t dt, \quad (5.3.4)$$

если только мы сможем провести контур от $-i\infty$ до $+i\infty$ так, чтобы все полюсы $\Gamma(-t)$ остались справа, а полюсы $\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)$ — слева. Рис. 5.5 показывает, что это можно сделать, даже если $\operatorname{Re} a$ и $\operatorname{Re} b$ отрицательны, если только ни a , ни b не являются целыми отрицательными. Если a либо b целое отрицательное, то формула (5.2.44) показывает, что F будет конечным многочленом, а не бесконечным рядом (она показывает также, что c не должно быть целым ≤ 0).

Это интегральное представление не кажется полезным или элегантным; на первый взгляд оно представляется менее элегантным, чем представление в виде ряда. Однако нетрудно показать, что возможность деформации

контура без изменения значения интеграла делает полученный результат настолько гибким, что при его помощи удается связать разложение у одной особенности с разложениями у другой особенности.

Например, дальнейшее рассмотрение асимптотического поведения подинтегральной функции в (5.3.4) показывает, что она стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$ для $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ ($t = Re^{i\theta}$), то есть на бесконечной полуокружности, проходящей в левой части плоскости t . Отсюда контур, содержащий внутри себя все полюсы $\Gamma(-t)$ (и приведяший, как указано выше, к гипергеометрическому ряду), можно заменить на контур, содержащий все полюсы $\Gamma(a+t)\Gamma(b-t)$. Применяя соотношения $\Gamma(a+t) = \pi/\Gamma(1-a-t) \times \sin \pi(a+t)$ и т. д. и вычисляя вычеты в парах полюсов, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b | c | z) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(1-c+a+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+a-b+n)} \frac{\sin \pi(c-a-n)}{\cos(n\pi) \sin \pi(b-a-n)} (-z)^{-a-n} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(1-c+b+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1-a+b+n)} \frac{\sin \pi(c-b-n)}{\cos(n\pi) \sin \pi(a-b-n)} (-z)^{-b-n} = \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F\left(a, 1-c+a | 1-b+a | \frac{1}{z}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(b)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} F\left(b, 1-c+b | 1-a+b | \frac{1}{z}\right). \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Если $|a-b|$ целое или нуль, то один из этих рядов теряет силу, так как второе решение должно содержать логарифмический член.

Ряд в левой части сходится при $|z| < 1$, в то время как ряды в правой части сходятся при $|z| > 1$. Строго говоря, эти два ряда нельзя приравнивать; лучше было бы сказать, что интегральное выражение, приведенное в формуле (5.3.4), обладает разложением в ряд, определяющий $F(a, b | c | z)$, справедливым при $|z| < 1$; оно также обладает другим разложением в ряд, указанный в правой части формулы (5.3.5), справедливым при $|z| > 1$. Интегральное представление справедливо для всех (или почти всех) значений z и может рассматриваться как «истинное решение» уравнения (5.2.42). Разложения в ряды можно считать частными представлениями этого «истинного решения», пригодными в ограниченной области изменения z . При помощи интегрального представления мы можем осуществить аналитическое продолжение решения из одной области сходимости, содержащей одну особенность, в другую область сходимости, содержащую другую особенность.

Таким образом, можно назвать интеграл, стоящий в правой части формулы (5.3.4), *гипергеометрической функцией* $F(a, b | c | z)$, одним из решений уравнения (5.2.42). Если $|z| < 1$, то эту функцию можно подсчитать при помощи представления ее рядом (5.2.44), *гипергеометрическим рядом* по z . Для других областей изменения z гипергеометрическую функцию можно подсчитать, применяя гипергеометрические ряды по $1/z$, данные в формуле (5.3.5), или по $1-z$, которые будут даны позже, и т. д. Сама функция, показывающая свои различные стороны при различных подходах, дается интегральным представлением.

Общие уравнения для подинтегральной функции. Свойства, раскрывающиеся при представлении гипергеометрической функции, являются типичными для интегральных представлений вообще. Они превращают аналитическое продолжение решения почти в тавтологию «если такое представле-

ние можно найти, то обычно бывает не трудно применить краевые условия в обоих концах области изменения z . Если представления нельзя найти, то такое применение проходит сложно и «неизящно».

Методы, примененные в предыдущем пункте для получения интегральных представлений, были далеко не прямыми; нам нужна техника перехода от дифференциального уравнения прямо к виду подинтегральной функции. Мы будем пользоваться сначала видом (5.3.1) с ядром $K(z, t)$ и модуляционным множителем $v(t)$. Для этого мы выбираем вид K , который нам представляется подходящим, а затем выясняем, какому дифференциальному уравнению удовлетворяет v . Если это уравнение достаточно простое (существенно проще, чем уравнение для ψ), то можно получить замкнутый вид v и тем самым построить интегральное представление.

Дифференциальное уравнение, которое надо решить, имеет второй порядок и независимое переменное, преобразованное таким образом, что коэффициенты являются алгебраическими. До использования выражения (5.3.1) лучше освободиться от дробей, перейдя к уравнению

$$\mathcal{L}_z(\psi) = f(z) \frac{d^2\psi}{dz^2} + g(z) \frac{d\psi}{dz} + h(z) \psi = 0, \quad (5.3.6)$$

где f , g и h — многочлены относительно z . Дифференциальный оператор \mathcal{L} , примененный к интегралу вида (5.3.1), можно внести под знак интеграла, действуя на ядро K по z

$$\mathcal{L}\left(\int K v dt\right) = \int \mathcal{L}_z(K(z, t)) v(t) dt,$$

если интеграл достаточно хорошо сходится. Операция \mathcal{L}_z , произведенная над $K(z, t)$, порождает новую функцию z и t . Если вид ядра K нами выбран удовлетворительно, то эта новая функция z и t равна результату применения к $K(z, t)$ некоторого оператора по t

$$\mathcal{L}_z(K) = \mathcal{M}_t(K)$$

(в некоторых случаях достаточно, чтобы $\mathcal{L}_z(K)$ равнялось результату применения оператора \mathcal{M}_t к какому-либо другому ядру $K'(z, t)$).

Эта эквивалентность между операторами по z и по t , примененными к ядру K , дает возможность определить $v(t)$ и одновременно резко ограничивает выбор видов $K(z, t)$. Немногие функции z и t обладают простыми взаимосвязями, подобными тем, которые обнаруживают показательное ядро [примененное в формуле (5.3.2)]

$$(d/dz) e^{zt} = te^{zt}, \quad ze^{zt} = (d/dt) e^{zt},$$

для которого дифференциальный оператор, содержащий производные по z и степени z , преобразуется в оператор, содержащий соответствующие степени t и производные по t . Тем не менее найдено много других ядер, применимых в различных случаях: z^t (примененное в формуле (5.3.3)), $(z-t)^a$, различные функции произведения zt и т. д. Во многих случаях можно воспользоваться несколькими различными ядрами, что приводит к нескольким различным интегральным представлениям одного и того же решения. Выбор ядра, порождающего наиболее приспособленное к применению представление, зависит от связи между особенностями ядра и особыми точками дифференциального уравнения. Например, для гипергеометрического уравнения с тремя регулярными особыми точками можно ожидать, что ядро вида $(z-t)^a$ окажется лучше, чем ядро e^{zt} , имеющее существенную особенность на бесконечности. С другой стороны, вырожденное гипергеометрическое уравнение, имеющее иррегулярную особую точку на бесконечности, представляется подходящим для ядра e^{zt} .

Однако возвратимся к нашей непосредственной теме, состоящей в построении уравнения для $v(t)$. Мы достигли того, что подинтегральная функция представляет собой произведение функции v переменной t на дифференциальный оператор \mathcal{M}_t , действующий по t над ядром $K(z, t)$. На основе формулы (5.2.10) мы видим, что подинтегральную функцию можно теперь преобразовать к виду суммы произведения K на результат применения сопряженного (см. стр. 499) дифференциального оператора $\tilde{\mathcal{M}}$ к v и производной присоединенной билинейной формы P . Символически это осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_z(y) &= f(z) \frac{d^2y}{dz^2} + g(z) \frac{dy}{dz} + h(z)y = 0, \quad y = \int K(z, t)v(t)dt, \\ \mathcal{L}_z(y) &= \int \mathcal{L}_z(K)v dt = \int \mathcal{M}_t(K)v dt = \\ &= \int \left[K\tilde{\mathcal{M}}_t(v) + \frac{d}{dt}P(v, K) \right] dt = \int K(z, t)\tilde{\mathcal{M}}_t(v)dt + [P(v, K)],\end{aligned}\tag{5.3.7}$$

где при $\mathcal{M}(K) = \alpha(t)(d^2K/dt^2) + \beta(t)(dK/dt) + \gamma(t)K$ сопряженный оператор имеет вид

$$\tilde{\mathcal{M}}(v) = \frac{d^2}{dt^2}(\alpha v) - \frac{d}{dt}(\beta v) + \gamma v,$$

а соответствующая присоединенная билинейная форма

$$P(v, K) = \alpha v \frac{d}{dt}K - K \frac{d}{dt}(\alpha v) + \beta v K.$$

Если теперь пределы интегрирования и контур, вдоль которого взят интеграл, таковы, что P возвращается к своему начальному значению в конце контура, то интеграл от dP/dt равен нулю и

$$\mathcal{L}_z(y) = \int K\tilde{\mathcal{M}}_t(v)dt.$$

Отсюда если $v(t)$ является решением дифференциального уравнения $\tilde{\mathcal{M}}_t(v) = 0$, то интеграл $y = \int Kv dt$ представляет собой решение дифференциального уравнения $\mathcal{L}_z(y) = 0$, которое мы и хотели решить. Если мы удачно выбрали ядро K , то уравнение $\tilde{\mathcal{M}}_t(v) = 0$ будет проще, чем $\mathcal{L}_z(y) = 0$, и v будет простой функцией t . Обычно имеется несколько различных возможных путей и пределов интегрирования, для каждого из которых $\int (dP/dt)dt = 0$. Эти различные интегралы соответствуют различным независимым решениям уравнения $\mathcal{L}_z(y) = 0$.

Подходя с другой точки зрения, можно сказать, что нами сейчас были исследованы интегральные преобразования типа преобразования Фурье

$$f(v) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{i\mu v} d\mu, \quad F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\mu v} dv,$$

рассмотренного в § 4.8. Мы преобразуем функцию $\psi(z)$ в функцию $v(t)$ посредством ядра $K(z, t)$

$$\psi(z) = \int v(t)K(z, t)dt$$

и пытаемся найти тип преобразования, при котором функция v , служащая образом ψ , будет проще, чем ψ .

Например, если ядро равно e^{tz} , то этот переход называется *преобразованием Лапласа*. Его легко получить из приведенного только что преобразования Фурье; полагая $\mu = -it$, $v = z$, $F(-it) = -iv(t)$, $f(v) = \psi(z)$, получим

$$\psi(z) = \int_{-i\infty}^{i\infty} v(t) e^{-zt} dt, \quad v(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) e^{-zt} dz. \quad (5.3.8)$$

А если ядро равно z^t , переход называется *преобразованием Меллина*. Его также можно получить из преобразования Фурье, положив $\mu = -it$, $v = \ln z$, $f(\ln z) = \psi(z)$, $F(-it) = -iv(t)$, что дает

$$\psi(z) = \int_{-i\infty}^{i\infty} v(t) z^t dt, \quad v(t) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} \psi(z) z^{-t-1} dz. \quad (5.3.9)$$

Однако можно найти и другие преобразования, причем не все они будут так тесно связаны с преобразованием Фурье, как эти два. Таким будет, например, преобразование $\int v(t) (z-t)^{\mu} dt$, называемое *преобразованием Эйлера* (см. также § 4.8).

Дальнейшая часть этого параграфа будет посвящена изучению ряда примеров интегральных представлений, чтобы проиллюстрировать технику получения решений и методы применения результатов, а также чтобы ближе познакомиться с некоторыми функциями, которые будут широко применяться позже в этой книге. Особенно детально будут изучаться два типа ядер:

$$(z-t)^{\mu} \text{ — преобразование Эйлера,} \\ e^{zt} \text{ — преобразование Лапласа.}$$

Другие типы преобразований, менее широко применимые, будут рассмотрены менее детально.

Преобразование Эйлера. Как указано ранее, надо ожидать, что ядро $(z-t)^{\mu}$ должно дать удовлетворительное представление решений уравнений, имеющих только регулярные особые точки, как, например, уравнение Папперица (5.2.36) или его канонический вид, гипергеометрическое уравнение (5.2.42). Ограничение, которое приходится накладывать на форму уравнения, чтобы к нему было применимо преобразование Эйлера, обнаруживается несколько необычным образом при применении дифференциального оператора \mathcal{L} к ядру $(z-t)^{\mu}$.

Вид \mathcal{L} дается формулой (5.3.6), причем гипергеометрическое уравнение (5.2.42) как раз имеет такой вид. Если применить оператор \mathcal{L} к ядру $(z-t)^{\mu}$, то получится сложная алгебраическая функция z и t

$$\mathcal{L}_z((z-t)^{\mu}) = \mu(\mu-1)f(z)(z-t)^{\mu-2} + \mu g(z)(z-t)^{\mu-1} + h(z)(z-t)^{\mu}.$$

Ее нужно теперь представить в виде результата применения некоторого дифференциального оператора \mathcal{M}_t к некоторой степени $z-t$. Можно найти вид \mathcal{M} громоздким путем, если произвести деление на $(z-t)^{\mu-2}$, представить частное в виде билинейной формы z и t , а затем попытаться составить вид \mathcal{M} , который давал бы такой результат. Более красиво получится требуемый результат, если разложить функции f , g , h в ряды Тейлора около $z=t$ (это всегда можно сделать, так как f , g и h — многочлены по z).

Например, $f(z) = f(t) + (z-t)f'(t) + \frac{1}{2}(z-t)^2f''(t) + \dots$ и т. д. Получится

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_z((z-t)^\mu) &= \mu(\mu-1)f(t)(z-t)^{\mu-2} + [\mu(\mu-1)f'(t) + \mu g(t)](z-t)^{\mu-1} + \\ &+ \left[\frac{1}{2}\mu(\mu-1)f''(t) + \mu g'(t) + h(t) \right] (z-t)^\mu + \dots,\end{aligned}$$

причем коэффициент четвертого члена ряда представляет собой линейную комбинацию третьей производной от f , второй производной от g и первой производной от h и т. д.

Чтобы полученное выражение представляло собой результат применения оператора второго порядка над $(z-t)^\mu$, четвертый и все высшие члены ряда должны равняться нулю. Имеется много способов выбора функций f , g , h , чтобы это было так, но простейший путь (и достаточный для наших целей здесь) — это потребовать, чтобы все производные f выше второго порядка, g выше первого и h выше нулевого порядка равнялись нулю. Другими словами, если $f(z)$ представляет собой многочлен второй степени по z , $g(z)$ — многочлен первой степени и $h(z)$ — постоянную, то приведенное выше выражение будет *иметь только три выписанных члена*, все высшие члены пропадут.

Мы видим, что это автоматически ограничивает нас *уравнениями с тремя регулярными особыми точками*, так как f , будучи квадратичной функцией, имеет два нуля, и если уравнение записать в виде (5.2.1)

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{g(z)}{f(z)} \frac{d\psi}{dz} + \frac{h(z)}{f(z)} \psi = 0,$$

то мы легко убедимся в том, что, вообще говоря, оно имеет три регулярные особые точки — две в корнях уравнения $f(z) = 0$ и одну на бесконечности. Гипергеометрическое уравнение имеет как раз такой вид (как, конечно, и должно быть). Обращаясь к уравнению (5.2.42), мы видим, что $f = z(z-1)$, $g = (a+b+1)z - c$, $h = ab$.

Однако достигнув столь многоного, мы можем пойти еще дальше вперед в упрощении уравнения, так как мы свободны в выборе значения μ . Коэффициент при $(z-t)^\mu$ теперь не зависит от z и t , так как f'', g' и h постоянны. Следовательно, положив

$$\frac{1}{2}\mu(\mu-1)f'' + \mu g' + h = 0, \quad (5.3.10)$$

мы получим в качестве решений два значения μ , каждое из которых можно применить в интегральном представлении.

Значит, дифференциальный оператор \mathcal{M}_t имеет вид

$$\mathcal{M}_t = \alpha(t) \frac{d^2}{dt^2} - \beta(t) \frac{d}{dt} + \gamma,$$

где

$$\alpha = f(t), \quad \beta = (\mu-1)f'(t) + g(t), \quad \gamma = \frac{1}{2}\mu(\mu-1)f'' + \mu g' + h, \quad (5.3.11)$$

а сопряженное уравнение и присоединенная билинейная форма таковы:

$$\tilde{\mathcal{M}}_t(v) = \frac{d^2}{dt^2}[f(t)v] + \frac{d}{dt}[\beta(t)v] + \gamma v = 0, \quad (5.3.12)$$

$$\begin{aligned}P(v, K) &= fv \frac{d}{dt}(z-t)^\mu - (z-t)^\mu \frac{d}{dt}(fv) - \beta v(z-t)^\mu = \\ &= -\mu fv(z-t)^{\mu-1} - (\mu f'v + fv' + gv)(z-t)^\mu.\end{aligned}$$

Если μ выбрано так, что (5.3.10) имеет место, то $\gamma = 0$ и уравнение для v можно быстро решить

$$y = fv, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{f}y\right), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\beta}{f}y, \quad \ln y = -\int \frac{\beta}{f} dt + \ln A$$

или

$$v(t) = \frac{A}{f} \exp \left\{ -\int \left[(\mu - 1) \frac{f'}{f} + \frac{g}{f} \right] dt \right\} = Af^{-\mu} e^{-\int (g/f) dt}$$

и

$$P(v, K) = -\mu f(t) v(t) (z-t)^{\mu-1}, \quad \psi = \int (z-t)^\mu v(t) dt, \quad (5.3.13)$$

где интеграл для ψ таков, что P имеет одно и то же значение в начале и в конце пути интегрирования.

Заметим, что можно построить дифференциальное уравнение, которое можно пытаться решить при помощи преобразования Эйлера, имеющее *четыре* регулярные особые точки (из них одна на бесконечности), если принять за f многочлен третьей степени, за g — многочлен второй степени и за h — первой степени, а затем положить, что коэффициент при $(z-t)^{\mu+1}$ в ряде для $\mathcal{L}_z((z-t)^\mu)$ равен нулю

$$\frac{1}{6} \mu (\mu - 1) f''' + \frac{1}{2} \mu g'' + h' = 0.$$

Так как f'' , g'' и h' постоянны, то это уравнение может служить для определения μ , взамен (5.3.10), после чего нам надо решать уравнение (5.3.12) для v , в котором γ не равно нулю. Однако ложкой дегтя в бочке меду в этом случае является то, что уравнение $\tilde{\mathcal{M}}(v) = 0$ *столь же сложно, как уравнение $\mathcal{L}(\psi) = 0$* , так как имеет столько же особых точек. Следовательно, преобразование Эйлера совсем не облегчает нам работы, как в случае уравнения с тремя особыми точками, когда γ можно положить равным нулю. Решение v не имеет простого вида, подобного (5.3.13), оно по-прежнему должно быть разложено в бесконечный ряд.

Отсюда видно, что преобразование Эйлера специально приспособлено к уравнениям типа Папперица (5.2.36) и, в частности, к гипергеометрической функции и к ее специальным случаям, функциям Лежандра (5.2.47) и функциям Гегенбауера (5.2.52).

Преобразование Эйлера для гипергеометрической функции. Гипергеометрическое уравнение.

$$\mathcal{L}_z(\psi) = (z^2 - z) \psi'' + [(a + b + 1)z - c]\psi' + ab\psi = 0$$

допускает решение при помощи преобразования Эйлера. Выражения для коэффициентов в операторе \mathcal{M}_t таковы:

$$\alpha = f(t) = t(t-1), \quad \beta = (a+b+2\mu-1)t - (c+\mu-1),$$

$$\gamma = \mu(\mu-1) + \mu(a+b+1) + ab,$$

а корнями уравнения $\gamma = 0$ являются $\mu = -a$, $\mu = -b$. Мы выберем $\mu = -a$; подстановка в (5.3.13) [при $g = (a+b+1)z - c$] дает

$$v = At^{a-c}(t-1)^{c-b-1}, \quad P = aAt^{a-c+1}(t-1)^{c-b}(z-t)^{-a-1}.$$

Отсюда решением гипергеометрического уравнения будет интеграл

$$\psi = A \int (t-z)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} dt,$$

взятый в таких пределах и вдоль такого контура, что соответствующий интеграл от dP/dt обратится в нуль. В этом случае подинтегральная функция имеет точки ветвления (если только a, b и c не все целые) при $t = 0, 1, z$ и ∞ . Если P обращается в нуль в двух из них, то мы можем принять их за пределы интегрирования; в противном случае мы можем взять интеграл по замкнутому контуру, чтобы P возвратился к своему исходному значению в конце обхода. Например, если $c > b > 0$, то P обращается в нуль при $t = 1$ и $t = \infty$.

Чтобы получить разложение интеграла в степенной ряд для сравнения с гипергеометрическим рядом, разложим $(t - z)^{-a}$ под знаком интеграла

$$(t - z)^{-a} = t^{-a} \left[1 + a \left(\frac{z}{t} \right) + \frac{a(a+1)}{2!} \left(\frac{z}{t} \right)^2 + \dots \right]$$

и применим формулу [см. (4.5.54)]

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \int_1^\infty t^{-m-n}(t-1)^{n-1} dt.$$

Сравнение с определением гипергеометрического ряда, данным формулой (5.2.44), показывает, что

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_1^\infty (t-z)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} dt, \quad (5.3.14)$$

причем это справедливо при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, если z не является вещественным числом, большим единицы. Для случая $\operatorname{Re} b \leq 0$ в этой формуле можно переставить a и b и получить другое равносильное представление, так как $F(a, b | c | z) = F(b, a | c | z)$.

Таким образом, интеграл (5.3.14) можно рассматривать как «истинную» гипергеометрическую функцию, для которой можно получить разложение в ряд около любой точки. Интересно заметить, что это интегральное представление имеет совершенно иной внешний вид, чем равносильное представление (5.3.4). Однако на самом деле это различие является поверхностным, так как гамма-функция тесно связана с преобразованием Эйлера, что выяснится при решении некоторых задач.

В качестве интересного применения этой формулы получим выражение для одного из решений уравнения Папперица (5.2.36), данных формулой (5.2.46). Полагая $t = (u-a)(b-c)/(u-c)(b-a)$ (где a, b и c теперь представляют собой положения особых точек, а не индексы, как выше), имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{z-a}{z-c} \frac{b-c}{b-a} \right)^\lambda \left(\frac{z-b}{z-c} \frac{a-c}{a-b} \right)^\mu F(\lambda + \mu + v, \lambda + \mu + v' | \lambda - \lambda' + 1 | \frac{z-a}{z-c} \frac{b-c}{b-a}) = \\ & = \frac{(-1)^{\mu+\lambda} \Gamma(\lambda - \lambda' + 1)}{\Gamma(\lambda + \mu + v') \Gamma(\lambda + \mu' + v)} (z-a)^\lambda (z-b)^\mu (z-c)^v (a-c)^{\mu'} (c-b)^{\lambda'} (b-a)^{v'} \times \\ & \times \int_b^c (u-z)^{-\lambda-\mu-v} (u-a)^{-\lambda-\mu'-v'} (u-b)^{-\lambda'-\mu-v'} (u-c)^{-\lambda'-\mu'-v} du, \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

где $\lambda + \lambda' + \mu + \mu' + v + v' = 1$. Эта формула примечательно симметрична относительно особых точек и их индексов. Из нее, полагая a, b, c равными 0, 1, ∞ в различном порядке, можно получить целый ряд полезных

интегральных представлений для различных решений гипергеометрического уравнения около каждой из особых точек.

Интеграл (5.3.14) допускает различные видоизменения, из которых получается большое число полезных и интересных соотношений. Например, формулу (5.2.49), связывающую решение вблизи $z = 0$ с решениями вблизи $z = 1$, можно вывести значительно более удовлетворительным способом, чем это

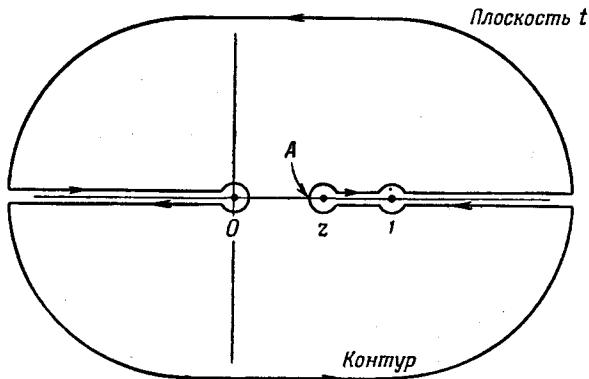


Рис. 5.6. Контур интегрирования для получения соотношений, связывающих гипергеометрическую функцию.

Подинтегральная функция вещественна в точке A , если только z вещественно.

было сделано на стр. 515, где пришлось сделать различные ограничения, суживающие пределы справедливости результата. Мы отправляемся от интеграла

$$\oint (z-t)^{-a} t^{a-c} (1-t)^{c-b-1} dt = 0,$$

взятого по контуру, показанному на рис. 5.6, тщательно обходящему все особенности подинтегральной функции. Будем считать подинтегральную функцию вещественной в точке A , показанной на рисунке, то есть для t , лежащего на вещественной оси и несколько меньшего z , но большего нуля (мы предполагаем здесь, что z вещественно; это не необходимо, но делает преобразования несколько менее сложными; действительно необходимым является, чтобы z не лежало на вещественной оси между $+1$ и $+\infty$).

Если теперь $\operatorname{Re} b \leq \operatorname{Re} c \leq 1 + \operatorname{Re} a \leq 2$, то можно применить методы, описанные на стр. 388, чтобы показать, что приведенное выше равенство равносильно

$$\begin{aligned} \sin(\pi a) \int_z^1 (t-z)^{-a} t^{a-c} (1-t)^{c-b-1} dt - \\ - \sin \pi (a+b-c) \int_1^\infty (t-z)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} dt - \\ - \sin \pi (a-c) \int_0^{-\infty} (z-t)^{-a} (-t)^{a-c} (1-t)^{c-b-1} dt = 0. \end{aligned}$$

Теперь мы при помощи формулы $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$ заменим

$$\frac{\sin \pi(c-a)}{\sin \pi(c-a-b)} \text{ на } \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a-c+1)} \text{ и } \frac{\sin(\pi a)}{\sin \pi(a+b-c)}$$

на $\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}$. В первом интеграле положим $t = (w+z-1)/w$,

а в третьем $t = 1-u$; это после преобразований даст

$$\begin{aligned} \int_1^\infty (t-z)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} dt &= \\ &= \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a-c+1)} \int_1^\infty (u-1+z)^{-a} u^{c-b-1} (u-1)^{a-c} du + \\ &+ \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} (1-z)^{c-a-b} \int_1^\infty (w-1+z)^{a-c} w^{b-1} (w-1)^{-a} dw, \end{aligned}$$

откуда, после применения соотношения (5.3.14) в обратном порядке, сразу следует формула (5.2.49). В данном случае нами было поставлено ограничение $\operatorname{Re} b < \operatorname{Re} c \leq 1 + \operatorname{Re} a \leq 2$. Так как результат получен при помощи изменения контуров интегрирования и подстановки гамма-функции и других конечных действий, то он, возможно, производит более надежное впечатление, чем когда он был ранее выведен при помощи жонглирования с бесконечными рядами.

В результате обоих выводов и при помощи аналитического продолжения можно продолжить эту формулу перехода на более обширную область изменения a, b и c . Так, в предыдущем выводе предполагалось, что $\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} c - \operatorname{Re} a$, а в данном — что $\operatorname{Re} b < \operatorname{Re} c$; таким образом, в результате обоих выводов получаем, что формула имеет место для всех тех b , для которых функции аналитичны. Поскольку z не равно единице, функция $F(a, b | c | z)$ аналитична по a, b и c , за исключением значений a и $b = \infty$ и c , равных нулю или отрицательным целым. Правая часть равенства (5.2.49) аналитична по a, b и c , за исключением значений для c отрицательных целых или нулевого и для $a+b-c$ любых целых. Для любого из этих параметров можно найти область, в которой выполняется одно или другое ограничение, сделанное нами при выводе формулы (5.2.49), и которая в то же время покрываетась более широкой областью, где F аналитична. Значит, при помощи аналитического продолжения справедливость равенства распространяется на всю область значений a, b и c , где его левая и правая части аналитичны. Другую формулу связи (5.3.5) можно продолжить подобным же образом. Вместе обе они дают возможность выразить любое решение гипергеометрического уравнения вблизи одной из трех особых точек через решения, построенные вблизи любой из двух других особых точек. Таким образом, для случая уравнений с тремя регулярными особыми точками мы полностью решили проблему коэффициентов перехода, упомянутую на стр. 542.

Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда. Другую совокупность формул, полезных для дальнейших выкладок, можно получить посредством дальнейших видоизменений интегрального выражения (5.3.14). Положив $t = 1/u$ и $u = 1-w$, получим

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{c-b-1} (1-uz)^{-a} du =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 w^{c-b-1} (1-w)^{b-1} \left(1 - \frac{wz}{z-1}\right)^{-a} dw = \\
&= (1-z)^{-a} F\left(a, c-b \mid c \mid \frac{z}{z-1}\right). \quad (5.3.16)
\end{aligned}$$

Наконец, применяя это соотношение к правой части равенства (5.2.50), мы можем получить еще одно сопоставление

$$F\left(a, b \mid \frac{a+b+1}{2} \mid \frac{1-z}{2}\right) = z^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2} \mid \frac{a+b+1}{2} \mid 1 - \frac{1}{z^2}\right). \quad (5.3.17)$$

Можно применить также интегральное представление F для вывода различных рекуррентных соотношений между смежными функциями. Например, так как

$$\begin{aligned}
(z-t)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} &= z(z-t)^{-a-1} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} - \\
&\quad - (z-t)^{-a-1} t^{a-c+1} (t-1)^{c-b-1},
\end{aligned}$$

то

$$-F(a, b \mid c \mid z) = (bz/c) F(a+1, b+1 \mid c+1 \mid z) - F(a+1, b \mid c \mid z).$$

А из $(d/dz)(z-t)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} = a(z-t)^{-a-1} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1}$ получаем $\frac{d}{dz} F(a, b \mid c \mid z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1 \mid c+1 \mid z)$; обе эти формулы, конечно, можно легко вывести при помощи преобразования гипергеометрического ряда.

Прежде чем окончить наше рассмотрение гипергеометрической функции, следует еще убедиться в справедливости утверждения, сделанного на стр. 548, что различные независимые решения дифференциального уравнения можно получить при помощи изменения пределов интегрирования в интегральном представлении, не меняя вида подинтегральной функции. Если в случае гипергеометрического уравнения взять за первое решение $F(a, b \mid c \mid z)$, вторым решением около $z=0$, согласно формуле (5.2.45), будет

$$y_2 = z^{1-c} F(b-c+1, a-c+1 \mid 2-c \mid z).$$

Применение формулы (5.3.14) для интегрального представления новой F дает выражение

$$Ay_2 = \frac{A\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-a)} z^{1-c} \int_1^\infty (u-z)^{c-b-1} u^{b-1} (u-1)^{-a} du,$$

где подинтегральная функция имеет отличный вид от того, который был у первого решения (5.3.14). Однако, полагая $u=z/t$ и

$$A = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(2-c)},$$

мы получаем в результате интегральное представление второго решения

$$\begin{aligned}
Ay_2 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^z (z-t)^{-a} t^{a-c} (1-t)^{c-b-1} dt = \\
&= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(2-c)} z^{1-c} F(b-c+1, a-c+1 \mid 2-c \mid z),
\end{aligned} \quad (5.3.18)$$

справедливое при $\operatorname{Re} c < \operatorname{Re} a + 1 < 2$. Эта формула для второго решения отличается от формулы (5.3.14) для первого решения лишь пределами интегрирования, что и доказывает наше предыдущее утверждение, во всяком случае, для гипергеометрического уравнения.

Заменив $2 - c$ на c , $b - c + 1$ на a и $a - c + 1$ на b , мы найдем, что

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c) z^{1-c}}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \times$$

$$\times \int_0^z (z-t)^{c-b-1} t^{b-1} (1-t)^{-a} dt, \quad (5.3.19)$$

Рис. 5.7. Контур C для интегрального представления гипергеометрической функции при помощи преобразования Эйлера.

Подинтегральная функция вещественна в точке A , если z вещественно.

Интегральная функция после обхода возвращалась к своему исходному значению. Для этого требуется двойной обход, показанный на рис. 5.7, при котором каждая точка обходится по одному разу в обоих направлениях. Обозначая интеграл в (5.3.19) через J , имеем

$$\oint_C (t-z)^{c-b-1} t^{b-1} (1-t)^{-a} dt = e^{i\pi b} [e^{i\pi(c-2b)} - e^{i\pi c} + e^{-i\pi(c-2b)} - e^{-i\pi c}] J = \\ = 4e^{i\pi b} \sin(\pi b) \sin(\pi(c-b)) J = \frac{4\pi^2 e^{i\pi b} J}{\Gamma(b) \Gamma(1-b) \Gamma(c-b) \Gamma(1+b-c)}.$$

Отсюда контурный интеграл для F имеет вид

$$F(a, b | c | z) = \frac{e^{-i\pi b} z^{1-c}}{4\pi^2} \Gamma(c) \Gamma(1+b-c) \Gamma(1-b) \times \\ \times \oint_C (t-z)^{c-b-1} t^{b-1} (1-t)^{-a} dt. \quad (5.3.20)$$

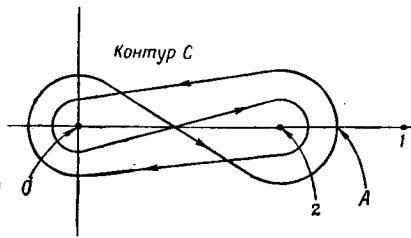
Эту формулу можно теперь распространить при помощи аналитического продолжения на всю область значений a , b и c , кроме тех, при которых гамма-функция обращается в бесконечность.

Наконец, при помощи подстановки $t = (u-z)/(1-u)$ в (5.3.19) можно получить формулу

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c) z^{1-c} (1-z)^{c-a-b}}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^z (z-u)^{b-1} u^{c-b-1} (1-u)^{a-c} du, \quad (5.3.21)$$

которую опять можно было бы преобразовать в контурный интеграл подобно (5.3.20).

Итак, мы нашли интегральные представления обоих решений гипергеометрического уравнения, справедливые в широких областях значений параметров a , b , c . При помощи соотношений между значениями F можно было бы получить другие представления, справедливые в других областях. Однако в этом обычно нет необходимости, так как интегральные представления применяются главным образом для получения других формул, таких, как рекурсивные соотношения, разложения в ряды и т. п. Получив такие формулы при помощи интегральных представлений, можно посред-



ством аналитического продолжения распространить их на другие области параметров за пределами области применимости представления, если в этом есть необходимость и если сами формулы допускают это.

До перехода к дальнейшему детальному исследованию свойств общей гипергеометрической функции будет полезно рассмотреть некоторые частные случаи, представляющие особый интерес для последующего изложения.

Функции Лежандра. Функции Гегенбауера, определенные на стр. 516, представляют собой частный случай гипергеометрических функций, поскольку они зависят от двух параметров α и β , вместо трех a , b и c . Однако эти функции охватывают значительное большинство функций гипергеометрического типа, встречающихся в настоящее время в математической физике, так что их специальные свойства важно рассмотреть в некоторых деталях. Уравнение имеет вид

$$(z^2 - 1) \psi'' + 2(\beta + 1)z\psi' - \alpha(\alpha + 2\beta + 1)\psi = 0 \quad (5.3.22)$$

и обладает тремя регулярными особыми точками -1 , $+1$ и ∞ с индексами $(0, -\beta)$, $(0, +\beta)$ и $(-\alpha, \alpha + 2\beta + 1)$ соответственно.

Интересно и полезно заметить, что непосредственное дифференцирование уравнения дает

$$(z^2 - 1) \psi''' + 2(\beta + 2)z\psi'' - (\alpha - 1)(\alpha + 2\beta + 2)\psi' = 0,$$

откуда видно, что если $T_{\alpha}^{\beta}(z)$ есть решение уравнения (5.3.22), то $T_{\alpha-1}^{\beta+1}(z)$ — решение последнего уравнения. Это показывает, что решения для целых значений $\beta > 0$ можно получить из функций $T_{\alpha}^0(z)$ посредством дифференцирования. Легко видеть также, что если $T_{\alpha}^{\beta}(z)$ есть решение уравнения (5.3.22), то $T_{-\alpha-2\beta-1}^{\beta}(z)$ — также решение того же уравнения.

Уравнение для $T_{\alpha}^0(z)$

$$(z^2 - 1) \psi'' + 2z\psi' - \alpha(\alpha + 1)\psi = 0 \quad (5.3.23)$$

называется *уравнением Лежандра*. Если α целое положительное, то его можно получить при помощи $(\alpha + 1)$ -кратного дифференцирования из уравнения

$$(z^2 - 1) dV/dz - 2azV = 0,$$

где $V = (z^2 - 1)^{\alpha}$, если в полученном уравнении принять $d^{\alpha}V/dz^{\alpha}$ за ψ . Следовательно, если α целое положительное, то одно решение уравнения Лежандра пропорционально $d^{\alpha}(z^2 - 1)^{\alpha}/dz^{\alpha}$.

Отметив эти простые свойства, применим технику настоящего параграфа для определения решений уравнения (5.3.22) при всех значениях α и β и для разложений этих функций вокруг трех особых точек.

Возвращаясь к стр. 550, где был указан общий метод построения интегральных представлений для уравнений с тремя регулярными особыми точками, положим в этом уравнении $f(t) = t^2 - 1$, $g(t) = 2(\beta + 1)t$, $h = -\alpha(\alpha + 2\beta + 1)$. Уравнение (5.3.10) для определения μ приобретает вид

$$\mu^2 + (2\beta + 1)\mu - \alpha(\alpha + 2\beta + 1) = 0,$$

так что $\mu = \alpha$ или $-\alpha - 2\beta - 1$. Поэтому из формул (5.3.13) мы получаем два различных интегральных представления решения и две присоединенные билинейные формы

$$\psi = A \int \frac{(z-t)^{\alpha}}{(t^2 - 1)^{\alpha+\beta+1}} dt, \quad P = -\alpha \frac{(z-t)^{\alpha-1}}{(t^2 - 1)^{\alpha+\beta}}, \quad \mu = \alpha,$$

$$\psi = B \int \frac{(t^2 - 1)^{\alpha+\beta}}{(z-t)^{\alpha+2\beta+1}} dt, \quad P = (\alpha + 2\beta + 1) \frac{(t^2 - 1)^{\alpha+\beta+1}}{(z-t)^{\alpha+2\beta+2}},$$

$$\mu = -\alpha - 2\beta - 1;$$

как обычно в таких представлениях один интеграл можно преобразовать в другой при помощи подходящей замены переменной интегрирования и пределов интегрирования. Для начала мы можем считать вещественные части α и β положительными, так как противоположный случай можно потом получить посредством аналитического продолжения. Если $\operatorname{Re} \alpha$ и $\operatorname{Re} \beta > 0$, то подходящими пределами интеграла в первом представлении будут $t = z$ и $t = \infty$; кроме того, интеграл можно взять по замкнутому контуру вокруг точек -1 , $+1$ и z в таком порядке, чтобы после обхода P возвратилась к своему исходному значению.

Отправляемся от случая $\beta = 0$, найдем сначала решение, пропорциональное производной порядка α от $(z^2 - 1)^\alpha$, если $\alpha \geq 0$ целое. Из формулы (4.3.1) мы видим, что проще всего взять второй упомянутый интеграл по замкнутому контуру, окружающему точку $t = z$, и, например, точку $t = 1$. Соответственно положим

$$T_\alpha^0(z) = P_\alpha(z) = A \oint_D \frac{(t^2 - 1)^\alpha}{(t - z)^{\alpha+1}} dt = \frac{2\pi i A}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n,$$

где $\alpha = n = 0, 1, 2, \dots$, а контур обходит против часовой стрелки обе точки $t = 1$ и $t = z$, как это показано на рис. 5.8. Подинтегральная

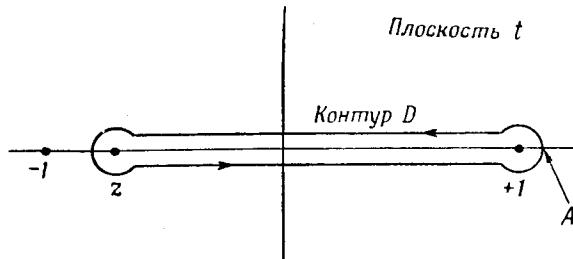


Рис. 5.8. Контур D для интегрального представления функции Лежандра первого рода.

функция предполагается вещественной в точке A , если z расположено на вещественной оси между $+1$ и -1 . Заметим, что если z находится на вещественной оси слева от -1 , то (если α не целое) интеграл принимает различные значения в зависимости от того, проходит ли контур сверху или снизу точки $t = -1$. Поэтому мы сделаем разрез вдоль отрицательной вещественной полуоси от -1 до $-\infty$, чтобы сохранить функцию $T_\alpha^0(z)$ однозначной.

Для $-1 < \operatorname{Re} \alpha < 0$ интеграл по замкнутому контуру можно заменить на простой интеграл от $t = z$ до $t = 1$. Отсюда, полагая $t = 1 - 2u$ и применяя формулу (5.3.19), получим разложение P_α в ряд

$$\begin{aligned} T_\alpha^0(z) &= -2iA \sin(\pi\alpha) \int_z^1 (t - z)^{-\alpha-1} (1 - t)^\alpha (1 + t)^\alpha dt = \\ &= \frac{2\pi i A 2^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(-\alpha)} \int_0^{(1-z)/2} \left(\frac{1-z}{2} - u \right)^{-\alpha-1} u^\alpha (1-u)^\alpha du = \\ &= 2\pi i A 2^\alpha F[-\alpha, \alpha + 1 | 1 | (1-z)/2], \end{aligned}$$

причем окончательный результат можно распространить при помощи аналитического продолжения на всю область значений α , для которых

гипергеометрический ряд аналитичен. Так как удобно считать $T_\alpha^0(1) = 1$, то положим $A = 1/2^{\alpha+1} \pi i$, так что

$$P_\alpha(z) = T_\alpha^0(z) = \frac{1}{2^{\alpha+1} \pi i} \oint_D \frac{(t^2 - 1)^\alpha}{(t - z)^{\alpha+1}} dt = F\left(-\alpha, \alpha + 1; 1; \frac{1-z}{2}\right); \quad (5.3.24)$$

эту формулу можно принять за основное определение функции Лежандра $P_\alpha(z)$. Заметим, что $P_{-\alpha-1}(z) = P_\alpha(z)$ в силу симметрии F .

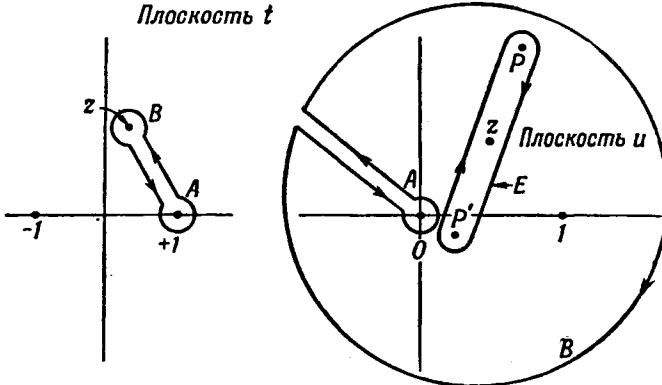


Рис. 5.9. Контур E для интегрального представления функции Лежандра первого рода.

Эта формула позволяет также подсчитать поведение $P_\alpha(z)$ для очень больших значений z . На основе соотношения (5.3.17)

$$P_\alpha(z) = F\left(-\alpha, \alpha + 1; 1; \frac{1-z}{2}\right) = z^\alpha F\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}; 1; 1 - \frac{1}{z^2}\right).$$

Применяя формулу (5.2.49) и равенства $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x$ и $\sqrt{\pi}\Gamma(2x) - 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$, в конце концов получаем, что

$$\begin{aligned} P_\alpha(z) &= \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha + 1)} (2z)^\alpha F\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}; \frac{1-2\alpha}{2}; \frac{1}{z^2}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)} \frac{\operatorname{tg}(\pi\alpha)}{(2z)^{\alpha+1}} F\left(\frac{2+\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2}; \frac{2\alpha+3}{2}; \frac{1}{z^2}\right), \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

так что при положительном α для очень больших z P_α имеет порядок z^α .

Другое полезное интегральное представление можно получить из формулы (5.3.24), если положить $u = \frac{1}{2}(t^2 - 1)/(t - z)$ или $t = u + \sqrt{u^2 - 2uz + 1}$, где t вещественно для вещественных z и u , $|z| < 1$ и $u > 1$. Преобразованный интеграл имеет вид

$$P_\alpha(z) = T_\alpha^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_E \frac{u^\alpha du}{\sqrt{1-2uz+u^2}},$$

где контур E показан на рис. 5.9; часть A , соответствующая обходу около $t = 1$, переходит в обход вокруг $u = 0$, а часть B , бывшая обходом вокруг $t = z$, переходит в обход на очень большом расстоянии вокруг точки $u = 0$ вне $u = 1$ и $u = z$. Функция $\sqrt{1-2uz+u^2}$ имеет нули при

$u = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$ (на рис. 5.9 точки P и P'), так что наш контур приводится к контуру, обозначенному через E , обходящему эти две точки.

Так как $P_\alpha(z) = P_{-\alpha-1}(z)$, то имеем также

$$P_\alpha(z) = T_\alpha^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_E \frac{u^{-\alpha-1} du}{\sqrt{u^2 - 2uz + 1}}. \quad (5.3.26)$$

Если α целое положительное, то интеграл по большой окружности B обращается в нуль и E приводится к окружности A с центром в $u=0$, так что по формуле (4.3.1)

$$P_n(z) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{du^n} \frac{1}{\sqrt{u^2 - 2uz + 1}} \right]_{u=0}$$

и при помощи ряда Тейлора (4.3.3) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-2hz+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z), \quad (5.3.27)$$

где $|h|$ должно быть меньше расстояния от начала координат до точек P или P' рис. 5.9, а $|z| \leq 1$. Аналогично при помощи ряда Лорана и интеграла с u^α получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-2hz+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h^{n+1}} P_n(z),$$

где $|h|$ должно быть больше чем $|z \pm \sqrt{z^2 - 1}|$ либо $z \leq 1$. Отсюда получаем полезную общую формулу

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta + r_2^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_2^n}{r_1^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta), \quad r_2 < r_1. \quad (5.3.28)$$

Функции Лежандра второго рода. Второе решение уравнения Лежандра должно получиться при помощи контура, отличного от того, который был в интегральном выражении (5.3.24). Мы не можем просто применить вид второго решения гипергеометрического уравнения, данный в формуле (5.3.18), так как для $c=1$ $y_2=y_1$. В данном случае, так как присоединенная билинейная форма для (5.3.24) обращается в нуль при $t=\pm 1$, для образования второго решения можно применить интеграл

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha (z-t)^{-\alpha-1} dt.$$

Поэтому мы определяем функцию

$$Q_\alpha(z) = \frac{1}{2^{\alpha+1}} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^\alpha}{(z-t)^{\alpha+1}} dt \quad (5.3.29)$$

как функцию Лежандра второго рода. Для этой формы $\operatorname{Re} \alpha > -1$, а z не должно быть вещественным числом между -1 и $+1$.

Для отрицательных значений $\operatorname{Re} \alpha (\operatorname{Re} \alpha < -1)$ нам надо взять контурный интеграл вокруг $+1$ и -1 . Чтобы присоединенная билинейная форма вернулась к своему исходному значению, сделаем контур имеющим вид восьмерки, обходящей вокруг $t=-1$ в положительном направлении,

а вокруг $t = +1$ в отрицательном направлении. Отсюда, после преобразований,

$$Q_\alpha(z) = \frac{-1}{2^{\alpha+2} i \sin(\pi\alpha)} \oint_C \frac{(t^2-1)^\alpha}{(z-t)^{\alpha+1}} dt,$$

если только α не целое. Об оставшемся случае, когда α целое отрицательное, можно позаботиться, положив $Q_{-n}(z) = Q_{n-1}(z)$, что допустимо в силу нашего замечания на стр. 559. Обе интегральные формулы показывают, что для однозначности Q надо произвести разрез от $z = +1$ до $z = -1$.

Если α целое положительное или нуль, интеграл (5.3.29) берется, что даст

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= \frac{1}{2} \ln[(z+1)/(z-1)], \quad Q_1(z) = \\ &= \frac{1}{2} z \ln[(z+1)/(z-1)] - 1 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Даже если α не целое, $Q_\alpha(z)$ имеет логарифмические особенности при $z = \pm 1$. Для больших значений z можно произвести разложение в ряд по степеням $1/z$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_\alpha(z) &= \\ &= \frac{1}{(2z)^{\alpha+1}} \int_{-1}^1 dt \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+m+1)}{\Gamma(\alpha+1)m!} \left(\frac{t}{z}\right)^m (1-t^2)^\alpha \right\}, \\ &\quad m = 2n. \end{aligned}$$

Интегралы для нечетных m равны нулю, так что можно положить $u = t^2$ и получить

$$\begin{aligned} Q_\alpha(z) &= \frac{1}{(2z)^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2n+1)} \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{z^{2n}}\right) \int_0^1 u^{n-\frac{1}{2}} (1-u)^\alpha du, \\ &\quad m=2n \end{aligned}$$

Применяя формулу (4.5.54) для подсчета интегралов и равенство $\sqrt{\pi}\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$ несколько раз, мы в конце концов придем к выражению для Q_α , полезному для больших значений z

$$Q_\alpha(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{(2z)^{\alpha+1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)} F\left(\frac{2+\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2} \mid \alpha + \frac{3}{2} \mid \frac{1}{z^2}\right), \quad (5.3.30)$$

если только α не является целым отрицательным (в последнем особом случае $Q_{-n} = Q_{n-1}$). Отсюда мы видим, что $Q_\alpha(z) \rightarrow 0$, если только $\operatorname{Re} \alpha > -1$; сравните это с соответствующим выражением (5.3.25) для $P_\alpha(z)$.

Имеется несколько интересных взаимосвязей между функциями Лежандра первого и второго рода. Одну из них можно получить посредством показанного на рис. 5.10 преобразования контура для $P_\alpha(-z)$. Положим сначала $t = -u$ в контурном интеграле для $P_\alpha(-z)$, а затем заменим

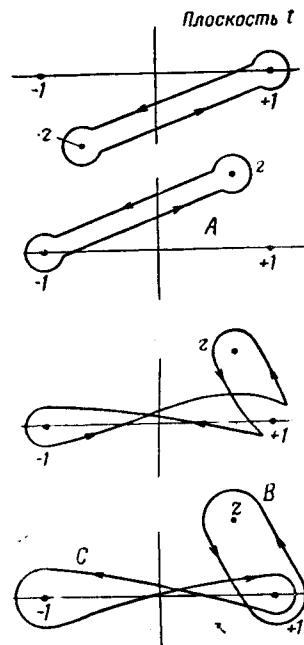


Рис. 5.10. Преобразование контура для установления связи $P_\alpha(-z)$ с $P_\alpha(z)$ и $Q_\alpha(z)$.

контуры, как показано

$$\begin{aligned} P_\alpha(-z) &= \frac{-1}{2^{\alpha+1}\pi i} \oint_A \frac{(u^2-1)^\alpha}{(z-u)^{\alpha+1}} du = \\ &= \frac{-1}{2^{\alpha+1}\pi i} \oint_C \frac{(u^2-1)^\alpha}{(z-u)^{\alpha+1}} du - \frac{1}{2^{\alpha+1}\pi i} \oint_B \frac{(u^2-1)^\alpha}{(z-u)^{\alpha+1}} du. \end{aligned}$$

Но контур C как раз такой, как при представлении функции Q_α , а контур B — функции P_α . Кроме того, $z-u$ во втором интеграле надо заменить на $u-z$, чтобы получилось так же, как в (5.3.24). Если $\operatorname{Im} z > 0$, как показано на чертеже, то $z-u = e^{i\pi}(u-z)$; если $\operatorname{Im} z < 0$, то $z-u = -e^{-i\pi}(u-z)$. Отсюда получаем

$$P_\alpha(-z) = -[(2/\pi \sin(\pi\alpha)) Q_\alpha(z) + e^{\mp i\pi\alpha} P_\alpha(z)], \quad (5.3.31)$$

где знак — в показателе надо взять, если $\operatorname{Im} z > 0$, а знак $+$, если $\operatorname{Im} z < 0$. Это равенство показывает природу особенности $P_\alpha(z)$. Если только α не целое, то $P_\alpha(z)$ (равное единице при $z=1$) имеет логарифмическую особенность при $z=-1$; если же n целое, то $P_n(-1) = (-1)^n P_n(1) = (-1)^n$.

Эта формула дает также возможность получить выражение $Q_{-\alpha-1}$ через Q_α и P_α для любых значений α . Так как для всех α имеем $P_\alpha(z) = P_{-\alpha-1}(z)$, то выведенное равенство можно преобразовать в

$$Q_{-\alpha-1}(z) = Q_\alpha(z) - \pi \operatorname{ctg}(\pi\alpha) P_\alpha(z), \quad (5.3.32)$$

что законно для всех не целых α . Для $\alpha = n = 0, 1, 2, \dots$ имеем простую формулу $Q_{-n-1}(z) = Q_n(z)$.

Так как P и Q — независимые решения, то их определитель Вронского $P_\alpha Q'_\alpha - P'_\alpha Q_\alpha$ не должен равняться нулю. В силу формулы (5.2.3), поскольку $p = 2z/(z^2-1) = d \ln(z^2-1)/dz$, получаем

$$\Delta(P_\alpha, Q_\alpha) = C/(z^2-1),$$

где постоянную C можно найти, подсчитав ее значение для некоторого частного значения z . Выберем точку на бесконечности, где мы сможем применить формулы (5.3.25) и (5.3.30). Так как для очень больших z

$$P_\alpha(z) \simeq 2^\alpha \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) z^\alpha / \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1),$$

$$Q_\alpha(z) \simeq \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1) / 2^{\alpha+1} \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) z^{\alpha+1},$$

то подсчет дает

$$P_\alpha(z) Q'_\alpha(z) - P'_\alpha(z) Q_\alpha(z) \simeq (-\alpha - 1 - \alpha) / [(2\alpha + 1) z^2], \quad z \rightarrow \infty,$$

так что $C = -1$ и потому для всех значений z имеем

$$\Delta(P_\alpha, Q_\alpha) = P_\alpha(z) Q'_\alpha(z) - Q_\alpha(z) P'_\alpha(z) = 1/(1-z^2). \quad (5.3.33)$$

Следовательно, из (5.2.4) получаем

$$Q_\alpha(z) = P_\alpha(z) \int_z^\infty \frac{du}{[P_\alpha(u)]^2} (u^2 - 1).$$

Наконец, мы можем применить интегральные представления (5.3.24) или (5.3.29) для P или Q , чтобы получить рекуррентные формулы для функций Лежандра. Пусть $p_\alpha(z)$ равно $P_\alpha(z)$ или $Q_\alpha(z)$ или любой ли-

нейной комбинации этих двух функций (с коэффициентами, не зависящими от α). Тогда

$$p_\alpha(z) = \frac{K}{2^\alpha} \int \frac{(t^2 - 1)^\alpha}{(t - z)^{\alpha+1}} dt,$$

где интеграл взят по любому из числа допустимых контуров, в зависимости от выбранной линейной комбинации. В любом случае контур таков, что интеграл $\int d[(t^2 - 1)^{\alpha+1}/(t - z)^{\alpha+1}]$ равен нулю. Отсюда

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{K}{2^{\alpha+1}} \int \frac{d}{dt} \left[\frac{(t^2 - 1)^{\alpha+1}}{(t - z)^{\alpha+1}} \right] dt = \\ &= \frac{K(\alpha + 1)}{2^{\alpha+1}} \int \left\{ \frac{2t(t^2 - 1)^\alpha}{(t - z)^{\alpha+1}} - \frac{(t^2 - 1)^{\alpha+1}}{(t - z)^{\alpha+2}} \right\} dt = \\ &= \frac{K(\alpha + 1)}{2^\alpha} \int \frac{(t^2 - 1)^\alpha}{(t - z)^\alpha} dt + z \frac{K(\alpha + 1)}{2^\alpha} \int \frac{(t^2 - 1)^\alpha}{(t - z)^{\alpha+1}} dt - \frac{K(\alpha + 1)}{2^{\alpha+1}} \int \frac{(t^2 - 1)^{\alpha+1}}{(t - z)^{\alpha+2}} dt. \end{aligned}$$

Дифференцируя по z и разделив на $\alpha + 1$, имеем

$$p'_{\alpha+1}(z) - z p'_\alpha(z) = (\alpha + 1) p_\alpha(z),$$

где штрих, как обычно, означает производную по z .

Для другого соотношения произведем разложение интеграла $\int d[t(t^2 - 1)^\alpha/(t - z)^\alpha] = 0$, что даст

$$(\alpha + 1) p_{\alpha+1}(z) - (2\alpha + 1) z p_\alpha(z) + \alpha p_{\alpha-1}(z) = 0.$$

Комбинируя и дифференцируя эти равенства, получим

$$\begin{aligned} z p_\alpha(z) &= [1/(2\alpha + 1)] [(\alpha + 1) p_{\alpha+1}(z) + \alpha p_{\alpha-1}(z)], \\ p'_{\alpha+1}(z) - p'_{\alpha-1}(z) &= (2\alpha + 1) p_\alpha(z), \\ p'_\alpha(z) &= [\alpha/(z^2 - 1)] [z p_\alpha(z) - p_{\alpha-1}(z)], \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

где p_α равно P_α , или Q_α , или линейной комбинации этих функций. Наконец, применяя равенство (5.3.33), получаем еще одно соотношение между P и Q

$$\alpha [P_\alpha(z) Q_{\alpha-1}(z) - P_{\alpha-1}(z) Q_\alpha(z)] = 1.$$

Полиномы Гегенбауера. Теперь довольно легко распространить наши выкладки на более общие функции, определенные формулами (5.2.52) и следующими. В качестве основного решения мы можем взять либо функцию T_α^3 , конечную при целом α , либо же функцию $(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}m} P_{\alpha+\beta}^\beta$, упрощающуюся при целом β (если α и β целые, то обе функции равны). Мы предпочтем первый выбор, так как случай, когда α целое, а β не целое более интересен, чем противоположный. Соответственно определим [см. (5.3.21)]

$$\begin{aligned} T_\alpha^3(z) &= \frac{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)}{2^\beta \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} F \left(\alpha + 2\beta + 1, -\alpha | 1 + \beta | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} z \right) = \\ &= \frac{e^{i\pi(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+2\beta+1)}}{2^{\alpha+\beta+2} \pi \Gamma(\alpha + \beta + 1) \sin[\pi(\alpha + \beta)]} \oint_C \frac{(t^2 - 1)^{\alpha+\beta}}{(t - z)^{\alpha+1}} dt, \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

где контур C тот же, что на рис. 5.7, обходящий вокруг точек $t = 1$ и $t = z$ как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Если α целое, интеграл можно преобразовать к виду производной, данному в (5.2.53).

С другой стороны, если бы мы предпочли другое решение, мы могли определить

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}\beta} P_{\alpha+\beta}^{\beta}(z) = \frac{(z-1)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} F\left(-\alpha-\beta, \alpha+\beta+1 \mid 1-\beta \mid \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right) = \\ = \frac{e^{-i\pi(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+2\beta+1)}}{2^{\alpha+\beta+2}\pi\Gamma(\alpha+\beta+1)\sin[\pi(\alpha+\beta)]} \oint_C \frac{(t^2-1)^{\alpha+\beta}}{(t-z)^{\alpha+2\beta+1}} dt, \quad (5.3.36)$$

которое при целом положительном $\beta = m$ равно $T_m^m(z)$, совпадающей в данном случае с m -й производной функцией Лежандра $P_{m+\alpha}(z)$. Если как α , так и β целые, то

$$T_n^m(z) = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}m} P_{m+n}^m(z) = \frac{d^m}{dz^m} T_{m+n}^0(z) = \\ = \frac{(n+2m)!}{2^{m+n}n!(n+m)!} \frac{1}{(z^2-1)^m} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^{m+n} = \\ = \frac{1}{2^{m+n}(n+m)!} \frac{d^{n+2m}}{dz^{n+2m}} (z^2-1)^{m+n}, \quad (5.3.37)$$

как указано в (5.2.53). Эти полиномы называются *присоединенными полиномами Лежандра*.

Из симметрии гипергеометрических функций имеем

$$T_{-\alpha-2\beta-1}^{\beta}(z) = \frac{\sin \pi(\alpha+2\beta)}{\sin(\pi\alpha)} T_{\alpha}^{\beta}(z), \quad P_{\alpha+\beta}^{\beta}(z) = P_{-\alpha-\beta-1}^{\beta}(z),$$

и для $\beta = m$ (целому), применяя формулу $F(a, b \mid c \mid w) = (1-w)^{c-a-b} \times F(c-b, c-a \mid c \mid w)$, видим, что

$$T_{\alpha}^{-m}(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}m} P_{\alpha-m}^{-m}(z) = \\ = \frac{(z-1)^m}{\Gamma(1+m)} F\left(m-\alpha, \alpha-m+1 \mid 1+m \mid \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right) = \\ = \frac{(z^2-1)^m}{2^m m!} F\left(2m-\alpha, 1+\alpha \mid 1+m \mid \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right) = \\ = \frac{\Gamma(\alpha-2m+1)}{\Gamma(\alpha+1)} (z^2-1)^m T_{\alpha-2m}^m(z), \\ (-1)^m P_{\gamma}^{-m}(z) = \frac{\Gamma(\gamma-m+1)}{\Gamma(\gamma+m+1)} P_{\gamma}^m(z). \quad (5.3.38)$$

Можно найти совокупность формул, аналогичных (5.3.26) и (5.3.27), и показать, что производящая функция для полиномов Гегенбауера имеет вид

$$\frac{2^{\beta}\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)/\sqrt{\pi}}{(1+h^2-2hz)^{\beta+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n T_n^{\beta}(z), \quad |h| < 1. \quad (5.3.39)$$

Применяя формулу (5.3.5) и равенство

$$F\left(a, b \mid 2b \mid \frac{2}{1-z}\right) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^a F\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a+\frac{1}{2} \mid b+\frac{1}{2} \mid \frac{1}{z^2}\right),$$

тесно связанное с (5.3.17), получаем выражение этих решений для больших значений z :

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{\beta}(z) &= \frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1) \sin(\pi\alpha) z^{-\alpha-2\beta-1}}{\sqrt{\pi} 2^{\alpha+\beta+1} \cos[\pi(\alpha+\beta)] \Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{3}{2}\right)} \times \\ &\quad \times F\left(\frac{\alpha+2\beta+1}{2}, \frac{\alpha+2\beta+2}{2} \mid \alpha+\beta+\frac{3}{2} \mid \frac{1}{z^2}\right) + \\ &+ \frac{2^{\alpha+\beta} \Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1)} z^{\alpha} F\left(-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha \mid \frac{1}{2}-\alpha-\beta \mid \frac{1}{z^2}\right), \quad (5.3.40) \\ (1-z^2)^{-\frac{1}{2}\beta} P_{\alpha+\beta}^{\beta}(z) &= \frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1) \sin[\pi(\alpha+2\beta)] z^{-\alpha-2\beta-1}}{\sqrt{\pi} 2^{\alpha+\beta+1} \cos[\pi(\alpha+\beta)] \Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{3}{2}\right)} \times \\ &\quad \times F\left(\frac{\alpha+2\beta+1}{2}, \frac{\alpha+2\beta+2}{2} \mid \alpha+\beta+\frac{3}{2} \mid \frac{1}{z^2}\right) + \\ &+ \frac{2^{\alpha+\beta} \Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1)} z^{\alpha} F\left(-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha \mid \frac{1}{2}-\alpha-\beta \mid \frac{1}{z^2}\right), \end{aligned}$$

которое показывает, что обе эти функции стремятся к бесконечности при $z \rightarrow \infty$, кроме случая $0 > \alpha > -2\beta - 1$.

Если выбрать первым решением уравнения (5.2.51) функцию $T_{\alpha}^{\beta}(z)$, то богатый набор вторых решений может нас даже затруднить. Функция $T_{-\alpha-2\beta-1}^{\beta}(z)$, конечно, пропорциональна $T_{\alpha}^{\beta}(z)$ и потому не независима, но функции, которые можно обозначить одним из следующих способов

$$\begin{aligned} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}\beta} P_{\alpha+\beta}^{\beta}(z) &= (z^2-1)^{-\beta} \frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\sin[\pi(\alpha+2\beta)]}{\sin(\pi\alpha)} T_{-\alpha-1}^{-\beta}(z) = \\ &= (1-z^2)^{-\frac{1}{2}\beta} P_{-\alpha-\beta-1}^{\beta}(z) = (z^2-1)^{-\beta} \frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)} T_{\alpha+2\beta}^{-\beta}(z), \end{aligned}$$

независимы от $T_{\alpha}^{\beta}(z)$ (если только β не целое), так же как $T_{\alpha}^{\beta}(-z)$ и $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}\beta} P_{\alpha+\beta}^{\beta}(-z)$. Кроме того, имеются функции с противоположным знаком аргумента. С помощью формулы (5.2.49) можно показать, что

$$\sin(\pi\beta) T_{\alpha}^{\beta}(z) = \sin \pi(\alpha+\beta) T_{\alpha}^{\beta}(-z) - \sin \pi\alpha (1-z^2)^{-\frac{1}{2}\beta} P_{\alpha+\beta}^{\beta}(-z);$$

отсюда также получаются соотношения специального вида, если β или α целое.

Однако все эти функции стремятся к бесконечности при $z \rightarrow \infty$ (за исключением случая, когда $0 > \alpha > -2\beta - 1$). Часто будет предпочтительней иметь второе решение, стремящееся к нулю при $z \rightarrow \infty$ для $\alpha > 0$, как это было для функций Q , определенных формулой (5.3.29). Кроме того, желательно иметь решение, остающееся независимым от $T_{\alpha}^{\beta}(z)$, даже если β целое.

Такую функцию можно получить, если в формуле (5.3.36) взять другой контур интегрирования. Положим

$$V_{\alpha}^{\beta}(z) = \frac{e^{-i\pi(\alpha+\beta)} \Gamma(\alpha+2\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+2} i \Gamma(\alpha+\beta+1) \sin[\pi(\alpha+\beta)]} \oint_Q \frac{(t^2-1)^{\alpha+\beta}}{(t-z)^{\alpha+2\beta+1}} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{i\pi\beta} 2^\beta V \pi \Gamma(\alpha + 2\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + \frac{3}{2}) (2z)^{\alpha+2\beta+1}} F\left(\frac{\alpha+2\beta+1}{2}, \frac{\alpha+2\beta+2}{2} \mid \alpha + \beta + \frac{3}{2} \mid \frac{1}{z^2}\right) = \\
&= \frac{-\pi e^{i\pi\beta}}{2 \sin(\pi\beta)} \left[T_\alpha^\beta(z) - \frac{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) (z^2 - 1)^\beta} T_{-\alpha+2\beta}^{-\beta}(z) \right] = \\
&= \frac{\pi}{2 \sin[\pi(\alpha + 2\beta)]} [e^{\mp i\pi(\beta+\alpha)} T_\alpha^\beta(z) - e^{\pm i\pi\beta} T_\alpha^\beta(-z)] = \\
&= e^{2\pi i\beta} \frac{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) (z^2 - 1)^\beta} V_{\alpha+2\beta}^{-\beta}(z) = e^{i\pi\beta} (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}\beta} Q_{\alpha+\beta}^\beta(z). \quad (5.3.41)
\end{aligned}$$

Контур у интеграла имеет вид восьмерки, обходящей $+1$ и -1 , как это было для $Q_\alpha(z)$. Вторая строчка показывает, что V стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, если $\operatorname{Re}(\alpha + 2\beta + 1) > 0$, что мы и желали. Третья строчка указывает взаимосвязь между V и двумя независимыми решениями T . Четвертая строчка, подобно (5.3.31), связывает решения для $+z$ и для $-z$; верхний знак надо брать при $\operatorname{Im} z > 0$, а нижний — при $\operatorname{Im} z < 0$. Последняя строчка показывает, что это второе решение выбрано так, что перемена знака у верхнего индекса не порождает независимой функции, в противоположность T_α^β , для которого соотношение (5.3.38) имеет место только для целого β . С другой стороны, $V_{-\alpha-2\beta-1}^\beta$ не пропорционально V_α^β , но

$$V_\alpha^\beta(z) = V_{-\alpha-2\beta-1}^\beta(z) + [\pi e^{i\pi\beta} \cos \pi(\alpha + \beta)/\sin(\pi\alpha)] T_\alpha^\beta(z).$$

Если $\beta = m$ целому, то третье выражение в (5.3.41) стремится к конечному пределу; однако в этом случае имеют место следующие, более простые формулы:

$$V_\alpha^m(z) = \frac{d^m}{dz^m} Q_{\alpha+m}(z), \quad V_{-\alpha-2m-1}^m = \frac{\Gamma(\alpha + 2m + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) (z^2 - 1)^m} V_{-\alpha-1}^{-m}. \quad (5.3.42)$$

Случай $\beta = \pm \frac{1}{2}$ особо интересен как из-за получающихся полиномов, так и в силу раскрывающихся специальных свойств гипергеометрических функций

$$\begin{aligned}
T_\alpha^{-\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{ch}[\alpha \operatorname{Ar ch} z]}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{(1 - z^2)^{\frac{1}{4}}} P_{\alpha - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z), \\
T_\alpha^{-\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sh}[(\alpha + 1) \operatorname{Ar ch} z]}{\sqrt{z^2 - 1}} = \alpha \frac{(1 - z^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{z^2 - 1}} P_{\alpha - \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(z), \\
V_\alpha^{-\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{i}{\alpha} \right) \exp[-\alpha \operatorname{Ar ch} z] = -\frac{1}{\alpha} \sqrt{z^2 - 1} V_{\alpha-1}^{\frac{1}{2}}(z); \quad (5.3.43)
\end{aligned}$$

для целого α они пропорциональны полиномам Чебышева.

Вырожденная (конфлюентная) гипергеометрическая функция. Гипергеометрическое уравнение для $F(a, b+c|c|z/b)$ имеет вид

$$z \left(1 - \frac{z}{b}\right) F'' + \left[c - (a+b+c+1) \frac{z}{b}\right] F' - a \left(1 + \frac{c}{b}\right) F = 0.$$

Это уравнение имеет регулярные особые точки в 0 , b и ∞ с индексами $(0, 1-c)$, $(0, -a-b)$ и $(a, b+c)$ соответственно. Если b стремится к беско-

нечности, то при этом две особые точки (b и ∞) совпадают друг с другом, а один из индексов в каждой из совпадающих точек стремится к бесконечности (индекс $-a-b$ в точке b и индекс $b+c$ в точке ∞). Этот двойной процесс предельного перехода называется *слиянием* особых точек; он был указан ранее на стр. 508. Получающееся уравнение

$$zF'' + (c-z)F' - aF = 0 \quad (5.3.44)$$

называется *вырожденным (конфлюентным) гипергеометрическим уравнением* [см. (5.2.57)]. Решение, аналитическое при $z=0$, получается в пределе из $F(a, b+c | c | z/b)$, когда b стремится к бесконечности

$$F(a | c | z) = 1 + \frac{a}{c}z + \frac{a(a+1)}{2!c(c+1)}z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{3!c(c+1)(c+2)}z^3 + \dots ; \quad (5.3.45)$$

оно называется *вырожденным гипергеометрическим рядом*.

Чтобы увидеть, как действует это слияние на интегральное представление, мы отправимся от представления, полученного из (5.3.14) заменой t на $1/t$

$$\begin{aligned} F\left(a, b+c | c | \frac{z}{b}\right) &= F\left(b+c, a | c | \frac{z}{b}\right) = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \left(1 - \frac{zt}{b}\right)^{-b-c} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt. \end{aligned}$$

Предельный переход $b \rightarrow \infty$ меняет природу ядра $(1-zt/b)^{-b-c}$, делая его показательной функцией, вместо алгебраической, так как

$$\left[1 - \frac{z}{b}\right]^{-b} \simeq e^z \text{ при } b \rightarrow \infty.$$

Особенность взамен точки ветвления при $x=b$ становится существенной особенностью при $x=\infty$, и в результате интегральное представление для вырожденной гипергеометрической функции имеет вид

$$F(a | c | z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad (5.3.46)$$

если только $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$. Для других областей значений a и c можно построить представление при помощи соответствующих контурных интегралов, которое будет пригодно, если только c не будет целым отрицательным или нулем, когда даже разложение в ряд «разлетается». В этих случаях, которые будут рассмотрены позже, решение имеет логарифмическую точку ветвления при $z=0$.

Второе решение уравнения (5.3.44) можно найти, производя слияние во втором решении $z^{1-c}F(a-c+1, b+1 | 2-c | z/b)$ гипергеометрического уравнения или в результате подстановки в уравнение (5.3.44) вместо решения функции $z^{1-c}f(z)$, в результате чего для f вновь получится уравнение вида (5.3.44). В любом случае найденное второе решение имеет вид

$$z^{1-c}F(a-c+1 | 2-c | z)$$

и пригодно, если c не равно 2, 3, 4, ... Если $c=1$, этот ряд сходится, но совпадает с первым решением $F(a | 1 | z)$, так что данное выражение не представляет собой второго решения ни для какого целого положительного c . Второе решение в этих частных случаях будет получено позже. Нет необходимости исследовать отдельно случай $c < 1$, так как при $c=2-c' < 1$ можно умножить наши решения на $z^{c-1}=z^{1-c'}$ и на-

звать исходное второе решение первым, и наоборот, в результате чего c' , то есть новое c станет больше 1.

Из интегрального представления можно вывести интересное соотношение, впервые указанное в (5.2.62); именно, из

$$\int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt = e^z \int_0^1 e^{-zu} u^{c-a-1} (1-u)^{a-1} du$$

следует, что $F(a|c|z) = e^z F(c-a|c|-z)$. Подобным образом другой формой второго решения является $z^{1-c} e^z F(1-a|2-c|-z)$.

Преобразование Лапласа. Однако до перехода к дальнейшему исследованию решения нам надо более тщательно рассмотреть новый вид интегрального представления, так как мы теперь перешли от преобразования Эйлера к преобразованию Лапласа, указанному на стр. 549. Согласно стр. 547, где мы исследовали интегральные представления вообще, мы видим, что показательное ядро имеет некоторые преимущества. Например, так как $de^{zt}/dz = te^{zt}$ и $ze^{zt} = de^{zt}/dt$, то если наше исходное уравнение имеет вид

$$0 = \mathcal{L}_z(\psi) = f \frac{d^2\psi}{dz^2} + g \frac{d\psi}{dz} + h\psi = \sum_{m,n} A_{mn} z^m \frac{d^n\psi}{dz^n},$$

$$f = \sum_m A_{m2} z^m, \quad g = \sum_m A_{m1} z^m, \quad h = \sum_m A_{m0} z^m,$$

то соответствующее преобразованное выражение таково:

$$\mathcal{M}_t(e^{zt}) = \sum_{m,n} A_{mn} t^n \frac{d^m}{dt^m} e^{zt}$$

и сопряженное к нему даст уравнение

$$\tilde{\mathcal{M}}_t(v) = \sum_{m,n} (-1)^m A_{mn} \frac{d^m}{dt^m} (t^n v) = 0.$$

Если это уравнение проще решить, чем $\mathcal{L}_z(\psi) = 0$, то преобразование Лапласа будет пригодно для интегрального представления.

Например, если в исходном уравнении $\mathcal{L}(\psi) = f\psi'' + g\psi' + h\psi = 0$, мночлены f , g и h не выше первой степени относительно z , то в дифференциальном операторе \mathcal{M}_t не будет производных по t выше первого порядка и $v(t)$ можно легко найти. Наиболее общим видом уравнения такого рода является

$$(z - \delta) y'' + (2\epsilon z - \xi) y' + (\eta z - \zeta) y = 0,$$

причем δ можно исключить при помощи подходящего изменения начала отсчета z . Это уравнение для y можно получить из следующего уравнения для ψ , где $\psi = z^\alpha y$

$$\psi'' + \left(2\epsilon - \frac{2\alpha + \xi}{z} \right) \psi' + \left[\eta - \frac{2\alpha\epsilon + \xi}{z} + \frac{\alpha(\alpha + \xi + 1)}{z^2} \right] \psi = 0;$$

оно, в свою очередь, имеет общий вид (5.2.55). Это уравнение имеет регулярную особую точку при $z = 0$ с индексами α и $\alpha + \xi + 1$ и иррегулярную точку $z = \infty$. Подстановка $y = F \exp [(-z + \sqrt{\epsilon - \eta})z]$ приводит к вырожденному гипергеометрическому уравнению для F . Итак, именно вырожденное гипергеометрическое уравнение особенно хорошо поддается решению при помощи преобразования Лапласа.

Другие уравнения, имеющие в качестве f , g или h многочлены выше первой степени, также можно решать при помощи преобразования Лапласа, однако получающееся уравнение для v будет иметь второй порядок (или выше) и должно быть особенно простым, чтобы его решение имело замкнутый вид.

Во всяком случае, мы начнем наше изучение интегрального представления Лапласа с применения его к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Согласно этому уравнению, если положить $F = \int e^{zt} v(t) dt$, то выражение $M_t(e^{zt})$, соответствующее (5.3.44), имеет вид

$$(t^2 - t)(d/dt)e^{zt} + (ct - a)e^{zt},$$

и сопряженным уравнением будет

$$\tilde{M}(v) \equiv (d/dt)(t^2 - t)v + (ct - a)v = 0$$

с решением и присоединенной билинейной формой

$$v = At^{a-1}(1-t)^{c-a-1}, \quad P = -At^a(1-t)^{c-a}e^{zt}.$$

Отсюда возможными путями интегрирования являются или путь от 0 до 1 при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, как это было дано в формуле (5.3.46), или путь от $-\infty$ до 0 при $\operatorname{Re} a > 0$ и $\operatorname{Re} z > 0$, или же двойной контур вокруг 0 и 1, возвращающий P к его исходному значению. Различные интегралы будут, конечно, представлять различные решения. Интеграл, представляющий вырожденный гипергеометрический ряд, дается формулой (5.3.46) или имеет вид контурного интеграла

$$F(a|c|z) = \frac{e^{-iz\pi a}}{4\pi^2} \Gamma(c) \Gamma(1-a) \Gamma(a-c+1) \oint_C e^{zt} t^{a-1} (t-1)^{c-a-1} dt, \quad (5.3.47)$$

где подинтегральная функция вещественна для вещественного z , если t находится на вещественной оси справа от $t=1$, а контур проходит против часовой стрелки вокруг $t=1$ и $t=0$, а затем по часовой стрелке вокруг этих точек, как на рис. 5.7. Это представление имеет место, за исключением точек, где гамма-функция не аналитична (то есть если $1-a$, c или $a-c+1$ являются целыми отрицательными).

Асимптотическое разложение. Исследуем теперь поведение $F(a|c|z)$ для очень больших значений z , применяя представление (5.3.46). На стр. 520 мы уже обсуждали осложнения, свойственные асимптотическим разложениям около иррегулярных особых точек, и указали, что если вещественная часть z велика и положительна, то

$$F(a|c|z) \underset{\operatorname{Re} z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} e^z.$$

Мы указали также, что это выражение несправедливо для $\operatorname{Re} z$ больших по абсолютной величине отрицательных; в этом случае будет, вероятно,

$$F(a|c|z) \underset{\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty}{\simeq} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a}.$$

Мы должны теперь обосновать эти предварительные результаты и попытаться понять, какие свойства асимптотического разложения порождают это любопытное, неопределенное поведение функции, придающее ей один вид для z больших положительных и другой — для z больших отрицательных.

Из формулы (5.3.46) мы видим, что если z вещественно, положительно и велико, то важнейшая часть подинтегральной функции сосредоточена вблизи $t = 1$ и интеграл не может существенно измениться, если продолжить интегрирование по t от 0 до $-\infty$. Более точно, мы можем написать

$$F(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \left[\int_{-\infty}^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt - \int_{-\infty}^0 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt \right],$$

что имеет место для положительного $\operatorname{Re} z$. Полагая $t = 1-u/z$ в первом интеграле и $t = -w/z$ во втором, имеем

$$\begin{aligned} F(a|c|z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \left\{ z^{a-c} e^z \int_0^\infty e^{-u} u^{c-a-1} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-1} du + \right. \\ &\quad \left. + (-z)^{-a} \int_0^\infty e^{-w} w^{a-1} \left(1 + \frac{w}{z}\right)^{c-a-1} dw \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.48)$$

Оба интеграла теперь имеют один и тот же вид и оказываются приближенно равными $\Gamma(c-a)$ и $\Gamma(a)$ соответственно. Отсюда первый член, содержащий множитель e^z , для большого положительного $\operatorname{Re} z$ несравненно больше второго, и потому второй член может быть опущен (хотя нам надо помнить о том, что мы его опустили, так как в этом и заключается основная причина указанного выше неопределенного поведения F).

Видоизменение рассуждения, примененного на стр. 356 для разложения в ряд Тейлора, показывает, что

$$\left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(m+1)\Gamma(a-m)} \left(-\frac{u}{z}\right)^m + D_n,$$

где $|D_n| \leq \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(n+1)\Gamma(a-n)} \left| -\frac{u}{z} \right|^{n+1}$, если $n > \operatorname{Re} a - 1$. Подставляя это в интеграл, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-u} u^{c-a-1} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-1} du &= \\ &= \Gamma(a) \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(c-a+m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(a-m)} \left(-\frac{1}{z}\right)^m + R_n = \\ &= \Gamma(c-a) \left\{ 1 + \frac{(c-a)(1-a)}{1!} \frac{1}{z} + \right. \\ &\quad + \frac{(c-a)(c-a+1)(1-a)(2-a)}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots \\ &\quad \left. \dots + \frac{(c-a) \dots (c+n-a-1)(1-a) \dots (n-a)}{n!} \frac{1}{z^n} \right\} + R_n, \end{aligned} \quad (5.3.49)$$

где

$$|R_n| \leq \left| \frac{(1-a) \dots (n-a) \Gamma(c+n-a+1)}{n! z^{n+1}} \right|.$$

Мы видим, что для конечных значений z ряд расходится, но сумма первых n членов ряда приближается к «истинному» значению, если n остается постоянным, а z беспрепятственно возрастает. Например, для $z = 10$, $|c-a| < 2$, $|1-a| < 1$ первые четыре члена ряда дают значение интеграла с точностью примерно до одной десятой процента, тогда как первые сто членов для тех же значений z и параметров дают значение, далекое от истинного.

Это свойство типично для асимптотических рядов, как об этом говорилось на стр. 410.

Из первых нескольких членов мы получаем почти точное значение, но свести ошибку к нулю можно только, делая z бесконечным.

Обычно нас интересуют значения асимптотического ряда для z , значительно больших единицы (например, для $z > 1000$). В этом случае для нас достаточно первый член ряда. Следовательно, в нашем случае мы можем написать, что $F(a|c|z) \simeq [\Gamma(c)/\Gamma(a)] z^{a-c} e^z$ для вещественных положительных больших z . Это соответствует формуле (5.2.60). Мы не включили член $[\Gamma(c)/\Gamma(c-a)] z^{-a}$, появляющийся из второго интеграла, так как этот член, вообще говоря, меньше, чем ошибка, присущая первому асимптотическому ряду, так что включать его было бы бессмысленно.

Положение совершенно отличное, если z вещественное, отрицательное и большое по абсолютной величине. В этом случае подинтегральная функция в (5.3.46) наиболее велика при t , близком к нулю, и второй интеграл в (5.3.48) значительно больше первого. В этом случае, отправляясь от формулы (5.3.46) и сохраняя только главный член, имеем (причем полагаем $z = -|z|$, $t = u/|z|$)

$$F(a|c|z) \simeq \frac{\Gamma(c)|z|^{-a}}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^\infty e^{-u} u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{|z|}\right)^{c-a-1} du \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} |z|^{-a}$$

для вещественного отрицательного большого z . Это соответствует формуле (5.2.63). Здесь мы опустили член с $e^z = e^{-|z|}$, появляющийся из первого интеграла в (5.3.48), так как этот член, вообще говоря, меньше чем ошибка, присущая асимптотическому разложению второго интеграла.

Явление Стокса. Уже из простого рассмотрения формулы (5.2.60) можно было бы видеть, что асимптотический вид F не может иметь такое выражение для всех положений z на бесконечной окружности. Если подставить $z = |z|e^{i\varphi}$, где $|z|$ очень велико, в выражение $[\Gamma(c)/\Gamma(a)] z^{a-c} e^z$, то мы видим, что это выражение не возвращается к своему исходному значению, когда φ возрастает от 0 до 2π . Однако, так как функция $F(a|c|z)$ аналитична во всей конечной части плоскости z , то из формулы, справедливой для больших z , должно следовать, что F возвращается к своему исходному значению, когда φ меняется от 0 до 2π , описывая окружность большого радиуса около начала координат. Выражение, включающее z^{a-c} , как в (5.2.60), не может правильно изображать F при больших $|z|$ для всех фазовых углов φ точки z . И мы только что показали, что это так: для z вещественных и отрицательных правильным является выражение $[\Gamma(c)/\Gamma(c-a)](-z)^{-a}$ (это второе выражение в свою очередь не может быть пригодным для всех φ , так как оно содержит член z^{-a} , который породил бы многозначность).

Чтобы увидеть более детально, как это получается, возьмем случай $z = |z|e^{i\varphi}$, где $|z|$ очень велико. Сначала возьмем φ между нулем и π (т. е. z в верхней полуплоскости). При этом путь интегрирования в (5.3.46) деформирован в путь, показанный на рис. 5.11 сплошной

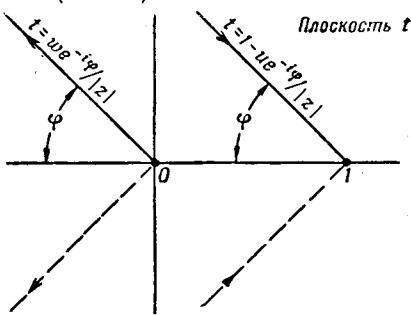


Рис. 5.11. Видоизменение контура для подсчета асимптотического поведения вырожденной гипергеометрической функции.

Независимой переменной является $z = |z|e^{i\varphi}$, причем $|z| \gg 1$.

линией, идущий из $t=0$ в $t=-\infty e^{i\varphi}$ и возвращающийся оттуда в $t=1$. Таким образом, интеграл вновь распадается на два. В первом положим $t=-we^{-i\varphi}/|z|=we^{i(\pi-\varphi)}/|z|$, а во втором $t=1-ue^{-i\varphi}/|z|$, где как u , так и w вещественны. Интегральное представление тогда приобретает вид

$$\begin{aligned} F(a|c|z) = & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \left\{ \frac{e^{|z|e^{i\varphi}-i(c-a)\varphi}}{|z|^{c-a}} \int_0^\infty e^{-u} u^{c-a-1} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-1} du + \right. \\ & \left. + \frac{e^{ia(\pi-\varphi)}}{|z|^a} \int_0^\infty e^{-w} w^{a-1} \left(1 + \frac{w}{z}\right)^{c-a-1} dw \right\} \quad (5.3.50) \end{aligned}$$

при $0 < \varphi < \pi$. Записывая только главные члены в разложениях $[1 \pm (w \text{ или } u/z)]$ (то есть предполагая, что эти величины практически равны 1 в области значений w или u , для которых подинтегральная функция не является пренебрежимо малой), мы получаем асимптотическую формулу для $z=|z|e^{i\varphi}$, $|z|$ большое, $0 < \varphi < \pi$

$$F(a|c|z) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} |z|^{a-c} e^{i(a-c)\varphi} e^{|z|e^{i\varphi}} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} |z|^{-a} e^{ia(\pi-\varphi)}.$$

Каждый из этих членов имеет неустранимую ошибку, присущую асимптотическим рядам, малую при большом z , но равную нулю только для бесконечного z . Если φ равно нулю (z вещественно и положительно), то второй член, в этом выражении меньше неустранимой ошибки в первом (и потому не должен включаться), а если φ равно π (z вещественно и отрицательно), то первый член меньше неустранимой ошибки во втором (и потому не должен включаться). Если $\varphi=\pi/2$ (z мнимое положительное), то оба члена имеют сравнимую величину и для нахождения правильного значения надо пользоваться обоими.

Чтобы найти выражение для $0 > \varphi > -\pi$, мы используем путь интегрирования, показанный на рис. 5.11 пунктиром, причем на соответствующих прямых $t=-we^{-i\varphi}/|z|=we^{-i(\varphi+\pi)}/|z|$ и $t=1-ue^{-i\varphi}/|z|$. Здесь в выражении для w мы полагаем $1-z=e^{-i(\varphi+\pi)}/|z|$ вместо примененного выше выражения $e^{i(\pi-\varphi)}/|z|$, так как мы хотим, чтобы w было вещественно и положительно, когда t находится на пунктирной линии, и так как мы провели для подинтегральной функции разрез от $t=0$ до $t=-\infty$. При этом найдем, что

$$F(a|c|z) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} |z|^{a-c} e^{i(a-c)\varphi} e^{|z|e^{i\varphi}} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} |z|^{-a} e^{-ia(\pi+\varphi)},$$

если $z=|z|e^{i\varphi}$ и $0 > \varphi > -\pi$. Заметим, что если φ меняется от 0 до $-\pi/2$, то второй член выходит из своего «затмения» при $\varphi=0$, отличаясь от соответствующего члена при $\varphi=\pi/2$ на множитель $e^{-2\pi ia}$. Это внезапное изменение второго члена при $\varphi=0$ не влечет за собой разрыва F , когда φ проходит через нуль, ибо как раз при $\varphi=0$ второй член меньше ошибки, присущей первому члену, и любое изменение второго члена не играет роли.

С другой стороны, это изменение как раз то, которое требуется, чтобы сделать второй член вещественным как при $\varphi=\pi$, так и при $\varphi=-\pi$. Если бы дополнительный множитель $e^{-2\pi ia}$ не был включен в выражение для второго члена при $0 > \varphi > -\pi$, то асимптотическая формула при $\varphi=-\pi$ давала бы результат, отличающийся от результата при $\varphi=+\pi$ множителем $e^{2\pi ia}$, чего не должно быть, так как функция F аналитична около $z=0$. Чтобы соблюсти эту аналитичность, два члена в асимптотическом разложении «играют в прятки» друг с другом; когда

один из них испытывает «затмение», становясь меньше чем ошибка в другом, то он скачком меняет фазу, выходя из тьмы как раз с таким дополнительным фазовым множителем, чтобы обеспечить непрерывность в той области φ , где этот член велик.

Это подобное игре в прятки поведение членов асимптотического разложения называется *явлением Стокса*, который первым обратил на него внимание. Оно должно проявляться в первом члене при $\varphi = \pi$, где первый член меньше чем ошибка во втором. Например, чтобы F при $\varphi = 2\pi$ равнялась F при $\varphi = 0$, в области $\pi < \varphi < 2\pi$ должно быть

$$F(a|c|z) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} |z|^{a-c} e^{i(\varphi-2\pi)(a-c)} e^z + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} |z|^{-a} e^{ia(\pi-\varphi)}$$

с дополнительным множителем $e^{2\pi i(c-a)}$ в первом члене. Этот результат, конечно, получается из асимптотического вычисления интегралов; так, при $\pi < \varphi < 2\pi$ мы должны в первом интеграле положить $t = 1 - ue^{i(2\pi-\varphi)} / |z|$, чтобы нейтрализовать разрез от $t = 0$ до $t = -\infty$.

Собирая все наши формулы, мы можем написать для $z = |z|e^{i\varphi}$, где $|z|$ большое,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a|c|z) \simeq & \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma(a)|z|^{-a}, & \varphi = -\pi, \\ \Gamma(c-a)|z|^{a-c} e^{i(a-c)\varphi} e^z + \Gamma(a)|z|^{-a} e^{-ia(\pi+\varphi)}, & -\pi < \varphi < 0, \\ \Gamma(c-a)|z|^{a-c} e^z, & \varphi = 0, \\ \Gamma(c-a)|z|^{a-c} e^{i(a-c)\varphi} e^z + \Gamma(a)|z|^{-a} e^{ia(\pi-\varphi)}, & 0 < \varphi < \pi, \\ \Gamma(a)|z|^{-a}, & \varphi = \pi, \\ \Gamma(c-a)|z|^{a-c} e^{i(a-c)(\varphi-2\pi)} e^z + \Gamma(a)|z|^{-a} e^{ia(\pi-\varphi)}, & \pi < \varphi < 2\pi, \\ \Gamma(c-a)|z|^{a-c} e^z, & \varphi = 2\pi \text{ и т. д.}; \end{array} \right. & (5.3.51) \end{aligned}$$

отсюда ясно явление Стокса, так как когда φ становится целым кратным π , каждый член по очереди исчезает, появляясь с другой стороны как раз с такой переменной фазы, чтобы сохранить однозначность функции при совершении обхода.

Решения третьего рода. Для удовлетворения граничных условий при больших значениях z более удобно применять решения, стремящиеся к z^{-a} или к $z^{a-c} e^z$, но не к обеим функциям сразу. Формула (5.3.50) показывает, как это можно сделать. Для $z = |z|e^{i\varphi}$ определяем

$$\begin{aligned} U_1(a|c|z) &= \frac{e^z z^{a-c}}{\Gamma(c-a)} \int_0^\infty e^{-u} u^{c-a-1} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-1} du \simeq z^{a-c} e^z, \\ 0 < \varphi < 2\pi, & (5.3.52) \\ U_2(a|c|z) &= \frac{e^{ia\pi} z^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-u} u^{a-1} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{c-a-1} du \simeq e^{ia\pi} z^{-a}, \\ -\pi < \varphi < \pi. & \end{aligned}$$

Если $\operatorname{Re}(a-c) > 1$, интеграл для U_1 не пригоден и надо применить контур вокруг точки ветвления при $u=0$. Пригодный для этого контур

показан на рис. 5.12, причем подинтегральная функция вещественна в точке A , если z находится на отрицательной вещественной полусоси. Соответствующие контурные интегралы для U имеют вид

$$U_1(a|c|z) = \frac{\Gamma(a-c+1)}{2\pi i} z^{a-c} e^z \oint_P e^u u^{c-a-1} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{a-1} du,$$

$$U_2(a|c|z) = \frac{\Gamma(1-a)}{2\pi i} e^{ia\pi} z^{-a} \oint_F e^u u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{c-a-1} du$$
(5.3.53)

и пригодны, если только $c-a$ (или соответственно a) не является целым положительным. Так как точка $u=\mp z$ должна находиться вне контура, то мы видим, что надо провести разрез для U_1 вдоль положительной

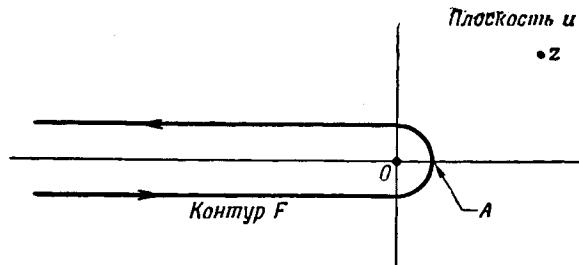


Рис. 5.12. Контур для интегрального представления вырожденной гипергеометрической функции третьего рода.

Подинтегральная функция вещественна в точке A , если z вещественно и положительно.

вещественной полусоси, а для U_2 вдоль отрицательной вещественной полусоси. Это делает явление Стокса для U несколько отличным от того, которое было для F ; оно будет рассмотрено на стр. 576.

Эти решения можно называть *вырожденными гипергеометрическими функциями третьего рода*. Они являются такими же хорошими решениями уравнения (5.3.44), как $F(a|c|z)$ и $z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z)$, и через них можно выразить любое решение. Значение определителя Вронского для двух независимых решений уравнения (5.3.44) таково [см. (5.2.3)]:

$$\Delta = Ae^{-\int(c-z)dz/z} = Az^{-c}e^z.$$

Значение A получается из применения асимптотического вида решений U_1 и U_2

$$U_1 U'_2 - U_2 U'_1 \simeq \left[-a \frac{1}{z} - (a-c) \frac{1}{z} - 1 \right] z^{-c} e^{z+ia\pi},$$

и так как это асимптотическая формула, то можно пренебречь членами $c/|z|$ по сравнению с -1 . Следовательно,

$$\Delta(U_1, U_2) = -z^{-c} e^{z+ia\pi} \quad (5.3.54)$$

для всех значений z . Обычную вырожденную гипергеометрическую функцию, конечно, можно выразить через эти новые функции

$$F(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} U_1(a|c|z) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} U_2(a|c|z) \quad (5.3.55)$$

для $0 < \varphi < \pi$.

Между прочим, следует отметить, что для выражения независимых решений обычного гипергеометрического уравнения вблизи других

особых точек нам не требуется придумывать новые формы решений. Все три особые точки были регулярными, и потому каждую пару решений можно было выразить через ряды $F(a, b | c | z)$ с различными значениями a, b, c и z . В случае вырожденного гипергеометрического уравнения одна особая точка регулярная, а другая иррегулярная, и не удивительно, что пара решений U_1, U_2 , соответствующая иррегулярной точке, имеет вид, отличный от пары решений $F(a | c | z)$ и $z^{1-c} F(a - c + 1 | 2 - c | z)$, соответствующей регулярной точке.

Для окончания нашего рассмотрения нам надо выразить $z^{1-c} F(a - c + 1 | 2 - c | z)$ через решения U_1 и U_2 . Применяя формулу (5.3.46) и проводя такое разбиение, как для формулы (5.3.50), получаем

$$\begin{aligned} z^{1-c} F(a - c + 1 | 2 - c | z) &= \\ &= \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-a)} \left\{ \frac{e^{i\pi(a-c+1)}}{z^a} \int_0^\infty e^{-w} w^{a-c} \left(1 + \frac{w}{z}\right)^{-a} dw + \right. \\ &\quad \left. + z^{a-c} e^z \int_0^\infty e^{-u} u^{-a} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-c} du \right\}. \end{aligned}$$

Но это выражение должно быть комбинацией U_1 и U_2 . Сравнивая асимптотическое поведение, мы видим, что первый член пропорционален U_2 , а второй — U_1 . Таким путем мы получаем новую совокупность интегральных представлений функций U

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{z^{a-c} e^z}{\Gamma(1-a)} \int_0^\infty e^{-u} u^{-a} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-c} du = \frac{z^{a-c} e^z}{2\pi i \Gamma(a)} \oint_F e^u u^{-a} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{a-c} du, \\ U_2 &= \frac{e^{i\pi a} z^{-a}}{\Gamma(a-c+1)} \int_0^\infty e^{-u} u^{a-c} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{-a} du = \\ &= \frac{e^{i\pi a} z^{-a}}{2\pi i \Gamma(c-a)} \oint_F e^u u^{a-c} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{-a} du, \end{aligned} \quad (5.3.56)$$

а также получаем выражение $z^{1-c} F(a - c + 1 | 2 - c | z)$ через U_1 и U_2 при $0 < \varphi < \pi$

$$\begin{aligned} z^{1-c} F(a - c + 1 | 2 - c | z) &= \\ &= \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)} U_1(a | c | z) - \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)} e^{-\pi c} U_2(a | c | z), \end{aligned} \quad (5.3.57)$$

справедливое для области изменения $0 < \varphi < \pi$ фазового угла z . Явление Стокса для этой функции можно выявить, применяя интегральные представления (5.3.56) для асимптотических интегралов. Получится

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(2-c)} z^{1-c} F(a - c + 1 | 2 - c | z) \simeq \\ &\simeq \begin{cases} \Gamma(a-c+1) e^{-i\pi(1-c)} |z|^{-a}, & \varphi = -\pi, \\ \Gamma(1-a) |z|^{a-c} e^{i(a-c)\varphi} e^z + \Gamma(a-c+1) |z|^{-a} e^{i\pi(c-1)-ia(\pi+\varphi)} - \pi < \varphi < 0, \\ \Gamma(1-a) |z|^{a-c} e^z, & \varphi = 0, \\ \Gamma(1-a) |z|^{a-c} e^{i(a-c)\varphi} e^z + \Gamma(a-c+1) |z|^{-a} e^{i\pi(1-c)+ia(\pi-\varphi)}, & 0 < \varphi < \pi, \\ \Gamma(a-c+1) e^{i\pi(1-c)} |z|^{-a}, & \varphi = \pi, \\ \Gamma(a-c+1) |z|^{a-c} e^{-2\pi ia+i(a-c)\varphi} e^z + \Gamma(a-c+1) |z|^{-a} e^{i\pi(1-c)+ia(\pi-\varphi)}, & \pi < \varphi < 2\pi, \end{cases} \end{aligned}$$

и т. д. В силу того, что второе решение равно произведению z^{1-c} на аналитическую функцию, получаем, что асимптотическое значение, вещественное при $\varphi = 0$, должно равняться произведению $e^{-i\pi(1-c)}$ на вещественное число при $\varphi = -\pi$, произведению $e^{2\pi i(1-c)}$ на вещественное число при $\varphi = 2\pi$ и т. д.; это делают фазовые углы, порождаемые явлением Стокса.

Для полноты нам надо выразить решения третьего рода через решения первого рода. Эти соотношения можно получить, решая совместно уравнения (5.3.55) и (5.3.57). Преобразования являются несколько громоздкими и включают применение формулы $\sin(\pi x) \Gamma(x) \Gamma(1-x) = \pi$. Например, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a|c|z) + \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(2-c)} e^{i\pi c} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) = \\ = \left[\frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(a)} + \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(a-c+1)} e^{i\pi c} \right] U_1 = \Gamma(c-a) \Gamma(1-a) \frac{\sin(\pi c)}{\pi} e^{i\pi(c-a)} U_1. \end{aligned}$$

В конце концов, получаем

$$\begin{aligned} U_1(a|c|z) &= \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} e^{i\pi(a-c)} F(a|c|z) - \\ &\quad - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} e^{i\pi a} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z), \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ U_2(a|c|z) &= \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} e^{i\pi a} F(a|c|z) + \\ &\quad + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} e^{i\pi a} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z), \quad -\pi < \varphi < \pi. \end{aligned} \quad (5.3.58)$$

Явление Стокса для функций U (и для функций, связанных с U и F) можно получить из этих соотношений, применяя таблицу изменений фазы F и $z^{1-c}F$. Если U_1 , U_2 представляют собой решения, асимптотически пропорциональные соответственно $z^{a-c}e^z$ и z^{-a} для всех значений фазового угла φ , и если формулы (5.3.58) считаются определяющими U_1 и U_2 при $0 < \varphi < \pi$, то можно вывести правило, регулирующее фазовые углы в соотношениях (5.3.55), (5.3.57) и (5.3.58), а также для U . Например, при $-2\pi < 4 < 0$

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} e^{i\pi(a-c)} F(a|c|z) - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} e^{i\pi(a-2c)} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) \simeq \\ &\simeq e^{2\pi i(a-c)} z^{a-c} e^z. \end{aligned}$$

(Так как для U_1 имеется разрез вдоль положительной вещественной полуоси, то для перехода от положительных к отрицательным значениям φ надо перейти от $0+\varepsilon$ к $2\pi-\varepsilon$.) Подобный же скачок появляется для U_2 при $\varphi = \pi$ или $-\pi$.

Решение второго рода. До сих пор мы оставляли в стороне вопрос о том, что делать с решением, независимым от $F(a|c|z)$, если c целое отрицательное. Если $c = n + \varepsilon$, где n целое, большее 1, а ε обращается в нуль, то оказывается, что первые $n-1$ членов ряда для $z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z)$ остаются конечными, а остальные члены имеют множитель $1/(-\varepsilon)$, и потому обращаются в бесконечность. Очевидный прием, заключающийся в умножении на ε до перехода к пределу, не помогает, потому что, как мы увидим, предел $(n-c)z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z)$ при $c \rightarrow n$ оказывается пропорциональным первому решению $F(a|c|z)$,

и потому не является независимым решением. Эта трудность проявляется также в формуле (5.3.57), содержащей множитель $\Gamma(2-c)$ стремящийся к бесконечности при $c \rightarrow 2, 3, 4, \dots$. Решения U_1 и U_2 при этом не становятся бесконечными, поэтому надо построить второе решение при помощи функций U . Это можно довольно просто сделать, если изменить знак у одного из членов формулы (5.3.55), выражющей $F(a|c|z)$ через функцию U .

Поэтому мы определяем *вырожденную гипергеометрическую функцию второго рода* формулой

$$G(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} U_1(a|c|z) - \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} U_2(a|c|z) \quad (5.3.59)$$

при $0 < \phi < \pi$. Как показывает асимптотическое выражение, эта функция независима от F . Она удобна тем, что порождает простые формулы, выражющие U через F и G ; например, $U_1 = [\Gamma(a)/\Gamma(c)](F+G)$, а $U_2 = [\Gamma(c-a)/\Gamma(c)](F-G)$. Она также остается конечной при целом c , как будет вскоре показано, хотя оказывается, что она в этих случаях имеет логарифмическую особенность при $z=0$. Но это как раз то, чего надо ожидать, так как для целого c индексы вырожденного гипергеометрического уравнения при $z=0$ различаются на целое число, а в этом случае, как мы видели на стр. 504 и 513, следует ожидать у второго решения логарифмическую особенность.

Чтобы получить разложение G около $z=0$, выразим U в формуле (5.3.59) через F и $z^{1-c} F$ при помощи (5.3.58). В результате преобразования гамма-функций получаем

$$\begin{aligned} G(a|c|z) = e^{i\pi a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} & \left\{ \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} \left[e^{-i\pi c} + \frac{\sin \pi(a-c)}{\sin(\pi a)} \right] F(a|c|z) - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(c-a)} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) \right\}. \quad (5.3.60) \end{aligned}$$

Эта формула не выглядит слишком многообещающей, так как теперь оба члена в фигурных скобках стремятся к бесконечности, когда $c \rightarrow n$, целому. Однако, как было указано выше, при $c=n$ оба решения равны друг другу, а коэффициенты в этом выражении так подобраны, что бесконечные части как раз взаимно уничтожаются, и остается конечное выражение, пропорциональное производной от $F(a|c|z)$ по c . Эта производная от F по параметру является решением, которое мы искали.

Теперь нам следует доказать высказанные утверждения и на самом деле подсчитать разложение этого решения второго рода около $z=0$. Прежде всего надо доказать, что $z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z)$ пропорционально $F(a|c|z)$, когда $c \rightarrow n$, целому. Это просто при $c \rightarrow 1$, так как тогда $z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) \rightarrow F(a|1|z)$. Отсюда (так как $\Gamma(c-1) \simeq 1/(c-1)$ и $\Gamma(1-c) \simeq 1/(1-c)$),

$$\begin{aligned} G(a|1|z) = e^{i\pi a} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(a)} \lim_{c \rightarrow 1} & \left\{ - \frac{1}{\Gamma(1-a)(c-1)} \times \right. \\ & \times \left[\left(e^{-i\pi c} + \frac{\sin \pi(a-c)}{\sin \pi a} \right) F(a|c|z) + 2F(a|1|z) \right] - \\ & \left. - \frac{2}{c-1} \left[\frac{1}{\Gamma(c-a)} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) - \frac{1}{\Gamma(1-a)} F(a|1|z) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Каждый член в квадратных скобках имеет вид $f(c) - f(1)$, так что предел этой величины, разделенной на $c-1$, равен производной от $f(c)$ по c

при $c=1$. Значит,

$$G(a|1|z) = \frac{e^{i\pi a}}{\Gamma(a)} \left\{ -\frac{1}{\Gamma(1-a)} \frac{d}{dc} \left[e^{-i\pi c} + \frac{\sin \pi(a-c)}{\sin \pi a} \right] F(a|c|z) - \right. \\ \left. - 2 \frac{d}{dc} \left[\frac{z^{1-c}}{\Gamma(c-a)} F(a-c+1|2-c|z) \right] \right\}_{c=1}.$$

Но $dz^c/dc = z^c \ln z$ и $d\Gamma(a+c)/dc = \psi(a+c)\Gamma(a+c)$, где $\psi(x)$ — логарифмическая производная от $\Gamma(x)$

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d}{dx} \Gamma(x) = -\gamma + \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+x} \right), \\ \gamma = -\psi(1) = 0,5772 \dots, \\ \psi(x+n) = \psi(x) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+n-1}, \\ \psi(1-c) = \psi(c) + \pi \operatorname{ctg} \pi c.$$

Отсюда

$$G(a|1|z) = \\ = \frac{e^{i\pi a}}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \left\{ -\frac{d}{dc} \left[e^{-i\pi c} + \frac{\sin \pi(a-c)}{\sin(\pi a)} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(c)z^m}{m!\Gamma(a)\Gamma(c+m)} - \right. \\ \left. - 2\Gamma(1-a) \frac{d}{dc} \left[\frac{1}{\Gamma(c-a)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a-c+1+m)\Gamma(2-c)z^{m+1-c}}{m!\Gamma(a-c+1)\Gamma(2-c+m)} \right] \right\}_{c=1} = \\ = \frac{e^{2\pi i a} - 1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \{[-i\pi - \pi \operatorname{ctg}(\pi a) + 2\psi(1) - 2\psi(m+1)] - \\ - 2[-\psi(1-a) - \ln z + \psi(a) + \psi(m+1) - \psi(a+m) - \psi(1)] \times \\ \times \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(1)}{m!\Gamma(a)\Gamma(m+1)} z^m = \\ = \frac{e^{2\pi i a} - 1}{2\pi i} \left\{ [2\ln z + \pi \operatorname{ctg}(\pi a) - i\pi + 2\psi(a)] F(a|1|z) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)(m!)^2} [\psi(a+m) - \psi(a) + 2\psi(1) - 2\psi(m+1)] z^m \right\}. \quad (5.3.61)$$

Это решение независимо от $F(a|1|z)$ (это показывает логарифмический член, даже если по остальной части это не так очевидно). Его вид интересен тем, что представляет собой сумму логарифма величины, пропорциональной z , умноженного на первое решение, и бесконечного ряда, сходящегося для всех конечных значений z и также независимого от $F(a|1|z)$.

Для $c=2, 3, \dots$ процесс вполне подобен приведенному выше, хотя выкладки несколько сложнее. Разложение в ряд показывает, что для исчезающее малого $c-n$ ($n=2, 3, 4, \dots$) функция

$$F_n(a|c|z) = (c-n)z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) = \\ = (c-n) \sum_{m=0}^{n-2} \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-m-1)}{m!\Gamma(c-a-m)\Gamma(c-1)} z^{m-c+1} + \\ + (c-n) \frac{\Gamma(a)\Gamma(2-c)}{\Gamma(n)\Gamma(a-c+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n-c+r)\Gamma(n)z^{r+n-c}}{\Gamma(r+1+n-c)\Gamma(a)\Gamma(n+r)}$$

превращается в функцию $\frac{\Gamma(a)\Gamma(n-a)\sin(\pi a)}{\pi\Gamma(n)\Gamma(n-1)}F(a|n|z)$, так как $(c-n) \times \times \Gamma(2-c) \underset{c \rightarrow n}{\simeq} \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(c-1)}$ и потому первый член в (5.3.60) приближается ко второму, но оба становятся бесконечно большими. Добавляя и вычитая член $2[\Gamma(n-1)/(\Gamma(n-a))]F_n(a|n|z)/(c-n)$ внутри фигурных скобок, имеем

$$\begin{aligned} G(a|n|z) &= e^{i\pi a} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)} \lim_{c \rightarrow n} \left\{ \frac{\Gamma(a)\sin(\pi a)}{\Gamma(c)\pi(c-n)} \left[e^{i\pi(n-c)} + \frac{\sin\pi(a-c)}{\sin\pi(a-n)} \right] F(a|c|z) - \right. \\ &\quad - 2 \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(n)} \frac{\sin(\pi a)}{\pi(c-n)} F(a|n|z) - 2 \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} \frac{1}{(c-n)} F_n(a|c|z) + \\ &\quad \left. + 2 \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n-a)} \frac{1}{(c-n)} F_n(a|n|z) \right\} = \\ &= e^{i\pi a} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)} \left\{ \frac{\sin(\pi a)}{\pi} \frac{d}{dc} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} \left[e^{i\pi(n-c)} + \frac{\sin\pi(a-c)}{\sin\pi(a-n)} \right] F(a|c|z) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{d}{dc} \left[\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} F_n(a|c|z) \right] \right\}_{c=n}, \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} G(a|n|z) &= \frac{e^{2\pi i a} - 1}{2\pi i} \left\{ [2\ln z + \pi \operatorname{ctg}(\pi a) - i\pi] F(a|n|z) - \right. \\ &\quad - 2 \sum_{m=1}^{\infty} [\psi(m+1) + \psi(n+m) - \\ &\quad \left. - \psi(a+m)] \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(n)z^m}{m!\Gamma(a)\Gamma(n+m)} \right\} - \\ &\quad - 2e^{i\pi a} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\Gamma(r)z^{-r}}{\Gamma(n-r)\Gamma(r-a+1)}. \quad (5.3.62) \end{aligned}$$

Это выражение отличается от общего вида $G(a|1|z)$ присутствием конечной суммы отрицательных степеней z . Она, а также логарифмический член показывают, что G в отличие от F не аналитична при $z=0$. Нет надобности исследовать G , когда c равно целому отрицательному или нулю, так как если уравнение удовлетворяется функцией $z^{1+n}F(a+n+1|2+n|z)$, то мы принимаем ее за *первое решение* и следуем далее, как описано выше. Так как индексы вырожденного гипергеометрического уравнения при $z=0$ равны 0 и $1-c$, то если при первой попытке мы найдем, что c меньше 1, то уравнение для $z^{1-c}y$ имеет новое с больше 1, и мы будем работать с ним.

Этой формулой завершается наше общее рассмотрение вырожденной гипергеометрической функции, так как мы теперь записали выражения обоих решений для больших и для малых значений z и для всех значений параметров [разложение функций U в ряды можно получить при помощи рядов для F и G и соотношений (5.3.55) и (5.3.59)], включая те значения, для которых второе решение имеет логарифмическую особенность. Остается пока только рассмотреть некоторые из более важных частных случаев этих функций.

Функции Бесселя. Самой важной специальной функцией, представляемой через вырожденную гипергеометрическую функцию, является функция Бесселя. Она представляет собой решение уравнения, упоминавшегося на стр. 518,

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\psi}{dz} + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right) \psi = 0,$$

называемого уравнением Бесселя. Это уравнение имеет регулярную особую точку $z=0$ с индексами ν и $-\nu$. Подстановка $\phi=z^\nu e^{-iz} F$ приводит уравнение к вырожденному гипергеометрическому виду

$$zF'' + [(2\nu+1) - 2iz]F' - i(2\nu+1)F = 0$$

с решением $F\left(\nu+\frac{1}{2} \mid 2\nu+1 \mid 2iz\right)$. Решение уравнения Бесселя, остающееся конечным при $z=0$, называется *функцией Бесселя первого рода*

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{z^\nu e^{-iz}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} F\left(\nu+\frac{1}{2} \mid 2\nu+1 \mid 2iz\right) = \\ &= \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left[1 - \frac{1}{1! (\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2! (\nu+1)(\nu+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \dots \right] = \quad (5.3.63) \\ &= \frac{(z/2)^\nu}{i \sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-i}^i e^{zu} (1+u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} du = \\ &= \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \sin^{2\nu} \theta d\theta \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu. \end{aligned}$$

Интегральные представления можно получить из представления F (при помощи формулы $\Gamma(2\nu+1) = (2^{2\nu}/\sqrt{\pi}) \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \Gamma(\nu+1)$, если положить $t = \frac{1}{2}(1-iu)$ или $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta$) или непосредственно из преобразования Лапласа. Ряды можно получить из интегралов или посредством *перемножения* рядов для показательной функции и для F (интересно заметить, что произведение вырожденного гипергеометрического ряда с мнимым аргументом и показательной функции с мнимым показателем может оказаться вещественной функцией). Если $\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2} < 0$, то линейный (обычный) интеграл можно заменить на интеграл по замкнутому контуру, обходящему точку $u=i$ в положительном направлении и $-i$ в отрицательном направлении.

Посредством манипуляций с интегральным представлением или с рядами можно получить следующие рекуррентные формулы для функций Бесселя:

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) &= (2\nu/z) J_\nu(z), \\ J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) &= 2(d/dz) J_\nu(z). \end{aligned} \quad (5.3.64)$$

Так как эти формулы можно получить из интегрального представления, то они будут иметь место и для других решений уравнения Бесселя, полученных при помощи изменения пределов интегрирования; именно они будут иметь место для решений второго и третьего рода.

Из последней формулы (5.3.63) в результате ряда преобразований можно получить другой вид интегрального представления, который будет нам полезен позже во многих приложениях; его можно выразить в различ-

ных формах (для целого n)

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint u^{-n-1} e^{\frac{1}{2}z(u^2-1)/u} du = \\ &= \frac{e^{-i\pi n/2}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (5.3.65)$$

где контур в первом равенстве представляет собой окружность с центром в начале координат, проходящую в положительном направлении. То, что это представление на самом деле дает функцию Бесселя, можно показать при помощи разложения в ряд и сравнения результата с рядом (5.3.63) или проверив, что интеграл удовлетворяет уравнению Бесселя и имеет необходимое значение при $z=0$.

Это представление с помощью формулы (4.3.4), определяющей ряд Лорана около существенной особенности в a , можно применить для получения очень полезного разложения в ряд. Функция $e^{z(t^2-1)/2t}$ имеет существенную особенность при $t=0$. Поэтому около $t=0$ она разлагается в ряд Лорана с коэффициентами

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint t^{-n-1} e^{z(t^2-1)/2t} dt = J_n(z).$$

Поэтому ряд имеет вид

$$e^{z(t^2-1)/2t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z);$$

его можно применить для определения свойств функций Бесселя целого порядка. Например, рекуррентные формулы (5.3.64) можно получить при помощи дифференцирования по z или t и т. д. Мы исследуем это далее в гл. 11.

Это разложение можно применить для получения других. Например, имеет место простое разложение

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(z).$$

Более сложное, но более полезное соотношение можно получить при помощи следующего разложения (здесь $Z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}$, $Z \sin \alpha = x - y \cos \varphi$, $Z \cos \alpha = y \sin \varphi$):

$$\begin{aligned} J_0(Z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iZ \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iZ \cos(\theta-\alpha)} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[iy \sin \varphi \cos \theta + i(x - y \cos \varphi) \sin \theta] d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \int_0^{2\pi} e^{iy \sin(\varphi-\theta)+in\theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \int_0^{2\pi} e^{iy \cos \theta + in(\theta+\varphi-\frac{1}{2}\pi)} d\theta = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) J_n(y) e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) J_n(y) \cos(n\varphi). \quad (5.3.66) \end{aligned}$$

Применяя другие контуры интегрирования по θ , получаем общую формулу

$$Y_0(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m(x) J_m(y) \cos(m\varphi),$$

где символ Y может означать любой из видов функций Бесселя — J , N , $H^{(1)}$ или $H^{(2)}$, которые будут вскоре определены. Много других подобных разложений будет выведено и применено в этой книге позже. Данное разложение выведено здесь, так как оно будет использовано в этой главе ниже.

Другую формулу, которая будет полезна впоследствии, связывающую функции Бесселя и полиномы Гегенбауера, можно получить при помощи формулы (5.2.53) и интегрирования по частям модифицированного интегрального представления (5.3.63)

$$\begin{aligned} J_{\beta+n+\frac{1}{2}}(z) &= \frac{(z/2)^{\beta+n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi \Gamma(\beta+n+1)}} \int_{-1}^1 e^{izt} (1-t^2)^{\beta+n} dt = \\ &= \frac{i^n z^{\beta+\frac{1}{2}}}{2^{n+\beta} \sqrt{2\pi} \Gamma(\beta+n+1)} \int_{-1}^1 e^{izt} \frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^{\beta+n} dt = \\ &= \frac{n! z^{\beta+\frac{1}{2}}}{i^n \sqrt{2\pi} \Gamma(n+2\beta+1)} \int_{-1}^1 e^{izt} (1-t^2)^\beta T_n^\beta(t) dt. \end{aligned} \quad (5.3.67)$$

Если n полуцелое, то есть равно $n + \frac{1}{2}$, то получающиеся функции Бесселя имеют особенно простой вид. При помощи сравнения разложений в ряды можно видеть, что

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{2/\pi z} \sin z \quad \text{и} \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{2/\pi z} \cos z.$$

Мы увидим позже, что для волнового уравнения в сферических координатах удобно пользоваться *сферическими функциями Бесселя*, определенными формулами

$$\begin{aligned} j_n(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{z} \cos \left[z - \frac{1}{2}\pi(n+1) \right], \\ n_n(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-n-\frac{1}{2}}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{z} \sin \left[z - \frac{1}{2}\pi(n+1) \right], \\ h_n(z) &= j_n(z) + i n_n(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} (1/z) \exp \left[iz - \frac{1}{2}i\pi(n+1) \right]. \end{aligned}$$

Некоторые рекуррентные формулы для этих функций имеют вид

$$\begin{aligned} [(2m+1)/z] f_m(z) &= f_{m-1}(z) + f_{m+1}(z), \\ (2m+1)(d/dz) f_m(z) &= m f_{m-1}(z) - (m+1) f_{m+1}(z), \\ (d/dz)[z^{m+1} f_m(z)] &= z^{m+1} f_{m-1}(z), \\ (d/dz)[z^{-m} f_m(z)] &= -z^{-m} f_{m+1}(z), \end{aligned}$$

где $f_m(z)$ есть $j_m(z)$, $n_m(z)$ или $h_m(z)$. При помощи формулы (5.3.67)

можно показать, что интегральным представлением для $j_n(z)$ будет

$$j_n(z) = \frac{1}{2i^n} \int_0^\pi e^{iz \cos \varphi} P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют эти функции, таково:

$$\frac{d^2f}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{df}{dz} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{z^2} \right] f = 0.$$

Уравнение Бесселя имеет иррегулярную особую точку при $z = \infty$. Как и надо ожидать для таких уравнений, разложение около этой точки является разложением асимптотического типа, расходящимся для конечных значений z , если взять слишком много членов, но приближающимся к истинному значению при неограниченно возрастающем z , если воспользоваться только конечным числом членов. Предельную форму (первый член асимптотического ряда) можно получить из формул (5.3.51), дающих асимптотический вид $F(a|c|z)$, или же прямо из интегрального представления при помощи деформации пути интегрирования (например, в первом представлении (5.3.63) в путь, идущий из $-i$ в $-\infty$ и из $-\infty$ в $-i$). Таблица асимптотических выражений, показывающая явления Стокса для функции Бесселя первого рода, имеет вид (при $z = |z|e^{i\varphi}$)

$$\begin{aligned} J_v(z) &\simeq e^{-iv} \left(v + \frac{1}{2} \right) \sqrt{2/\pi z} \cos \left[z + \frac{1}{2} \pi \left(v + \frac{1}{2} \right) \right], \quad -\frac{3}{2}\pi < \varphi < -\frac{1}{2}\pi, \\ &\simeq \sqrt{2/\pi z} \cos \left[z - \frac{1}{2} \pi \left(v + \frac{1}{2} \right) \right], \quad -\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi, \quad (5.3.68) \\ &\simeq e^{iv} \left(v + \frac{1}{2} \right) \sqrt{2/\pi z} \cos \left[z + \frac{1}{2} \pi \left(v + \frac{1}{2} \right) \right], \quad \frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Независимое решение вблизи $z = 0$ можно взять таким

$$J_{-v}(z) = \frac{2^{3v} z^v e^{-iz+iv}}{\Gamma(1-v)} (2iz)^{-2v} F\left(\frac{1}{2}-v|1-2v|2iz\right),$$

если только v не равно нулю или целому положительному. Оно стремится к бесконечности, как z^{-v} , если z стремится к нулю.

Функции Ганкеля. Функции, соответствующие U_1 и U_2 (5.3.52), приспособленные для удовлетворения граничным условиям при больших значениях z , получаются подобным же образом при помощи продолжения пути интегрирования в (5.3.63) до $-\infty$ и разбиения его на две части. Верхняя половина дает функцию с положительным показателем степени (мы множим интеграл дополнительно на 2 по причинам, которые станут ясными позже).

$$\begin{aligned} H_v^{(1)}(z) &= \frac{2 \left(\frac{1}{2} z \right)^v}{i \sqrt{\pi} \Gamma \left(v + \frac{1}{2} \right)} \int_{-\infty}^i e^{zt} (1+t^2)^{v-\frac{1}{2}} dt = \\ &= -\frac{2^{v+1} z^v}{\sqrt{\pi}} e^{-iz} U_1 \left(v + \frac{1}{2} | 2v + 1 | 2iz \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_B e^{iz \cos \varphi + iv \left(\varphi - \frac{1}{2}\pi \right)} d\varphi \simeq \\ &\simeq \sqrt{2/\pi z} e^{iz - \frac{1}{2}iv \left(v + \frac{1}{2} \right)}, \quad -\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi; \quad (5.3.69) \end{aligned}$$

она называется *функцией Ганкеля первого рода* (или первой функцией Бесселя третьего рода). Путь интегрирования во втором интеграле [выведенном из (5.3.65)], показанный на рис. 5.13, проходит из $+i\infty$ вплотную слева от мнимой оси в $-i\infty$ вплотную справа от мнимой оси (причина такого выбора состоит в том, что в заштрихованных участках плоскости φ

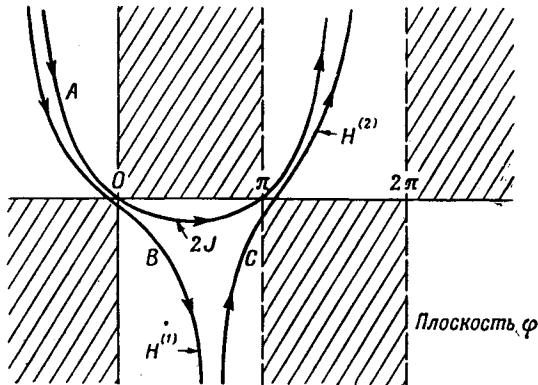


Рис. 5.13. Контуры для интегрального представления функций Бесселя.

подинтегральная функция беспрепреклонно возрастает при удалении от вещественной оси, а в незаштрихованных участках подинтегральная функция стремится к нулю, так что нам надо закончить наш интеграл в незаштрихованных областях). Этот же интеграл представляет также другие функции, так как

$$J_v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_A e^{z \cos \varphi + i v (\varphi - \frac{1}{2}\pi)} d\varphi,$$

а контур C представляет другое решение для больших значений z

$$\begin{aligned} H_v^{(2)}(z) &= \frac{2(z/2)^v}{i\sqrt{\pi} \Gamma(v + \frac{1}{2})} \int_{-i}^{-\infty} e^{zt} (1+t^2)^{v-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{2^{v+1} z^v e^{-iz}}{\sqrt{\pi}} U_2\left(v + \frac{1}{2} | 2v + 1 | 2iz\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C e^{-iz \cos \varphi + i v (\varphi - \frac{1}{2}\pi)} d\varphi \simeq \\ &\simeq \sqrt{2/\pi z} e^{-iz + \frac{1}{2}i\pi(v + \frac{1}{2})}. \end{aligned} \quad (5.3.70)$$

Эта функция называется *функцией Ганкеля второго рода*. Во многих случаях, если мы будем иметь дело только с первой из этих функций, мы будем опускать верхний индекс; H_v будет всегда означать $H_v^{(1)}$ и называться *функцией Ганкеля (просто)*, если это не может вызвать недоразумения.

Эти два решения независимы, как показывает их асимптотический вид. Определитель Вронского для независимых решений уравнения Бесселя равен A/z [см. формулу (5.3.2)]. Постоянную для этих двух решений можно определить при помощи их асимптотического вида, и в итоге мы

получаем

$$\Delta(H_{\nu}^{(1)}, H_{\nu}^{(2)}) = H_{\nu}^{(1)} \frac{d}{dz} H_{\nu}^{(2)} - H_{\nu}^{(2)} \frac{d}{dz} H_{\nu}^{(1)} = -\frac{4}{\pi iz}. \quad (5.3.71)$$

Так как обе функции $H_{\nu}^{(1)}$ и $H_{\nu}^{(2)}$ удовлетворяют рекуррентным формулам (5.3.64) (и другим формулам, получающимся при помощи комбинирования этих), то соотношение (5.3.71) можно выразить различными способами, как например

$$H_{\nu}^{(2)}(z) H_{\nu+1}^{(1)}(z) - H_{\nu}^{(1)}(z) H_{\nu+1}^{(2)}(z) = 4/\pi iz \text{ и т. д.}$$

Имеется тесная связь между функциями Ганкеля и показательными функциями с мнимым показателем, с одной стороны, и функцией Бесселя J и косинусом, с другой. Совсем так же, как

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \text{здесь имеем} \quad J_{\nu}(z) &= \frac{1}{2}[H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z)], \end{aligned} \quad (5.3.72)$$

что можно установить из приведенных определений или из простого рассмотрения рис. 5.10.

Аналогично из формул (5.3.58) и определений J и H через F и U получаем

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(z) &= \frac{i}{\sin(\pi\nu)} [e^{-i\nu\pi} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)], \\ H_{\nu}^{(2)}(z) &= \frac{-i}{\sin(\pi\nu)} [e^{i\nu\pi} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)], \end{aligned} \quad (5.3.73)$$

откуда мы можем вывести разложение функций Ганкеля вблизи $z=0$. Но прежде чем провести выкладки до конца, мы лучше исследуем поведение второго решения в случае целого ν .

Функция Неймана. Рассмотрение разложения $J_{\nu}(z)$ в ряд (5.3.63) показывает, что если ν отрицательно, то $J_{\nu}(z)$ становится бесконечным при $z=0$, если только ν не целое отрицательное. Чтобы исследовать этот особый случай, положим $\nu = -n - \varepsilon$

$$\begin{aligned} J_{-n-\varepsilon}(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(z/2)^{-n-\varepsilon-2+2m}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n-\varepsilon)} = \\ &= \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \frac{(z/2)^{-n-\varepsilon-2+2m}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n-\varepsilon)} + (-1)^n \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{(z/2)^{n-\varepsilon-2+2r}}{\Gamma(r-\varepsilon)\Gamma(r+n)}, \end{aligned}$$

что переходит в пределе ($\varepsilon=0$) в простое равенство

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.3.74)$$

Отсюда, если n целое или нуль, решение $J_{-n}(z)$ не является более независимым от $J_n(z)$, и нам надо позаботиться о втором решении.

Эта ситуация должна быть нам теперь знакома: если n целое, индексы уравнения Бесселя при $z=0$ различаются на целое число и второе решение должно иметь логарифмическую особенность. Ни J_n , ни J_{-n} не имеют такой особенности, так что надо подыскать что-нибудь другое. Конечно, две функции Ганкеля не становятся пропорциональными одна другой при $\nu=n$, а потому одна из них или обе должны иметь там логарифмическую особенность (на самом деле обе они имеют). Но мы хотим иметь

решение, более тесно связанное с J_ν . Аналогия между J_ν и косинусом наводит нас на мысль определить функцию Бесселя второго рода, то есть функцию Неймана, аналогичную синусу

$$\begin{aligned} N_\nu(z) &= (1/2i)[H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)] = \\ &= \operatorname{ctg}(\pi\nu) J_\nu(z) - \operatorname{cosec}(\pi\nu) J_{-\nu}(z) = \\ &= \frac{(z/2)^\nu}{i\Gamma(\nu+1)} e^{-iz} G\left(\nu + \frac{1}{2} | 2\nu + 1 | 2iz\right) \simeq \\ &\underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{2/\pi z} \sin\left[z - \frac{1}{2}\pi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right], \quad -\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi. \end{aligned} \quad (5.3.75)$$

Эта функция пригодна для всех значений ν (нам надо, конечно, рассматривать только значения, для которых $\operatorname{Re}\nu > 0$, так как в противном случае мы можем взять за первое решение $J_{-\nu}$). Если ν не целое, члены по отдельности конечны, и так как функция содержит кое-что от $J_{-\nu}$ (при $\nu = n + \frac{1}{2}$ она целиком равна $J_{-\nu}$), то она должна быть независима от J_ν . Если ν целое, члены по отдельности бесконечны, но взаимно уничтожаются, порождая решение с логарифмической особенностью при $z = 0$. Для получения этого решения можно применить формулу (5.3.61) или же вновь вычислить ряд. Так как настоящий случай проще, то мы произведем вычисление заново, чтобы вновь продемонстрировать метод. Полагая $\nu = n + \varepsilon$ и устремляя ε к нулю, получаем

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi\varepsilon} J_{n+\varepsilon}(z) - \frac{(-1)^n}{\pi\varepsilon} J_{-n-\varepsilon}(z) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{J_{n+\varepsilon} - J_n}{\varepsilon} - (-1)^n \frac{J_{-n-\varepsilon} - J_n}{\varepsilon} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{d}{d\nu} J_\nu(z) - (-1)^n \frac{d}{d\nu} J_{-\nu}(z) \right]_{\nu=n}, \end{aligned}$$

где мы добавили и вычли $J_n (= (-1)^n J_{-n})$. Производная от J_ν при $\nu = n$ равна

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (z/2)^{\nu+2m-2}}{\Gamma(m) \Gamma(m+\nu)} \right]_{\nu=n} &= \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left[\ln \frac{z}{2} - \psi(m+n) \right] \frac{(z/2)^{n+2m-\varepsilon}}{\Gamma(m) \Gamma(m+n)} = \\ &= \left[\ln \frac{z}{2} - \psi(n+1) \right] J_n(z) - \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{(z/2)^{n+2r}}{r! (n+r)!} \sum_{s=1+n}^{r+n} \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi(n+1) &= -\gamma + \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{n+r+1} \right) = \\ &= \psi(n) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n-1} \quad \text{и} \quad \gamma = 0,5772 \dots \end{aligned}$$

аналогично производная от $(-1)^n J_{-\nu}$ равна

$$\left[\frac{d}{d\nu} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m (z/2)^{-n-\varepsilon-m}}{\Gamma(m+1) \Gamma(m-n+1-\varepsilon)} + \frac{d}{d\nu} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{(z/2)^{n-\varepsilon-2+2r}}{\Gamma(r-\varepsilon) \Gamma(r+n)} \right]_{\varepsilon=0} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m! (z/2)^{n-2m}} - \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \left[\ln \frac{z}{2} - \psi(r) \right] \frac{(z/2)^{n+2r-2}}{\Gamma(r) \Gamma(n+r)} = \\
&= - \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma \right) J_n(z) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m! (z/2)^{n-2m}} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(z/2)^{n+2m}}{m! (n+m)!} \sum_{s=1}^m \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Складывая полученные два выражения, получаем в итоге разложение функции Неймана около $z=0$

$$\begin{aligned}
N_n(z) &= \frac{1}{\pi} \left[2 \ln \left(\frac{z}{2} \right) + \gamma - \psi(n+1) \right] J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m! (z/2)^{n-2m}} - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(z/2)^{n+2m}}{m! (n+m)!} \sum_{s=1}^m \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+n} \right] \simeq \\
&\simeq \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\ln \left(\frac{z}{2} \right) + \gamma \right], & n=0, \\ -\frac{1}{\pi (n-1)!} \left(\frac{2}{z} \right)^n, & n>0. \end{cases} \tag{5.3.76}
\end{aligned}$$

Если $n=0$, конечная сумма (от 0 до $n-1$) отсутствует. Это разложение имеет тот же общий вид, что разложение (5.3.61) для вырожденной гипергеометрической функции второго рода; оно содержит член, включающий произведение J_n на $\ln z$, конечную сумму отрицательных степеней z (за исключением случая $n=0$, когда она отсутствует) и добавочный бесконечный ряд, начинающийся с члена z^{n+2} .

Приближенные формулы для высокого порядка v . Асимптотические формулы (5.3.68), (5.3.69), (5.3.70) и (5.3.75) предполагают, что аргумент z значительно больше порядка v функций Бесселя. Полезные формулы для $J_v(z)$; когда z и v велики, можно получить, применяя метод кратчайшего спуска (см. § 4.6). Если как z , так и v велики, интеграл

$$\int_{-\infty}^i e^{zt} (1+t^2)^{v-\frac{1}{2}} dt,$$

из которого мы получили предыдущие асимптотические разложения, уже не имеет наибольшего значения подинтегральной функции вблизи $t=i$, как это было ранее. Следовательно, первый член асимптотического разложения не дает хорошего приближения, и мы должны позаботиться о другой формуле. Оказывается, что интегральное представление

$$(e^{-\frac{1}{2}\pi i v}/\pi) \int e^{i(z \cos w + vw)} dw,$$

приведенное на стр. 584, контуры которого показаны на рис. 5.13, наиболее подходит для нашей цели. Так, если взять контур A , то интеграл равен $2J_v(z)$; если взять B , то интеграл равен $H_v^{(1)}(z)$; если же контур состоит из B , и из C (причем B проходится в обратном порядке, сверху вниз), то интеграл равен $2N_v(z)$.

Каждый из этих контуров проходит из области, где подинтегральная функция исчезающе мала (на рис. 5.13 незаштрихованные участки вдали от вещественной оси), через область, где эта функция велика, в другую область, где подинтегральная функция исчезающе мала. Если мы проведем

контур произвольного вида между этими пределами, то подинтегральная функция будет меняться сложным образом, часто меняя знак и часто приобретая большую мнимую часть, но при интегрировании все эти дополнительные осложнения взаимно уничтожаются и результат будет один и тот же, как бы мы ни провели промежуточную часть контура (так как подинтегральная функция имеет особенность только при $w = \infty$). Если нам надо подсчитать приближенное значение интеграла, то мы должны сначала выбрать путь, вдоль которого подинтегральная функция ведет себя по возможности наиболее просто. Например, так как подинтегральная функция является показательной, то вещественная часть показателя определяет модуль этой функции, а мнимая часть — фазу. Чтобы исключить излишние колебания подинтегральной функции, надо условиться производить интегрирование вдоль контура, на котором фаза постоянна. Мы должны сейчас попытаться найти маршрут, для которого подинтегральная функция велика только на его коротком участке, так что подсчет на этом ограниченном участке будет достаточным, чтобы дать ответ с хорошим приближением.

Любой из контуров, показанных на рис. 5.13, представляет собой путь через горную цепь. Мы хотим оставаться в долине по возможности долго, чтобы пройти через самый низкий перевал и по возможности быстро достичь долины с другой стороны. Оказывается, что путь для этого является также путем, вдоль которого фаза подинтегральной функции остается постоянной, как это было показано в § 4.6.

Так как в показателе нашей подинтегральной функции стоит функция комплексного переменного $w = u + iv$, то вещественная часть этой последней определяет модуль, а мнимая — фазу подинтегральной функции

$$\begin{aligned} F(w) &= i(z \cos w + vw) = f(u, v) + ig(u, v), \\ f &= z \sin u \operatorname{sh} v - vw, \quad g = z \cos u \operatorname{ch} v + vu. \end{aligned}$$

В белых участках рис. 5.13 f становится большой отрицательной, а в заштрихованных — большой положительной. Мы хотим пройти по самому низкому проходу в поверхности $f(u, v)$.

Так как f представляет собой вещественную часть функции комплексного переменного, то она является решением уравнения Лапласа по u и v (см. стр. 334) и не может иметь максимумов или минимумов в конечной части плоскости. Это означает, что вершина самого низкого прохода должна быть седловой точкой, где поверхность искривляется книзу в одном направлении и кверху в направлении, перпендикулярном первому. Другими словами, вершина перехода является точкой, где $dF/dw = 0$, и вблизи этой точки

$$\begin{aligned} F &= F_s + b(w - w_s)^2 + \dots = \\ &= f_s + a[(x^2 - y^2) \cos 2\theta - 2xy \sin 2\theta + \dots] + \\ &\quad + ig_s + ia[(x^2 - y^2) \sin 2\theta + 2xy \cos 2\theta + \dots], \end{aligned}$$

здесь $b = ae^{2i\theta} = (d^2F/dw^2)_s$, и $x = u - u_s$, $y = v - v_s$. Вдоль линий $y = -x \operatorname{tg} \theta$ и $y = x \operatorname{ctg} \theta$ (под углом $-\theta$ и $\frac{1}{2}\pi - \theta$ к вещественной оси) мнимая часть F постоянная ($g = g_s$), а вещественная имеет наибольшую кривизну. Вдоль линии $y = -x \operatorname{tg} \theta$ вещественная часть F равна

$$\operatorname{Re} F = f = f_s + \frac{1}{2}ax^2 \sec^2 \theta + \dots a = f_s + \frac{1}{2}ad^2 + \dots,$$

где $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ представляет собой расстояние вдоль линии $y = -x \operatorname{tg} \theta$. Отсюда вдоль линии, составляющей угол $-\theta$ с вещественной осью,

(и потому подинтегральная функция) возрастает, когда мы отходим от седловой точки $w = w_s$. Отсюда эта линия идет вдоль оси горного хребта, и мы не должны по ней следовать, так как она приведет нас к еще большим высотам.

Однако вдоль линии $y = x \operatorname{ctg} \theta$ вещественная часть F равна

$$f = f_s - \frac{1}{2} ax^2 \operatorname{cosec}^2 \theta + \dots = f_s - \frac{1}{2} s^2 + \dots,$$

где $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ представляет собой расстояние вдоль этой линии от седловой точки. Поэтому вдоль этого пути в любом направлении от вершины прохода мы держим курс вниз к долине. Если наш контур не

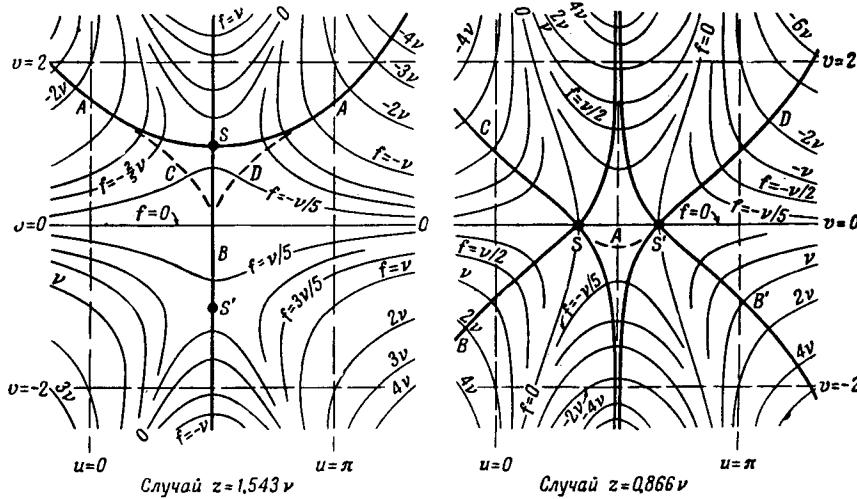


Рис. 5.14. Пути интегрирования для получения асимптотических представлений функций Бесселя, если z , и v велики.

должен пересекать других горных цепей, то приближенным выражением для интеграла тогда будет

$$\int e^{F(w)} dw \approx e^{f_s + ig_s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{2}\pi i - i\theta} ds = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{f_s + ig_s - i\theta + \frac{1}{2}\pi i}$$

Если контур (в направлении интегрирования) вблизи $w = w_s$ образует угол $\frac{1}{2}\pi - \theta$ с вещественной осью, то элемент dw равен $e^{\frac{1}{2}\pi i - i\theta} ds$, где ds вещественно. (Если интеграл взять в противоположном направлении, то надо в окончательном результате добавить множитель -1 или заменить в показателе $\frac{1}{2}\pi i$ на $-\frac{1}{2}\pi i$.) Это выражение тем лучше приближает истинное значение интеграла, чем выше и уже проход, через который мы должны идти (то есть чем больше f_s и a).

Для преобразования интеграла, представляющего функцию Бесселя, положим $F(w) = iz \cos w + iw$. В седловых точках, где dF/dw равно нулю, будет $\sin w_s = v/z$. Если z вещественно, возможны два случая: если $z > v$, то w_s комплексно и находится в точках $\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi + i \operatorname{Arch}(v/z)$.

Оба случая показаны на рис. 5.14, где оба рисунка начерчены на плоскости $w = u - iv$, причем для правого $z = 0,866v$, а для левого $z = 1,543v$.

Тонкие линии — линии равного значения $f = \operatorname{Re} F$. Жирные линии — контуры, проходящие через одну или обе седловые точки S, S' и вдоль которых $g = \operatorname{Im} F$ постоянно. Контур A , проходящий из $i\infty - \frac{1}{2}\pi$ через S (или через S и S' на правом рисунке) в $i\infty + \frac{3}{2}\pi$, дает $2J_v(z)$. Контур C , проходящий из $i\infty - \frac{1}{2}\pi$ через S' (слева) или S (справа) в $-i\infty + \frac{1}{2}\pi$, дает $H_v^{(1)}(z)$, а контур D дает $H_v^{(2)}(z)$. Если применить C и D вместе, начиная из $i\infty - \frac{1}{2}\pi$ и $i\infty + \frac{3}{2}\pi$ и кончая оба контура в $-i\infty + \frac{1}{2}\pi$, получаем $2N_v(z)$. На контурах B и B' значение g постоянно, но в этих случаях f убывает, когда мы отходим от седловой точки. Если как v , так и z велики, то значение f в седловой точке много больше, чем, например, ее значения в любом другом месте вдоль A , так что вне непосредственной близости S можно полностью пренебречь подинтегральной функцией.

Взяв сначала случай $z < v$ (и полагая для удобства $z = v \operatorname{sech} \alpha$), мы найдем, что $dF/dw = 0$ при $w = w_s = \frac{1}{2}\pi \pm i\alpha$. Верхняя точка S пересекается контуром A , построенным для $2J_v(v \operatorname{sech} \alpha)$. Значение f в w_s равно $f_s = v(\operatorname{th} \alpha - \alpha)$, а значение g там равно $g_s = \frac{1}{2}\pi v$. Вторая производная d^2F/dw^2 при $w = w_s$ равна $-v \operatorname{th} \alpha$, так что вблизи точки S значение F приближенно равно

$$F \simeq v(\operatorname{th} \alpha - \alpha) + \frac{1}{2}iv\pi - \frac{1}{2}v \operatorname{th} \alpha \cdot (w - w_s)^2 = F_s + \frac{1}{2}ae^{2i\theta}(w - w_s)^2,$$

$$a = v \operatorname{th} \alpha, \quad \theta = \frac{1}{2}\pi.$$

Согласно нашим предыдущим рассуждениям, контур, спускающийся с прохода, составляет угол $\frac{1}{2}\pi - \theta = 0$ с вещественной осью, и приближенное значение интеграла равно

$$2J_v(v \operatorname{sech} \alpha) \simeq \frac{e^{\frac{1}{2}\pi iv}}{\pi} \int_A e^{F(w)} dw = \sqrt{\frac{2}{\pi v \operatorname{th} \alpha}} e^{v(\operatorname{th} \alpha - \alpha)}.$$

Контуры для функций Ганкеля проходят через S' , где

$$f_s = v(\alpha - \operatorname{th} \alpha), \quad g_s = \frac{1}{2}\pi v, \quad (d^2F/dw^2)_s = v \operatorname{th} \alpha, \quad \theta = 0,$$

$$a = v \operatorname{th} \alpha.$$

Для первой функции Ганкеля контур проходит через S' в отрицательном, а для второй — в положительном направлениях, так что

$$H_v^{(2)}(v \operatorname{sech} \alpha) \simeq -H_v^{(1)}(v \operatorname{sech} \alpha) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi v \operatorname{th} \alpha}} e^{v(\alpha - \operatorname{th} \alpha) + \frac{1}{2}\pi i}$$

и потому соответствующим выражением для функции Неймана будет

$$-N_v(v \operatorname{sech} \alpha) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi v \operatorname{th} \alpha}} e^{v(\alpha - \operatorname{th} \alpha)}.$$

Если $z > v$, полагаем $z = v \sec \beta$; тогда седловыми точками будут $w_s = \frac{1}{2}\pi \pm \beta$. Вторая производная $(d^2F/dw^2)_s = \pm iv \operatorname{tg} \beta$, так что $a = v \operatorname{tg} \beta$ и $\theta = \pm \pi/4$; далее, $f_s = 0$ и $g_s = \frac{1}{2}\pi v \mp v(\operatorname{tg} \beta - \beta)$. Контур C для первой

функции Ганкеля пересекает $S(w_s = \frac{1}{2}\pi - \beta)$ в отрицательном направлении, так что

$$H_v^{(1)}(\nu \sec \beta) \simeq \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i\nu}}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\nu \tan \beta}} e^{\frac{1}{2}\pi i\nu + i\nu(\tan \beta - \beta) - i\theta - \frac{1}{2}\pi i} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \tan \beta}} e^{i\nu(\tan \beta - \beta) - \frac{1}{4}\pi i}.$$

с другой стороны, вторая функция приобретает вид

$$H_v^{(2)}(\nu \sec \beta) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \tan \beta}} e^{-i\nu(\tan \beta - \beta) + \frac{1}{4}\pi i}.$$

С помощью этих двух функций мы можем подсчитать J_ν и N_ν .

Если z очень близко к ν , обе седловые точки приближаются друг к другу и в конце концов становятся неразличимыми. При $z = \nu$ в точке $w = \frac{1}{2}\pi$ как dF/dz , так и d^2F/dz^2 равны нулю, так что нуль будет высшего порядка, и надо ожидать тройной симметрии осей. Контуры, на которых $g = \text{const}$, приближаются к точке $w = \frac{1}{2}\pi$ вдоль мнимой оси или вдоль направлений $\pm \pi/6$, или $\pi \mp \pi/6$. По направлениям $\pi/6$, $\pi - \pi/6$, $3\pi/2$ функция f убывает при возрастании расстояния от «седловой точки» (седло для трехногого всадника). Для $J_\nu(\nu)$ мы применяем первые два направления, причем первое в обратную сторону. Интеграл оказывается равным

$$J_\nu(\nu) \simeq \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}}.$$

Если $z - \nu$ очень мало сравнительно с ν , то все равно можно пользоваться этим путем интегрирования, причем можно подсчитать малый поправочный член.

Таким образом, мы можем написать следующие приближенные формулы для больших значений ν и z для различных областей z по отношению к ν (при вещественном ν):

$$J_\nu(z) \simeq \begin{cases} \frac{e^\nu (\tanh \alpha - \alpha)}{\sqrt{2\pi \nu \tanh \alpha}}, & z < \nu, \tanh \alpha = \sqrt{1 - (z/\nu)^2}, \\ \frac{\sin(\pi/3) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3\pi (z/6)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sin(2\pi/3) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\pi (z/6)^{\frac{2}{3}}} (z - \nu), & z \simeq \nu, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \tan \beta}} \cos\left[\nu \tan \beta - \nu \beta - \frac{1}{4}\pi\right], & z > \nu, \tan \beta = \sqrt{(z/\nu)^2 - 1}. \end{cases} \quad (5.3.77)$$

$$N_\nu(z) \simeq \begin{cases} \frac{-2e^\nu (\alpha - \tanh \alpha)}{\sqrt{2\pi \nu \tanh \alpha}}, & z < \nu, \\ -\frac{2 \sin(\pi/3) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3\pi (z/6)^{\frac{1}{3}}} + \frac{2 \sin(2\pi/3) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\pi (z/6)^{\frac{2}{3}}} (z - \nu), & z \simeq \nu, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \tan \beta}} \sin\left[\nu \tan \beta - \nu \beta - \frac{1}{4}\pi\right], & z > \nu. \end{cases}$$

Кулоновская волновая функция. Радиальная часть уравнения Шредингера для электрона с массой m , зарядом $-e$ и полной энергией E в центрально-симметричном потенциальном поле $V(r)$ имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R + \frac{12m}{\hbar^2} [E - V(r)] R = 0,$$

где множитель $l(l+1)$ представляет собой константу разделения, появляющуюся из углового множителя; если потенциал зависит только от r , то l целое. Если потенциал V представляет собой кулоновское поле, порожденное частицей заряда Ze (достаточно тяжелой, так что частица находится в центре тяжести), то V равно $-e^2 Z/r$. Полагая $E = -(me^4 Z^2 / 2\hbar^2) \chi^2$,

$x = 2\chi z = (2\chi me^2 Z / \hbar^2) r$ и $R = e^{-\frac{1}{2}\chi^2} x^l F(x)$, получим уравнение для F

$$x \frac{d^2F}{dx^2} + [2(l+1)-x] \frac{dF}{dx} - \left[l+1 - \frac{1}{\chi} \right] F = 0,$$

которое является вырожденным гипергеометрическим уравнением с $a = l+1 - 1/\chi$ и $c = 2l+2$. Поэтому решение данного уравнения, конечное при $z=0$, имеет вид

$$\begin{aligned} C_l(\chi, z) &= \frac{\sqrt{\pi} (2\chi z)^l e^{-\chi z}}{2^{2l+1} \Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)} F\left(l+1-\frac{1}{\chi} | 2l+2 | 2\chi z\right) \sim \\ &\underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma[l+1-(1/\chi)]} (2\chi z)^{-1-(1/\chi)} e^{\chi z} + \\ &+ \frac{\Gamma(l+1) e^{i\pi[l+1-(1/\chi)]}}{\Gamma[l+1+(1/\chi)]} (2\chi z)^{-1+(1/\chi)} e^{-\chi z}. \quad (5.3.78) \end{aligned}$$

Если χ вещественное (то есть энергия E отрицательная), это решение, хотя и конечное при $z \rightarrow 0$, становится бесконечным при $z \rightarrow \infty$, если только $\Gamma(l+1-1/\chi)$ не бесконечное. Если $1/\chi$ равно положительному целому n , большему l , то $\Gamma(l+1-1/\chi)$ представляет собой значение гамма-функции от нуля или от отрицательного целого, равное бесконечности. Только в этих случаях имеется решение, конечное от $r=0$ до $r=\infty$. Таким образом, допустимые отрицательные значения энергии таковы:

$$E_n = -(me^4 Z^2 / 2\hbar^2 n^2), \quad n = l+1, l+2, l+3, \dots;$$

эти значения были впервые подсчитаны Бором.

Если χ мнимое ($\chi = ik$ в случае положительной энергии), то C_l конечно во всей области изменения z для любого вещественного значения k (любого положительного значения энергии). В этом случае первое (конечное) решение принимает различные формы:

$$\begin{aligned} C_l(ik, z) &= \frac{\sqrt{\pi} (2ikz)^l}{2^{2l+1} \Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)} \left[1 - \frac{z}{l+1} + \frac{1 - \frac{1}{2}(l+1)}{2^l (l+1) \left(l+\frac{3}{2}\right)} k^2 z^2 - \dots \right] = \\ &= (2ikz)^l \Gamma(l+1) \left[\frac{1}{\Gamma[l+1+(i/k)]} U_1\left(l+1+\frac{i}{k} | 2l+2 | 2ikz\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma[l+1-(i/k)]} U_2\left(l+1+\frac{i}{k} | 2l+2 | 2ikz\right) \right] e^{-ikz} \simeq \\ &\underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\Gamma(l+1) e^{(i\pi l/2) - (\pi/2k)}}{kz |\Gamma[l+1+(i/k)]|} \sin \left[kz + \frac{1}{k} \ln(2kz) - \frac{1}{2}\pi l - \Phi_l(k) \right], \quad (5.3.79) \end{aligned}$$

где

$$\Gamma\left(l+1+\frac{i}{k}\right)/\Gamma\left(l+1-\frac{i}{k}\right)=e^{2i\Phi_l(k)}$$

и

$$\left|\Gamma\left(l+1+\frac{i}{k}\right)\right|^2=\left[l^2+\frac{1}{k^2}\right]\left[(l-1)^2+\frac{1}{k^2}\right]\cdots\left[1+\frac{1}{k^2}\right]\frac{\pi/k}{\sin(\pi/k)}.$$

Второе решение, имеющее особенность при $z=0$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_l(ik, z) &= \frac{\sqrt{\pi}(2ikz)^l e^{-ikz}}{2^{2l+1}\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)} G\left(l+1+\frac{i}{k}|2l+2|2ikz\right) \simeq \\ &\simeq \frac{\Gamma(l+1)e^{i(\pi l/2)-(\pi/2k)}}{ikz|\Gamma[l+1+(i/k)]|} \cos\left[kz+\frac{1}{k}\ln(2kz)-\frac{1}{2}\pi l-\Phi_l(k)\right]. \end{aligned}$$

Разложение в ряд около $z=0$, показывающее структуру особенности в этой точке, можно получить из формулы (5.3.62).

Другие решения, пригодные для других интересующих нас уравнений, будут исследованы после постановки задач. Так, например, волновые функции для параболических и параболических цилиндрических координат можно выразить через функции F и G . Они будут рассмотрены в гл. 11.

Функции Матье. Мы указали на стр. 550, что интегральное представление наиболее полезно в случае уравнений с тремя регулярными особыми точками или с одной регулярной и одной иррегулярной точкой. Поэтому мы не разочаруемся, найдя, что оно не так хорошо применимо к более сложным уравнениям. Чтобы проиллюстрировать возникающие трудности и показать, что представление все же приносит некоторую пользу, применим преобразование Лапласа к уравнению Матье (в одной из его алгебраических форм)

$$(z^2-1)\psi''+z\psi'+(h^2z^2-b)\psi=0. \quad (5.3.80)$$

Легко проверить, что применение преобразования Лапласа даст уравнение для $v(t)$ того же общего вида:

$$(t^2+h^2)v''+3tv'-(t^2+b-1)v=0.$$

Таким образом, чтобы решить уравнение для v , требуется столько же работы, как и для ψ ; v тоже пропорциональна функции Матье, и наше интегральное преобразование приводит к *интегральному уравнению*.

Однако интегральное уравнение может иметь некоторую ценность, так что стоит его рассмотреть подробнее. Целесообразно изменить шкалу t , чтобы уравнение для v стало по возможности близким к уравнению для ψ . Положив $\psi(z)=\int e^{ihtz}v(t)dt$, получим уравнение для v и присоединенную билинейную форму следующего вида:

$$\begin{aligned} (t^2-1)v''+3tv'+(h^2t^2-b+1)v &= 0, \\ P(v, e^{ihtz}) &= -ih e^{ihtz} \{(t^2-1)v' + [t - ihz(t^2-1)]v\}. \end{aligned}$$

Если v положить равным $f(t)/\sqrt{1-t^2}$, то уравнение для f оказывается тем же самым, что уравнение (5.3.80) для ψ . Следовательно, можно сказать, что если f представляет собой решение уравнения Матье (5.3.80), то другим решением того же уравнения будет

$$\psi(z)=A\int e^{ihtz}f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (5.3.81)$$

Если постоянная A и пределы интегрирования выбраны соответственным образом, то ψ может равняться f и мы получаем *интегральное уравнение* для ψ .

Однако даже в таком виде этот интеграл может нам помочь при аналитическом продолжении решения, из-за чего нам и нужно интегральное представление.

Например, решением уравнения (5.3.80) (см. стр. 531) для частного значения $b (= b e_{2m})$ будет

$$Se_{2m}(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos(2n\varphi), \quad z = \cos \varphi.$$

Из формулы (5.3.81) мы видим, что другим решением уравнения (5.3.80) будет

$$\psi(z) = A \int_0^{2\pi} e^{ihz} \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos(2n\varphi) d\varphi = 2\pi A \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} J_{2n}(hz),$$

причем мы применили формулу (5.3.65) для получения функций Бесселя. Это особенно интересное и важное соотношение; то, что решение уравнения Матье можно выразить в виде ряда по функциям Бесселя, интересно и само по себе, но то, что числовые коэффициенты ряда равны (с чередующимися знаками) коэффициентам разложения решения в ряд Фурье, представляет собой один из тех факторов, которые укрепляют нашу веру в значительное единство и простоту математики.

Мы могли, конечно, предоставить себе этот приятный сюрприз в предыдущем параграфе, когда мы говорили о разложении функций Матье в ряды. Мы могли бы попытаться применить ряды по функциям Бесселя для решения уравнения (5.3.80) (см. стр. 540) и нашли бы, что рекурсивная формула для коэффициентов *точности та же*, что и формула (5.2.69) для коэффициентов ряда Фурье (с чередующимися знаками перед a). Затем мы сказали бы, что рекуррентные формулы (5.3.64) для функций Бесселя, приводящие к рекурсивной формуле для коэффициентов, тесно связаны с рекуррентными формулами для тригонометрических функций, так что для столь симметричного уравнения, каким является уравнение Матье, рекурсивные формулы оказываются эквивалентными. Так как мы проходили с демонстрацией этого свойства до настоящего момента (чтобы лучше познакомиться с функциями Бесселя), то теперь мы предпочли бы сказать, что тесная *интегральная взаимосвязь* между тригонометрическими и бесселевыми функциями, осуществляемая преобразованием Лапласа, является свойством, порождающим это совпадение. Конечно, эти два утверждения являются только двумя выражениями одного и того же общего свойства.

До сих пор мы показали только, что ряд по функциям Бесселя является решением уравнения (5.3.80); мы не показали, как он связан с функцией $Se_m(h, z)$, которая также есть ряд (аналитический при $z = \pm 1$). Для этого мы перейдем в Se от $z = \cos \varphi$ к $z = \operatorname{ch} \theta$ ($\theta = i\varphi$) и затем применим формулы (5.2.54), связывающие гиперболические функции с функциями Гегенбауера

$$Se_{2m}(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \operatorname{ch}(2n\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} T_{2n}^{-1/2}(z).$$

При помощи разложения этого выражения по степеням z и разложения функции Бесселя также по степеням z можно показать, что оба ряда

пропорциональны и потому образуют одно и то же решение. Таким образом, мы получили аналитическое продолжение решения Se , определенного при $-1 < z < 1$, на интервал $1 < z < \infty$.

Для области $1 < z < \infty$ мы предпочтет применять функцию, имеющую простые асимптотические свойства. Пользуясь асимптотическим поведением функций Бесселя (5.3.68), определяем

$$Je_{2m}(h, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} J_{2n}(hz) \simeq \frac{1}{\sqrt{hz}} \cos \left[hz - \frac{1}{2}\pi \left(2m + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (5.3.82)$$

поскольку $\sum B_{2n} = 1$. Это асимптотическое выражение имеет место для аргумента z между $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$. Так как это решение пропорционально Se_{2m} , то можно найти коэффициент пропорциональности посредством сравнения значений при любом подходящем значении z . Наиболее подходит значение $z = 0$, так как

$$Je_{2m}(h, 0) = (-1)^m B_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad Se_{2m}(h, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n}.$$

Отсюда

$$\left[\sum_n (-1)^n B_{2n} \right] Je_{2m}(h, z) = (-1)^m B_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} Se_{2m}(h, z). \quad (5.3.83)$$

Теперь мы в состоянии получить второе решение уравнения (5.3.80) при помощи замены функций Бесселя на функции Неймана

$$Ne_{2m}(h, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} N_{2n}(hz) \simeq \frac{1}{\sqrt{hz}} \sin \left[hz - \frac{1}{2}\pi \left(2m + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (5.3.84)$$

Это решение имеет особенности при $z = \pm 1$ и является, конечно, независимым от Se_{2m} и Je_{2m} . Ряд (5.3.84) нельзя применять при $|z| \leq 1$ (на самом деле он не сходится хорошо и для малых значений z , несколько больших 1), и надо пользоваться различными разложениями. Так как второе решение в области $|z| \leq 1$ редко требуется в физических задачах (в силу его непериодичности по φ), то мы не будем заниматься этим вопросом дальше.

Преобразование Лапласа и разделенное волновое уравнение. До продолжения нашего исследования функций Матье и сфероидальных функций будет полезно для ясности изложения ввести особо важный метод решения волнового уравнения, который будет широко применяться в последующих главах. Здесь мы применим его только для выражения новой точки зрения на преобразование Лапласа, которая даст нам возможность строить новые интегральные преобразования фактически по нашему желанию. Для этого мы возвратимся к исследованию разделения переменных для двумерного волнового уравнения, рассмотренного на стр. 473–478.

Если координаты ξ_1 и ξ_2 являются разделяющими и осуществляют конформное преобразование плоскости x, y , то уравнению Гельмгольца можно придать вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} + k^2 [g_1(\xi_1) + g_2(\xi_2)] \psi = 0. \quad (5.3.85)$$

Любое решение уравнения Гельмгольца, разделяющееся по ξ_1 , ξ_2 на множители или нет, должно быть решением последнего уравнения. Например, e^{ikx} или $J_0(kr)$, если x или r выразить через ξ_1 , ξ_2 , удовлетворяет уравнению (5.3.85). Если решение окажется разделяющимся в этих координатах $\psi = X_1(\xi_1)X_2(\xi_2)$, то X_1 и X_2 будут решениями разделенных уравнений

$$(d^2X_1/d\xi_1^2) + k^2 [g_1(\xi_1) - \alpha^2] X_1 = 0, \quad (d^2X_2/d\xi_2^2) + k^2 [g_2(\xi_2) + \alpha^2] X_2 = 0,$$

где α^2 – константа разделения.

Новым здесь является то, что, как мы можем сейчас показать, *каждое решение уравнения Гельмгольца* является подходящим ядром для интегрального представления *одного из разделенных решений* X_1 через другое X_2 . Допустим, что $K(z, t)$ представляет собой решение уравнения Гельмгольца $\nabla^2 K + k^2 K = 0$, выраженное в координатах ($z = \xi_1$, $t = \xi_2$ для избежания индексов), в которых решения X_1 , X_2 разделяются. Например, K может равняться e^{ikx} , а разделяющими координатами могут быть полярные координаты ($z = \ln r$, $t = \varphi$); тогда $K = e^{ikr} \cos \varphi$. В этом случае K удовлетворяет уравнению (5.3.85)

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + k^2 g_1(z) K = -\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - k^2 g_2(t) K.$$

Если теперь получающаяся при разделении функция $X_1(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}_z(X_1) = (d^2X_1/dz^2) + k^2(g_1 - \alpha^2)X_1 = 0,$$

то можно применить интегральное представление $X_1(z) = \int K(z, t)v(t)dt$. Действительно,

$$\mathcal{L}_z(K) = \mathcal{M}_t(K) = -\partial^2 K / \partial t^2 - k^2[g_2(t) + \alpha^2]K$$

и в силу отсутствия члена с первой производной и того, что вторая производная не имеет множителя, зависящего от t , сопряженный оператор $\tilde{\mathcal{M}}_t = \mathcal{M}_t$. Поэтому уравнение для v

$$d^2v/dt^2 + k^2[g_2(t) + \alpha^2]v = 0$$

есть как раз уравнение, которому удовлетворяет другой, получающийся при разделении множитель X_2 , образующий вместе с X_1 решение уравнения Гельмгольца.

Таким образом, мы сейчас показали, что если $K(z, t)$ есть любое решение уравнения $(\nabla^2 + k^2)K = 0$, выраженное в разделяющих координатах z и t , а $X_2(t)$ – решение уравнения, дающего после разделения зависимость от координаты t , то решение уравнения, дающего зависимость от координаты z представим в виде

$$X_1(z) = \int K(z, t)X_2(t)dt, \quad (5.3.86)$$

а $X_1(z)X_2(t)$ является разделенным решением уравнения $(\nabla^2 + k^2)X_1X_2 = 0$ в координатах z , t . Если функция X_2 проще чем X_1 , то мы получаем интегральное представление более сложной функции через более простую (если K достаточно простое).

Как первый пример этого возьмем полярные координаты $\xi_1 = \ln r$, $\xi_2 = \varphi$, где уравнение (5.3.85) приобретает вид [см. (5.1.13)]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} + k^2 e^{2\xi_1} \psi = 0.$$

Решением уравнения $(\nabla^2 + k^2)K = 0$ является $K = e^{ikx} = \exp(ik e^{\xi_1} \cos \varphi) = e^{ikr} \cos \varphi$, а решением уравнения для φ -множителя будет $\cos \alpha \varphi$ (где

α — константа разделения). Отсюда решением уравнения для r -множителя будет

$$X_1(r) = \int e^{ikr} \cos \varphi \cos \alpha \varphi d\varphi,$$

и из формулы (5.3.65) мы видим, что если интегрирование производится от 0 до 2π , то получается интегральное представление функции Бесселя $J_\alpha(kr)$. Вполне разделенное решение для константы разделения α имеет вид $J_\alpha(kr) \cos \alpha \varphi$.

Мы могли, конечно, применить любое из других решений в качестве X_2 , как $\sin \alpha \varphi$ или $e^{i\alpha \varphi}$ и т. д., чтобы получить другие представления функций Бесселя или Неймана. Или же мы могли применить другие волновые решения в качестве ядра. Или, наконец, мы могли переставить порядок множителей и выразить тригонометрические функции как интеграл от функций Бесселя вида

$$\int e^{ik \cos \varphi \cdot e^z} J_\alpha(ke^z) dz = \int e^{ikr \cos \varphi} J_\alpha(kr) \frac{dr}{r},$$

который, если интегрирование производится от нуля до бесконечности, оказывается пропорциональным $e^{i\alpha \varphi}$. Однако выражение простой показательной функции в виде интеграла Бесселя было бы излишним усердствованием.

Переходя к функциям Матье, мы можем воспользоваться координатами $i\theta = \xi_1 - \beta$, $\varphi = \xi_2$, данными в формулах (5.1.15), где $x = d \cos \theta \cos \varphi$, $y = id \sin \theta \sin \varphi$. Мы вновь пользуемся ядром $e^{ihx} = e^{ih \cos \theta \cos \varphi}$ ($h = kd$) и получаем интегральное представление

$$X_1(\theta) = \int e^{ih \cos \theta \cos \varphi} X_2(\varphi) d\varphi,$$

где как X_1 , так и X_2 удовлетворяют уравнению [см. (5.2.67)]

$$(d^2 X/d\varphi^2) + [b - h^2 \cos^2 \varphi] X = 0,$$

в котором φ есть либо φ либо θ , а X — либо X_1 , либо X_2 . Здесь мы имеем полную симметрию, так что если пределы интегрирования и постоянные множители выбраны соответственно, то $X_1 = X_2$ и вместо интегрального представления получается интегральное уравнение для X . Из соотношений (5.3.81) — (5.3.83) мы видим, что решение $Se_{2m}(h, \cos \theta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$Se_{2m}(h, \cos \theta) = \lambda_{2m} \int_0^{2\pi} e^{ih \cos \theta \cos \varphi} Se_{2m}(h, \cos \varphi) d\varphi, \quad (5.3.87)$$

$$\lambda_{2m} = \frac{1}{2\pi B_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} = \left(\frac{1}{2\pi B_0} \right) Se_{2m}(h, 0).$$

Мы могли бы также успешно взять $e^{ihy} = e^{ih \sin \theta \sin \varphi}$ в качестве ядра. Посредством этого возможно показать (см. аналогичный вывод на стр. 595), что

$$Je_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{Se_{2m}(h, 0)} (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} J_{2n}(h \operatorname{sh} \mu), \quad (5.3.88)$$

где $\mu = \xi_1 - \beta = i\theta$.

Значительно более важное и полезное разложение для Je получается при помощи интегрального представления, ядром которого является функция Бесселя. Решением уравнения Гельмгольца в полярных координатах

служит функция

$$\begin{aligned} J_0(kr) &= J_0(k\sqrt{x^2+y^2}) = J_0(h\sqrt{\cos^2\theta+\cos^2\varphi-1}) = \\ &= J_0\left(h\sqrt{\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\varphi}\right). \end{aligned}$$

Отсюда другим решением уравнения Матье (5.2.67) будет интеграл

$$\int_0^{2\pi} J_0\left(h\sqrt{\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\varphi}\right) Se_{2m}(h, \cos\theta) d\theta.$$

Он конечен для всех вещественных значений θ , периодичен по θ и четен по θ (то есть его значение не меняется при изменении знака θ). Поэтому он должен быть пропорционален $Se_{2m}(h, \cos\theta)$. Таким образом, мы получили другое интегральное уравнение

$$Se_{2m}(h, \cos\theta) = v_{2m} \int_0^{2\pi} J_0\left(h\sqrt{\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\varphi}\right) Se_{2m}(h, \cos\varphi) d\varphi. \quad (5.3.89)$$

Для определения v_{2m} и, что более важно, для построения нового разложения Se_{2m} мы применим формулу (5.3.66) для разложения ядра. Положив в (5.3.66) $\varphi = 2\varphi$, $x = \frac{1}{2}he^{i\theta}$, $y = -\frac{1}{2}he^{-i\theta}$, получим

$$J_0\left(h\sqrt{\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\varphi}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n\left(\frac{1}{2}he^{i\theta}\right) J_n\left(\frac{1}{2}he^{-i\theta}\right) \cos(2n\varphi);$$

комбинируя это с рядом Фурье для Se_{2m} (см. стр. 594), мы в конце концов найдем

$$Se_{2m}(h, \cos\theta) = 2\pi v_{2m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} J_n\left(\frac{1}{2}he^{i\theta}\right) J_n\left(\frac{1}{2}he^{-i\theta}\right).$$

Подстановка $\theta = 0$ дает нам выражение для постоянной

$$v_{2m} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} J_n^2\left(\frac{h}{2}\right) \right]^{-1},$$

так как $Se_{2m}(h, 1) = 1$.

Можно показать, что $\int_0^{2\pi} J_{2n}(h \cos\theta) d\theta = 2\pi J_n^2\left(\frac{h}{2}\right)$. Из формул (5.3.82) и (5.3.83), где $z = \cos\theta$, при помощи интегрирования по θ получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} Se_{2m}(h, \cos\theta) d\theta &= 2\pi B_0 = \\ &= \frac{1}{B_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \int_0^{2\pi} J_{2n}(h \cos\theta) d\theta = \\ &= \frac{2\pi}{B_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} J_n^2\left(\frac{h}{2}\right), \end{aligned}$$

откуда мы можем в итоге получить выражение v_{2n} только через B_{2n}

$$v_{2n} = \frac{1}{2\pi B_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} = \frac{1}{2\pi B_0^2} Se_{2m}(h, 0) Se_{2m}(h, 1).$$

Еще о функциях Матье. Собирая все наши результаты о четных периодических функциях четного порядка, мы получаем, что угловая функция имеет вид

$$Se_{2m}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos(2n\varphi),$$

где коэффициенты B подсчитываются методами, рассмотренными на стр. 531 – 533', и нормируются так, что $\sum B_{2n} = 1$. «Радиальными» функциями первого рода являются

$$\begin{aligned} J_{e_{2m}}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{Se_{2m}(h, 1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} J_{2n}(h \operatorname{ch} \mu) = \\ &= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi/2} B_0}{Se_{2m}(h, 1) Se_{2m}(h, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \operatorname{ch}(2n\mu) = \\ &= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi/2}}{Se_{2m}(h, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} J_{2n}(h \operatorname{sh} \mu) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{B_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} J_n\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) J_n\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right). \quad (5.3.90) \end{aligned}$$

Подобным образом для второго радиального решения имеем

$$\begin{aligned} Ne_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{Se_{2m}(h, 1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} N_{2n}(h \operatorname{ch} \mu) = \\ &= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi/2}}{Se_{2m}(h, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} N_{2n}(h \operatorname{sh} \mu) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{B_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} N_n\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) J_n\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right). \quad (5.3.91) \end{aligned}$$

Второй ряд сходится, только если $\operatorname{sh} \mu > 1$; третий ряд сходится вполне удовлетворительно при $\mu \geq 0$. Для нормировки функции Se_{2m} , примененной здесь нами, $Se_{2m}(h, 1) = \sum B_{2n} = 1$, а $Se_{2m}(h, 0) = \sum (-1)^n B_{2n}$, но формулы записаны так, что они справедливы при любой нормировке.

Чтобы удовлетворить граничным условиям, часто бывает важно знать значения обеих функций J_e и Ne , а также их производных при $\mu = 0$ (что соответствует предельному эллиптическому цилиндру, то есть полосе ширины $d = h/k$). Для первого решения можно легко найти, что при $\mu = 0$

$$J_{e_{2m}}(h, \operatorname{ch} \mu) = (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{B_0}{\Sigma (-1)^n B_{2n}}, \quad \frac{d}{d\mu} J_{e_{2m}}(h, \operatorname{ch} \mu) = 0.$$

Для получения производной от Ne , мы применяем значение определителя

Вронского

$$\Delta(Je, Ne) = Je_{2m} \frac{d}{d\mu} Ne_{2m} - Ne_{2m} \frac{d}{d\mu} Je_{2m} = 1,$$

в чем легко убедиться при помощи асимптотического вида Je и Ne . Так как при $\mu = 0$ второй член равен нулю, то значение производной от Ne при $\mu = 0$ должно равняться обратному значению Je .

Найти значение Ne при $\mu = 0$ труднее, так как надо пользоваться разложением функции Неймана около начала координат. Наиболее прямой метод состоит в применении значений J и N в довольно хорошо сходящемся разложении

$$Ne_{2m}(h, 1) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{B_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} N_n\left(\frac{h}{2}\right) J_n\left(\frac{h}{2}\right).$$

Другой метод основан на том, что, согласно стр. 534, Ne_{2m} представляет собой линейную комбинацию Se_{2m} и второго решения Fe_{2m} , определенного формулой (5.2.79). Сравнивая значения функций и их производных при $\mu = 0$, получаем соотношение

$$Ne_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) = \left[(-1)^m \frac{\sqrt{2/\pi}}{B_0} \sum_n (-1)^n B_{2n} \right] Fe_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) + \\ + [Ne_{2m}(h, 1)] Se_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu), \quad (5.3.92)$$

которое показывает поведение решения вблизи $\mu = 0$.

До сих пор мы рассматривали только четные функции Матье, Se и функции, связанные с ними. Имеются также нечетные решения для различных значений константы разделения ($b = b_{0m}$). Анализ этих решений проходит аналогичным путем с небольшими изменениями из-за перемены характера симметрии. Например, мы не можем пользоваться тем же интегральным уравнением (5.3.89), так как интеграл по синусоидальному ряду был бы равен нулю. Возвращаясь к формуле (5.3.81), заметим, что если $F(t)$ есть решение уравнения Матье, то

$$\Psi(z) = A \sqrt{z^2 - 1} \int e^{ihz} F(t) dt$$

также является решением. Заменяя $z = \operatorname{ch} \mu$, $t = \cos \varphi$ и интегрируя один раз по частям, имеем (например, для нечетных значений m):

$$Jo_{2m+1}(h, \operatorname{ch} \mu) = A \operatorname{sh} \mu \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \int_0^{2\pi} \sin \varphi e^{ih \operatorname{sh} \mu \cos \varphi} \sin(2n+1) \varphi d\varphi = \\ = \left(\frac{2\pi}{ih} \right) A \operatorname{th} \mu \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} i^{2n+1} (2n+1) J_{2n+1}(h \operatorname{ch} \mu).$$

Дальнейшие преобразования проводятся до конца с аналогичными заменами и дают

$$Jo_{2m+1}(h, \operatorname{ch} \mu) = \frac{\operatorname{th} \mu}{So'_{2m+1}(h, 1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} (2n+1) B_{2n+1} J_{2n+1}(h \operatorname{ch} \mu) = \\ = \frac{(-1)^m \sqrt{\pi/8} B_1 h}{So'_{2m+1}(h, 1) So_{2m+1}(h, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \operatorname{sh}[(2n+1) \mu] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi/2}}{So_{2m+1}(h, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} J_{2n+1}(h \operatorname{sh} \mu) = \\
 &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{B_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left[J_n\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right) J_{n+1}\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) \right] = \\
 &= -J_{n+1}\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right) J_n\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right)] \simeq \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch} \mu}} \cos \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{3}{2}\right)\right], \quad (5.3.93)
 \end{aligned}$$

где So' представляет собой производную от $So(h \cos \varphi)$ по φ .

Второе решение No строится аналогичным образом. Так как первое решение Jo имеет нулевое значение для $\mu = 0$, то при этом величина No связана с производной от Jo при помощи определителя Вронского. Производную от No при $\mu = 0$ можно вычислить посредством ряда из произведений бесселевых функций

$$\begin{aligned}
 No_{2m+1}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{B_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left[J_n\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right) N_{n+1}\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) - \right. \\
 &\quad \left. - J_{n+1}\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right) N_n\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) \right],
 \end{aligned}$$

как было указано для значения функций Ne .

Возможно ввести также функции Матье третьего рода, подобно функциям Ганкеля, комбинируя функции первого и второго рода. Например,

$$He_{2n}(h, z) = Je_{2n}(h, z) + iNe_{2n}(h, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} H_{2n}(hz)$$

и т. д. Однако дальнейшее исследование специальных свойств функций Матье лучше отложить до последующей главы, когда наша техника будет более развита, а в этих функциях будет более непосредственная надобность.

Сфериодальные волновые функции. Более общее уравнение

$$(z^2 - 1) \psi'' + 2(a+1)z\psi' + (h^2 z^2 - b)\psi = 0$$

получается в случае сфероидальных координат. Если, например, взять вытянутые сфероидальные координаты μ, ϑ, φ , то после разделения получатся уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi &= 0, \\
 \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dS}{d\vartheta} \right) - \left(b + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} + h^2 \cos^2 \vartheta \right) S &= 0, \\
 \frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \frac{d}{d\mu} \left(\operatorname{sh} \mu \frac{dR}{d\mu} \right) + \left(b - \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 \mu} + h^2 \operatorname{ch}^2 \mu \right) R &= 0. \quad (5.3.94)
 \end{aligned}$$

Решая первое уравнение, мы получаем, что если решение должно быть периодическое по координате φ , то m должно быть целым. Если во втором уравнении подставить $\cos \vartheta = z$, $S = \sin^m \vartheta \cdot \psi(z)$ или в третьем $\operatorname{ch} \mu = z$, $R = \operatorname{sh}^m \mu \cdot \psi(z)$, то уравнение для ψ будет иметь вид (5.2.66), повторенный выше, причем a равно целому m .

На стр. 538 и 541 мы рассмотрели вопрос о возможности решения этого уравнения при помощи ряда по функциям Гегенбауера. Мы указали, что решение можно записать в виде

$$S_{ml}(h, z) = (1 - z^2)^{m/2} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} T_{2n}^m(z), \quad (5.3.95)$$

если l четное целое. Если l нечетное, то суммируются $d_{2n+1} T_{2n+1}^m(z)$. Соответствующие значения константы разделения, при которых S конечна на отрезке $-1 \leq z \leq 1$, обозначаются через b_{ml} . Нормировка коэффициентов d такова, что S_{ml} имеет то же значение или ту же производную при $z=1$, что $T_{l-m}^m(z)$. Например, если $m=0$, то мы требуем, чтобы $S_{0l}(h, 1) = T_l^0(1) = P_l(1) = 1$, так что для $m=0 \sum_n d_{2n} = 1$ или $\sum_n d_{2n+1} = 1$.

«Радиальные» решения, аналогичные функциям J_ν , J_ν для эллиптического цилиндрического случая, получаются при помощи применения интеграла (5.3.67) вместе с интегральным уравнением для этих функций (которое можно получить посредством преобразования Лапласа или при помощи метода стр. 595—599)

$$\psi(h, z) = A(z^2 - 1)^{m/2} \int e^{ihzt} (1 - t^2)^{m/2} f(t) dt.$$

Если $f(t)$ есть решение уравнения (5.2.66) для $a=m$, то ψ также является решением того же уравнения. Далее, для $a=m$ формулу (5.3.67) можно переписать

$$\int_{-1}^1 e^{ihzt} (1 - t^2)^m T_{2n}^m(t) dt = \frac{2(2n+2m)! (-1)^n}{(2n)! (hz)^m} j_{2n+m}(hz),$$

где $j_\nu(x) = \sqrt{\pi/2x} J_{\nu+1/2}(x)$ — сферическая функция Бесселя, упомянутая на стр. 582. Комбинируя эти две формулы и подставляя вместо $f(t)$ ряд для $S_{ml}(h, t)$, можно показать, что решением «радиального» уравнения при $b=b_{ml}$ будет

$$\begin{aligned} je_{ml}(h, ch \mu) &= \\ &\sum_n \frac{ch^{m+\mu}}{d_{2n} (2n+2m)!/(2n!)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-l} \frac{(2n+2m)!}{(2n)!} d_{2n} j_{m+2n}(h ch \mu) \simeq \\ &\simeq \frac{1}{h ch \mu} \sin \left[h ch \mu - \frac{1}{2} \pi (l + m) \right]. \end{aligned} \quad (5.3.96)$$

Второе решение $ne_{nl}(h, ch \mu)$ можно получить посредством подстановки $n_{m+2n}(h ch \mu)$, вместо $j_{m+2n}(h ch \mu)$, где n — сферическая функция Бесселя, определенная на стр. 582.

Для этих функций можно получить также интегральные уравнения с функциями Бесселя, но будет легче исследовать эти функции позже в книге (гл. 11). Мы закончим этот параграф рассмотрением других типов интегральных представлений, которые иногда оказываются полезными.

Ядра, являющиеся функциями от zt . Мы уже рассмотрели свойства ядра e^{zt} , связанного с преобразованием Лапласа. Однако любое ядро вида $K(zt)$ обладает тем свойством, что $zdK/dz = t dK/dt$. Это само по себе не особенно полезно, но если $K(w)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathcal{N}\left(w \frac{d}{dw}\right) K(w) = w^n \mathcal{R}\left(w \frac{d}{dw}\right) K(w),$$

где $\mathcal{R}[w(d/dw)]$ — сравнительно простой дифференциальный оператор, то мы можем использовать K как ядро для некоторых интегральных пред-

ствлений. Покажем эту технику на нескольких примерах.

Функция Бесселя $J_\nu(w)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[w^2 \frac{d^2}{dw^2} + w \frac{d}{dw} - \nu^2 \right] J_\nu(w) = -w^2 J_\nu(w).$$

Следовательно, любое уравнение вида

$$\mathcal{L}_z(\psi) = \frac{d^2\psi}{dz^2} + \left[\alpha z + \frac{1}{z} \right] \frac{d\psi}{dz} + \left[\alpha\mu - \frac{\nu^2}{z^2} \right] \psi = 0 \quad (5.3.97)$$

можно решить при помощи подстановки $\psi = \int J_\nu(zt) v(t) dt$, так как оператор \mathcal{L}_z , действуя на $J_\nu(zt)$, дает

$$t^2 \left[J_\nu''(w) + \frac{1}{w} J_\nu'(w) - \frac{\nu^2}{w^2} J_\nu(w) \right] + at \frac{d}{dt} J_\nu(w) + a\mu J_\nu(w) = 0.$$

Выражение в квадратных скобках как раз равно $-J_\nu(w)$, так что

$$\mathcal{L}_z \left(\int J_\nu v dt \right) = \int \mathcal{M}_t(J_\nu) v dt, \text{ где } \mathcal{M}_t(J_\nu) = at(d/dt) J_\nu + (\alpha\mu - t^2) J_\nu.$$

Сопряженный оператор порождает уравнение

$$\tilde{\mathcal{M}}_t(v) = -(d/dt)(atv) + [\alpha\mu - t^2]v = 0,$$

имеющее решение $v(t) = At^{\mu-1}e^{-t^2/2\alpha}$, и присоединенную билинейную форму

$$P = Aat^\mu e^{-t^2/2\alpha} J_\nu(tz).$$

Поэтому решением уравнения (5.3.97) будет

$$\psi(z) = A \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-t^2/2\alpha} J_\nu(tz) dt, \quad (5.3.98)$$

если только $\operatorname{Re}\mu + \operatorname{Re}\nu > 0$. Это решение представляет некоторый интерес, так как волновое уравнение в параболических координатах, которое можно записать в виде

$$F'' + \frac{1}{z} F' + \left(\gamma^2 - \frac{\nu^2}{z^2} - \beta^2 z^2 \right) F = 0,$$

обладает решением

$$F = A e^{-\beta z^2/2} \int_0^\infty t^{\gamma^2/2\beta} e^{-t^2/4\beta} J_\nu(tz) dt. \quad (5.3.99)$$

Наконец, уравнение

$$(z^2 - 1)\psi'' + \left(z - \frac{1}{z} \right) \psi' + \left(-\mu^2 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) \psi = 0,$$

имеющее три регулярные особые точки при $z=0$ и ± 1 и одну иррегулярную точку на бесконечности, также обладает решением вида

$$\psi(z) = \int J_\nu(zt) v(t) dt.$$

В этом случае оператор $\mathcal{M}(J)$ имеет вид

$$\mathcal{M}(J) = t^2 \frac{d^2J}{dt^2} + t \frac{dJ}{dt} + (t^2 - \mu^2) J$$

а сопряженное уравнение

$$\tilde{\mathcal{M}}(v) = t^2 \left[\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{3}{t} \frac{dv}{dt} + \left(1 - \frac{\mu^2 - 1}{t^2} \right) v \right] = 0$$

вновь связано с уравнением Бесселя, обладая решением $(1/t) J_\mu(t)$. При соединенная билинейная форма равна

$$P(J_\nu, v) = J_\nu(zt) J_\mu(t) + \frac{d}{dt} [t J_\nu(zt) J_\mu(t)] - 2 J_\nu(zt) \frac{d}{dt} [t J_\mu(t)],$$

и если только $\operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} \nu > -1$, можем получить

$$\psi(z) = \int_0^\infty J_\nu(zt) J_\mu(t) \frac{dt}{t}.$$

Как известно, эта величина имеет разрыв при $z = 1$.

Имеется много других интегральных представлений, играющих некоторую роль в совсем специальных случаях, но мало пригодных к любому другому уравнению. Такие решения обычно находятся в результате проб и ошибок или «нюхом». Во всяком случае, было бы мало смысла тратить время на их каталогизацию или на указание рецептов, когда их надо применять. Мы рассмотрели здесь наиболее полезные преобразования, а прочие можно отыскать в специальной литературе.

Задачи к главе 5

5.1. Построить уравнение Гельмгольца в конических координатах и разделить переменные. Какой вид имеют координатные поверхности? В каких физических задачах это уравнение было бы полезным?

5.2. Построить уравнение Лапласа в бисферических координатах и разделить переменные. Показать, что постоянная k_1^2 для уравнения (5.1.47) равна $\frac{1}{4}$ и что $R = (x^2 + y^2)^{1/4}$.

5.3. Построить уравнение Шредингера для электрона в двухатомной молекуле в вытянутых сфероидальных координатах

$$\xi = (r_1 + r_2)/a, \quad \eta = (r_1 - r_2)/a, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/x),$$

где r_1 представляет собой расстояние от одного ядра, а r_2 — от другого, причем ядра предполагаются расположенными в точках $z = \pm \frac{1}{2}a$, $x = y = 0$. Выразить x , y , z через ξ , η , φ , получить коэффициенты Ламе; построить уравнение Шредингера и определитель Штеккеля. Показать, что для потенциальной функции $-c_1/r_1 - c_2/r_2$ уравнение Шредингера разделяется. Получить разделенные уравнения.

5.4. Показательные координаты задачи 1.9 имеют вид

$$\xi = \ln(x^2 + y^2) - z, \quad \eta = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/x).$$

Набросать поверхности, найти коэффициенты Ламе, построить волновое уравнение и показать что оно не разделяется.

5.5. Гиперболоидальные координаты определяются уравнениями

$$\lambda^4 = z^2(x^2 + y^2), \quad \mu^2 = \frac{1}{2}(z^2 - x^2 - y^2), \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/x).$$

Набросать некоторые из координатных поверхностей, подсчитать коэффициенты Ламе, построить волновое уравнение и показать, что оно не разделяется.