ГЛАВА 6

Краевые условия и собственные функции

Мы уже исследовали методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые будут встречаться при изучении многих задач о поведении сплошных сред. Как мы видели, заданием только дифференциального уравнения, которому должно удовлетворять решение, задача определяется не однозначно, так как каждое уравнение рассмотренного нами типа имеет бесконечное число решений. Чтобы сделать задачу определенной, имеющей однозначный ответ, надо из всего множества возможных решений выбрать такое, которое обладает некоторыми определенными свойствами на определенных граничных поверхностях. Любая физическая задача должна давать не только дифференциальное уравнение, которое надо решить, но также и *краевые условия*, которым должно удовлетворять решение. Удовлетворить краевым условиям часто так же трудно, как и решить дифференциальное уравнение.

Первый факт, который надо заметить, состоит в том, что мы не можем пытаться подчинить решения данного уравнения краевым условиям *произвольного* вида, мы не должны, так сказать, пытаться «запихнуть правую ногу в левый башмак». Для каждого типа уравнений, исследованных в гл. 2, имеется определенная совокупность краевых условий, определяющих ответ однозначно, в то время как при условиях другого вида ответ неоднозначен или невозможен. При этом, конечно, в реальной физической задаче краевые условия всегда должны быть правильного вида и определять ответ однозначно (по крайней мере, так мы все надеемся!), и при постановке задачи в соответствии с реальной действительностью мы будем иметь всегда правильные краевые условия для уравнений. Однако не всегда легко сказать, какие именно краевые условия соответствуют «реальной действительности»; поэтому желательно знать, какие условия подходят для того или иного уравнения; это может дать указание, каким образом формулировать наши математические задачи, чтобы они возможно точнее соответствовали физическим.

6.1. Типы уравнений и краевых условий

Рассмотрим сначала двумерный случай, чтобы осветить понятия, не путаясь в дополнительных усложнениях. Все двумерные уравнения с частными производными для скалярных полей, исследованные в гл. 2 и 3, а также многие уравнения для компонент векторных полей имеют общий вид

$$A(x, y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2B(x, y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+C(x, y)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=F\left(x, y, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right), \quad (6.1.1)$$

причем если уравнение линейно по ψ, то F имеет вид

$$D(x, y)\frac{\partial\psi}{\partial x}+E(x, y)\frac{\partial\psi}{\partial y}+G(x, y)\psi+H(x, y).$$

Это, конечно, наиболее общее линейное уравнение с частными производными по двум переменным x и y. Эти две координаты могут быть либо обе пространственными, либо одна пространственной, а другая временнóй.

Имеется несчетное множество решений этого уравнения; дополнительные условия, налагаемые в задаче и используемые для выбора одного подходящего частного решения, называются *краевыми условиями*. Обычно они заключаются в указании поведения решения на некоторой *граничной линии* (или поверхности в трехмерном случае) или вблизи нее. (С этой точки зрения начальные условия представляют собой краевые условия во времени.) Конечно, интересно знать, какой вид могут иметь эти граничные линии и какое условие должно быть наложено на поле вдоль линии, чтобы получился однозначный ответ.

Для двумерной задачи решение $\psi(x, y)$ можно изобразить при помощи поверхности $z=\psi(x, y)$. *Границей* является определенная кривая в плоскости (x, y), а *не* край поверхности $z=\psi(x, y)$, который расположен над

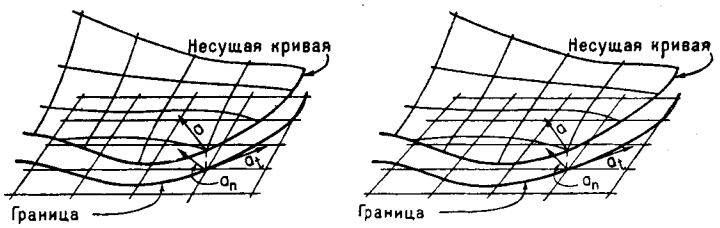

Рис. 6.1. Краевые условия для двух измерений.
Поверхность $z=\psi(x, y)$, граничная кривая $x=\xi(s)$, $y=\eta(s)$; $\mathbf{a}_t$ и $\mathbf{a}_n$—единичные векторы в плоскости x, y; $\mathbf{a}$—вектор, касательный к поверхности у границы.

граничной кривой. *Граничные условия* при этом изображаются высотой ψ-поверхности над граничной кривой и (или) наклоном ψ-поверхности в направлении нормали к граничной кривой (см. рис. 6.1). Край ψ-поверхности, расположенный над граничной кривой (который, вообще говоря, не является плоской кривой), иногда называется *несущей кривой* для границы.

Если расстояние вдоль границы от некоторой начальной точки равно s, а параметрические уравнения граничной кривой имеют вид $x=\xi(s)$, $y=\eta(s)$, то уравнение несущей кривой записывается в виде $z=\psi(\xi, \eta)=\psi(s)$. Единичный вектор $\mathbf{a}_t$, касательный к границе в ее точке s, равен $\mathbf{i}\,d\xi/ds+\mathbf{j}\,d\eta/ds$, а единичный вектор $\mathbf{a}_n$, нормальный к кривой, равен $\mathbf{a}_t\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}\,d\xi/ds+\mathbf{i}\,d\eta/ds$. Выражения для этих векторов особенно просты потому, что по нашему условию s представляет собой *расстояние* вдоль граничной кривой, откуда $\sqrt{(d\xi/ds)^2+(d\eta/ds)^2}=1$ (почему?). Аксиальный вектор $\mathbf{a}_n$ мы направим (в этом параграфе, но не в гл. 7) *внутрь* области, где ищется решение. Составляющая градиента ψ, нормальная к границе в точке s, выражается через этот вектор и производные от ψ так:

$$\mathbf{a}_n\cdot\operatorname{grad}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{d\eta}{ds}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{d\xi}{ds}=N(s),$$

где $\partial\psi/\partial y$ и $\partial\psi/\partial x$ берутся в точке $x=\xi(s)$, $y=\eta(s)$. При помощи этих определений мы можем теперь обозреть различные типы краевых условий.

Типы краевых условий. В каждом случае, конечно, мы должны указать вид границы. Для двумерного уравнения Лапласа она может представлять собой замкнутую кривую, для струны (волновое уравнение, включающее время и одно пространственное измерение) с закрепленными кон-

цами и с данным начальным состоянием в данный момент времени она будет открытой U-образной, состоящей из отрезка, параллельного пространственной оси, и двух полупрямых, параллельных оси времени, и т. д. Как указано на стр. 643, граница называется *замкнутой*, если она полностью окружает область, в которой имеется решение (даже если часть границы расположена на бесконечности), и *открытой*, если она уходит в бесконечность и если на части, расположенной на бесконечности, не ставится граничных условий.

В одномерном случае решение уравнения второго порядка определяется однозначно, если задать начальные значения решения и его производной. По аналогии можно было бы ожидать, что если граница параллельна одной из координатных осей, например оси x, то указание значения на границе (то есть указание $\psi(s)$) и нормальной составляющей градиента (то есть указание $N(s)$, в данном случае $\partial\psi/\partial y$) однозначно определяет решение. Это, вообще говоря, верно, как будет показано позже, но этот случай слишком частный, чтобы нас удовлетворить. Часто требуется, чтобы граница не только не была координатной линией, но могла иметь достаточно произвольный вид. Не так легко ответить на вопрос, какой должна быть граница для того, чтобы указание на ней значений решения и его нормальной производной определяло это решение однозначно (тем не менее обычно это верно, хотя и не очевидно!).

Краевые условия типа, указанного в предыдущем абзаце, состоящие в задании решения и его нормальной производной, называются *краевыми условиями Коши*, и задача об определении решения, которое им удовлетворяет, называется *задачей Коши*. Нас будет интересовать, для какого вида границы и для каких уравнений задача Коши приводит к однозначному и приемлемому решению. Указание начального вида и начальной скорости бесконечной гибкой струны соответствует условиям Коши вдоль линии $t = \text{const}$. Как мы знаем, это указание определяет решение однозначно.

С другой стороны, если решение строится внутри замкнутой границы, то можно ожидать, что условия Коши предъявляют слишком много требований и могут исключить все решения. Быть может, требуется указать только значение $\psi(s)$ или только нормальную производную $N(s)$ вдоль границы, чтобы получить однозначный ответ.

Краевые условия, состоящие в задании только значений решения вдоль границы, называются *условиями Дирихле*, а условия, при которых указываются значения только нормальной производной, называются *условиями Неймана*. Задача из теории потенциала, скажем, об определении электрического потенциала внутри системы проводников, потенциалы которых заданы, соответствует условиям Дирихле. С другой стороны, определение потенциала скорости жидкости вокруг твердых тел, когда она должна течь тангенциально к поверхности тел и нормальная составляющая градиента потенциала равна нулю, приводит к условиям Неймана. Кроме этого, иногда требуется задание значения некоторой линейной комбинации решения и его нормальной производной; это одно граничное условие, и оно является промежуточным между условиями Дирихле и Неймана.

Для нашей несущей линии, изображенной на рис. 6.1, условиям Коши соответствует указание не только линии $\psi(s) = z$, но также наклона в нормальном направлении у края поверхности $\psi(x, y) = z$. Получается, как будто вместо несущей линии для ψ-поверхности имеется тонкая лента, изгибы которой задают как высоту ψ-поверхности по оси z, так и наклон ψ-поверхности (но не высшие производные). Для условий Дирихле несущая линия действительно является линией, а не лентой. В случае условий Неймана лента свободно движется вверх и вниз, задан только «наклон» этой ленты. Эти условия могут быть *однородными*, если $\alpha\psi(s) + \beta N(s) = 0$,

где α и β заданы и не зависят от s, или *неоднородными*, если $\alpha\psi(s)+\beta N(s)=F(s)$. Это различие будет проводиться в § 6.3.

Однако сейчас нам надо вернуться к нашему общему уравнению (6.1.1) и рассмотреть, в каком случае условия Коши вдоль кривой $x=\xi(s)$, $y=\eta(s)$ приводят к однозначному решению.

Задача Коши и характеристические линии. Чтобы подсчитать ψ на некотором расстоянии от границы, мы можем прибегнуть к помощи двумерного ряда Тейлора:

$$\psi(x, y)=\psi(\xi, \eta)+\left[(x-\xi)\frac{\partial\psi}{\partial x}+(y-\eta)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[(x-\xi)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2(x-\xi)(y-\eta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+(y-\eta)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]+\ldots, \qquad (6.1.2)$$

где ψ и все ее производные в правой части равенства вычислены в граничной точке (ξ, η). Если все эти частные производные от ψ вычислены на границе, то ψ однозначно определяется внутри круга сходимости ряда, то есть в полосе, примыкающей к граничной линии, причем ширина этой полосы зависит от природы уравнения и может оказаться бесконечной. Если мы можем составить правило для подсчета частных производных, то задача Коши окажется разрешимой. Это делается не так непосредственно, как может показаться сначала, потому что нам даны только уравнение для ψ, параметрические уравнения границы и значения $\psi(s)$ и $N(s)$ на границе, и на основании этих данных надо подсчитать всю бесконечность в квадрате значений частных производных для каждой точки (ξ, η) на границе.

Выразить первые производные через известные величины не очень трудно. Этих производных всего две, и для них имеется два уравнения, одно из которых дает заданная нормальная производная $N(s)$, а другое — скорость изменения известной величины $\psi(s)$ вдоль границы:

$$N(s)=\frac{d\eta}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{d\xi}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial y}=\mathbf{a}_n\cdot\operatorname{grad}\psi \text{ при } x=\xi,\ y=\eta,$$

$$\frac{d}{ds}\psi(s)=\frac{d\xi}{ds}\frac{\partial\psi}{dx}+\frac{d\eta}{ds}\frac{\partial\psi}{dy}=\mathbf{a}_t\cdot\operatorname{grad}\psi \text{ при } x=\xi,\ y=\eta.$$

Так как определитель из коэффициентов $(d\xi/ds)^2+(d\eta/ds)^2=1$, то эти уравнения *всегда* имеют решение

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{\xi,\eta}=N(s)\frac{d\eta}{ds}+\frac{d\xi}{ds}\frac{d\psi}{ds}=p(s),$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{\xi,\eta}=\frac{d\eta}{ds}\frac{d\psi}{ds}-\frac{d\xi}{ds}N(s)=q(s). \qquad (6.1.3)$$

Однако следующий шаг с целью получения вторых производных не так прост. Он является также решающим шагом, так как если можно найти три вторые производные, то, как мы увидим, нахождение высших производных осуществляется повторением того же вычисления. Теперь, когда мы решили уравнения для первых производных, мы знаем p и q, данные формулами (6.1.3), как функции параметра s. Два из требуемых трех уравнений для вторых производных получаются, если выписать выражение для известной скорости изменения p и q относительно s через эти вторые производные; третьим уравнением является само дифферен-

циальное уравнение (6.1 1), которому ψ должна удовлетворять:

$$\frac{d\xi}{ds}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{d\eta}{ds}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}=\frac{dp}{ds},$$

$$\frac{d\xi}{ds}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+\frac{d\eta}{ds}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{dq}{ds},$$

$$A(s)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2B(s)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+C(s)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=F(s),$$

где $A(s)$ и т. д. представляют собой известные значения коэффициентов в точке $\xi(s)$, $\eta(s)$ на границе.

Эти три уравнения можно решить и тем самым найти три частные производные, *за исключением того случая*, когда определитель из коэффициентов

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{d\xi}{ds} & \frac{d\eta}{ds} & 0\\ 0 & \frac{d\xi}{ds} & \frac{d\eta}{ds}\\ A & 2B & C\end{vmatrix}=C\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2-2B\frac{d\xi}{ds}\frac{d\eta}{ds}+A\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 \qquad (6.1.4)$$

равен нулю. Если определитель Δ отличен от нуля, то все высшие частные производные можно найти при помощи последовательных дифференцирований известных величин по расстоянию s вдоль границы и получающийся ряд Тейлора будет однозначно определять решение внутри некоторой области сходимости. Таким образом, мы показали, что условия Коши на границе определяют частное решение, *если только граница не такова, что вдоль нее определитель Δ равен нулю.*

Уравнение $\Delta=0$ представляет собой уравнение кривой

$$C(x,\ y)\,dx^2-2B(x,\ y)\,dx\,dy+A(x,\ y)\,dy^2=0 \qquad (6.1.5)$$

(где мы заменили дифференциалы $d\xi$, $d\eta$ на более обычные dx, dy) или, лучше сказать, двух семейств кривых, так как левую часть этого уравнения можно разложить на множители, что даст

$$A\,dy=(B+\sqrt{B^2-AC})\,dx,\qquad A\,dy=(B-\sqrt{B^2-AC})\,dx. \qquad (6.1.6)$$

Эти кривые характеризуют уравнение с частными производными (6.1.1) и называются *характеристиками* этого уравнения. Как будет ниже показано, если граничная линия окажется совпадающей с одной из них, то задание условий Коши *не будет* однозначно определять решение; если граница пересекает каждую кривую каждого семейства один раз, то условия Коши вдоль нее *будут* однозначно определять решение.

Гиперболические уравнения. Чтобы это утверждение было содержательным, характеристики обоих семейств должны быть вещественными кривыми. Это значит, что наше утверждение (в приведенной формулировке) применимо только к тем уравнениям с частными производными, для которых $B^2(x,\ y)>A(x,\ y)C(x,\ y)$ *всюду*. Такие уравнения называются *гиперболическими уравнениями*. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$$

является гиперболическим уравнением, если t рассматривать как вторую координату y. Уравнение (2.3.29) для сверхзвукового потока также является гиперболическим уравнением.

Для гиперболических уравнений естественная система координат образуется из двух семейств характеристик, которые вещественны. Интегрирование первого из уравнений (6.1.6) дает решение $\lambda(x, y) = \text{const}$, интегрирование второго дает $\mu(x, y) = \text{const}$, и естественными координатами являются λ и μ. Так как при движении вдоль одной из характеристик $\lambda = \text{const}$ мы имеем $(\partial\lambda/\partial x)\,dx + (\partial\lambda/\partial y)\,dy = 0$ (градиент функции λ ортогонален вектору $\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy$ при движении вдоль характеристики $\lambda = \text{const}$), то подстановка этого соотношения обратно в уравнение (6.1.5) показывает, что

$$A\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 = 0; \tag{6.1.7}$$

рассматривая другое семейство, получаем аналогичное уравнение для производных от μ.

Вернемся теперь к исходному уравнению (6.1.1) и запишем его в новых координатах. Например,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2$$

плюс члены с $\partial\psi/\partial x$ и $\partial\psi/\partial y$. В итоге мы получаем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\left[A\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+ 2\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu}\left[A\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right) + C\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right] +$$
$$+ \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2}\left[A\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right] = G\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \psi, x, y\right).$$

Однако первое и третье выражения в квадратных скобках равны нулю, так как λ и μ являются характеристическими функциями уравнения. Если уравнение однородное, то функцию G можно записать в виде $a\,\partial\psi/\partial\lambda + b\,\partial\psi/\partial\mu + c\psi$, и выражение во вторых квадратных скобках (*отличное* от нуля), а также a, b и c можно считать функциями от λ и μ.

Таким образом мы приходим к *нормальной форме гиперболического уравнения*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu} = P\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + Q\frac{\partial\psi}{\partial\mu} + R\psi, \tag{6.1.8}$$

где P, Q и R являются функциями от λ и μ. Если эти величины P, Q и R равны нулю, как это часто бывает (например, для волнового уравнения в одном пространственном измерении и для уравнения сверхзвукового потока), то решение уравнения (6.1.8) имеет вид

$$\psi = f(\lambda) + g(\mu), \tag{6.1.9}$$

где f может быть *любой* функцией от λ, а g — *любой* функцией от μ. Например, для волнового уравнения $\lambda = x - ct$ и $\mu = x + ct$, так что $\psi = f(x - ct) + g(x + ct)$, что соответствует волнам произвольного вида, распространяющимся в положительном и отрицательном направлении оси x со скоростью c. Случай, когда P и Q не равны нулю, мы рассмотрим на стр. 641.

Итак, мы показали, что решения по крайней мере некоторых гиперболических уравнений подобны проходящим волнам, а семейства характеристик соответствуют фронтам волн. Если нормальный вид уравнения имеет особенно простую форму

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu} = 0, \tag{6.1.10}$$

то могут быть волны произвольного вида с фронтом вдоль $\lambda = \text{const}$ и вдоль $\mu = \text{const}$.

Если граница пересекает оба семейства характеристик (как на первой части рис. 6.2), то условия Коши однозначно определяют как $f(\lambda)$, так и $g(\mu)$. Каждой точке границы, характеризуемой расстоянием s от начала отсчета, соответствуют определенные значения λ и μ. Указание $\phi(s)$ и $N(s)$ в этой точке дает два уравнения, которые служат для определения как f, так и g для этой пары значений λ и μ. Если граница пересекает каждую из обоих семейств характеристик, то f и g будут указаны для всех

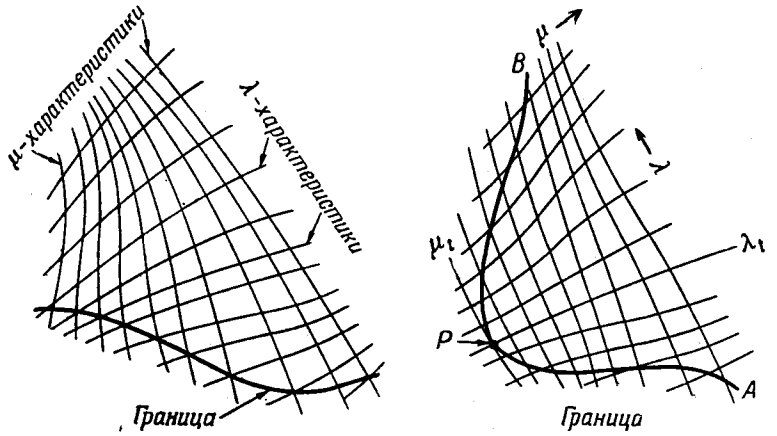

Рис. 6.2. Пересечение граничной линией семейств характеристик для гиперболического уравнения.

значений λ и μ и поле будет однозначно определено всюду. Если характеристики всюду вещественны, а $\phi(s)$ и $N(s)$ ограничены и непрерывны, то будут также ограничены и непрерывны f и g, а потому и $\phi(x, y)$.

Условия Коши и гиперболические уравнения. Мы теперь можем видеть, почему условия Коши не задают решения, когда граница совпадает с характеристикой. Если, скажем, граница идет вдоль кривой $\mu = \mu_0$, то условия Коши содержат данные о $g(\mu)$ и о производной от $g(\mu)$ только при $\mu = \mu_0$ и *совсем ничего не говорят о поведении g для любого другого* μ. В этом случае $f(\lambda)$ определена, поскольку линия $\mu = \mu_0$ пересекает все семейство λ-характеристик, так что значение $\phi(s)$ (которое в этом случае можно записать как $\phi(\lambda)$) равно $f(\lambda)$. Нормальная производная $N(s)$ определяет $dg/d\mu$ при $\mu = \mu_0$, но никаких высших производных определить нельзя, и потому $g(\mu)$ для любых других μ полностью неопределенна. В общем же случае значения f и g *определены только для тех значений* λ *и* μ, *которые пересекаются граничной линией.*

Другим способом это можно выразить так: граница, совпадающая с характеристикой, проходит вдоль фронта волны. Так как он никогда не соприкасается с любой другой частью волны, проходящей в его направлении, то он может воздействовать только на волну, проходящую в противоположном направлении (то есть он может определить только f, но не g). Теперь должна быть очевидной тесная связь между этими утверждениями и рассмотрением на стр. 165 ударных волн, появляющихся при течении жидкости мимо границы со скоростью, большей скорости звука.

Теперь мы можем также видеть, что случится, если граница заворачивает так, что она пересекает семейство характеристик *дважды*, как на второй части рис. 6.2. В точке $P(\lambda_t, \mu_t)$ граница касается характеристики

$\mu=\mu_l$; для всех значений $\mu>\mu_l$ граница пересекает μ-характеристику дважды, а характеристики $\mu<\mu_l$ совсем не пересекаются. Предположим, что условия Коши заданы на части PA границы. Это определяет $f(\lambda)$ для $\lambda<\lambda_l$ и $g(\mu)$ для $\mu>\mu_l$. То, что $g(\mu)$ не определена для $\mu<\mu_l$, несущественно, так как эти значения μ лежат вне границы; однако нам надо знать значения $f(\lambda)$ для $\lambda>\lambda_l$. Они должны быть определены из граничных условий вдоль части PB границы.

Если условия Коши (как $\psi(s)$, так и $N(s)$) заданы вдоль дуги PB, то решение будет «переопределенным», так как вдоль этой дуги функция $g(\mu)$, определенная из условий Коши на PA, уже фиксирована и при помощи условий на PB требуется определить только $f(\lambda)$ для $\lambda>\lambda_l$. Это можно сделать, если указать *либо* $\psi(s)$, *либо* $N(s)$ вдоль PB (или линейную комбинацию ψ и N), но *не обе*. Следовательно, для PB достаточны условия Дирихле или Неймана (или промежуточная комбинация). Конечно, мы могли бы получить также однозначный ответ, задав условия Коши на PB и условия Дирихле или Неймана на PA.

Вообще, можно сказать, что если граница искривлена так, что она пересекает семейство характеристик дважды, то условия Коши нужны на части границы с одной стороны от точки, где граница касается характеристики, а с другой стороны достаточны условия Дирихле или Неймана. Нетрудно перенести это заключение на случай, когда имеется более одной точки касания. Например, для U-образной границы условия Коши нужны вдоль основания U, а вдоль боков достаточны условия Дирихле или Неймана; для Z-образной границы подходят условия Коши вдоль верхней и нижней частей Z, а вдоль диагональной части — условия Дирихле или Неймана.

Нетрудно также видеть, что если граница замкнутая, так что каждая внутренняя характеристика пересекает ее дважды, то условия Коши на произвольно выбранной конечной части границы, вообще говоря, могут переопределять решение. Однако не очень легко усмотреть, будут ли достаточны условия Дирихле (или Неймана) вдоль всей границы, и потому нам придется отложить исследование этого вопроса; мы вернемся к нему позднее в этой главе.

Быть может, полезно рассмотреть простой случай задачи описанного типа, чтобы увидеть, как она решается практически. Простейшее гиперболическое уравнение мы имеем в случае гибкой струны, где зависимость смещения ψ струны от x и t определяется уравнением (см. стр. 124)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0.$$

Характеристическими функциями являются $\lambda=x-ct$ и $\mu=x+ct$, в нормальной форме уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu}=0,$$

и решением служит $\psi=f(\lambda)+g(\mu)$.

Задание начального смещения и начальной скорости бесконечной струны соответствует условиям Коши на простой открытой границе, пересекающей характеристики только один раз. Если начальная форма струны при $t=0$ есть $\psi_0(x)\,(=\psi(s))$, а начальная скорость равна $V_0(x)\,(=N(s))$, то функции f и g надо подобрать так, чтобы

$$f(x)+g(x)=\psi_0(x) \quad \text{и} \quad -f'(x)+g'(x)=\frac{1}{c}V_0(x),$$

где штрих указывает на дифференцирование по аргументу. Нетрудно видеть, что

$$f(\lambda)=\frac{1}{2}\psi_0(\lambda)-\frac{1}{2c}\int_0^{\lambda}V_0(w)\,dw,\quad g(\mu)=\frac{1}{2}\psi_0(\mu)+\frac{1}{2c}\int_0^{\mu}V_0(w)\,dw. \quad (6.1.11)$$

Отсюда следует, что решение равно $\psi(x,\ t)=f(x-ct)+g(x+ct)$ и состоит из суммы двух волн, проходящих в противоположных направлениях со скоростями c и $-c$. Это показано на первой части рис. 6.3.

Если теперь струна закреплена при $x=0$, то граница L-образна и пересекает μ-характеристики в двух точках. Значения $f(\lambda)$ и $g(\mu)$ для λ и μ, больших нуля, получаются при помощи условий Коши, в которых начальные смещение и скорость заданы на части границы, где $t=0$, $x>0$; значение $f(\lambda)$ для $\lambda<0$ определяется из условия Дирихле $\psi=0$ для части границы $x=0$, $t>0$. Значения g для $\mu<0$ не определяются из граничных условий, но эти значения и не требуются.

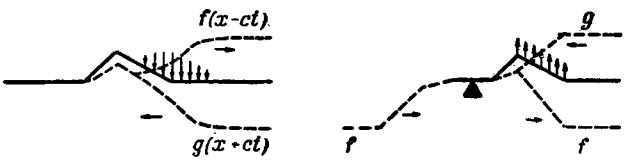

Рис. 6.3. Начальная форма (сплошная линия) и начальная скорость (стрелки) струны.
Последующее движение дается суммой пунктирных линий f и g, движущихся в противоположных направлениях.

Процедура удовлетворения этим граничным условиям состоит в выборе значения $f(-\lambda)$ в виде «отражения» $g(\mu)$, чтобы для любого значения t обе волны как раз уничтожались при $x=0$. Легко проверить, что начальному смещению $\psi_0(x)$ и начальной скорости $V_0(x)$ отвечает решение $\psi=f(x-ct)+g(x+ct)$, где

$$g(\mu)=\frac{1}{2}\psi_0(\mu)+\frac{1}{2c}\int_0^{\mu}V_0(w)\,dw \text{ при } \mu>0;$$

$$f(\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{2}\psi_0(\lambda)-\frac{1}{2c}\int_0^{\lambda}V_0(w)\,dw & \text{при } \lambda>0;\\ -\frac{1}{2}\psi_0(-\lambda)-\frac{1}{2c}\int_0^{-\lambda}V_0(w)\,dw & \text{при } \lambda<0.\end{cases} \quad (6.1.12)$$

Это показано на второй части рис. 6.3. Мы видим, что значения $f(\lambda)$ для отрицательных λ порождают отраженную волну, получающуюся из μ-волны отражением от закрепленного конца.

Закреплению обоих концов струны соответствует U-образная граница, приводящая к периодичности отражений, так как начальные условия (Коши) на конечном участке струны отражаются сначала от одного конца, а затем от другого. Для замкнутости границы в этом случае надо было бы

задавать «конечные условия» в момент t_1, как и начальные условия при $t=0$. Если мы задаем условия Коши (и смещение, и скорость) при $t=0$, то смещение и скорость при $t=t_1$ определяются, и в нашем конечном условии нельзя задавать произвольные значения ψ_1 и V_1, чтобы не получить противоречия. Можно было бы ожидать, что задание ψ_0 только при $t=0$ и ψ_1 только при $t=t_1$ (условия Дирихле) определяет решение однозначно, однако периодическое движение конечной струны опровергает это. Как известно, такая струна допускает свободные колебания периода $2l/nc$, где l — расстояние между закрепленными концами, а n — любое целое положительное число. Если t_1 равно любому кратному какого-нибудь из этих периодов (то есть произведению *любого рационального числа* на $2l/c$), то струна может испытывать периодическое колебание (*любой* амплитуды) такой частоты, чтобы проходить через нуль при $t=0$ и также при $t=t_1$; такое колебание не проявилось бы в значениях ψ ни в начале, ни в конце.

Отсюда мы видим, что условия Дирихле (или Неймана) на замкнутой границе не определяют однозначно решения этого простого гиперболического уравнения. В сущности, трудно усмотреть, какой вид граничных условий на замкнутой границе не переопределяет и не недоопределяет решение. Однако мы видим также, что замкнутая граница не очень «естественна» для гиперболического уравнения, так что это затруднение не должно отвлекать нас.

Волны для нескольких пространственных измерений. Распространение рассмотренных выше общих понятий на случай нескольких пространственных измерений не очень трудно. В уравнении гиперболического типа имеется одна координата, которой соответствует член со второй производной со знаком, противоположным остальным. Это приводит к уравнениям для вещественных характеристических поверхностей, которым часто отвечают волновые поверхности.

В двумерном случае (одно пространственное измерение) возмущение, возникшее в момент t в точке x, распространяется в обоих направлениях с конечной скоростью и *без изменения своей формы* при прохождении волны. Волна, представленная функцией $f(x-ct)$, движется направо, не меняя своего вида при перемещении, и аналогично для волны $g(x+ct)$, идущей налево. Поставим вопрос, будут ли волны, возникающие из возмущения в точке, распространяться без изменения своего вида при любом числе измерений.

Как будет показано в гл. 7, возмущение в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства в момент t распространяется одинаково во всех направлениях из этой точки. Поэтому нас будут интересовать здесь решения волнового уравнения, зависящие только от времени и от расстояния r от одной точки до другой в n-мерном пространстве. Гиперсферические координаты для n измерений определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1, \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}. \end{aligned} \tag{6.1.13}$$

Отбрасывая производные по каждому из углов, мы находим, что волновое уравнение для «сферически симметричной» волны в n-мерном пространстве имеет вид

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\frac{n-1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{6.1.14}$$

Последнее уравнение, очевидно, является гиперболическим уравнением вида (6.1.1), и будет интересно рассмотреть его как таковое. Характеристиками, как и выше, будут $\lambda = r - ct$ и $\mu = r + ct$. Нормальная форма уравнения такова:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \, \partial \mu} = -\frac{1}{2} \frac{n-1}{\lambda + \mu} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right]. \tag{6.1.15}$$

Только при $n = 1$ решением будет $\psi = f(\lambda) + g(\mu)$; это уже рассмотренный случай. Поскольку во всех случаях, кроме одномерного, невозможны решения в виде волн, распространяющихся наружу и внутрь без изменения формы, попытаемся посмотреть, нельзя ли найти решение, изменение которого сводится лишь к уменьшению его амплитуды при удалении волны от точки возмущения. Другими словами, мы попытаемся найти решение в форме $\psi = F(\lambda, \mu)(\lambda + \mu)^a = F(\lambda, \mu)(2r)^a$, надеясь, что функция F окажется имеющей вид $f(\lambda) + g(\mu)$.

Подстановка в уравнение (6.1.15) показывает, что, за исключением случая $a = (1 - n)/2$, уравнение для F еще хуже, чем уравнение для ψ. Если $a = (1 - n)/2$, то есть если $\psi = F/(2r)^{(n-1)/2}$, то уравнение для F имеет вид

$$\frac{\partial^2 F}{d\lambda \, \partial \mu} = \frac{1}{4}(n-1)(n-3)\frac{F}{(\lambda + \mu)^2}.$$

Только при $n = 1$ или $n = 3$ функция F будет просто суммой функции от λ и функции от μ. Случай $n = 1$ уже исследован, и теперь видно, что для трех пространственных измерений можно получить решение

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r}[f(r - ct) + g(r + ct)], \text{ где } r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{6.1.16}$$

представляющее уходящие и приходящие волны, при распространении которых изменение их формы состоит только в уменьшении амплитуды с возрастанием r. Очевидно, что для двух пространственных измерений форма волн, излучаемых из точки, меняется более существенно.

Дальнейшие шаги в этом направлении означали бы чрезмерное вторжение в гл. 7. Достаточно здесь сказать, что взрывные (одноимпульсные) волны для нечетного числа пространственных измерений ($n = 1, 3, 5, \ldots$) распространяются радиально как резкие толчки, уменьшающиеся по амплитуде, но все время имеющие резко очерченные передний и задний фронты; эти волны не дают предупреждения о своем приходе и не оставляют за собой следов после прохождения. Напротив, в пространстве четного числа измерений ($n = 2, 4, 6, \ldots$) волны, порождаемые резким толчком, распространяются радиально и все время обладают резко очерченным *передним* фронтом; они не дают предупреждения о себе до момента $t = r/c$, но оставляют за собой след, так как возмущение продолжается долго после прохождения гребня. Мы коснемся причин этого интересного различия также в гл. 11.

Эллиптические уравнения и комплексные переменные. Теперь надо вернуться к уравнению (6.1.6) характеристик, чтобы посмотреть, что следует делать, если характеристики не являются вещественными кривыми. Если $A(x, y)C(x, y) > B^2(x, y)$ для всех значений x и y, то уравнение (6.1.1) называется *эллиптическим*. Уравнения для характеристик комплексно сопряжены одно другому, и если характеристической функцией служит $\lambda(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, то другой характеристической функцией является ее комплексно сопряженная $\mu(x, y) = u(x, y) - iv(x, y)$

(где u и v — вещественные функции от x, y). Замена уравнения (6.1.1) на (6.1.8)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu}=P\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}+Q\frac{\partial\psi}{\partial\mu}+R\psi$$

здесь уже не так полезна, потому что λ и μ — комплексные переменные. Более полезно и естественно применить в качестве координат u и v вещественную и мнимую части λ и μ.

Следовательно, *нормальной формой эллиптического уравнения* является

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=S\frac{\partial\psi}{\partial u}+T\frac{\partial\psi}{\partial v}+U\psi. \tag{6.1.17}$$

Уравнение Лапласа является эллиптическим уравнением, так же как уравнение для дозвукового (с числом Маха <1) потока сжимаемой жидкости (см. стр. 165) и уравнение Гельмгольца. Уравнение Пуассона представляет собой неоднородное эллиптическое уравнение с дополнительным членом $\rho(x, y)$ в правой части.

Если P, Q и R (или S, T и U) равны нулю, то решения можно вновь выразить в виде

$$\psi=f(\lambda)+g(\mu)=f(u+iv)+g(u-iv). \tag{6.1.18}$$

Другими словами, ψ равна сумме любой функции комплексного переменного $u+iv$ и любой функции его сопряженного. Приложения теории функций к решениям двумерного уравнения Лапласа были затронуты в гл. 4 и будут рассмотрены более детально в гл. 10.

Связь между аналитическими функциями и решениями двумерного эллиптического уравнения проливает некоторый свет на соотношения между этими решениями и краевыми условиями. Для иллюстрации возьмем двумерное уравнение Лапласа $\nabla^2\psi=0$ и попытаемся применить условия Коши вдоль оси x для определения ψ в верхней полуплоскости. Характеристическими функциями для уравнения Лапласа являются $\lambda=x+iy$, $\mu=x-iy$, а общее решение записывается в виде $\psi=f(x+iy)+g(x-iy)$. Краевые условия, которым надо удовлетворить, таковы: $\psi=\psi_0(x)$ и $\partial\psi/\partial y=-N_0(x)$, если $y=0$. Решение имеет вид

$$\begin{gathered}
f(\lambda)=\frac{1}{2}\psi_0(\lambda)+\frac{1}{2}i\int_0^{\lambda}N_0(z)\,dz;\\
g(\mu)=\frac{1}{2}\psi_0(\mu)-\frac{1}{2}i\int_0^{\mu}N_0(z)\,dz;\\
\psi=\operatorname{Re}\psi_0(x+iy)-\operatorname{Im}\chi_0(x+iy);\\
\chi_0(z)=\int_0^{z}N_0(\xi)\,d\xi.
\end{gathered} \tag{6.1.19}$$

Следовательно, ψ равна вещественной части функции $\psi_0(z)+i\chi_0(z)$ переменного $z=x+iy$. Для физически разумных краевых условий ψ_0 и χ_0 являются любыми приемлемыми функциями *на вещественной оси* (то есть вдоль границы). Однако имеется много функций от z, конечных на вещественной оси и все же имеющих полюсы и (или) существенные особенности где-либо вне этой оси. (В самом деле, мы в гл. 4 доказали, что единственной функцией от z, остающейся *всюду* конечной, является постоянная.) Значит, за исключением случая, когда наши краевые условия имеют вид $\psi_0=\text{const}$, $N_0=0$, функция $\psi(x, y)$ наверняка обращается в бес-

конечность где-либо на комплексной плоскости. Конечно, все особенности могут оказаться лежащими в нижней полуплоскости вне границы, а потому безвредными, но малейшее неудачное колебание ϕ_0 или N_0 в какой-либо части границы может породить бесконечность где-либо в верхней полуплоскости. Другими словами, функция от $x+iy$ просто *слишком чувствительна* к малым колебаниям ее значений или значений ее производной вдоль вещественной оси, чтобы подчиняться контролю краевых условий этого вида.

Становится также очевидным контраст со случаем гиперболического уравнения. Формула (6.1.11) выражает значения $\phi(x, y)$ для гиперболического уравнения через ϕ_0 и N_0 *для вещественных значений аргумента*, и если ϕ_0 и интеграл от N_0 ограничены и непрерывны вдоль границы, то ϕ также будет ограниченной и непрерывной во всем пространстве. Формула же (6.1.19) показывает, что $\phi(x, y)$ для эллиптического уравнения выражается через ϕ_0 и N_0 *для комплексных значений аргумента*, и как раз поэтому, если ϕ_0 и интеграл от N_0 ограничены и непрерывны вдоль вещественной оси, нет гарантии, что они будут ограничены и всюду в верхней полуплоскости z.

Другое фундаментальное отличие между гиперболическими и эллиптическими уравнениями состоит в общем поведении их решений. Например, решения уравнения Лапласа (которое является эллиптическим уравнением) не могут иметь максимумов и минимумов (см. стр. 18); отсюда следует, что если граничные условия порождают решение, возрастающее в определенном направлении, то решению ничего не остается, кроме как продолжать возрастать, пока оно не обратится в бесконечность в некоторой точке (там будет не максимум, а особенность!), если только не встретится со временем другой край границы. С другой стороны, решения волнового уравнения (которое является гиперболическим уравнением) могут иметь максимумы и минимумы; значит, если в силу краевых условий решение возрастает в определенном направлении, то может получиться так, что после перехода гребня волны в этом направлении градиент решения обернется. Позже мы возвратимся к этой чрезмерной чувствительности решений эллиптических уравнений к условиям Коши на открытой границе.

Но если условия Коши на открытой границе для решений эллиптических уравнений слишком разборчивы, чтобы встречаться в физических задачах, то условия Дирихле или Неймана на открытой границе недостаточны для того, чтобы определять ответ однозначно. Поэтому дело представляется таким образом, что для эллиптических уравнений предпочтительней замкнутые границы с условиями Дирихле или Неймана (так как условия Коши для замкнутых границ переопределяют их решение). Трудность, к которой мы пришли, решая гиперболическое уравнение при замкнутой границе (проистекающая из возможности наличия волн, не ощутимых на границах), не может появиться для эллиптического уравнения, так как в этом случае волновое движение невозможно. Позже мы покажем более детально, что условия Дирихле или Неймана на замкнутой границе для эллиптических уравнений обычно дают единственное решение.

Надо, конечно, отметить, что «замкнутая граница» в этих случаях может частично располагаться на бесконечности. Дело в том, что ϕ_0 (или N_0) надо задавать даже для расположенной на бесконечности части границы, чтобы получить единственное решение. С другой стороны, для рассмотренного выше случая гиперболического уравнения краевые условия на бесконечности не являются необходимыми; более того, они излишни, если заданы условия Коши на конечной части границы.

Подобным образом решения вида (6.1.16) не особенно полезны для эллиптических уравнений, отчасти из-за упомянутых выше трудностей

с комплексными характеристиками, но также из-за того, что ни одна из координат не отличается от другой по знаку перед второй производной, как это было для временнóй координаты у волнового уравнения. Соответственно для эллиптического уравнения (скажем, для уравнения Лапласа) целесообразно рассматривать все координаты как равноправные. Для точечного источника в n-мерном пространстве уравнение для «сферически симметричного» решения имеет вид

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{d\psi}{dr}\right)=0, \quad r^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2.$$

Решение ψ равно $a+b/r^{n-2}$, где a и b — постоянные (исключая случай $n=2$; когда решение равно $a+b\ln r$). Для эллиптического уравнения это вполне удовлетворительное решение, так как оно конечно всюду, кроме источника $r=0$. Подобное решение можно построить для волнового уравнения с $r^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2-c^2t^2$, но из-за последнего члена решение обращается в бесконечность всегда при $c^2t^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2$; оно не столь полезно, как только что приведенное решение эллиптического уравнения.

Параболические уравнения. Следует рассмотреть предельный случай уравнения (6.1.1), когда $B^2(x, y)=A(x, y)C(x, y)$ всюду. В этом случае имеется только одно семейство характеристик, определяемых интегралом уравнения $A\,dy=B\,dx$ [см. (6.1.6)], который мы обозначим через $\lambda(x, y)$. Выражая уравнение (6.1.1) в новых координатах λ и x, получаем в конце концов в качестве *нормальной формы параболического уравнения*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=K(x, \lambda)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}+L(x, \lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x}+M(x, \lambda)\psi, \tag{6.1.20}$$

поскольку оба члена

$$A\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 \quad \text{и} \quad A\frac{\partial\lambda}{\partial x}+B\frac{\partial\lambda}{\partial y}$$

равны нулю. В этом случае имеется лишь один член со второй производной; по характеристической функции участвует только первая производная.

Такой вид имеет уравнение диффузии, в котором t занимает место λ:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Это уравнение «кривобокое» относительно времени: если изменить знак t, то получаем решение другого вида, тогда как волновое уравнение симметрично относительно времени. Это различие в основном обусловлено тем, что уравнение диффузии выражает «не консервативный» процесс. Энтропия непрерывно возрастает с течением времени (и обычно свободная энергия убывает), в то время как для волнового уравнения энергия остается постоянной (если не включается трение). Как можно было бы ожидать (см. стр. 136), с возрастанием времени все неправильности решения уравнения диффузии «сглаживаются», так как вблизи максимума ψ кривизна $\partial^2\psi/\partial x^2$ отрицательна и ψ там со временем убывает. Только если кривизна (и потому неправильность) ψ всюду равна нулю, ψ может быть независимой от времени.

Следует ожидать, что для этого уравнения подходят условия Дирихле, а границу надо брать открытую в направлении *возрастания* t. При движении во времени в обратном направлении неправильности в решении стремятся возрасти; чем короче область иррегулярности, тем быстрее возрастание; значит, хотя мы можем предсказать, каким станет данное ψ

через время t, но мы не можем с уверенностью сказать, каким было то же ψ на время t *раньше* (другими словами, решение при отрицательных t переопределено граничными значениями при $t=0$). Это различие между предсказанием и предисторией типично для параболического уравнения и не имеет места, например, для волнового уравнения: в случае последнего так же легко заглянуть в прошлое, как и в будущее.

У n-мерного параболического уравнения по одной из координат (назовем ее x_{n+1}) присутствует только член с первой производной, в то время как по остальным координатам присутствуют вторые производные. Уравнение для «сферически симметричного» решения в пространстве n измерений [ср. с уравнением (6.1.14)] имеет вид

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]-a^2\frac{\partial\psi}{\partial t}=0 \qquad (6.1.21)$$

и само является параболическим уравнением. Решение в виде отрицательной степени r возможно, но практически бесполезно, если есть зависимость от t. В § 7.4 мы покажем, что самым полезным «примитивным» решением является решение, полностью сконцентрированное при $t=0$ и диффундирующее во все стороны с возрастанием t. Выбирая форму $\psi=F(t)\,e^{-r^2/at}$, обладающую этими свойствами, мы легко находим, что F обратно пропорциональна $t^{n/2}$. Итак, мы находим в результате, что решением уравнения (6.1.21) будет

$$\psi=\left[a/2\sqrt{\pi t}\right]^n e^{-a^2r^2/4t}, \quad t>0, \qquad (6.1.22)$$

где $r^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$. Оно нормировано так, что интеграл от него по всему n-мерному пространству равен единице. Эта функция очень сконцентрирована для малых значений t, совсем «размазана» для больших значений t и недействительна для отрицательного t. Ее свойства будут более основательно исследованы в § 7.4.

6.2. Разностные уравнения и краевые условия

Мы несколько раз (стр. 131 и 227) говорили о предельном переходе от величин, определенных только для целых значений некоторого параметра, к непрерывным переменным, от рядов к интегралам, от частиц к сплошной среде. Имеется соответствующая связь и между дифференциальными уравнениями и разностными уравнениями, которой мы касались при рассмотрении рекурсивных формул (см. стр. 510) и которая очевидна из определения производной как предела. Величине y_n, определенной для каждого целого значения n и представляющей счетный набор значений y, отвечает непрерывная функция $y(x)$ от непрерывного переменного x. Первой, второй и т. д. разностям

$$\Delta(y_n)=y_{n+1}-y_n, \quad \Delta^2(y_n)=\Delta[\Delta(y_n)]=y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n \text{ и т. д.} \qquad (6.2.1)$$

соответствуют различные производные от $y(x)$. (Взаимосвязь была бы несколько теснее, если бы мы рассматривали $\Delta(y_n)/h$ и т. д., где h – приращение x, отвечающее единичному изменению индекса n и стремящееся к нулю при измельчении разбиения; однако в предварительном анализе можно обойтись без h.)

Дифференциальным уравнениям, рассмотренным в предыдущей главе, соответствуют разностные уравнения, которые в принципе легче анализировать, но на практике часто труднее решать. Однако в некоторых отношениях полезно противопоставить и сопоставить поведение решений разностного уравнения и решений соответствующего дифференциального