через время t, но мы не можем с уверенностью сказать, каким было то же ψ на время t *раньше* (другими словами, решение при отрицательных t переопределено граничными значениями при $t=0$). Это различие между предсказанием и предисторией типично для параболического уравнения и не имеет места, например, для волнового уравнения: в случае последнего так же легко заглянуть в прошлое, как и в будущее.

У n-мерного параболического уравнения по одной из координат (назовем ее x_{n+1}) присутствует только член с первой производной, в то время как по остальным координатам присутствуют вторые производные. Уравнение для «сферически симметричного» решения в пространстве n измерений [ср. с уравнением (6.1.14)] имеет вид

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]-a^2\frac{\partial\psi}{\partial t}=0 \qquad (6.1.21)$$

и само является параболическим уравнением. Решение в виде отрицательной степени r возможно, но практически бесполезно, если есть зависимость от t. В § 7.4 мы покажем, что самым полезным «примитивным» решением является решение, полностью сконцентрированное при $t=0$ и диффундирующее во все стороны с возрастанием t. Выбирая форму $\psi=F(t)\,e^{-r^2/at}$, обладающую этими свойствами, мы легко находим, что F обратно пропорциональна $t^{n/2}$. Итак, мы находим в результате, что решением уравнения (6.1.21) будет

$$\psi=\left[a/2\sqrt{\pi t}\right]^n e^{-a^2r^2/4t},\quad t>0, \qquad (6.1.22)$$

где $r^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$. Оно нормировано так, что интеграл от него по всему n-мерному пространству равен единице. Эта функция очень сконцентрирована для малых значений t, совсем «размазана» для больших значений t и недействительна для отрицательного t. Ее свойства будут более основательно исследованы в § 7.4.

6.2. Разностные уравнения и краевые условия

Мы несколько раз (стр. 131 и 227) говорили о предельном переходе от величин, определенных только для целых значений некоторого параметра, к непрерывным переменным, от рядов к интегралам, от частиц к сплошной среде. Имеется соответствующая связь и между дифференциальными уравнениями и разностными уравнениями, которой мы касались при рассмотрении рекурсивных формул (см. стр. 510) и которая очевидна из определения производной как предела. Величине y_n, определенной для каждого целого значения n и представляющей счетный набор значений y, отвечает непрерывная функция $y(x)$ от непрерывного переменного x. Первой, второй и т. д. разностям

$$\Delta(y_n)=y_{n+1}-y_n,\quad \Delta^2(y_n)=\Delta[\Delta(y_n)]=y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n \text{ и т. д.} \qquad (6.2.1)$$

соответствуют различные производные от $y(x)$. (Взаимосвязь была бы несколько теснее, если бы мы рассматривали $\Delta(y_n)/h$ и т. д., где h – приращение x, отвечающее единичному изменению индекса n и стремящееся к нулю при измельчении разбиения; однако в предварительном анализе можно обойтись без h.)

Дифференциальным уравнениям, рассмотренным в предыдущей главе, соответствуют разностные уравнения, которые в принципе легче анализировать, но на практике часто труднее решать. Однако в некоторых отношениях полезно противопоставить и сопоставить поведение решений разностного уравнения и решений соответствующего дифференциального

уравнения. Это особенно относится к взаимосвязи между решениями и краевыми условиями, так что здесь целесообразно заняться исследованием общих свойств разностных уравнений.

Линейные разностные уравнения первого порядка. В предыдущей главе мы нашли несколько рекурсивных формул (см., например, стр. 511), которые содержат только два последовательных коэффициента разложения в ряд,

$$A_n a_n + D_n a_{n+1} = 0,$$

и из которых можно определить коэффициенты a_n, например, через a_0. Это равносильно разностному уравнению первого порядка

$$\Delta(y_n) = C_n y_n; \quad C_n = -1 - \frac{A_n}{D_n}. \tag{6.2.2}$$

Очевидно, что для y_n можно получить определенное решение, если зафиксировать значение одного из y_n. Обычно это граничное условие (равносильное условиям Дирихле) выражается посредством задания значения y_0. Тогда y для бо́льших значений n равно произведению

$$y_n = y_0 \prod_{r=0}^{n-1} (C_r + 1) = y_0 \exp \sum_{r=0}^{n-1} \ln (1 + C_r). \tag{6.2.3}$$

Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид $dy/dx = f(x)\, y$, и решение его есть

$$y(x) = y_0 \exp \int_0^x f(x)\, dx.$$

Связь между этими решениями очевидна. Для неоднородного уравнения

$$\Delta(y_n) - C_n y_n = B_n \tag{6.2.4}$$

можно пытаться искать решение в виде $y_n = A_n \prod_{r=0}^{n-1} (C_r + 1)$. Подставляя это выражение в (6.2.4), получаем

$$A_{n+1} \prod_{r=0}^{n} (C_r + 1) - A_n \prod_{r=0}^{n-1} (C_r + 1) - C_n A_n \prod_{r=0}^{n-1} (C_r + 1) = B_n,$$

$$\Delta(A_n) \prod_{r=0}^{n} (C_r + 1) = B_n, \text{ или } \Delta(A_n) = B_n \Big/ \prod_{r=0}^{n} (C_n + 1).$$

Отсюда следует, что полное решение уравнения (6.2.4) имеет вид

$$y_n = \left[\prod_{r=0}^{n-1} (1 + C_r) \right] \left\{ y_0 + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{B_s}{\prod_{r=0}^{s} (1 + C_r)} \right\}; \tag{6.2.5}$$

оно тесно связано с решением

$$y(x) = e^{\int F\, dx} \left[y_0 + \int e^{-\int F\, dx} r\, dx \right]$$

дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} - F(x)\,y = r(x).$$

Например, если $C_n = c$ и $B_n = b$ не зависят от n, то решение равно

$$\begin{aligned} y_n &= (1+c)^n \left\{ y_0 + \sum_{s=1}^{n} \frac{b}{(1+c)^s} \right\} = \\ &= (1+c)^n \left\{ y_0 + \frac{b}{1+c} \left[\frac{1-(1+c)^{-n}}{1-(1+c} \right] \right\} = \\ &= y_0 (1+c)^n + \frac{b}{c} [(1+c)^n - 1]. \end{aligned}$$

Мы могли бы перейти к разностным уравнениям второго порядка, следуя рассмотрениям гл. 5 почти во всех деталях. Однако мы сейчас посмотрим, как применить разностные уравнения, чтобы лучше разобраться в поведении уравнений с частными производными.

Разностные уравнения для нескольких измерений. Очень полезный метод приближенного вычисления решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными состоит в замене непрерывных независимых переменных разрывными переменными, значениями которых могут быть только целые кратные некоторого шага h. Например, для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

мы строим прямоугольную решетку (сетку) шага h в обоих направлениях и подсчитываем ψ только в точках сетки, где ее линии пересекаются. Величину ψ для $x = mh$, $y = nh$ обозначим через $\psi(m, n)$. Если h достаточно мало, то хорошим приближением дифференциального уравнения будет *разностное уравнение*

$$\frac{1}{h^2} [\Delta_m^2 \psi + \Delta_n \psi] = 0,$$

или

$$\frac{1}{4} [\psi(m-1, n) + \psi(m+1, n) + \psi(m, n-1) + \psi(m, n+1)] = \psi(m, n). \quad (6.2.6)$$

Возможно развить методы численного решения таких уравнений, чтобы применять их, когда соответствующие дифференциальные уравнения нельзя решить точно; однако здесь мы ограничимся рассмотрением параллелизма между дифференциальными и разностными уравнениями в отношении их реакции на краевые условия.

В этом параграфе мы рассмотрим среду, или поле, которое сначала не будет непрерывным, а будет иметь вид решетки с шагом h, где h конечно, хотя и мало. Поле ψ будет иметь смысл только в узловых точках, а конечные разности между значениями ψ в соседних точках регулируются разностными уравнениями. Мы получим результаты о решениях краевых задач для разностных уравнений, соответствующих рассмотренным в предыдущем параграфе трем типам уравнений с частными производными. Отправляясь от этих результатов, полученных для решетки конечного шага, мы можем затем сделать шаг бесконечно мелким и быть уверенными, что выводы обычно справедливы и для соответствующих дифференциальных уравнений. Процесс перехода к пределу не всегда

так прост, как это может показаться; однако можно проверить, что для рассматриваемых нами теорем не возникает непредвиденных осложнений.

При доказательстве этих теорем нам следует ограничиться только двумя измерениями; большее число измерений вносит непринципиальные усложнения. Мы будем также пользоваться лишь простейшими видами для трех типов уравнения. Например, простейшим *эллиптическим уравнением* является уравнение Лапласа; ему соответствует разностное уравнение (6.2.6). В качестве неоднородного эллиптического уравнения можно взять уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-F(x,\ y).$$

Соответствующее ему разностное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{4}[\psi(m+1,\ n)+\psi(m-1,\ n)+\psi(m,\ n+1)+\psi(m,\ n-1)]-$$
$$-\psi(m,\ n)=-\frac{h^2}{4}F(m,\ n). \quad (6.2.7)$$

Простейшим *гиперболическим уравнением* для двух измерений является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0, \quad y=ct,$$

соответствующее разностное уравнение имеет вид

$$\psi(m+1,\ n)+\psi(m-1,\ n)=\psi(m,\ n+1)+\psi(m,\ n-1). \quad (6.2.8)$$

Подобным образом простейшим параболическим уравнением является уравнение диффузии

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

для которого соответствующее разностное уравнение можно записать в виде

$$\psi(m,\ n+1)=C[\psi(m+1,\ n)+\psi(m-1,\ n)-2\psi(m,\ n)]+\psi(m,\ n),$$

или

$$\psi(m,\ n-1)=-C[\psi(m+1,\ n)+\psi(m-1,\ n)-2\psi(m,\ n)]+\psi(m,\ n) \quad (6.2.9)$$

в зависимости от того, хотим мы двигаться вперед или назад по n (временно́й переменной). При этом мы положили $C=1/ha^2$.

Эллиптическое уравнение и условия Дирихле. Как пример такого анализа, рассмотрим сеточный аналог эллиптического уравнения с условиями Дирихле вдоль замкнутой границы. Мы указали на стр. 643, что эти граничные условия для такого уравнения определяют единственное решение; посмотрим, может ли метод сеток помочь нам доказать это утверждение. Основная решетка показана на рис. 6.4. Пусть граничные точки (светлые кружки) заполняют ряды $m=0$, $n=0$, $m=M$ и $n=N$; мы задаем значения ψ во всех этих точках. При заданных таким образом граничных значениях мы хотим определить (единственные) значения ψ во всех внутренних точках (черные точки) при помощи разностного уравнения (6.2.6). Если будет развит сходящийся процесс для подсчета каждого ψ через граничные значения ψ, дающий однозначный ответ для всех внутренних точек, то мы можем считать задачу решенной, а тот факт, что условия Дирихле дают однозначный ответ, доказанным.

Физическим примером этой сеточной задачи служит сетка из резиновых связок, натянутая между равноотстоящими стержнями, каждый из которых поднимается над плоскостью на свою высоту. Высота каждой из узловых точек над плоскостью соответствует значению $\psi(m, n)$. Разностное уравнение (и также модель из резиновых связок) утверждает, что значение ψ в узловой точке (m, n) *равно среднему из значений* ψ *в четырех соседних узлах.* Мы уже говорили (стр. 18), что в этом состоит физический смысл уравнения Лапласа.

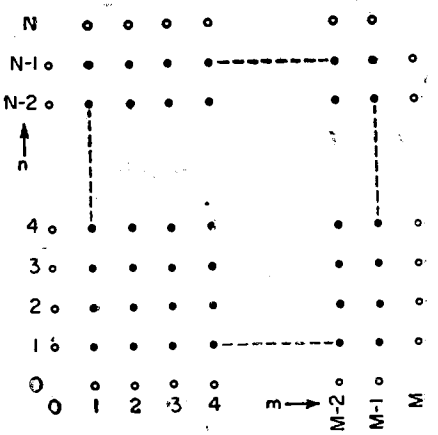

Рис. 6.4. Основная решетка для решения разностного уравнения, аналогичного дифференциальному уравнению Пуассона.

Это можно применить для подсчета значений ψ во внутренних узлах. Например, значение ψ во внутренней точке (2,1) можно подсчитать через значения в ее соседних точках:

$$\psi(2,1) = \frac{1}{4}[\psi(3,1) + \psi(1,1) + \psi(2,2)] + \frac{1}{4}\psi(2,0),$$

где $\psi(2,0)$ равно значению ψ в граничной точке (2,0) и тем самым задано. Остальные три значения ψ в правой части взяты во внутренних точках и еще не известны. Однако их можно выразить как средние из значений для *их* соседей, что даст

$$\frac{13}{16}\psi(2,1) = \frac{1}{16}[\psi(4,1) + \psi(2,3) + 2\psi(3,2) + 2\psi(1,2)] + \frac{1}{4}\psi(2,0) + \frac{16}{1}[\psi(0,1) + \psi(1,0) + \psi(3,0)],$$

то есть $\psi(2,1)$ выражается через граничные условия и значения ψ в точках, еще дальше отстоящих от границы.

Вновь выражая ψ для внутренних точек как среднее значение из соседних значений, получаем третье последовательное уравнение

$$\frac{12}{16}\psi(2,1) = \frac{1}{64}[\psi(5,1) + \psi(2,4) + 2\psi(3,1) + 3\psi(4,2) + 3\psi(3,3) + 3\psi(1,3) + 4\psi(2,2)] + \frac{15}{64}\psi(2,0) + \frac{1}{16}[\psi(0,1) + \psi(1,0) + \psi(3,0)] + \frac{1}{32}\psi(0,2) + \frac{1}{64}\psi(4,0),$$

и таким же образом далее получаем одно уравнение за другим. После каждой подстановки значение $\psi(2,1)$ будет выражено через значения ψ в других узлах с некоторыми коэффициентами и через граничные значения (которые заданы) с другими коэффициентами. При продолжении подстановок мы заметим два важных факта: коэффициенты при внутренних потенциалах быстро стремятся к нулю (так быстро, что даже сумма всех коэффициентов при *всех* внутренних потенциалах в уравнении стремится к нулю), тогда как коэффициенты при граничных потенциалах стремятся к конечным значениям. Например, значение коэффициента при $\psi(3,1)$ равно $\frac{1}{4}$ для первого уравнения, 0 для второго, $\frac{1}{24}$ для третьего и т. д., тогда как коэффициент при граничном значении $\psi(2,0)$ равен $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{5}{16}$ и т. д.

Это означает, что если продолжать подстановки достаточно долго, то в уравнении для $\psi(2,1)$ члены, содержащие значения ψ в других внутренних точках, можно сделать произвольно малыми по сравнению с соответствующими членами для граничных значений. Значит, в пределе $\psi(2,1)$ можно выразить через *только* одни граничные потенциалы, и если *все* они заданы, то значение $\psi(2,1)$ будет однозначно определено. С помощью тех же аргументов можно показать, что потенциал в каждом узле однозначно определяется, если только граничный потенциал задан вдоль всей замкнутой границы, окружающей сеть. Если часть границы находится на бесконечности, то вывод сохраняет силу; на самом деле все, что обычно требуется знать о граничных значениях ψ на бесконечности для получения однозначного значения $\psi(m, n)$, это то, что все они не бесконечны.

Разработан способ, называемый *методом релаксации*, посредством которого эта последовательность вычислений проводится четко и с быстрой сходимостью. Однако нам здесь надо только знать, что это *можно* сделать; это как раз и было сейчас доказано. Отсюда, полагая h стремящимся к нулю, можно доказать, что условия Дирихле на замкнутой границе однозначно определяют решения уравнения Лапласа. Простое обобщение того же вывода оказывается достаточным, чтобы распространить это утверждение на общее эллиптическое уравнение (6.1.17) и число измерений, большее двух.

Не намного труднее провести тот же вывод для условий Неймана. Здесь для сети задаются все разности между граничным значением и значением ψ в ближайшей внутренней точке сети. Можно показать, что если эти разности удовлетворяют простому общему ограничению, то описанный выше метод и здесь сходится и позволяет получить единственные значения для внутренних ψ с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Природу этого общего ограничения в случае условий Неймана можно выяснить на следующем примере. Допустим, что все граничные разности заданы так, что они делают решение *возрастающим* внутрь; как же найти решение, *не имеющее максимума* внутри (ведь уравнение (6.2.6) не допускает такого максимума)? Очевидно, все граничные градиенты не могут иметь одинаковый знак. Ограничение можно указать более точно, если вспомнить, что потенциал скорости несжимаемой жидкости подчиняется уравнению Лапласа и что в этом случае условиям Неймана на поверхности соответствует задание потока жидкости через поверхность. Если бы такой поток через замкнутую поверхность был направлен всюду внутрь, то это означало бы, что количество жидкости внутри поверхности возрастает с положительной скоростью, что для несжимаемой жидкости невозможно. Следовательно, в нашем случае надо требовать, чтобы интеграл от заданной нормальной составляющей градиента по всей граничной поверхности равнялся нулю; в рамках этого простого ограничения на границе могут быть заданы любые значения нормальной производной.

Значит, можно ожидать, что для уравнения Лапласа корректными граничными условиями могут служить условия Неймана на замкнутой границе, если только заданные граничные условия удовлетворяют некоторому интегральному соотношению на граничной поверхности. Кроме того, поскольку в граничных условиях задаются градиенты, а не значения, для получения однозначного ответа надо задать значение ψ в одной какой-либо точке.

Собственные функции. Рассмотрим особенно простой случай, чтобы показать, что еще можно сделать при помощи сеточных вычислений. Возьмем изображенную на рис. 6.5 (стр. 652) решетку с четырьмя внутренними

и восемью граничными точками. Мы приступим к построению нашего решения для любых граничных условий при помощи решений для простых граничных условий. Это можно сделать, так как наше разностное уравнение *линейно*; если $\psi(m, n)$ есть решение, когда граничные значения равны $\psi_0(0, n)$, $\psi_0(m, 0)$ и т. д., то $A\psi(m, n)$ представляет собой решение для граничных значений $A\psi_0$, а если $\psi'(m, n)$ есть решение для граничных значений ψ_0', то решение при граничных значениях $\psi_0+\psi_0'$ равно $\psi(m, n)+\psi'(m, n)$.

Например, можно решить разностное уравнение для простого случая, когда $\psi_1(1,0)=\psi_1(2,0)=1$, а все остальные граничные значения ψ равны нулю. Тогда, по симметрии, $\psi(1,1)=\psi(2,1)$ и $\psi(1,2)=\psi(2,2)$. Записывая разностные уравнения для двух внутренних точек, имеем

$$\psi(1,1)=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\psi(2,1)+\tfrac{1}{4}\psi(1,2), \text{ или } \tfrac{3}{4}\psi(1,1)=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\psi(1,2);$$
$$\psi(1,2)=\tfrac{1}{4}\psi(1,1)+\tfrac{1}{4}\psi(2,2), \text{ или } \tfrac{3}{4}\psi(1,2)=\tfrac{1}{4}\psi(1,1).$$

Эти уравнения можно решить и получить

$$\psi(1,1)=\psi(2,1)=\tfrac{3}{8}, \quad \psi(1,2)=\psi(2,2)=\tfrac{1}{8}. \tag{6.2.10}$$

Полученную матрицу значений обозначим через $\Psi_1(m,n)$.

Можно также найти решение для случая, когда $\psi_2(1,0)=-\psi_2(2,0)=1$, а остальные граничные значения ψ равны нулю. Это даст

$$\psi(1,1)=-\psi(2,1)=\tfrac{5}{24}, \quad \psi(1,2)=-\psi(2,2)=\tfrac{1}{24}; \tag{6.2.11}$$

полученную матрицу значений обозначим через $\Psi_2(m, n)$.

Теперь нетрудно видеть, что если $\psi(1,0)=a$, $\psi(2,0)=b$, а все остальные граничные значения ψ равны нулю, то получится решение

$$\Psi(m, n)=\tfrac{a+b}{2}\Psi_1(m, n)+\tfrac{a-b}{2}\Psi_2(m, n).$$

Решения для других трех частей границы можно получить, повернув это решение на 90, 180 или 270°. При помощи соответствующего сложения можно получить решение для любого задания значений граничных потенциалов.

Этот метод можно распространить на области с прямоугольной границей любого размера. Мы сначала допускаем, что граничные значения вдоль одной стороны имеют особенно простой вид, а все остальные граничные значения равны нулю. Например, мы полагаем $\psi(m, 0)=\varphi(m)$ (где φ надо определить), $\psi(0, n)=\psi(m, N)=\psi(M, n)=0$. Затем мы *разделяем* переменные в разностном уравнении, полагая $\psi(m, n)=f(n)\varphi(m)$; разностными уравнениями для f и φ будут

$$\varphi(m)=\tfrac{1}{2}[\varphi(m+1)+\varphi(m-1)]+C\varphi(m)$$

и (6.2.12)

$$f(n)=\tfrac{1}{2}[f(n+1)+f(n-1)]-Cf(n),$$

где C — *константа разделения*. Разностное уравнение (6.2.6) получается при помощи умножения первого из этих уравнений на $f(n)$, второго на $\varphi(m)$, сложения результатов и деления на 2. Аналогия между этим и процессом разделения переменных в уравнении с частными производными очевидна.

Мы видим, что для простоты данного метода функции $\varphi_\nu(m)$, определяющие простые граничные условия вдоль одной стороны и нулевые условия на остальных сторонах, должны удовлетворять разностному уравнению

$$\varphi_\nu(m) = \tfrac{1}{2}\varphi_\nu(m-1) + \tfrac{1}{2}\varphi_\nu(m+1) + C_\nu\varphi_\nu(m),$$

а $\varphi_\nu(0)$ и $\varphi_\nu(M)$ должны равняться нулю. Согласно сказанному на стр. 132, возможными решениями являются

$$\varphi_\nu(m) = \sin(\pi\nu m/M), \quad C_\nu = 2\sin^2(\pi\nu/2M), \quad \nu = 1, 2, \ldots, M. \quad (6.2.13)$$

Эти M различных функций от m обладают тем свойством, что их соответственно подобранная линейная комбинация может равняться вдоль части границы, где $n=0$, произвольно заданной системе значений граничных потенциалов, оставаясь равной нулю на остальной части границы.

Далее надо найти соответствующие функции $f_\nu(n)$ как решения уравнений

$$f_\nu(n) = \tfrac{1}{2}f_\nu(n-1) + \tfrac{1}{2}f_\nu(n+1) - 2\sin^2(\pi\nu/2M)f_\nu(n), \quad (6.2.14)$$

равные нулю при $n=N$ и единице при $n=0$. Общее решение для произвольных граничных значений вдоль части границы, где $n=0$, равно линейной комбинации произведений $\varphi_\nu(m)f_\nu(n)$, где $\nu = 1, 2, \ldots, M$.

Функции вида (6.2.13) называются *собственными функциями*; они будут исследованы позже в этой главе в связи с дифференциальными уравнениями. С их помощью можно получить решения, удовлетворяющие любым граничным условиям на граничных поверхностях особенно простого вида.

Функции Грина. Однако мы можем также перегруппировать исследованные выше функции, чтобы подойти к решениям с другой стороны. Решения (6.2.10) и (6.2.11) для простой решетки, изображенной на рис. 6.5, можно скомбинировать, чтобы получить специальное решение

$$G_1(m, n) = \tfrac{1}{2}\Psi_1(m, n) + \tfrac{1}{2}\Psi_2(m, n),$$

$$G_1(1,1) = \tfrac{7}{24}, \quad G_1(2,1) = \tfrac{1}{12} = G_1(1,2),$$

$$G_1(2,2) = \tfrac{1}{24} \quad (6.2.15)$$

разностного уравнения (6.2.6), удовлетворяющее простым граничным условиям: ψ в граничной точке 1 (1,0) равна единице, а во всех остальных — нулю. Решение, равное единице в граничной точке 2 (2,0) и нулю во всех остальных точках, имеет вид $G_2(m, n) = \frac{1}{2}\Psi_1(m, n) - \frac{1}{2}\Psi_2(m, n)$ и равно функции G_1, отраженной от вертикальной оси симметрии решетки (то есть $G_2(1,1) = \frac{1}{12} = G_2(2,2)$; $G_2(2,1) = \frac{7}{24}$; $G(1,2) = \frac{1}{24}$), а функции для других граничных точек можно получить, последовательно отражая первое решение от различных осей симметрии решетки.

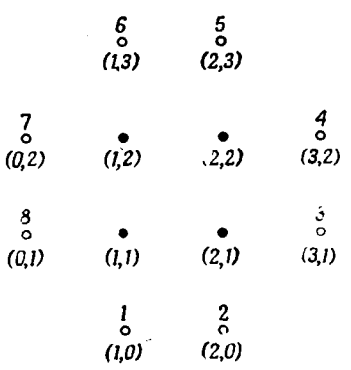

Рис. 6.5. Решетка для простых примеров задания граничных значений.

Эти величины, которые можно рассматривать как функции граничной точки и внутренней точки, называются *функциями Грина* для границы. Так как $G_s(m, n)$ соответствует граничному условию $\psi_s = 1$, $\psi = 0$ в остальных граничных точках, то можно быстро построить решение для граничных условий $\psi = \psi_s$ в s-й граничной точке с помощью суммы

$$\psi(m, n) = \sum_s \psi_s G_s(m, n). \tag{6.2.16}$$

Мы умножаем функцию Грина для s-й граничной точки на граничное значение в этой точке и производим суммирование по всем граничным точкам. В гл. 7 мы рассмотрим обобщение этого приема на решения дифференциального уравнения.

Решение разностного уравнения Пуассона (6.2.7) можно найти при помощи весьма сходного приема. Мы решаем это уравнение, когда все граничные потенциалы равны нулю, $F(1,1) = 4/h^2$, а все остальные F равны 0:

$$G(1,1 \mid 1,1) = \frac{7}{6}, \quad G(1,1 \mid 1,2) = G(1,1 \mid 2,1) = \frac{1}{3}, \quad G(1,1 \mid 2,2) = \frac{1}{6}.$$

Отсюда решение, когда все граничные значения равны нулю, а функция $F(m, n)$ принимает любую фиксированную совокупность значений, равно

$$\psi(m, n) = \frac{h^2}{4} \sum_{r,s} F(r, s) G(r, s \mid m, n), \tag{6.2.17}$$

сумме значений F в различных внутренних узлах, каждое из которых умножено на решение ψ для этого узла. Если некоторые из граничных потенциалов отличны от нуля, то для удовлетворения этим граничным условиям достаточно сложить функции (6.2.17) и (6.2.16).

Решение $G(r, s \mid m, n)$ называется функцией Грина для внутренних точек (r, s) и (m, n). Оказывается, что она симметрична относительно перестановки точек, то есть потенциал в точке (m, n), порожденный единичным «зарядом» F в точке (r, s), равен потенциалу в (r, s), порожденному единичным зарядом в (m, n). Это — выражение *принципа взаимности*, который будет рассмотрен несколько позже.

Между прочим, решение G для решетки с границей любого вида непосредственно связано со следующей чисто воображаемой задачей. Допустим, что решетка изображает улицы симметрично разбитого города. На углу r-й стрит и s-й авеню находится салун. Как-то рано утром из салуна был изгнан посетитель, который отправился наобум или по r-й стрит или по s-й авеню. На улицах довольно скользко, и каждый раз, когда человек пересекает стрит или авеню (то есть в каждой встречающейся ему узловой точке), он скользит и падает. При этом он настолько пьян, что когда вновь становится на ноги, то полностью забывает направление, по которому шел, так что его прогулка вдоль следующего квартала одинаково вероятна во всех четырех направлениях от последнего места падения. Так он продолжает ставить себе новые и новые синяки, пересекая различные стриты и авеню (некоторые из них по нескольку раз), пока в конце концов не достигает граничной точки. На всех граничных перекрестках стоят полисмены, один из которых живо доставляет пьяного бродягу в ближайший участок.

Конечно, имеется много возможных путей, по которым этот человек может пройти от салуна до ареста, и мы, естественно, не можем точно предсказать, какой путь он изберет. Однако можно предсказать *математическое ожидание* того, что он упадет на углу m-й стрит и n-й авеню. Для этого нужно сложить математическое ожидание (шанс) того, что он

упадет там только один раз, математическое ожидание того, что он упадет там два раза, и т. д., или же, если эти прогулки достаточно часты, то это математическое ожидание равно осредненному по всем прогулкам числу падений в точке (m, n). Эта возможность *как раз равна функции Грина* $G(r, s \mid m, n)$, которую мы подсчитали. Рассмотренный здесь пример является частным случаем *задачи о случайных блужданиях*, изучавшейся несколькими выдающимися математиками и интересной для исследования брауновского движения, а также движения звезд в галактике.

Эллиптическое уравнение и условия Коши. Для пополнения нашего исследования эллиптических уравнений следует выяснить, что будет, если вдоль границы $n=0$ задать условия Коши. Это означает, что для всех значений m задаются $\psi(m, 0)$ и $\psi(m, 1)$. Тогда из уравнения (6.2.6) можно найти все $\psi(m, 2)$:

$$\psi(m, 2)=4\psi(m, 1)-\psi(m, 0)-\psi(m+1,1)-\psi(m-1,1)$$

и так далее последовательно для всех n. Если имеются боковые границы (скажем, при $m=0$ и $m=M$), то вдоль них нельзя задавать условий Коши, так как тогда некоторые ψ (для $m=1$ и $m=M-1$) были бы переопределенными; допускаются только условия Дирихле или Неймана.

Так как значения ψ уже заданы условиями Коши при $n=0$, то мы не можем на верхней границе, скажем при $n=N$, задавать произвольно граничное условие любого вида. Для эллиптического уравнения внутри замкнутой границы условия Коши на любой части границы дают слишком много условий.

С другой стороны, если нет верхней границы, то $\psi(m, n)$ будет, вообще говоря, беспредельно возрастать при возрастании n. Раз ψ не может иметь максимумов или минимумов, то если ψ начинает возрастать или убывать с ростом n, оно должно продолжать возрастать или убывать неограниченно при возрастании n. Любое бесконечно малое изменение условий Коши при $n=0$ послужит причиной неограниченно большого изменения ψ для очень больших значений n. Такая чувствительность к граничным условиям не имеет физического смысла.

Все приведенные выше выводы справедливы независимо от величины шага, так что они будут также верны и при стремлении h к нулю. Поэтому можно ожидать, что *никакое решение уравнения Лапласа не может иметь внутри своей области существования максимумов или минимумов*; *условия Дирихле или Неймана на замкнутой границе дают корректную задачу*; условия Коши даже на части замкнутой границы дают слишком много, а на открытой границе вызывают слишком высокую чувствительность к малым изменениям условий, чтобы быть физически удовлетворительными. Эти заключения о граничных условиях применимы также к уравнению Пуассона (на самом деле даже к любому эллиптическому уравнению), хотя решения уравнения Пуассона могут иметь максимумы и минимумы.

Гиперболическое разностное уравнение. Для гиперболического уравнения можно начертить сетку в направлениях x, y, как для уравнения (6.2.8), или же провести решетку вдоль характеристик и сделать разностное уравнение аналогичным уравнению в нормальной форме (6.1.8), которая для волнового уравнения принимает вид $\partial^2\psi/\partial\lambda\,\partial\mu=0$:

$$\psi(\varkappa+1, \nu+1)+\psi(\varkappa, \nu)=\psi(\varkappa+1, \nu)+\psi(\varkappa, \nu+1), \qquad (6.2.18)$$

где характеристиками являются линии решетки $\varkappa=\text{const}$ или $\nu=\text{const}$ (см. рис. 6.6). Здесь связаны потенциалы в углах ромбообразной фигуры;

уравнение (6.2.18) утверждает, что среднее значение потенциалов на концах горизонтальной диагонали равно среднему из значений на концах вертикальной диагонали. Условиям Коши соответствует задание значений в светлых точках на рис. 6.6, в двух нижних рядах. При этих заданных значениях можно применить уравнение (6.2.18) для подсчета потенциалов в первом ряде черных точек, затем в следующем и т. д. Если функция начинает возрастать в некоторой точке, например если ψ в a больше, чем среднее в b и d, то ψ в c станет вновь меньше (так как среднее в a и c должно равняться среднему в b и d). Следовательно, функция удерживается в определенных границах и не может беспредельно возрастать

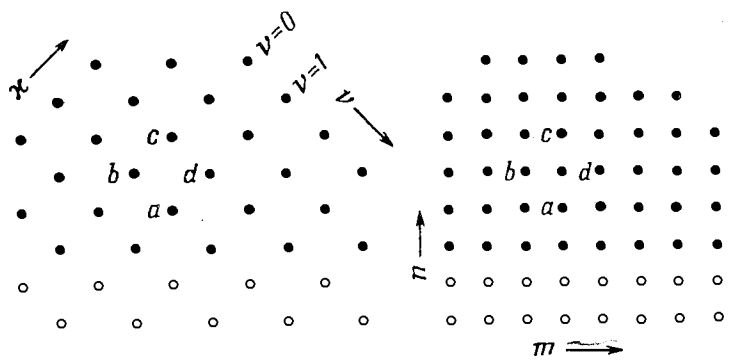

Рис. 6.6. Различные решетки для гиперболического уравнения.

Ряды $\varkappa=\frac{1}{2}(m+n)=\text{const}$ и $\nu=\frac{1}{2}(m-n)=\text{const}$ являются характеристиками.

на любом ограниченном участке изменения временно́й переменной, как это делает решение уравнения Лапласа. Значит, незначительные изменения граничных условий порождают лишь незначительные изменения функции, которые делаются незаметными при удалении от границы; другими словами, решение *устойчиво* относительно условий Коши на открытой границе.

На этом примере можно также пояснить трудности, встречающиеся, когда граница совпадает с характеристикой. Допустим, что значения заданы вдоль линий $\nu=0$ и $\nu=1$. Применяя уравнение (6.2.18), мы видим, что уравнения при $\nu=0$ требуют внутренней совместимости граничных значений. Система уравнений вида

$$\psi(\varkappa+1,2)-\psi(\varkappa,2)=\psi(\varkappa+1,1)-\psi(\varkappa,1)$$

не может дать однозначного решения, так как каждое уравнение содержит *два* неизвестных, и если граница простирается в бесконечность в обе стороны, то решение системы бесконечного числа уравнений не сходится (определитель из коэффициентов не сходится). Если граница в некоторой точке заворачивает, так что значение одного из $\psi(\varkappa, 2)$ дано, то можно получить остальные $\psi(\varkappa, 2)$. Но это может случиться, если граница не всюду идет по характеристике; если же она совпадает с характеристикой, единственного решения найти нельзя.

Возвратимся к (x, y)-виду (6.2.8) разностного уравнения, соответствующему второй решетке рис. 6.6. Здесь опять узлы, связанные уравнением, образуют ромбообразную фигуру, причем среднее от значений в концах горизонтальной диагонали равно среднему значений в концах вертикальной диагонали. Это постоянство формы связи не должно нас удивлять, так как волновое уравнение должно представлять некоторую взаимосвязь,

не зависящую от координат, в которых оно выражено. Для горизонтальной сети это значит, что в уравнениях не участвует значение функции в центре ромба (так было и для (x, y)-представления, но там не было так заметно, потому что при проведении сети центральные точки пропускались). Пропуск центральной точки является одним из выражений коренного различия между уравнением Лапласа и волновым уравнением. Это — основная причина того, что условия Дирихле на замкнутой границе не приводят к однозначному ответу для волнового уравнения, но дают такой ответ для уравнения Лапласа.

Чтобы сделать это еще яснее, можно упростить сеточную задачу Дирихле для замкнутой границы до наиболее простого случая, показанного на рис. 6.7, с четырьмя граничными точками и одной внутренней точкой решетки. Если рассматривается уравнение Лапласа, то значение ψ в центральной точке равно среднему из значений в четырех граничных точках, и если все эти четыре значения заданы, получается единственное решение. Однако если рассматривается волновое уравнение, то это уравнение связывает значения в граничных точках и *ничего не говорит* о значении в центральной точке. Значит, если значения в четырех граничных точках даны, то они могут быть совместными с самим волновым уравнением или не совместными, но в обоих случаях о значении во внутренней точке решетки ничего не известно.

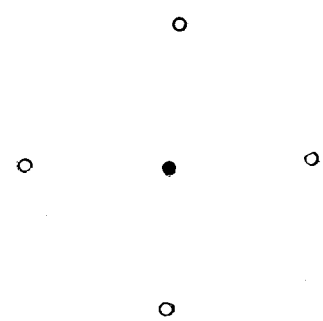

Рис. 6.7. Решетка для самой простой сеточной краевой задачи.

Возвращаясь к решетке для m, n в правой части рис. 6.6, мы можем удовлетворить краевым условиям, разделяя (6.2.8) на разностные уравнения по m и по n:

$$\psi(m, n) = \varphi(m) f(n),$$

$$\varphi(m+1) + \varphi(m-1) + (k^2 - 2)\varphi(m) = \Delta^2\varphi + k^2\varphi = 0, \qquad (6.2.19)$$

$$f(n+1) + f(n-1) + (k^2 - 2) f(n) = \Delta^2 f + k^2 f = 0.$$

Мы решаем уравнение для $\varphi(m)$ в функциях особенно простого типа [через которые можно легко выразить краевые условия, например, применяя функции (6.2.13)], а затем решаем уравнение для соответствующего множителя f; окончательное решение будет суммой таких произведений, удовлетворяющей краевым условиям при $n = 0$ и 1. Или же можно решить задачу, когда краевые условия имеют вид единичной функции или производной для $m = M$, при остальных краевых значениях, равных нулю, что нам даст функции Грина для границы. Окончательное решение будет опять равняться сумме этих функций Грина, умноженных на граничные значения в граничных точках.

Параболическое разностное уравнение. Взяв, наконец, уравнение (6.2.9), как простейшее параболическое уравнение, мы видим, что если вдоль горизонтальной части границы $n = 0$ поставлены условия Дирихле, то первое уравнение допускает единственное решение для точек решетки, где $n = 1$, затем где $n = 2$ и т. д. Будет ли решение устойчивым или нет, зависит от значения C. Если $\psi(m, n)$ при $m = m_0$ больше, чем $\psi(m_0 + 1, n)$ и $\psi(m_0 - 1, n)$, то $\psi(m, n+1)$ имеет меньшее значение, чем $\psi(m, n)$, так как

$$\psi(m, n+1) = \psi(m, n) + 2C\left\{\frac{1}{2}[\psi(m-1, n) + \psi(m+1, n)] - \psi(m, n)\right\}.$$

Если C не настолько велико, чтобы $\psi(m, n+1)$ сделалось отрицательным и начались неустойчивые колебания, то неправильности решения стремятся выровняться, и при больших значениях n все ψ стремятся принять одинаковое значение (см. задачу 6.3).

Если, с другой стороны, пользоваться вторым видом уравнения для движения назад в направлении n (времени), то мы найдем, что неправильности в значениях ψ стремятся увеличиться и легкая неправильность в краевых значениях порождает в конце концов очень большую неправильность у функции для достаточно больших отрицательных n. Поэтому решение неустойчиво для любых краевых условий (оно неустойчиво для условий Дирихле и Неймана; условия Коши переопределяют решение). После перехода к пределу можно утверждать, что решения параболических уравнений дают устойчивый и единственный результат для условий Дирихле на открытой границе при движении в положительном направлении от характеристики, но неустойчивы в отрицательном направлении.

С физической точки зрения это происходит из-за того, что параболические уравнения (примером является уравнение диффузии) представляют ситуации, в которых энтропия возрастает с возрастанием времени. Поэтому неправильности поля ψ стремятся сгладиться при возрастании времени; чем резче неправильность, тем быстрее она исчезнет. Если мы хотим вести исследование в обратном направлении по времени, чтобы узнать, каким было поле, диффундирующее в конце концов в заданное распределение, минуту (или час) назад, то мы не сможем сказать, сколько тогда было резких неправильностей, которые потом практически исчезли и не проявляются заметно в заданном распределении.

Результаты исследования этого параграфа можно резюмировать в следующей таблице:

Условия	Граница	Гиперболическое уравнение	Эллиптическое уравнение	Параболическое уравнение
Дирихле или Неймана (задается функция или нормальная производная)	Открытая	Недостаточно	Недостаточно	**Единственное устойчивое решение в положительном направлении, неустойчивое в отрицательном направлении**
	Замкнутая	Решение не единственно	**Единственное устойчивое решение** (относительно условий Неймана см. стр. 650)	Решение переопределено
Коши (задаются функция и нормальная производная)	Открытая	**Единственное устойчивое решение**	Решение неустойчиво	Решение переопределено
	Замкнутая	Решение переопределено	Решение переопределено	Решение переопределено

Приемлемые комбинации уравнений и краевых условий указаны жирным шрифтом. Заметим еще раз, что условия Дирихле — Неймана могут быть *однородными* [$\alpha\phi(s)+\beta N(s)=0$] или неоднородными [$\alpha\phi(s)+\beta N(s)=F(s)$]. Однородные условия Дирихле означают, что функция ϕ должна равняться *нулю* на границе; неоднородные условия Дирихле означают, что ϕ должна иметь заданные ненулевые значения на границе и т. д.

6.3. Собственные функции и их применения

Теперь мы достигли пункта, когда от обобщений надо начать переходить к частным случаям. Мы потратили первые два параграфа этой главы, чтобы показать вообще, для каких уравнений с частными производными пригодны те или иные виды краевых условий и при каких условиях можно ожидать, что, нашему заданию будет отвечать единственное решение. Сейчас мы детально изучим технику получения этого единственного решения в отдельных случаях.

Процесс подчинения достаточно общего решения краевым условиям до некоторой степени аналогичен процессу решения обыкновенного дифференциального уравнения. Ни в том, ни в другом случае метод не является прямым; мы должны выбрать общую форму решения, которая представляется подходящей для удовлетворения нашим требованиям, а затем провести подгонку деталей (конечно, если это окажется возможным!). Даже, например, для сравнительно простого процесса интегрирования функции $f(x)$ по x надо, в сущности, *угадать* вид интеграла и затем проверить правильность этой догадки посредством дифференцирования. Многие из форм, в которых мы угадываем решение дифференциальных уравнений, имеют очень общий вид, как, например, степенные ряды или интегральные представления; частное решение находится при помощи подстановки выбранной формы в дифференциальное уравнение и попытки его удовлетворить.

Общие формы, применяемые для удовлетворения краевым условиям, также выражаются либо через *ряды* функций, либо через интеграл от некоторой функции по границе. Как и для решений обыкновенных дифференциальных уравнений, мы сначала рассмотрим применение рядов; следующая глава будет посвящена использованию интегралов для удовлетворения краевым условиям. На практике приложение рядов обычно требует разделения уравнения с частными производными в приспособленных к границе координатах; прежде чем погрузиться в технические детали, мы проработаем простой пример, чтобы увидеть, как это получается.

Ряды Фурье. Пусть мы хотим решить краевую задачу для двумерного уравнения Лапласа

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

в прямоугольнике, заключенном между прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. Очевидно, что для этой границы подходят прямоугольные координаты x, y, так что мы можем разделить переменные и прийти к двум обыкновенным уравнениям:

$$\phi=X(x)\,Y(y),\quad \frac{d^2X}{dx^2}+k^2X=0,\quad \frac{d^2Y}{dy^2}-k^2Y=0,$$

где k^2 — константа разделения. Это — эллиптическое уравнение, так что подходят условия Дирихле или Неймана на замкнутой границе; см. исследование для случая решетки на стр. 650.