

Приемлемые комбинации уравнений и краевых условий указаны жирным шрифтом. Заметим еще раз, что условия Дирихле — Неймана могут быть однородными [$\alpha\psi(s) + \beta N(s) = 0$] или неоднородными [$\alpha\psi(s) + \beta N(s) = F(s)$]. Однородные условия Дирихле означают, что функция ψ должна равняться нулю на границе; неоднородные условия Дирихле означают, что ψ должна иметь заданные ненулевые значения на границе и т. д.

6.3. Собственные функции и их применения

Теперь мы достигли пункта, когда от обобщений надо начать переходить к частным случаям. Мы потратили первые два параграфа этой главы, чтобы показать вообще, для каких уравнений с частными производными пригодны те или иные виды краевых условий и при каких условиях можно ожидать, что, напримеру заданию будет отвечать единственное решение. Сейчас мы детально изучим технику получения этого единственного решения в отдельных случаях.

Процесс подчинения достаточно общего решения краевым условиям до некоторой степени аналогичен процессу решения обыкновенного дифференциального уравнения. Ни в том, ни в другом случае метод не является прямым; мы должны выбрать общую форму решения, которая представляется подходящей для удовлетворения нашим требованиям, а затем провести подгонку деталей (конечно, если это окажется возможным!). Даже, например, для сравнительно простого процесса интегрирования функции $f(x)$ по x надо, в сущности, *угадать* вид интеграла и затем проверить правильность этой догадки посредством дифференцирования. Многие из форм, в которых мы угадываем решение дифференциальных уравнений, имеют очень общий вид, как, например, степенные ряды или интегральные представления; частное решение находится при помощи подстановки выбранной формы в дифференциальное уравнение и попытки его удовлетворить.

Общие формы, применяемые для удовлетворения краевым условиям, также выражаются либо через ряды функций, либо через интеграл от некоторой функции по границе. Как и для решений обыкновенных дифференциальных уравнений, мы сначала рассмотрим применение рядов; следующая глава будет посвящена использованию интегралов для удовлетворения краевым условиям. На практике приложение рядов обычно требует разделения уравнения с частными производными в приспособленных к границе координатах; прежде чем погрузиться в технические детали, мы проработаем простой пример, чтобы увидеть, как это получается.

Ряды Фурье. Пусть мы хотим решить краевую задачу для двумерного уравнения Лапласа

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

в прямоугольнике, заключенном между прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. Очевидно, что для этой границы подходят прямоугольные координаты x , y , так что мы можем разделить переменные и прийти к двум обыкновенным уравнениям:

$$\psi = X(x)Y(y), \quad \frac{d^2X}{dx^2} + k^2X = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} - k^2Y = 0,$$

где k^2 — константа разделения. Это — эллиптическое уравнение, так что подходят условия Дирихле или Неймана на замкнутой границе; см. исследование для случая решетки на стр. 650.

Допустим для начала, что наши граничные условия являются особенно простыми условиями Дирихле, а именно ψ должна равняться нулю (однородные условия) при $x=0$, $x=a$ и $y=b$ и принимать произвольные значения $\psi_s(x)$ (неоднородные условия) при $y=0$. Решением x -уравнения, равным нулю при $x=0$ и при $x=a$, является $\sin(\pi nx/a)$, где n целое (мы положили $k=\pi n/a$), а решением y -уравнения, равным нулю при $y=b$, является $\operatorname{sh} k(b-y)$. Другими словами, единственными значениями k , при которых решение может удовлетворять нулевым граничным условиям на трех сторонах, являются значения $k=\pi n/a$ ($n=1, 2, 3, \dots$), а при этих значениях единственными решениями, пригодными для данных условий, являются функции, указанные в предыдущем предложении.

Следовательно, наиболее общее решение уравнения $\nabla^2\psi=0$ в двумерном случае, удовлетворяющее однородным условиям $\psi=0$ при $x=0$, $x=a$, $y=b$, можно представить при помощи ряда

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} \left[\frac{\pi n}{a} (b-y) \right] \sin \frac{\pi n x}{a}. \quad (6.3.1)$$

Чтобы сделать такое категорическое утверждение, как это, надо быть уверенным в том, что в виде этого ряда можно представить *все возможные* решения, удовлетворяющие нулевым условиям вдоль трех сторон, независимо от того, какие (неоднородные) граничные условия выполняются вдоль четвертой стороны $y=0$. Для этого нам надо будет доказать, что ряд (6.3.1) может удовлетворить *любым возможным* граничным условиям при $y=0$. Так как условия Дирихле на замкнутой границе определяют единственное решение, то тогда мы сможем убедиться, что такой ряд представляет решение, соответствующее заданным граничным условиям при $y=0$. Если мы найдем также другую форму функции (замкнутую форму или интегральную форму), удовлетворяющую этим условиям, то можно будет утверждать, что эта новая форма совпадает с рядом и, обратно, что ряд может представлять эту новую форму.

Следовательно, решающий шаг в обосновании приведенного выше утверждения состоит в доказательстве того, что ряд (6.3.1) может удовлетворить всем возможным условиям Дирихле вдоль $y=0$. Конечно, выражение «всем возможным» является довольно оптимистическим по своей общности, и нам следует несколько ограничить его при помощи более точных определений.

Однако в простом случае, который мы теперь рассматриваем, ряд (6.3.1) для $y=0$ является рядом Фурье. Мы увидим позже в этой главе, что такой ряд можно подобрать для любой функции, непрерывной вместе с производной при $0 < x < a$ всюду, за исключением конечного числа точек разрыва самой функции или ее производной (и, конечно, стремящейся к нулю при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow a$). Такие функции называются *кусочно-гладкими*. Ряд Фурье пригоден для любой непрерывной части такой произвольной функции (и, конечно, непригоден, вообще говоря, в точках разрыва, если функция обладает пиками нулевой ширины, которые, к счастью, имеют малое физическое значение).

Уточняя, можно придать утверждению о том, что ряд

$$\varphi(x) = \sum B_n \sin(\pi nx/a)$$

может отвечать кусочно-гладкой функции $f(x)$ в области $0 < x < a$, следующий смысл: возможно выбрать значения B_n , при которых

$$\int_0^a [\varphi(x) - f(x)]^2 dx = 0.$$

Это требование, конечно, не затрагивает различия в бесконечных пиках нулевой ширины, так как площадь под такими пиками равна нулю. С физической точки зрения это удовлетворительно. Можно сказать, что наше требование о выборе ряда является требованием *сходимости в среднем* или требованием *наименьших квадратов*. Обоснованием нашего утверждения о подборе в смысле сходимости в среднем как ряда Фурье, так и рядов из других функций мы займемся в этом параграфе позже.

Если нам известно, что ряд *может* удовлетворить требуемым граничным условиям, то нетрудно подсчитать необходимые значения коэффициентов A_n . Напишем равенство, соответствующее граничному условию вдоль $y=0$,

$$\psi_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} \frac{\pi n b}{a} \cdot \sin \frac{\pi n x}{a},$$

умножим обе части на $\sin(\pi m x/a)$ и проинтегрируем по x от 0 до a . Все интегралы в правой части, кроме одного, как легко проверить, равны нулю.

Один оставшийся, при $n=m$, равен $\frac{1}{2} a A_m \operatorname{sh}(\pi m b/a)$. Значит, коэффициенты A_m в формуле (6.3.1) можно легко подсчитать, и решением уравнения $\nabla^2 \phi = 0$, удовлетворяющим граничному условию $\phi=0$ при $x=0$, $x=a$, $y=b$ и условию $\phi=\psi_s(x)$ при $y=0$, оказывается ряд

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a} \int_0^a \psi_s(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{a} d\xi \right] \sin \left(\frac{\pi n x}{a} \right) \frac{\operatorname{sh}[(\pi n! a)(b-y)]}{\operatorname{sh}(\pi n b/a)}. \quad (6.3.2)$$

Этот ряд удовлетворяет граничным условиям и является решением уравнения Лапласа по x и y . Следовательно, он должен быть тем самым единственным решением, которое мы искали.

В предельном случае, когда $b \rightarrow \infty$, область внутри границы становится бесконечной, но согласно сказанному на стр. 643, условия Дирихле надо все-таки налагать на всей границе, чтобы получить единственный результат. Отношение гиперболических синусов приводится к простой экспоненте $\exp(-\pi ny/a)$, а в остальном ряд остается тем же. Если теперь продолжить границы в направлении x , то в конце концов мы перейдем от ряда Фурье к интегралу Фурье. Следуя § 4.8, мы найдем, что решение двумерного уравнения Лапласа в верхней полуплоскости, удовлетворяющее граничным условиям $\psi=\psi_s(x)$ при $y=0$ и $\psi=0$ на бесконечности, равно

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{ikx+ky} dk \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\xi) e^{-ik\xi} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{ikx-ky} dk \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ky} dk \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\xi) \cos[k(x-\xi)] d\xi, \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

где интегрирование по k разбивается на две части так, что зависимость от y обязательно исчезает при $y \rightarrow \infty$ (то есть мы применяем e^{+ky} для отрицательного k и e^{-ky} для положительного k). Если $y=0$, мы получаем обычный интеграл Фурье (4.8.2).

Функция Грина. Заметим, что как для конечных границ (когда применяется ряд (6.3.2)), так и для бесконечных границ (когда применяется интеграл (6.3.3)), мы можем преобразовать решение в интеграл по границе $y = 0$:

$$\psi(x, y) = \int_S \phi_s(\xi) G(x, y | \xi) d\xi, \quad (6.3.4)$$

где для конечной границы интегрирование производится между концами границы 0 и a , а функция G представляет собой ряд

$$G(x, y | \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[(\pi n/a)(b-y)]}{\operatorname{sh}(\pi nb/a)} \sin \frac{\pi n x}{a} \cdot \sin \frac{\pi n \xi}{a},$$

тогда как для бесконечной границы интегрирование по границе S производится от $-\infty$ до ∞ , а функция G равна

$$G(x, y | \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos[k(x - \xi)] dk = \frac{y/\pi}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

Функция G называется *функцией Грина* для граничной поверхности S (в нашем случае для $y = 0$).

Таким образом, мы видим, что наше решение задачи Дирихле можно выразить через интеграл по границе от функции Грина (соответствующей уравнению и виду границы), умноженной на заданную граничную функцию. Однако развитие этой идеи будет осуществлено в следующей главе; здесь нам надо сконцентрировать внимание на процессе определения функций, образующих ряд, и на том, как этот ряд составляется.

До сих пор мы рассматривали случай, когда только на части $y = 0$ границы граничные значения ϕ_s были отличны от нуля. Чтобы удовлетворить условиям, когда ϕ отлично от нуля вдоль других частей прямоугольной границы, мы пользуемся очевидным видоизменением функций, примененных в ряде (6.3.2) или интеграле (6.3.3). Например, для удовлетворения условиям вдоль $x = 0$ мы пользуемся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh} \left[\frac{\pi n}{b} (a - x) \right] \cdot \sin \frac{\pi n y}{b}$$

и аналогично для $x = a$ и $y = b$; для получения окончательного решения мы складываем отдельные ряды. После этого мы можем построить и функцию Грина для ее применения в подинтегральной функции при любых граничных значениях в любой точке вдоль прямоугольной границы. См. стр. 651—653 по поводу аналогичного случая для решетки.

Собственные функции. Функции $\sin(\pi n x/a)$ для целых значений n — это простейший пример последовательности *собственных функций*, которые составляют основу метода рядов для удовлетворения граничным условиям. Мы видим, что этот метод включает в себя разделение переменных в уравнении с частными производными в таких координатах ξ_n , что границе соответствует одна или более из координатных поверхностей $\xi_s = \text{const}$. Множитель в решении, зависящий от точки граничной поверхности (в нашем примере — множитель $\sin(\pi n x/a)$ для границы $y = 0$), включает константу разделения и должен удовлетворять некоторым простым граничным условиям (в примере в двух концах: $x = 0$ и $x = a$), и мы находим, что лишь для некоторых значений константы разделения (в примере для

целого n) эти условия будут удовлетворяться. Другой множитель ($\operatorname{sh}[(\pi n/a)(b-y)]$ в примере) выбирается затем так, чтобы удовлетворить условиям на другом конце области ($y=b$ в примере), и тогда полное решение представляет собой сумму этих произведений по всем допустимым значениям константы разделения.

Центральной частью метода, как нетрудно видеть, является определение вида множителя, выражающего зависимость решения от точки границы (множителя $\sin(\pi n x/a)$ в примере), и соответствующих допустимых значений константы разделения, которые удовлетворяют условиям на концах 0, a границы. Решения обыкновенного дифференциального уравнения, содержащие константу разделения, которые удовлетворяют простым граничным условиям в двух концах области изменения независимого переменного, называются *собственными функциями*, а значения константы разделения, допустимые при заданных условиях, называются *собственными значениями* (иногда применяются термины *характеристические функции* и *характеристические значения*). В приведенном выше примере функции $\sin(\pi n x/a)$ являются собственными функциями, а значения $(\pi n/a)^2$ (n целое) — собственными значениями. Следует ожидать, что ряд из этих собственных функций, для всех собственных значений константы разделения, может представлять любые граничные значения. Нам надо показать вообще, что такой ряд *может* представлять любую выбранную функцию в необходимой области изменения независимого переменного, а также показать, как подсчитывать коэффициенты ряда. (Нужно отметить, что можно рассматривать собственные функции для более чем одного измерения и собственные функции, являющиеся решениями интегральных, а не дифференциальных уравнений.)

Например, в общем двумерном случае мы выбираем такие координаты ξ_1, ξ_2 , чтобы граница соответствовала значениям $\xi_1=a_1, \xi_1=a_2, \xi_2=b_1, \xi_2=b_2$. Затем мы строим решение, для которого функция ψ равна 0 вдоль трех частей границы (например, при $\xi_1=a_1, \xi_1=a_2, \xi_2=b_2$), а вдоль четвертой части $\xi_2=b_1$ — некоторой произвольно выбранной функции $f(\xi_1)$. Это можно сделать, если мы сможем разделить уравнение в координатах ξ . Решения ξ_1 -уравнения, обращающиеся в нуль при $\xi_1=a_1$ и $\xi_1=a_2$, являются тогда *собственными функциями* задачи.

Типы краевых условий. До сих пор мы рассматривали случай условий Дирихле на замкнутой границе, но ту же технику можно применить для других типов краевых условий. Например, для условий Неймана на границе, имеющей вид прямоугольника со сторонами размеров a и b , примыкающего в первом квадранте к координатным осям, мы сначала удовлетворяем условиям вдоль стороны $y=0$, считая условия вдоль остальных трех сторон однородными, так что там *нормальная производная* равна нулю. Тогда подходящими собственными функциями являются $\cos(\pi n x/a)$, где n — целое, а ряд, имеющий нормальную производную $N_s(x)$ вдоль оси x от 0 до a и нулевую нормальную производную вдоль $y=b$, $x=0$ и $x=a$, записывается в виде

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \int_0^a N_s(\xi) \cos \frac{\pi n \xi}{a} d\xi \cdot \cos \frac{\pi n x}{a} \cdot \frac{\operatorname{ch}[(\pi n/a)(b-y)]}{\operatorname{ch}(\pi n b/a)}.$$

В этом случае, как мы указали на стр. 650, надо требовать, чтобы

$$\int_0^a N_s(\xi) d\xi = 0.$$

Если граница не замкнутая, а уравнение гиперболическое, то, возможно, надо задать условия Коши на части границы. Например, для гибкой струны длины a , закрепленной при $x=0$ и $x=a$, граничные условия являются однородными условиями Дирихле ($\psi=0$) при $x=0$ и $x=a$ для всех значений t , но начальные условия (краевые условия вдоль $t=0$) должны задавать как начальное смещение $\psi=\psi_0(x)$, так и начальную скорость $\partial\psi/\partial t=U_0(x)$ (см. стр. 639). Соответствующий ряд, дающий решение волнового уравнения $c^2\partial^2\psi/\partial x^2=\partial^2\psi/\partial t^2$, имеет вид

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{a} \cdot \left(A_n \cos \frac{\pi n c t}{a} + B_n \sin \frac{\pi n c t}{a} \right).$$

Собственными функциями будут $\sin(\pi n x/a)$, а собственными значениями — числа $\pi n/a$. Значения коэффициентов A_n , B_n определяются по ψ_0 , U_0 способом, подобным тому, который был применен на стр. 660.

Иногда граничные условия, определяющие собственные функции, состоят не в задании нулевого значения или нулевой производной на двух концах интервала. Может быть поставлено общее однородное условие, состоящее в том, что отношение значения к производной равно постоянной, не зависящей от значения константы разделения; например,

$$a \partial\psi/\partial x = \beta\psi \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=a.$$

Если $\alpha=0$, оно приводится к однородному условию Дирихле, а если $\beta=0$ — к однородному условию Неймана. Заметим, что граничные условия для собственных функций всегда однородны (см. стр. 633), если граничная точка является обыкновенной.

Пример граничного условия другого типа мы имеем в случае решения уравнения Лапласа внутри круга радиуса a при условиях Дирихле на окружности. Соответствующими координатами являются, конечно, полярные координаты r , φ , а уравнение Лапласа и уравнения, получающиеся после разделения переменных, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} &= 0, \quad \Phi = R(r) \Phi(\varphi), \\ \frac{d^2 \Phi}{d \varphi^2} + m^2 \Phi &= 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} R = 0. \end{aligned}$$

Решением φ -уравнения будет $a \cos mt\varphi + b \sin mt\varphi$ с произвольными значениями a , b и m . Если мы ищем имеющее физический смысл решение внутри окружности $r=a$, то оно должно быть в этой области непрерывным и конечным. Угол φ пробегает непрерывно значения от 0 до 2π , возвращаясь к 0, когда радиус-вектор делает полный оборот. Значит, $\Phi(2\pi)$ должно равняться $\Phi(0)$, и вообще $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$. Чтобы это было возможно, константа разделения m должна быть целой, и потому собственными функциями по φ являются $\sin mt\varphi$ и $\cos mt\varphi$ с целым m . В этом случае нет задания значений функции на концах $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$ области изменения φ . Условие было просто условием непрерывности, и ему соответствует требование, чтобы Φ была *периодична* по φ с периодом 2π . В последующих главах нам будет часто встречаться требование периодичности как граничное условие.

Интересующая нас область изменения r формально ограничена двумя точками, $r=0$ и $r=a$, хотя физическая граница имеется только при $r=a$. Мы могли бы начать беспокоиться о том, какое граничное условие применить при $r=0$, где нет физической границы, а имеется лишь точка концентрации системы координат, но следует вспомнить, что точке концентрации соответствует особая точка для дифференциального уравнения

ния, и простого требования, чтобы ψ была там конечной, или непрерывной, или аналитической, достаточно для ограничения нашего выбора функции. Общее решение уравнения для R равно

$$R = \begin{cases} a_0 + b_0 \ln r & \text{при } m = 0, \\ a_m r^m + b_m / r^m & \text{при } m > 0; \end{cases}$$

чтобы R было конечным и непрерывным внутри границы, второй член надо опустить. (Заметим мимоходом, что если бы окружность $r = a$ была внутренней границей, а от функции требовалось бы, чтобы она была ограниченной на бесконечности, то надо было бы опустить первый член при $m > 0$ и член с $\ln r$ при $m = 0$.)

Решение уравнения Лапласа внутри окружности $r = a$, равное $\psi = \psi(\varphi)$ вдоль границы, выражается, таким образом, рядом

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{a} \right)^n,$$

где

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_s(\alpha) d\alpha, \quad B_0 = 0,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_s(\alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_s(\alpha) \sin n\alpha d\alpha.$$

В других случаях граница может простираться от одной точки концентрации до другой; тогда двумя граничными точками будут две смежные особые точки дифференциального уравнения для собственных функций, а граничные условия могут просто заключаться в том, что решение должно оставаться конечным в обеих особых точках. Трехмерное уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0$$

подстановкой $\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ разделяется на уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0;$$

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] \Theta = 0; \quad z = \cos \theta;$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0.$$

Если краевая задача решается в шаре $r \leq a$, то последние два уравнения служат для нахождения собственных функций, причем граничные условия непрерывности и конечности служат для определения допустимых значений n и m . Так как азимутальный угол φ непрерывно меняется от 0 до 2π , то, как и выше в случае круговой границы, мы заключаем, что m должно быть целым, а собственными функциями будут $\sin m\varphi$, $\cos m\varphi$. Решениями уравнения для Θ являются функции Лежандра (см. стр. 514). В гл. 5 мы видели, что решения, остающиеся конечными в обеих особых точках $z = 1$ и $z = -1$, могут иметься лишь при целом n . Требование конечности множителя R в особой точке $r = 0$ также определяет его вид. Поэтому реше-

ние должно выражаться в виде ряда

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) \sin^m \theta \cdot T_{n-m}^m (\cos \theta) \left(\frac{r}{a}\right)^n,$$

где T представляют собой полиномы Гегенбауэра, определенные формулами (5.2.53) и (5.3.36). Функции $\sin^m \theta \cdot T_{n-m}^m (\cos \theta)$ иногда называются *присоединенными функциями Лежандра*.

Границные условия могут быть условиями Дирихле на сфере $r=a$. Тогда они выражаются равенством $\psi = \psi_S(\theta, \varphi)$ при $r=a$, где ψ_S представляет собой кусочно-гладкую функцию от θ и φ . Позже мы покажем, что интеграл

$$\int_0^\pi \sin^{2m+1} \theta \cdot T_{n-m}^m (\cos \theta) T_k^m (\cos \theta) d\theta$$

при k , отличном от n , равен нулю, и подсчитаем значение интеграла при $k=n$. Сейчас нам достаточно знать, что если умножить обе части ряда для ψ на

$$\cos l\varphi \cdot \sin^{l+1} \theta \cdot T_{k-l}^l (\cos \theta) d\varphi d\theta$$

и проинтегрировать по поверхности сферы $r=a$, то все члены ряда исчезнут, кроме одного, для которого $m=l$ и $n=k$, а этот член можно записать в виде $A_{lk} \Lambda_{lk}$, где Λ_{lk} — известная постоянная. Этим путем можно показать, что коэффициенты ряда равны

$$A_{mn} = \frac{1}{\Lambda_{mn}} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi d\varphi \int_0^\pi \psi_S(\theta, \varphi) \sin^{m+1} \theta \cdot T_{n-m}^m (\cos \theta) d\theta,$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\Lambda_{mn}} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi d\varphi \int_0^\pi \psi_S(\theta, \varphi) \sin^{m+1} \theta \cdot T_{n-m}^m (\cos \theta) d\theta,$$

чем коэффициенты ряда окончательно определяются через граничные значения $\psi_S(\theta, \varphi)$.

В этих примерах мы указали общие свойства некоторых собственных функций и их отдельные применения. Эти функции могут быть решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, появляющихся в результате разделения одного из полученных выше уравнений с частными производными, соответствующими частным значениям константы разделения (собственным значениям). Эти собственные значения определяются тогда из условия, чтобы собственные функции удовлетворяли некоторому виду граничных условий в двух концах данной области значений независимого переменного. Если эти концевые точки являются особыми для дифференциального уравнения, то граничные условия могут состоять просто в требовании, чтобы решение оставалось там конечным. Если концевые точки являются обыкновенными, то условия могут быть однородными и заключаться в требовании, чтобы отношение между функцией и ее производной равнялось некоторой постоянной, не зависящей от константы разделения; или чтобы решение было периодическим с некоторым постоянным периодом и т. д.

Нужно выяснить, как определять собственные значения и собственные функции из граничных условий, но надо также, и это еще более важно, показать, что из последовательности так определенных собственных функций можно образовать ряд, который может изображать любую

кусочно-гладкую функцию между граничными точками. Оставшаяся часть этого параграфа будет посвящена исследованию этого общего вопроса с частыми паузами для иллюстрации понятий на примерах. Свойства собственных функций как решений интегральных уравнений будут изучены в гл. 8.

Абстрактное векторное пространство. Собственные функции, с которыми мы пока познакомились на отдельных примерах, скажем члены $\sin(\pi nx/a)$ ряда Фурье, имеют некоторые свойства, аналогичные свойствам компонент векторов, рассмотренных в § 1.6 и 2.6. Компоненты вектора \mathbf{F}_k в n -мерном пространстве можно записать в виде F_{km} (то есть если \mathbf{a}_m представляет собой единичный вектор в направлении оси x_m , причем $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ попарно ортогональны, то $F_{km} = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{a}_m$). При этом скалярное произведение вектора \mathbf{F}_k на другой вектор \mathbf{F}_l имеет вид

$$\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{F}_l = \sum_{m=1}^n F_{km} F_{lm}$$

и равно нулю, если \mathbf{F}_k и \mathbf{F}_l взаимно ортогональны (перпендикулярны один другому). В частности, длина вектора \mathbf{F}_k равна квадратному корню из скалярного произведения этого вектора на себя:

$$F_k = \left(\sum_{m=1}^n F_{km}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{F}_k}.$$

Функция $\sin(\pi mx/a)$ зависит от целого m и непрерывного переменного x . Ее можно рассматривать как координатное представление некоторого вектора \mathbf{S}_m в *абстрактном векторном пространстве* бесконечного числа измерений. Скалярное произведение двух таких векторов \mathbf{S}_m и \mathbf{S}_n можно определить при помощи интеграла

$$\mathbf{S}_m \cdot \mathbf{S}_n = \int_0^a \sin \frac{\pi mx}{a} \cdot \sin \frac{\pi nx}{a} dx, \quad (6.3.5)$$

который является типичным предельным видом обычной суммы произведений компонент. Получается так, как будто каждому значению x из интервала ($0 < x < a$) соответствуют свое направление и свой единичный вектор $\mathbf{e}(x)$ в функциональном пространстве, причем вектор \mathbf{e} для любого x ортогонален вектору \mathbf{e} для любого другого x , а величина $\sin(\pi nx/a)$ для данного x является как бы компонентой вектора \mathbf{S}_n в направлении, определяемом $\mathbf{e}(x)$.

Отсюда длина \mathbf{S}_n равна квадратному корню из скалярного произведения \mathbf{S}_n на себя:

$$S_n = \left[\int_0^a \sin^2 \frac{\pi nx}{a} dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{a}{2}}. \quad (6.3.6)$$

Собственная функция $\sin(\pi nx/a)$ определяет, таким образом, *собственный вектор* \mathbf{S}_n . В силу ортогональности собственных функций каждый собственный вектор ортогонален любому другому, так как скалярное произведение $(\mathbf{S}_m \cdot \mathbf{S}_n)$, определенное формулой (6.3.5), равно нулю при $m \neq n$. Если разделить каждый вектор \mathbf{S}_n на $\sqrt{a/2}$, мы получаем совокупность попарно ортогональных единичных векторов

$$\mathbf{e}_n = \sqrt{2/a} \mathbf{S}_n,$$

которые определяют систему *нормальных координат* в функциональном пространстве, столь же полезных, как и исходные координаты и единичные векторы $e(x)$.

В частности, единичный вектор $e(x)$ можно представить посредством новых единичных векторов в виде

$$e(x) = \sum_n e_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a} = \frac{2}{a} \sum_n S_n \sin \frac{\pi n x}{a}, \quad (6.3.7)$$

а *нормированные* собственные функции $\sqrt{2/a} \sin(\pi n x/a)$ аналогичны направляющим косинусам, определяющим одну систему осей через другую [см. (1.3.1)].

Довольно трудно поверить в то, что пространство, характеризуемое несчетным множеством единичных векторов $e(x)$, можно полностью представить при помощи счетного множества собственных векторов e_n . И в действительности это, конечно, не так, потому что произвольно выбранный вектор в пространстве $e(x)$ изображается «функцией» от x , имеющей бесконечное число разрывов. Мы же выбрали из несчетномерного пространства подпространство, состоящее из всех функций, непрерывных вместе с производной всюду, кроме конечного числа точек (то есть *кусочно-гладких функций*). Эти функции, имеющие существенно специальный вид по сравнению со всеми возможными бесконечно-разрывными функциями, можно представить посредством счетного множества собственных векторов e_n . Это ограничение надо иметь в виду в наших дальнейших исследованиях.

При указанном ограничении мы уже можем выразить произвольный вектор F в абстрактном векторном пространстве через его компоненты вдоль нормальных осей:

$$F = \sum_n F_n e_n.$$

Тот же вектор можно выразить и через исходные единичные векторы $e(x)$ с компонентами $F(x)$, связанными с F_n соотношениями

$$\begin{aligned} F_n &= F \cdot e_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a F(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx, \\ F(x) &= F \cdot e(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin \frac{\pi n x}{a}. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Получились как раз формулы, определяющие разложение функции $F(x)$ в ряд Фурье.

Направления, даваемые собственными векторами S_n (или e_n), как-то определяются дифференциальным уравнением

$$d^2\phi/dx^2 = -k^2\phi$$

для синуса и однородными граничными условиями $\phi = 0$ при $x = 0$ и $x = a$. Мы можем сопоставить этому дифференциальному уравнению и этим граничным условиям *операторное уравнение* (см. § 2.6):

$$\mathcal{A} \cdot S = -k^2 S$$

с соответствующими граничными условиями, служащее для выделения *нормальных осей* для оператора \mathcal{A} и собственных значений для постоянной k .

Другое дифференциальное уравнение и (или) другие граничные условия определяют другие нормальные оси, соответствующие новым собственным векторам E_n , определенным новыми собственными функциями $\phi_n(x)$ (которые могут быть комплексными). Эти векторы также ортогональны, так что (ср. стр. 65)

$$E_n^* \cdot E_m = \int \bar{\phi}_n(x) \phi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ E_n^2 & \text{при } n = m, \end{cases} \quad (6.3.9)$$

где E_n представляет собой длину вектора E_n . Любой вектор F вновь можно выразить через эти собственные векторы, и соотношение между компонентами F по новым нормальным осям и его компонентами $F(x)$ по направлениям $e(x)$ имеет вид

$$F(x) = F^* \cdot e(x) = \sum_n \frac{\bar{F}_n}{E_n} \phi_n(x), \quad \bar{F}_n = \frac{E_n^*}{E_n} \cdot F = \frac{1}{E_n} \int F(x) \bar{\phi}_n(x) dx, \quad (6.3.10)$$

что дает формулы, посредством которых любую функцию $F(x)$ можно разложить по собственным функциям $\phi_n(x)$.

Наконец, можно подсчитать скалярное произведение собственного вектора, соответствующего $\phi_n(x)$, и собственного вектора, соответствующего $\sin(\pi nx/a)$ [это можно сделать, если функциональные пространства для обоих векторов тождественны, то есть если оба множества собственных функций определены на одном и том же отрезке $(0, a)$]. Это скалярное произведение равно

$$E_n^* \cdot e_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \bar{\phi}_n(x) \sin \frac{\pi nx}{a} dx.$$

Еще одно свойство этих собственных векторов будет полезно позже. Так как $e(x)$ ортогонален $e(x')$ для $x' \neq x$, то при помощи формулы, аналогичной (6.3.7), получаем

$$e^*(x) \cdot e(x') = \sum_n \frac{1}{E_n^2} \bar{\phi}_n(x) \phi_n(x') = \delta(x - x'). \quad (6.3.11)$$

Эта величина равна нулю при $x' \neq x$, а при $x = x'$ имеет такое значение, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx = 1.$$

Другими словами, это дельта-функция Дирака, определенная на стр. 122. Естественно, что остаются вопросы, которыми мы займемся потом, связанные со сходимостью этих разложений в ряды.

Однако мы все еще не приступили к овладению деталями. Векторная аналогия является плодотворной идеей, полезной в общих понятиях, но она очень абстрактна. Чтобы вполне понять все ее значение, надо возвратиться к нашим дифференциальным уравнениям и граничным условиям.

Задача Штурма—Лиувилля. Обыкновенное дифференциальное уравнение, получающееся при разделении из уравнения с частными производными $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$, можно [см. уравнение (5.1.28)] записать в виде

$$\frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{d\psi}{dz} \right] + [q(z) + \lambda r(z)] \psi = 0. \quad (6.3.12)$$

Это уравнение называется *уравнением Лиувилля*. Параметр λ представляет собой константу разделения (в некоторых случаях появляется более одной константы разделения; мы на время отложим рассмотрение этих случаев). Каждая из функций p, q, r характеризует координаты, примененные при разделении, и для исследованных в § 5.1 разделывающих координат p и r являются простыми алгебраическими функциями от z , имеющими конечное число нулей и полюсов. Функция q , особенно для уравнения Шредингера, более сложна, но и тогда q не имеет особенностей *внутри* области изменения z (хотя может иметь особенность *на* одном или обоих концах). Точки, в которых $p(z)$ равна нулю, являются особыми точками уравнения, и обычно область изменения z простирается от одной из таких точек до другой; во всяком случае, особые точки могут находиться в начале или в конце этой области, но никак не в середине. Другими словами, функция $p(z)$ нигде в области изменения z не меняет знака, и потому ее можно всегда считать положительной. Оказывается также, что и r не меняет знака (в интересных случаях), так что и r можно считать всегда положительной.

Задача Штурма — Лиувилля состоит, в основном, в выяснении зависимости общего поведения ϕ от параметра λ и зависимости собственных значений λ от однородных граничных условий, наложенных на ϕ .

В некоторых наших рассмотрениях мы будем сравнивать решения при различных значениях константы разделения λ ; для этого решение при $\lambda = \lambda_n$ обозначим через ϕ_n . Для такого сравнения очень полезно умножить уравнение для ϕ_1 на ϕ_2 , уравнение для ϕ_2 на ϕ_1 и вычесть одно из другого:

$$\phi_2 \frac{d}{dz} \left[p \frac{d\psi_1}{dz} \right] + \phi_2 [q + r\lambda_1] \psi_1 - \psi_1 \frac{d}{dz} \left[p \frac{d\psi_2}{dz} \right] - \psi_1 [q + r\lambda_2] \phi_2 = 0,$$

или

$$\frac{d}{dz} \left[\phi_2 p \frac{d\psi_1}{dz} - \psi_1 p \frac{d\psi_2}{dz} \right] = (\lambda_2 - \lambda_1) r \phi_1 \phi_2. \quad (6.3.13)$$

Столь простое соотношение для сравнения можно получить потому, что уравнение Лиувилля *самосопряженное*. В случае уравнения для ϕ_1 более общего типа

$$\mathcal{L}_z(\phi) = f(z) \frac{d^2\phi}{dz^2} + g(z) \frac{d\phi}{dz} + [h(z) + \lambda j(z)] \phi = 0$$

надо было бы для ϕ_2 пользоваться сопряженным уравнением

$$\tilde{\mathcal{L}}_z(\phi) = \frac{d^2}{dz^2} [f\phi] - \frac{d}{dz} [g\phi] + [h + \lambda j] \phi = 0,$$

чтобы выразить разность в виде суммы полной производной и произведения $\lambda_1 - \lambda_2$ на функцию (см. стр. 499). Уравнением, сопряженным к уравнению Лиувилля, является оно само (проверьте!).

Теперь проинтегрируем соотношение (6.3.13) по z от левой граничной точки (которую мы обозначим через a) до некоторой произвольной точки z , лежащей левее правой граничной точки. Получим

$$p \left(\phi_2 \frac{d\psi_1}{dz} - \psi_1 \frac{d\psi_2}{dz} \right) - \left[p \left(\phi_2 \frac{d\psi_1}{dz} - \psi_1 \frac{d\psi_2}{dz} \right) \right]_{z=a} = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^z r \phi_1 \phi_2 dz,$$

где величина в круглых скобках была бы определителем Вронского для ϕ_1 и ϕ_2 , если бы λ_1 было равно λ_2 (но нам нужно именно $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Если a является особой точкой дифференциального уравнения, то p равно нулю и величина в квадратных скобках обращается в нуль при условии, что ϕ_1 и ϕ_2 конечны в особой точке. Если точка регулярная,

а граничное условие однородно и имеет вид $\alpha d\psi/dz - \beta\psi = 0$ при $z=a$ (где α и β не зависят от λ , см. стр. 663), то

$$\psi_1 \frac{d\psi_2}{dz} - \psi_2 \frac{d\psi_1}{dz} = \frac{\beta}{\alpha} (\psi_1 \psi_2 - \psi_2 \psi_1) = 0$$

при $z=a$ и опять-таки величина в квадратных скобках равна нулю. Отсюда почти для любых обычных граничных условий при $z=a$ имеем

$$p \left(\psi_2 \frac{d\psi_1}{dz} - \psi_1 \frac{d\psi_2}{dz} \right) = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^z r \psi_1 \psi_2 dz. \quad (6.3.14)$$

Для некоторой области значений λ решение ψ , удовлетворяющее граничному условию при $z=a$, колеблется, то есть возрастает до максимума при z , большем a , затем уменьшается по величине, проходя через нуль и достигая отрицательного максимума и т. д. Допустим, что мы выбрали λ_1 в области значений λ , для которых ψ колеблется, а ζ — наименьшее значение z (значение, ближайшее к $z=a$), для которого $\psi_1=0$. Тогда формула (6.3.14) приобретает вид

$$\left(p \psi_2 \frac{d\psi_1}{dz} \right)_{z=\zeta} = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^\zeta r \psi_1 \psi_2 dz; \quad \psi_1(\zeta) = 0. \quad (6.3.15)$$

Так как ζ представляет собой наименьший нуль функции ψ_1 , то ψ_1 не меняет знака между $z=a$ и $z=\zeta$, а потому ψ_1 можно считать положительной при $a < z < \zeta$. Мы уже сказали на стр. 669, что для уравнений, которыми мы занимаемся, как p , так и r положительны во всем интервале $a < z < b$, где b — правая граничная точка. Можно также утверждать, что производная $d\psi_1/dz$ при $z=\zeta$ отрицательна, так как в этой точке ψ_1 переходит через нуль от положительных значений к отрицательным.

Выберем λ_2 большим λ_1 , чтобы величина $\lambda_2 - \lambda_1$ стала положительной. Что теперь говорит формула (6.3.15) о поведении ψ_2 (в предположении, что ψ_2 удовлетворяет тем же краевым условиям при $z=a$ и соответствует λ_2)? Обращается ψ_2 в нуль при $a < z < \zeta$ или нет?

Допустим, что ψ_2 не обращается в нуль при $a < z < \zeta$. В этом случае ψ_2 можно считать также положительной во всем этом интервале и даже при $z=\zeta$. Тогда величина в левой части равенства (6.3.15) будет отрицательной (p положительна, $d\psi_1/dz$ отрицательна, ψ_2 положительна при $z=\zeta$), тогда как величина в правой части — положительной ($\lambda_2 - \lambda_1$ положительна, ψ_1 , ψ_2 и r положительны). Это противоречие показывает, что ψ_2 должна пройти через нуль где-нибудь в интервале $a < z < \zeta$. Повторение тех же рассуждений на участке z от первого нуля ψ_1 до второго и т. д. показывает, что расстояние между последовательными нулями функции ψ_2 меньше расстояния между последовательными нулями функции ψ_1 , если $\lambda_2 > \lambda_1$.

Другими словами, чем больше значение λ , тем ближе друг к другу лежат нули функций ψ (в предположении, что p и r всюду положительны на интервале $a < z < b$). Или, обратно, если значение λ уменьшается, то расстояние между последовательными нулями функций ψ возрастает.

Для достаточно низкого значения λ (т. е. малого в алгебраическом смысле; оно может быть отрицательным) внутри интервала $a < z < b$ не будет нулевых значений ψ . Для некоторого значения $\lambda = \lambda_0$ функция ψ будет иметь нуль в другой граничной точке $z=b$ и ни одного нуля между a и b ; для $\lambda < \lambda_0$ при $a < z < b$ нулей не будет. Если граничное условие при $z=b$ имеет вид $\psi=0$, то λ_0 представляет собой собственное значение λ , причем нет собственных значений, меньших λ_0 . Подобным образом при помоши-

формулы (6.3.14) можно показать, что независимо от того, каково граничное условие, имеется некоторое наименьшее собственное значение λ , которое можно обозначить через λ_0 . Все другие собственные значения λ больше λ_0 . Нетрудно видеть, что собственная функция ϕ_0 соответствующая λ_0 , имеет наименьшее возможное число нулей между граничными точками a и b ; на самом же деле в большинстве случаев ϕ_0 вообще не имеет нулей между a и b (хотя она может равняться нулю в a и (или) в b , если этого требуют граничные условия).

Часто бывает полезно преобразовать функции q и r в уравнении Лиувилля (6.3.12) так, чтобы λ_0 равнялось нулю. Это можно сделать, так как в выражении $q(z) + \lambda r(z)$ всегда можно $\lambda_0 r(z)$ добавить к $q(z)$ и вычесть из $\lambda r(z)$, что даст новое q , не зависящее от λ , и новое λ , равное старому λ минус λ_0 . Естественно, что наименьшее собственное значение для нового уравнения должно равняться нулю, и потому все другие собственные значения положительны.

Если теперь увеличивать значение λ от λ_0 , то соответствующая функция ϕ , удовлетворяющая граничным условиям при $z = a$, не будет удовлетворять им при $z = b$. Однако при дальнейшем возрастании λ мы в конце концов найдем следующее собственное значение λ_1 , соответствующее собственной функции ϕ_1 , которая имеет на один нуль больше, чем ϕ_0 (в большинстве случаев это означает один нуль, так как функция ϕ_0 обычно не имеет нулей). Когда λ возрастает дальше, расстояние между узлами (другое наименование нулей ϕ) становится меньше, пока при следующем собственном значении λ_2 внутри интервала (a, b) не станет на один узел больше. Это показано графически на рис. 6.8. Таким образом, можно построить последовательность собственных функций $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$, каждая из которых удовлетворяет заданным однородным граничным условиям в a и b , причем так упорядоченную, что соответствующие собственные значения $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ образуют монотонно возрастающую последовательность, так что $\lambda_{n+1} > \lambda_n$. Если это сделано, то наше предыдущее исследование показывает, что числа узлов функций ψ_n между a и b также образуют непрерывно возрастающую последовательность, так что ψ_{n+1} имеет в интервале a, b на один узел больше, чем ψ_n . При этом мы молчаливо предположили, что все допустимые значения λ вещественны, так что их можно непосредственно упорядочить. То, что все собственные значения для уравнения (6.3.12) вещественны, будет доказано на стр. 676.

Быть может, графическое представление сделает эти выводы более понятными. На рис. 6.8 показан типичный случай: двумя граничными точками служат $x = a$ и $x = b$, а собственная функция ϕ должна равняться нулю в обеих этих точках. Кривые для p , r и q показаны на верхнем графике; как p , так и r положительны в интервале $a < x < b$, но q этому условию не удовлетворяет. На среднем графике показаны кривые $\lambda r + q$ для последовательности значений λ , причем наименьшему значению

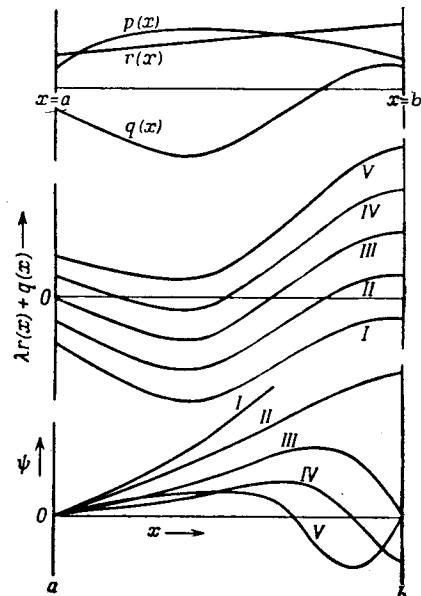


Рис. 6.8. Решения ϕ уравнения Лиувилля для различных значений константы разделения λ . Решения III и V удовлетворяют граничным условиям $\phi=0$ при $x=a$ и b .

соответствует нижняя кривая и т. д. На нижнем графике изображены решения уравнения Лиувилля, равные нулю при $x = a$, для тех же значений λ , что и средняя система кривых.

Отметим несколько интересных моментов, относящихся к связи между ϕ и соответствующими линиями $\lambda r + q$. Если $\lambda r + q$ отрицательно, то ψ поворачивает от прямой $\psi = 0$. Это свойство возрастания производной с возрастанием x , если ψ положительно, и убывания, если ψ отрицательно, характеризует любую комбинацию экспонент $e^{\alpha x}$, $e^{-\alpha x}$ и будет называться экспоненциальным поведением. Во-вторых, если $\lambda r + q$ положительно, то ψ искривляется к оси, то есть если ψ положительно, то производная убывает с ростом x , и наоборот. Это свойство характеризует тригонометрические функции и будет называться синусоидальным поведением.

Этот характер поведения функции ψ можно обнаружить, интегрируя уравнение Лиувилля один раз:

$$\left[p \frac{d\psi}{dx} \right]_{x_1}^{x_2} = - \int_{x_1}^{x_2} (\lambda r + q) \psi dx, \quad x_2 > x_1, \quad p > 0.$$

Если $\lambda r + q$ отрицательно при $x_1 < x < x_2$, а ψ положительно в этом интервале, то значение $p d\psi/dx$ в точке x_2 больше, чем в точке x_1 , и т. д.

В случае, приведенном на рис. 6.8 под номером I, значение λ таково, что $\lambda r + q$ всюду отрицательно; соответствующая функция ψ , обладая экспоненциальным поведением, не имеет возможности вновь «повернуть обратно» и прийти к нулю при $x = b$. В случае II $\lambda r + q$ положительно на коротком участке изменения x , достаточном, чтобы несколько отогнуть ψ назад, но еще недостаточном, чтобы довести ее до нуля. В случае III мы достигли как раз такого значения λ (собственного значения λ_0), для которого участок положительности $\lambda r + q$ достаточен, чтобы завернуть ψ обратно к нулю как раз при $x = b$. В случае IV значение λ еще больше и колебание ψ более заметно. Появился один узел, но он еще не настолько приблизился к $x = a$, чтобы до b вместился другой полуцикл колебания. Наконец, в случае V λ достигает значения, для которого ψ проходит через нуль и вновь направляется обратно так, чтобы обратиться в нуль как раз при $x = b$.

Продолжение этого рассуждения очевидно; ясно также, что те же рассуждения можно провести при других граничных условиях. Далее, нетрудно показать, что разность $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ не может быть бесконечно малой, если расстояние $b - a$ конечно, даже в пределе для больших n . Для этого, применяя формулу (6.3.14) вновь, мы полагаем пределы интегрирования равными a и b . Положим, далее, λ_1 равным λ_n — собственному значению, а ψ_1 — равным соответствующей собственной функции ϕ_n (при граничных условиях, например, $\psi = 0$). Допустим, что λ_2 взято между λ_n и λ_{n+1} , так что $\psi_2 = 0$ при $x = a$, но $d\psi_2/dx = 0$ при $x = b$. Рассмотрение ф-кривых, приведенных на рис. 6.8, показывает, что если между a и b имеется четное число узлов ψ_n , то $d\psi_n/dx$ при $x = b$ отрицательна и функция ψ_2 (определенная в предыдущем предложении) также отрицательна при $x = b$; если же число узлов ψ_n нечетно, то как $d\psi_n/dx$, так и ψ_2 положительны при $x = b$. Отсюда следует, что в равенстве

$$(\lambda_2 - \lambda_n) \int_a^b \psi_n(x) \psi_2(x) r(x) dx = \psi_2(b) \psi'_n(b) p(b)$$

величина в правой части обязательно положительна и не бесконечно мала, как бы велико ни было n .

Так как λ_2 , по определению, больше λ_n (но меньше λ_{n+1}), то интеграл обязательно положителен. Если $b-a$ не бесконечно, то интеграл не может быть бесконечным, так как обе функции ϕ (и r) всюду конечны. Следовательно, разность $\lambda_2 - \lambda_n$ может быть бесконечно малой, только если $b-a$ бесконечно. Так как $\lambda_{n+1} > \lambda_2$, то мы получаем полезный результат, заключающийся в том, что разность $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ не может быть бесконечно малой, как бы велико ни было n , если только $b-a$ не бесконечно. Значит, последовательность значений $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots$ не может иметь ни предельной точки, ни верхней границы, а должна продолжаться до $+\infty$. Этот результат будет полезен в нашем последующем анализе. Таким образом, непрерывное распределение собственных значений может получиться, только если $b-a$ бесконечно.

Выводы о том, что имеется наименьшее собственное значение λ_0 и что упорядочение собственных функций по возрастанию собственных значений одновременно упорядочивает их по возрастанию числа узлов в интервале (a, b) , являются полезными результатами в изучении задачи Штурма — Лиувилля. Они основаны на нашем предположении положительности r всюду в интервале $a < z < b$, а также положительности r всюду в этом интервале (последнее равносильно утверждению, что *внутри* интервала (a, b) нет особых точек дифференциального уравнения). Эти предположения выполняются для всех уравнений, к которым мы пришли при разделении переменных в § 5.1. Результаты получены при помощи теоремы, утверждающей, что чем больше значение константы разделения λ , тем меньше расстояния между узлами соответствующего решения $\phi(z)$ (эта теорема называется *первой теоремой Штурма о сравнении*).

Хотя имеется наименьшее собственное значение λ_0 , но, как мы уже видели, *наибольшего собственного значения нет*, и для каждого собственного значения λ_n с собственной функцией ϕ_n всегда имеется ближайшее большее собственное значение $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ с собственной функцией ϕ_{n+1} , имеющей в интервале (a, b) на один узел больше, чем ϕ_n . Таким образом, последовательность собственных значений бесконечна и простирается от наименьшего собственного значения λ_0 до бесконечности.

Как пример этого поведения можно рассмотреть случай уравнения $d^2\phi/dz^2 + \lambda\phi = 0$ с граничным условием Неймана $d\phi/dz = 0$ при $z=0$ и более сложным однородным условием $d\phi/dz = \phi/a$ при $z=a$. Здесь ни одна из концевых точек не является особой точкой уравнения.

Если λ отрицательно, то решение, имеющее при $z=0$ нулевую производную, равно $\phi = ch kz$, где $\lambda = -k^2$. Значение k , для которого ϕ удовлетворяет условию при $z=a$, получается из решения трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{w} \operatorname{cth} w = 1, \quad w = ka.$$

Аналогичная функция была исследована в § 4.4 (см. рис. 4.19). Можно легко показать, что для w имеется лишь один вещественный корень; все другие корни мнимые, если a вещественно и положительно. Единственное вещественное решение k_0 приближенно равно $k_0 \approx 1,200/a$. Отсюда единственное отрицательное значение λ (которое должно быть наименьшим собственным значением) приближено равно

$$\lambda = \lambda_0 = -k_0^2 \approx -1,440/a^2$$

(с четырьмя значащими цифрами), а соответствующая собственная функция равна

$$\phi_0(z) \approx ch(1,200 z/a)$$

и в интервале $0 < z < a$ не имеет узлов.

Все другие собственные значения должны быть положительны, поэтому можно взять $\phi = \cos kz$; $\lambda = k^2$. Эти косинусы удовлетворяют условию Неймана при $z = 0$; чтобы удовлетворить условиям при $z = a$, надо выбрать k так, что

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_a = -k \sin ka = \frac{\psi}{a} = \frac{\cos ka}{a}, \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} w = -w, \quad w = ka.$$

Это уравнение имеет бесконечную последовательность решений

$$k_1 \approx 2,798/a = (\pi - 0,344)/a,$$

$$k_2 \approx 6,121/a = (2\pi - 0,162)/a,$$

• • • • • • • • • • •

или, несколько менее точно,

$$k_n \approx n\pi/a - 1/n\pi a, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

откуда

$$\lambda_n = k_n^2 \approx \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \frac{2}{a^2} \quad \text{и} \quad \phi_n = \cos k_n z \approx \cos \left[\left(n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) \frac{z}{a}\right].$$

Нетрудно доказать, что ϕ_n имеет как раз n узлов в интервале $0 < z < a$. За исключением отрицательного наименьшего собственного значения λ_0 , все собственные значения положительны и не имеют верхней грани. Конечно, можно преобразовать наше уравнение, записав его в виде

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + (-k_0^2 + \lambda) \psi = 0, \quad p = 1, \quad q = -k_0^2, \quad r = 1,$$

причем новые собственные значения равны $\lambda_n^0 = \lambda_n + k_0^2$. Посредством этого преобразования мы сделали наименьшее собственное значение λ_0^0 равным нулю и обеспечили отсутствие отрицательных собственных значений.

Вырождение. Некоторые граничные условия могут быть недостаточными для определения единственного решения при каждом допустимом значении λ . Например, для уравнения $d^2\phi/d\varphi^2 + \lambda\phi = 0$ в некоторых случаях (см. стр. 481 и 663) единственным граничным условием является требование периодичности функции ϕ по φ с периодом 2π . В этом случае допустимые значения λ оказываются равными m^2 ($m = 0, 1, 2, \dots$), но для каждого значения m условию периодичности удовлетворяет любая линейная комбинация $\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi$, так что имеются два независимых решения. Такие случаи, когда одному собственному значению принадлежит более одной собственной функции, называются *вырожденными случаями*.

В случаях двойного вырождения можно применить любую пару независимых решений χ_n и Ω_n , соответствующих данному собственному значению λ_n , чтобы выразить наиболее общую собственную функцию для этого собственного значения. Однако обычно лучше выбрать два решения ортогональными друг другу (см. стр. 668), то есть так, чтобы

$$\int_a^b \chi_n(z) \Omega_n(z) dz = 0.$$

Это обычно можно сделать, добавляя к граничным условиям некоторые требования симметрии, выделяющие ту или иную совокупность независимых решений.

Например, для уравнения $d^2\phi/d\varphi^2 + m^2\phi = 0$ и для периодических условий функции $\sin m\varphi$ являются нечетными функциями φ , а функции $\cos m\varphi$ — четными функциями φ , и они взаимно ортогональны, так как

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cdot \cos n\varphi d\varphi = 0.$$

Польза этого требования ортогональности вскоре станет очевидной. Во всяком случае мы могли бы обозначить функции $\cos n\varphi$ через $\phi_{en}(z)$ (индекс e — для четных функций), а функции $\sin n\varphi$ — через ϕ_{on} (индекс o — для нечетных) и получить последовательность ϕ_{e0} для $\lambda_0 = 0$, ϕ_{e1} и ϕ_{o1} для $\lambda_1 = 1$, ϕ_{e2} и ϕ_{o2} для $\lambda_2 = 4$ и т. д., по две собственные функции для каждого собственного значения, кроме наименьшего.

Ряды по собственным функциям. Как мы видели раньше в этом параграфе, собственные функции дают возможность удовлетворить краевым условиям при помощи рядов. Получив нашу последовательность собственных функций $\phi_n(z)$, мы в состоянии выразить любую кусочно-гладкую функцию $F(z)$ в виде ряда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \phi_n(z)$$

между граничными точками a, b [см. формулы (6.3.8)]. Чтобы доказать возможность этого, надо показать, что последовательность собственных функций полна. Это до некоторой степени аналогично требованию, чтобы система собственных векторов в функциональном пространстве, соответствующих системе собственных функций, покрывала все «измерения» в функциональном пространстве, определяемые произвольным вектором, соответствующим $F(z)$ [см. рассуждение, следующее после формулы (6.3.7)]. Если $F(z)$ аналитична в некоторой области вокруг $z=0$, то необходимо показать только, что степенным рядам соответствуют ряды по собственным функциям.

Например, если каждую степень z можно выразить в виде равномерно сходящегося ряда по собственным функциям, то можно перейти прямо от степенного ряда к ряду по собственным функциям и быть уверенными, что второй ряд будет сходиться в области, где $F(z)$ аналитична.

Но часто можно пойти дальше этого. Например, мы покажем позже, что если функция и ее производная имеют в интервале (a, b) конечное число разрывов, то эту функцию можно представить при помощи ряда по собственным функциям, дающего совпадение с ней в смысле сходимости в среднем (стр. 660). Такие ряды нельзя дифференцировать, и обычно они не являются равномерно сходящимися. Но их обычно можно интегрировать, и получающийся после интегрирования ряд будет сходиться равномерно. Следовательно, ряды по собственным функциям могут идти дальше, чем степенные, и представлять некоторый класс неаналитических функций, хотя с получающимися рядами надо обращаться с осторожностью.

Чтобы представление функции в виде ряда по собственным функциям в смысле сходимости в среднем было легко получить, члены последовательности должны быть взаимно ортогональными, то есть соответствующие собственные векторы в функциональном пространстве должны быть взаимно ортогональными [см. формулу (6.3.5)]. Это значит, что

$$\int_a^b \phi_n(z) \phi_m(z) r(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ E_n^2, & \text{если } m = n. \end{cases} \quad (6.3.16)$$

Равенство (6.3.14) дает возможность доказать это важное свойство, если положить верхний предел интегрирования равным верхней граничной точке b ; тогда, если ϕ_n удовлетворяет подходящим граничным условиям в точке b (конечность, если b — особая точка; определенное не зависящее от λ однородное линейное соотношение между функцией и производной, если b — обыкновенная точка), то левая часть равенства равна нулю и

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \phi_n \phi_m r dz = 0,$$

а это показывает, что если собственные функции ϕ_n и ϕ_m принадлежат различным собственным значениям ($\lambda_n \neq \lambda_m$), то они ортогональны. Заметим здесь, что, как будет показано в § 11.1, если граничные условия меняются с изменением λ , то система собственных функций не является ортогональной.

Даже для общего периодического граничного условия получающиеся собственные функции, если они принадлежат различным собственным значениям, ортогональны. Действительно, если проинтегрировать равенство (6.3.13) от a до b , мы получим

$$\left[\phi_n \frac{d\psi_m}{dz} - \phi_m \frac{d\psi_n}{dz} \right]_a^b = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \phi_m \phi_n r dz = 0,$$

и выражение в квадратных скобках в силу периодичности принимает одинаковые значения в a и b , так что они взаимно уничтожаются. Этим не доказывается, что в вырожденных случаях несколько собственных функций, принадлежащих одному и тому же собственному значению, ортогональны друг другу, но на стр. 674 мы указали, что эти функции всегда можно выбрать так, чтобы они были взаимно ортогональными. Значит, будет ли случай вырожденным или нет, собственные функции ϕ_n , образующие нашу последовательность, можно сделать взаимно ортогональными, и любую произвольную кусочно-гладкую функцию $F(z)$ можно представить при помощи ряда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{E_n} \phi_n(z), \quad F_n = \frac{1}{E_n} \int_a^b F(x) \phi_n(x) r(x) dx, \quad (6.3.17)$$

в интервале $a < z < b$ (если система ϕ_n полна).

Междуд прочим, эта ортогональность обеспечивает то, что собственные значения уравнения Лиувилля (6.3.12) вещественны, если только функции r , q , r вещественны в рассматриваемом интервале z . Если бы существовало комплексное допустимое значение λ , то по симметрии его комплексно сопряженное тоже было бы собственным значением. Две соответствующие собственные функции также были бы комплексно сопряжены одна другой; скажем, ϕ_n равна $u + iv$, а ϕ_m равняется $u - iv$. Однако если все-таки верно, что две собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, то

$$\int_a^b (u^2 + v^2) r dz = 0,$$

что невозможно при наших предположениях о r , u и v . Значит, уравнение Лиувилля не может иметь комплексных собственных значений, и наши опасения, выраженные на стр. 671, были напрасными.

В соответствии с нашими рассуждениями на стр. 666 можно принять, что плотность единичных векторов $e(z)$ между z и $z+dz$ пропорциональна $r(z)dz$, а не dz (по этой причине $r(z)$ иногда называется *функцией плотности*). Таким образом, скалярное произведение двух векторов F и G будет равняться

$$(F^* \cdot G) = \int_a^b \bar{F}(z) G(z) r(z) dz,$$

где $\bar{F}(z)$ и $G(z)$ представляют собой компоненты F^* и G вдоль различных направлений, определяемых векторами $e(z)$. Собственные функции ψ_n являются компонентами взаимно ортогональных собственных векторов E_n : длина такого вектора

$$E_n = \left(\int_a^b |\psi_n|^2 r dz \right)^{1/2}$$

называется *нормирующим множителем для ψ_n* .

Значит, компоненты единичных собственных векторов e_n имеют вид $\psi_n(x)/E_n$; они равны направляющим косинусам $e(x)$ относительно нормальных осей, определенных собственными векторами e_n . Следовательно, обобщая формулу (6.3.11), получаем

$$\frac{1}{E_n E_m} \int_a^b \bar{\psi}_n \psi_m r dz = \delta_{nm}, \quad \sum_n \frac{r}{E_n^2} \bar{\psi}_n(x) \psi_n(z) = \delta(x-z),$$

где $\delta(x-z)$ представляет собой дельта-функцию Дирака (см. стр. 122). Ряд во втором равенстве не является абсолютно сходящимся, так что его можно применять только в случаях, когда последующее интегрирование обеспечит сходимость. Например, из равенства

$$\int_a^b F(x) \delta(x-z) dx = F(z),$$

определенного $\delta(x-z)$, при помощи симметричного ряда по собственным функциям мы немедленно получаем формулу (6.3.17).

Собственные функции, разделенные на амплитуду E_n , так что они являются направляющими косинусами, компонентами единичных векторов, называются *нормированными*. Система собственных векторов, попарно ортогональных и одновременно нормированных, называется *ортонормированной* системой. Свойство ортогональности очень важно и полезно, в то время как свойство нормированности имеет лишь формальную выгоду. Мы будем почти всегда применять ортогональные системы собственных функций, но редко будем заниматься нормировкой их, предпочитая включать *нормирующие множители* $1/E_n$ в наши уравнения явно.

Разложение уравнения Штурма—Лиувилля (факторизация). Впервые мы встретились с задачей о собственных значениях в гл. 1 в связи с определением главных осей линейного векторного оператора. Исследования, проведенные там, в особенности в части, относящейся к операторам в абстрактном векторном пространстве, тесно связаны с рассмотрениями настоящей главы, как мы только что видели. Эту связь можно выявить еще яснее при помощи дальнейшего изучения операторной техники, описанной на стр. 91—92 и 236. Там было показано, что чисто операторные

вычисления, применяющие «разложенные» операторы, повышающие или понижающие собственное значение, также дают решения соответствующего уравнения Шредингера, являющегося уравнением Штурма — Лиувилля. Теперь мы покажем, что при выполнении некоторых условий оператор Штурма — Лиувилля можно «разложить» на линейные дифференциальные операторы, которые можно применить для получения собственных значений и собственных функций по методам, аналогичным методам гл. 1.

Процесс получения этих линейных дифференциальных операторов из дифференциального уравнения называется *разложением на множители* (*факторизацией*). Возвращаясь к выводу задачи о гармоническом осцилляторе на стр. 236 и далее, мы видим, что уравнение

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + (2n+1-x^2)\psi_n = 0$$

равносильно паре дифференциально-рекуррентных уравнений первого порядка

$$\left(\frac{d}{dx} - x \right) \psi_n = \sqrt{2(n+1)} \psi_{n+1}, \quad \left(\frac{d}{dx} + x \right) \psi_n = -\sqrt{2n} \psi_{n-1},$$

связывающих собственную функцию ψ_n с ее «ближайшими соседями» ψ_{n-1} и ψ_{n+1} . Обратно, из этих двух уравнений первого порядка можно получить собственное значение $2n+1$ для исходного уравнения второго порядка и явные дифференциальные выражения для соответственно нормированных собственных функций.

Для обобщения этого результата мы заменим уравнение Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dz} \left(p \frac{d\psi}{dz} \right) + (q + \lambda r) \psi = 0$$

уравнением, которое будем называть видоизмененным уравнением Штурма — Лиувилля:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + [\lambda - V(x)] \Phi = 0,$$

где

$$\Phi = (pr)^{1/4} \psi, \quad x = \int \sqrt{p/r} dz,$$

$$-V(x) = \frac{q}{r} + \frac{3}{16} \left[\left(\frac{p'}{p} \right)^2 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right] - \frac{1}{8} \frac{p'r'}{pr} - \frac{1}{4} \left(\frac{p''}{p} + \frac{r''}{r} \right).$$

Оно имеет общий вид одномерного уравнения Шредингера с потенциалом V . Мы рассмотрим здесь случай, когда две границы интервала x (a и b) являются смежными особыми точками уравнения. В этом случае ни p , ни r не обращаются в нуль в интервале $a < x < b$, и единственное требование, наложенное на функцию Φ , заключается в том, что она должна

быть конечной в a и b , или же в том, что интеграл $\int_a^b \Phi^2 dx$ должен быть конечным (другими словами, чтобы Φ была *интегрируемой в квадрате*).

Теперь мы исследуем, можно ли оператор, стоящий в левой части уравнения для Φ (без λ), разложить на пару дифференциальных операторов

$$\mathfrak{G}^- = u(x) - \frac{d}{dx}, \quad \mathfrak{G}^+ = u(x) + \frac{d}{dx}$$

так, чтобы

$$\mathfrak{G}^+ \mathfrak{G}^- \Phi_n = (\lambda_n + a) \Phi_n, \quad \mathfrak{G}^- \mathfrak{G}^+ \Phi_n = (\lambda_n - a) \Phi_n.$$

Складывая и вычитая два предполагаемых уравнения, мы видим, что

$$\left[u^2(x) - \frac{d^2}{dx^2} \right] \Phi_n = \lambda_n \Phi_n, \quad a = \frac{du}{dx}.$$

Следовательно, если a не должно зависеть от x , то u должно линейно зависеть от x , и потому u^2 , равное V , должно быть пропорциональным x^2 , что приводит нас к уравнению для гармонического осциллятора. Дифференциальные операторы \mathfrak{G}^- и \mathfrak{G}^+ соответствуют абстрактным векторным операторам, определенным в формуле (2.6.30), и с ними надо действовать так, как описано в гл. 2, для получения собственных значений и собственных функций.

Этот процесс можно обобщить, чтобы он соответствовал другим формам V , если V является (или может быть формально сделано) зависящим от некоторого параметра m , который для удобства нашего анализа можно предположить принимающим значения, различающиеся на единицу. Мы будем считать u и a также функциями этого параметра и построим два уравнения:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{m+1}^- \Phi_n(m|x) &\equiv [u_{m+1}(x) - d/dx] \Phi_n(m|x) = \sqrt{\lambda_n - a_{m+1}} \Phi_n(m+1|x), \\ \mathfrak{G}_m^+ \Phi_n(m|x) &\equiv [u_m(x) + d/dx] \Phi_n(m|x) = \sqrt{\lambda_n - a_m} \Phi_n(m-1|x), \end{aligned}$$

или эквивалентную пару

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{m+1}^+ \mathfrak{G}_{m+1}^- \Phi_n(m|x) &= (\lambda_n - a_{m+1}) \Phi_n(m|x), \\ \mathfrak{G}_m^- \mathfrak{G}_m^+ \Phi_n(m|x) &= (\lambda_n - a_m) \Phi_n(m|x), \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

подобрав эти уравнения так, чтобы они были эквивалентны видоизмененному уравнению Штурма — Лиувилля

$$[V_m(x) - d^2/dx^2] \Phi_n(m|x) = \lambda_n \Phi_n(m|x).$$

Чтобы найти соотношение между $u_m(x)$, a_m и потенциалом $V_m(x)$, мы вычтем друг из друга и сложим уравнения второй пары (заменив в первом m на $m-1$), а затем сравним результаты с соответствующими разностью и суммой для уравнения с V_m ,

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{1}{2} [V_{m-1}(x) - V_m(x)], \quad u_m^2 + a_m = \frac{1}{2} [V_{m-1}(x) + V_m(x)],$$

если λ считать не зависящим от m . Так как a_m предполагается не зависящим от x , то можно продифференцировать второе уравнение, в результате подставить первое и в конце концов получить

$$\begin{aligned} u_m(x) &= \frac{1}{2} (V'_{m-1} + V'_m) / (V_{m-1} - V_m), \\ a_m &= \frac{1}{2} (V_{m-1} + V_m) - u_m^2, \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

где $V' = dV/dx$. Таким образом, видоизмененное уравнение Штурма — Лиувилля равносильно уравнениям (6.3.18), в которых величины u_m и a_m связаны с потенциалом V_m формулами (6.3.19).

Очевидно, что не все виды V будут давать удовлетворительное разложение. Прежде всего, мы предположили, что допустимые значения λ не зависят от m , а это требует, как мы увидим, чтобы a_m не зависело от x . Следовательно, $V_m(x)$ должно быть такой функцией x и m , чтобы выражение для a_m , приведенное в (6.3.19), не зависело от x . Это приводит

к ограниченному числу возможностей, причем некоторые из них дают полезные последовательности собственных функций. Ряд этих возможностей приведен в таблице в конце этой главы; здесь же мы рассмотрим только один пример, приводящий к полиномам Гегенбауэра (или сферическим гармоникам), определенным формулами (5.2.52) или (5.3.35), а также в конце этой главы.

Уравнение для этих полиномов имеет вид

$$(z^2 - 1) \frac{d^2 T}{dz^2} + 2(m+1)z \frac{dT}{dz} - \lambda^0 T = 0,$$

где для $T = T_l^m(z)$ собственное значение λ^0 оказывается равным $l(l+2m+1)$, причем $l = n - m$. Заметим здесь, что параметр m не обязательно ограничен целыми значениями. Наша факторизация связывает собственные функции для данного значения m с собственными функциями для другого m , отличающегося на единицу, но часто можно начать от любого значения m и передвигаться вперед или назад на единичные шаги. Значения m могут ограничиваться другими условиями, но в данном случае этого не будет.

Если перейти к видоизмененной форме, положив

$$z = \cos x, \quad \Phi = \sin^{m+\frac{1}{2}} x \cdot T,$$

то уравнение примет вид

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \lambda \Phi - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 x} \Phi = 0, \quad \lambda = \lambda^0 + \left(m + \frac{1}{2} \right)^2.$$

В этом случае потенциальная функция равна

$$V_m(x) = \left(m + \frac{1}{2} \right) \left(m - \frac{1}{2} \right) \operatorname{cosec}^2 x$$

и, следовательно, $u_m(x) = \left(m - \frac{1}{2} \right) \operatorname{ctg} x$; $a_m = \left(m - \frac{1}{2} \right)^2$, так что в этом случае a_m не зависит от x , как и требуется.

Раз мы разложили рассматриваемое уравнение Штурма—Лиувилля частного вида и a_m не зависит от x , можно приступить к решению посредством методов, аналогичных примененным в § 2.6. Например, можно показать, что дифференциальный оператор \mathfrak{G}^+ сопряжен к оператору \mathfrak{G}^- , так что

$$\int_a^b f \mathfrak{G}_m^-(\psi) dx = \int_a^b \psi \mathfrak{G}_m^+(f) dx,$$

если только f и ψ интегрируемы в квадрате на интервале x между точками a и b (которые, по предположению, являются особыми точками уравнения).

Уравнения (6.3.18) показывают, далее, что если $y_n(m|x)$ представляет собой собственную функцию видоизмененного уравнения Штурма—Лиувилля (тем самым функцию, интегрируемую в квадрате при $a \leq x \leq b$) для собственного значения λ_n , то $\mathfrak{G}_m^+ y_n(m|x)$ является собственной функцией (следовательно, также интегрируемой в квадрате) для того же собственного значения λ_n , но для значения m , уменьшенного на единицу; эту функцию можно обозначить через $y_n(m-1|x)$. (Функции y не обязательно нормированы; мы сохраним символ Φ для собственных функций, нормированных в интервале $a \leq x \leq b$.) Другими словами, $\mathfrak{G}_m^+ y_n(m|x) = y_n(m-1|x)$; так же $\mathfrak{G}_{m+1}^- y_n(m|x) = y_n(m+1|x)$, до тех пор, пока

левая часть того или другого выражения не обратится тождественно в нуль.

Далее мы применяем технику § 2.6 для получения допустимых значений λ_n . Если a_m является возрастающей функцией от m , то есть если $a_{m+1} > a_m$, то мы полагаем

$$\begin{aligned} \int_a^b [y_n(m+1|x)]^2 dx &= \int_a^b \mathfrak{G}_{m+1}^- y_n(m|x) \mathfrak{G}_{m+1}^- y_n(m|x) dx = \\ &= \int_a^b y_n(m|x) \mathfrak{G}_{m+1}^+ \mathfrak{G}_{m+1}^- y_n(m|x) dx = (\lambda_n - a_{m+1}) \int_a^b [y_n(m|x)]^2 dx, \end{aligned}$$

так что если $y_n(m|x)$ интегрируема в квадрате, то и $y_n(m+1|x)$ такова же, если только $\lambda_n - a_{m+1}$ не отрицательно; но отрицательным оно не может быть из-за вещественности y . Следовательно, для m , большего чем некоторое максимальное значение n , собственных функций быть не может; чтобы убедиться в этом, достаточно положить $\lambda_n = a_{n+1}$, чем собственное значение λ_n определяется, поскольку a_{n+1} известно.

Для определения собственных функций заметим, что

$$\mathfrak{G}_{n+1}^- y_n(n|x) \equiv \left[u_{n+1}(x) - \frac{d}{dx} \right] y_n(n|x) = 0,$$

так как $\lambda_n = a_{n+1}$, и потому $y_n(n+1|x)$ тождественно равно нулю. Следовательно,

$$y_n(n|x) = \exp \left[\int u_{n+1}(x) dx \right]$$

II

$$y_n(m|x) = \mathfrak{G}_{m+1}^+ \mathfrak{G}_{m+2}^+ \dots \mathfrak{G}_n^+ \exp \left[\int u_{n+1}(x) dx \right].$$

Далее, из y можно получить нормированные собственные функции Φ . Имеем

$$\Phi_n(n|x) = C_n \exp \left[\int u_{n+1} dx \right], \quad C_n = \left[\int_a^b \exp \left(2 \int u_{n+1} dx \right) dx \right]^{-1/2},$$

и если $\int_a^b [\Phi_n(m|x)]^2 dx = 1$, то можно видеть, что

$$\int_a^b [\mathfrak{G}_m^+ \Phi_n(m|x)]^2 dx = \lambda_n - a_m.$$

Таким образом, мы показали, что уравнения (6.3.18) равносильны паре уравнений, непосредственно предшествующих формулам (6.3.18), если функции Φ нормированы, и что второе из уравнений этой пары дает средство для определения нормированной собственной функции $\Phi_n(m|x)$ по известной функции $\Phi_n(n|x)$:

$$\Phi_n(m|x) = \frac{C_n}{\sqrt{(a_{n+1}-a_n) \dots (a_{n+1}-a_{m+1})}} \mathfrak{G}_{m+1}^+ \mathfrak{G}_{m+2}^+ \dots \mathfrak{G}_n^+ (e^{\int u_{n+1} dx}),$$

$$m = n, n-1, n-2, \dots$$

С другой стороны, если a_m является убывающей функцией от m ($a_{m+1} < a_m$), то мы обращаем вывод и показываем, что должен существовать

вать некоторый *нижний* предел n параметра m , для которого $\mathfrak{G}_n^+ y_n(n|x)$ равно тождественно нулю. Тогда $\lambda_n = a_n$ и

$$\Phi_n(m|x) = \frac{C_n}{\sqrt{(a_n - a_{n+1}) \dots (a_n - a_m)}} \mathfrak{G}_m^- \mathfrak{G}_{m-1}^- \dots \mathfrak{G}_{n+1}^- (e^{- \int u_n dx}),$$

$$m = n, n+1, n+2, \dots,$$

причем здесь

$$C_n = \left[\int_a^b \exp \left(-2 \int u_n dx \right) dx \right]^{-1/2}.$$

Таким образом, оба уравнения, предшествующих (6.3.18), порождают нормированные собственные функции, независимо от того, что собой представляет функция a_m от m , но мы пользуемся первым уравнением для получения $\Phi_n(m|x)$, если $a_{m+1} < a_m$, и вторым, если $a_{m+1} > a_m$.

Возвращаясь к нашему примеру присоединенных функций Лежандра (или полиномов Гегенбауера), мы видим, что пределы для x равны 0 и π и что $a_{m+1} = \left(m + \frac{1}{2} \right)^2 > a_m$. Отсюда собственные значения равны

$$\lambda_n = a_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2, \quad \lambda_{nm}^0 = \lambda_n - \left(m + \frac{1}{2} \right)^2 = l(l+2m+1),$$

где $l = n - m$. Так как $m = n, n-1, \dots$, то l никогда не может быть отрицательным. Начальная функция равна

$$\Phi_n(n|x) = C_n \exp \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \int \operatorname{ctg}(x) dx \right] = C_n \sin^{n+1/2} x,$$

$$C_n = \left[\int_0^\pi \sin^{2n+1} x dx \right]^{-1/2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} (2n+1)!}}{2^n n!},$$

и другими собственными функциями являются

$$\Phi_n(m|x) = \frac{\sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \right) (n+m)! (n-m)!}}{2^n n!} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \operatorname{ctg} x + \frac{d}{dx} \right] \times \dots$$

$$\dots \times \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \operatorname{ctg} x + \frac{d}{dx} \right] \sin^{n+1/2} x =$$

$$= (-1)^{n-m} \frac{\sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \right) (n+m)! (n-m)!}}{2^n n! (1-z^2)^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{4}}} \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} (1-z^2)^n,$$

где $z = \cos x$. Сравнение этого результата с таблицей, приведенной в конце настоящей главы, показывает, что если m и n — целые и $l = n - m$, то полиномы Гегенбауера и присоединенные функции Лежандра связаны с Φ соотношениями

$$\Phi_n(m|x) = (-1)^{n-m} \sqrt{\frac{(n-m)! \left(n + \frac{1}{2} \right)}{(n+m)!}} \sqrt{\sin x} P_n^m(\cos x),$$

$$T_l^m(z) = (-1)^l \sqrt{\frac{(l+2m)!}{l! \left(l+m + \frac{1}{2} \right)}} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}} \Phi_{l+m}(m | \arccos z).$$

В таблице в конце этой главы мы перечислим другие виды $V_m(x)$ и соответствующие $u_m(x)$, для которых a_m не зависит от x и которые, следовательно, допускают факторизацию по описанному выше способу. Ясно, конечно, что этот метод вычисления собственных функций тесно связан с абстрактным векторным представлением. Операторы \mathcal{G} можно также применить для доказательства ортогональности собственных функций. Описанная выше техника непосредственно дает различные рекуррентные формулы, связывающие различные собственные функции; эти формулы полезны для дальнейших вычислений.

Многие уравнения можно разложить несколько иным путем. Например, уравнение

$$\frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx} \left(\sin x \frac{dP}{dx} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 x} \right] P = 0$$

для $P_n^m(\cos x) = \sin^m x \cdot T_{n-m}^m(\cos x)$ является уже разложенным по параметру m , если положить $\lambda = n(n+1)$ и $\Phi_n(m|x) = C \sqrt{\sin x} P_n^m(\cos x)$. Однако можно также рассмотреть $-m^2$ как собственное значение λ и провести разложение по n ; полагая $t = \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$, получаем уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left[\frac{n(n+1)}{\operatorname{ch}^2 t} + \lambda \right] \psi = 0, \quad \psi = CP, \quad \operatorname{ch} t = \operatorname{cosec} x,$$

которое можно разложить, приняв $u_n(t) = n \operatorname{th} t$, $a_n = -n^2$. В этом случае a_n является убывающей функцией от n , так что применима вторая форма $\psi_m(n|t)$, значения n не могут быть меньше определенного значения m , где $\lambda_m = -m^2$, и первая нормированная собственная функция равна

$$\psi_m(m|t) = \sqrt{\frac{m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}} \operatorname{ch}^{-m} t, \quad \int_{-\infty}^{\infty} [\psi_m(m|t)]^2 dt = 1.$$

Другие собственные функции, для $n = m, m+1, m+2, \dots$, имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_m(n|t) = & \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \sqrt{\frac{m}{(n-m)!(n+m)!}} \left[n \operatorname{th} t - \frac{d}{dt} \right] \times \dots \\ & \dots \times \left[(m+1) \operatorname{th} t - \frac{d}{dt} \right] \operatorname{ch}^{-m} t. \end{aligned}$$

Рекуррентные соотношения для ψ удобно выразить через переменную $x = 2 \operatorname{arctg} e^t$:

$$\begin{aligned} \left[-n \cos x - \sin x \frac{d}{dx} \right] \psi_m(n-1|t) &= \sqrt{(n-m)(n+m)} \psi_m(n|t), \\ \left[-n \cos x + \sin x \frac{d}{dx} \right] \psi_m(n|t) &= \sqrt{(n-m)(n+m)} \psi_m(n-1|t). \end{aligned}$$

Так как

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} [\psi_m(n|t)]^2 dt = C^2 \int_0^\pi [P_n^m(\cos x)]^2 \frac{dx}{\sin x} = C^2 \frac{(n+m)!}{m(n-m)!},$$

то мы видим, что

$$\begin{aligned} \psi_m(n|t) &= \sqrt{\frac{m(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\operatorname{th} t) = \\ &= (-1)^{n-m} \sqrt{\frac{m}{\left(n+\frac{1}{2}\right) \sin x}} \Phi_n(m| \arccos \operatorname{th} t), \end{aligned}$$

где Φ представляет собой собственную функцию, полученную при первой факторизации.

Таким образом, мы получили четыре дифференциально-рекуррентных соотношения для собственных функций Φ или для связанных с ними функций ψ (мы предпочтетем иметь дело с функциями Φ , так как они нормированы по углу x , который является переменной во многих физических задачах). Из этих соотношений можно получить другие полезные рекуррентные равенства. Например, при помощи сложения формул

$$\left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \cos x + \sin x \frac{d}{dx} \right] \Phi_n(m|x) = \sqrt{\frac{(n+m+1)(n-m+1)(2n+1)}{2n+3}} \Phi_{n+1}(m|x),$$

$$\left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \cos x - \sin x \frac{d}{dx} \right] \Phi_n(m|x) = \sqrt{\frac{(n+m)(n-m)(2n+1)}{2n-1}} \Phi_{n-1}(m|x),$$

выведенных из уравнений для ψ , мы получаем обычное рекуррентное соотношение для нормированных функций Лежандра

$$\begin{aligned} \cos x \Phi_n(m|x) &= \sqrt{\frac{(n+m+1)(n-m+1)}{(2n+1)(2n+3)}} \Phi_{n+1}(m|x) + \\ &\quad + \sqrt{\frac{(n+m)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}} \Phi_{n-1}(m|x), \end{aligned}$$

а подставляя это выражение в одно из равенств, выведенных ранее для Φ ,

$$\begin{aligned} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \cos x - \sin x \frac{d}{dx} \right] \Phi_n(m|x) &= \\ &= \sqrt{(n+m+1)(n-m)} \sin x \cdot \Phi_n(m+1|x) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sqrt{(n+m+1)(n-m)} \sin x \cdot \Phi_n(m|x) &= (n+m+1) \cos x \cdot \Phi_n(m+1|x) - \\ &- \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \cos x - \sin x \frac{d}{dx} \right] \Phi_n(m+1|x), \end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \Phi_n(m|x) &= \sqrt{\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}} \Phi_{n+1}(m+1|x) - \\ &- \sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}} \Phi_{n-1}(m+1|x). \end{aligned}$$

Этим же путем можно вывести многие другие полезные соотношения. Некоторые из них будут получены другими методами позже в этом параграфе (см. стр. 696). Однако теперь нам надо вернуться к нашей основной теме — к исследованию полноты системы собственных функций.

Собственные функции и вариационный принцип. Полная система собственных функций — это такая система, которая может осуществить представление в смысле сходимости в среднем (см. стр. 660) любой кусочно-гладкой функции. Чтобы показать, что рассмотренные нами системы собственных функций полны, мы обратимся к вариационной технике, развитой в гл. 3. Согласно сказанному в конце, решение уравнения Штурма—Лиувилля представляет собой функцию, минимизирующую

интеграл

$$\int_a^b \left[p(z) \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 - q(z) \psi^2 \right] dz$$

и подчиненную дополнительному условию

$$\int_a^b \psi^2 r(z) dz = \text{const.}$$

Другими словами, уравнением Эйлера для этой вариационной задачи является как раз уравнение Лиувилля (6.3.12).

Рассмотрим это утверждение несколько более детально. Допустим, что мы выбрали в качестве пробной функции функцию $\psi(z)$, удовлетворяющую граничным условиям в точках a и b и нормированную с функцией плотности r :

$$\int_a^b \psi^2 r dz = 1$$

(это одно из немногих мест, где несомненно выгодно нормировать функции). Подсчитаем интеграл

$$\Omega(\psi) = \int_a^b \left[p \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 - q\psi^2 \right] dz \quad (6.3.20)$$

и будем менять пробную функцию произвольным образом (но так, чтобы она оставалась нормированной и удовлетворяющей граничным условиям), пока не найдем ψ , дающую *наименьшее возможное* значение Ω . В силу того, что уравнение Лиувилля соответствует вариационному уравнению, функция ψ , для которой Ω принимает наименьшее возможное значение, равна низшей собственной функции ψ_0 , а соответствующее значение Ω равно

$$\begin{aligned} \Omega(\psi_0) &= \int_a^b \left[p \left(\frac{d\psi_0}{dz} \right)^2 - q\psi_0^2 \right] dz = \\ &= \left[p\psi_0 \frac{d\psi_0}{dz} \right]_a^b - \int_a^b \psi_0 \left[\frac{d}{dz} \left(p \frac{d\psi_0}{dz} \right) + q\psi_0 \right] dz = \int_a^b \psi_0 [\lambda_0 r \psi_0] dz = \lambda_0, \end{aligned}$$

то есть *наименьшему собственному значению*. Здесь мы проинтегрировали член $p(d\psi/dz)^2$ по частям, применили уравнение (6.3.12) для получения последнего интеграла и использовали граничные условия в точках a и b для доказательства равенства нулю выражения в квадратных скобках. Для последующих рассуждений мы предположим q и λ преобразованными так, что $\lambda_0 = 0$.

Для нахождения следующей собственной функции и соответствующего собственного значения мы минимизируем Ω , отыскивая нормированную функцию ψ , которая удовлетворяет граничным условиям в точках a и b и, кроме того, ортогональна найденной выше функции ψ_0 . Это минимальное значение Ω равно λ_1 , а соответствующая пробная функция есть ψ_1 . Таким же образом мы действуем и дальше: для нахождения ϕ_n и λ_n мы подсчитываем Ω для пробных функций, удовлетворяющих граничным условиям при $z=a$ и b , нормированных и ортогональных подсчитанным перед этим функциям $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$. Функция, придающая Ω минимальное значение, равна ψ_n , а значение $\Omega(\psi_n)$ есть λ_n .

Для вырожденных случаев мы найдем целую совокупность функций, дающих одно и то же минимальное значение Ω . Однако из соображений симметрии или из других дополнительных требований всегда можно выбрать систему взаимно ортогональных решений, которые можно рассматривать как стандартные решения для этого вырожденного значения λ_n .

Полнота системы собственных функций. Результаты предыдущего пункта можно выразить еще следующим образом. Пусть F — любая функция, удовлетворяющая граничным условиям и нормированная в интервале (a, b) ; тогда интеграл $\Omega(F)$, определенный формулой (6.3.20), не меньше λ_0 . Поскольку мы преобразовали q и λ так, что $\lambda_0 = 0$, $\Omega(F)$ не может быть отрицательным. Аналогично, если для функции F_n

$$\int_a^b F_n^2 r dz = 1, \quad \int_a^b F_n \psi_m r dz = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1, n,$$

то интеграл $\Omega(F_n)$ не меньше λ_{n+1} .

Для полноты системы собственных функций нужно, чтобы ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \psi_m(z), \quad C_m = \frac{1}{E_m^2} \int_a^b f(z) \psi_m(z) r(z) dz, \quad (6.3.21)$$

сходился (в среднем) к функции $f(z)$ в интервале (a, b) . Чтобы это было так, разность между функцией f и первыми $n+1$ членами ряда

$$f_n(z) = f(z) - \sum_{m=0}^n C_m \psi_m(z)$$

должна стремиться к нулю (в среднем), когда n стремится к бесконечности. Другими словами, чтобы ряд давал хорошее приближение в среднем, в соответствии со сказанным на стр. 660, величина

$$a_n^2 = \int_a^b f_n^2(z) r(z) dz = \int_a^b f^2 r dz - \sum_{m=0}^n E_m^2 C_m^2$$

должна стремиться к нулю, когда n стремится к бесконечности.

Теперь можно применить наши вариационные соображения для оценки величины a_n , так как функция

$$F_n = f_n(z)/a_n$$

обладает указанными выше свойствами:

$$\int_a^b F_n^2 r dz = 1 \text{ по определению } a_n,$$

$$\int_a^b F_n \psi_m r dz = \begin{cases} (E_m^2/a_n)(C_m - C_m) = 0, & \text{если } m \leq n, \\ (E_m^2/a_n)C_m, & \text{вообще говоря, } \neq 0, \text{ если } m > n. \end{cases}$$

в силу ортогональности ψ и определения C_m . Следовательно, в соответствии со сказанным в первом абзаце этого пункта

$$\begin{aligned} \Omega(F_n) = & \frac{1}{a_n^2} \int_a^b \left[p \left(\frac{df}{dz} \right)^2 - qf^2 \right] dz - \frac{2}{a_n^2} \int_a^b \sum_{m=0}^n C_m \left[p \frac{df}{dz} \frac{d\psi_m}{dz} - qf\psi_m \right] dz + \\ & + \frac{1}{a_n^2} \sum_{m=0}^n C_m \int_a^b \sum_{s=0}^n C_s \left[p \frac{d\psi_m}{dz} \frac{d\psi_s}{dz} - q\psi_m\psi_s \right] dz \geq \lambda_{n+1}. \end{aligned}$$

Первый из полученных членов равен $\Omega(f)/a_n^2$ и потому, как мы видели выше, неотрицателен. Первый член во втором интеграле можно проинтегрировать по частям, и, используя то, что ψ_m удовлетворяет уравнению Лиувилля и что как f , так и ψ удовлетворяют граничным условиям, получаем для второго интеграла

$$\begin{aligned} \frac{2}{a_n^2} \int_a^b f \sum_{m=0}^n C_m \left[\frac{d}{dz} \left(p \frac{d\psi_m}{dz} \right) + q\psi_m \right] dz - \frac{2}{a_n^2} \left[\sum_{m=0}^n C_m p f \frac{d\psi_m}{dz} \right]_a^b = \\ = - \frac{2}{a_n^2} \sum_{m=0}^n C_m \lambda_m \int_a^b rf\psi_m dz = - \frac{2}{a_n^2} \sum_{m=0}^n C_m^2 \lambda_m E_m^2. \end{aligned}$$

Аналогично находим, что третий интеграл равен $\frac{1}{a_n^2} \sum C_m^2 \lambda_m E_m^2$, так что

$$\Omega(F_n) = \frac{1}{a_n^2} \left[\Omega(f) - \sum_{m=0}^n E_m^2 C_m^2 \lambda_m \right] \geq \lambda_{n+1}.$$

Так как величина $\sum E_m^2 C_m^2 \lambda_m$ должна быть положительной (ни одно из λ_m не отрицательно), то отсюда

$$\Omega(f) > a_n^2 \lambda_{n+1}, \text{ или } a_n^2 < [\Omega(f)/\lambda_{n+1}].$$

Однако $\Omega(f)$ положительно и не зависит от n , а мы доказали, что λ_{n+1} стремится к бесконечности, когда n стремится к бесконечности. Следовательно, a_n стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности, и тем самым мы доказали, что ряд (6.3.21) сходится в среднем к функции f в интервале $a < z < b$. Таким образом, если ϕ_n — последовательность собственных функций — решений уравнения (6.3.12) (которое можно преобразовать так, что $\lambda_0 = 0$), удовлетворяющих граничным условиям, в силу которых $[p\phi_n d\phi_n/dz]_a^b$ равно нулю, то система ϕ_n полна. Это доказательство существенно пополняет наше исследование основных свойств собственных функций. Теперь мы можем обратиться к частным случаям и к исследованию общей техники, которая будет использована позже.

Асимптотические формулы. Иногда бывает полезно получить приближенные выражения для собственных функций и собственных значений высокого порядка (n велико). Мы вернемся к уравнению Лиувилля

$$\frac{d}{dz} \left(p \frac{d\psi}{dz} \right) + (\lambda r + q) \psi = 0$$

и сделаем подстановку

$$y = (pr)^{1/4} \psi, \quad \xi = \frac{1}{J} \int_a^z \sqrt{\frac{r}{p}} dz, \quad J = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dz$$

для получения уравнения

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + [k^2 - w(\xi)] y = 0, \quad (6.3.22)$$

где

$$k^2 = J^2 \lambda \quad \text{и} \quad w = \frac{1}{(pr)^{1/4}} \frac{d^2}{d\xi^2} (pr)^{1/4} - J^2 \frac{q}{r},$$

а p , q и r надо выразить через ξ . Новое независимое переменное изменяется в пределах $0 < \xi < \pi$.

Если λ велико, то k^2 велико сравнительно с w , и можно ожидать, что зависимость y от ξ приближенно синусоидальная. Для уточнения этого можно переставить члены уравнения

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + k^2 y = wy$$

и решать его так, как будто wy — неоднородная часть. На основании формулы (5.2.19) мы видим, что выражением для y будет

$$y(\xi) = A \sin(k\xi) + B \cos(k\xi) + \frac{1}{k} \int_{\xi_0}^{\xi} \sin[k(\xi-t)] w(t) y(t) dt, \quad (6.3.23)$$

где ξ_0 — подходящий нижний предел интегрирования. Это, конечно, не решение, а интегральное уравнение для y . В гл. 8 мы будем детально изучать его решение. Однако здесь мы занимаемся только решениями, для которых λ очень велико, настолько, что интегралом по сравнению с первыми двумя членами можно пренебречь (если λ велико, то k велико и подинтегральная функция, умноженная на $1/k$, исчезает). Значения A , B и k должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия.

Если ни a , ни b не являются особыми точками, то задача о приспособлении нашей асимптотической формы к граничным условиям довольно проста. Если требование состоит в равенстве ϕ нулю в точках a и b , то первое приближение, полученное путем отбрасывания интеграла в уравнении (6.3.23), есть просто

$$k = n, \quad \psi_n \simeq [1/(rp)^{1/4}] \sin(n\xi), \quad \lambda_n = (n/J)^2, \quad (6.3.24)$$

что имеет место, если n^2 больше w всюду в интервале $0 < \xi < \pi$. Более точное приближение можно получить, если теперь подставить результат обратно в интеграл в формуле (6.3.23) и подсчитать поправочный член, но пока мы опустим такие подробности.

Если граничные условия состоят в требовании $\alpha\phi + \beta d\phi/dz = 0$ при $z = a$ и в аналогичном соотношении, возможно, с другими постоянными α и β , при $z = b$, то этот процесс несколько усложняется. Мы полагаем в качестве первого приближения

$$\phi \simeq [1/(pr)^{1/4}] \cos(k\xi + \theta),$$

где фазовый угол θ надо определить из граничных условий. Так как k^2 должно быть больше $w(\xi)$ всюду в интервале $0 < \xi < \pi$, то

$$\frac{d\phi}{dz} \simeq \frac{1}{(pr)^{1/4}} \frac{d\xi}{dz} \frac{d}{d\xi} \cos(k\xi + \theta) = -\frac{1}{(pr)^{1/4}} \frac{k}{J} \sqrt{\frac{r}{p}} \sin(k\xi + \theta),$$

так как для большого k производная от множителя $(pr)^{-1/4}$ мала сравнительно с производной от $\cos(k\xi + \theta)$. Решение для θ получается из уравнения

$$\operatorname{ctg} \theta \simeq \frac{k}{J} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{r}{p}} \right]_{z=a}.$$

Если k достаточно велико, то отсюда

$$\theta(k) \approx \frac{J}{k} \left[\frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{p}{r}} \right] \quad \text{при } z = a.$$

Подобное удовлетворение граничному условию при $z = b$ определяет допустимые значения k и тем самым $\lambda = (k/J)^2$:

$$k_n \approx n + \frac{J}{\pi n} \left[\frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{p}{r}} \right]_a^b, \quad \phi_n = \frac{1}{(pr)^{1/4}} \cos [k_n \xi + \theta(n)], \quad (6.3.25)$$

где n — целое.

Таким образом, если a и b — обыкновенные точки, то высшие собственные значения уравнения Лиувилля приближенно равны квадрату произведения π на большое целое n , разделенному на квадрат интеграла от $\sqrt{r/p}$ по интервалу от a до b . Соответствующая собственная функция приближенно равна косинусу произведения πn на отношение интеграла от $\sqrt{r/p}$ по интервалу от a до z к интегралу от $\sqrt{r/p}$ по интервалу от a до b (с дополнительным «амплитудным множителем» $(pr)^{-1/4}$, изменяющим амплитуду).

Если a , или b , или и a и b являются особыми точками, в которых p обращается в нуль, то интегралы, определяющие J и ξ (приведенные непосредственно перед уравнением (6.3.22)), могут расходиться, и тогда наши определения надо несколько видоизменить. Кроме того, в таких точках может обратиться в бесконечность функция q ; во всяком случае, там обратится в бесконечность функция w . Конечно, мы можем решить уравнение Лиувилля вблизи особой точки при помощи степенных рядов и найти там природу особенности обоих решений. Если наше уравнение имеет физический смысл, то одно из решений будет там конечным.

Чтобы увидеть, как это получается, возьмем частный пример уравнения Бесселя, к которому мы приходим при разделении волнового уравнения в полярных координатах (см. стр. 518 и 579),

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{d\psi}{dz} \right) + \left(\lambda z - \frac{m^2}{z} \right) \psi = 0, \quad (6.3.26)$$

где $z = r = \xi_1$, m — целое (получается из граничных условий периодичности для ξ_2 -множителя), а λ — константа разделения. В этом случае имеем $p = z$, $r = z$, $q = -m^2/z$. Допустим, что в качестве предела a берется особая точка $z = 0$.

Совершая подстановку для перехода к уравнению (6.3.22), имеем

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{z}} y, \quad J = \frac{1}{\pi} \int_0^b dz = \frac{b}{\pi}, \quad \xi = \frac{\pi z}{b}, \quad k^2 = (b^2/\pi^2)\lambda,$$

$d^2y/d\xi^2 + [k^2 - (m^2 - 1/4)/\xi^2] y = 0$; и интегральное уравнение для y будет иметь вид

$$y(\xi) = \cos(k\xi + \theta) - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \sin k(\xi - t) y(t) \frac{m^2 - 1/4}{t^2} dt,$$

где пределы интеграла выбраны так, чтобы обеспечить сходимость. Для больших значений k и z первый член дает достаточную точность, и об интеграле не нужно беспокоиться, если только ξ не близко к нулю. Если

бы мы могли найти значение фазового угла θ , соответствующее требованию конечности ϕ для $z=0$, то нам вообще не требовалось бы пользоваться асимптотической формой для малого ζ (где она неточна).

Мы найдем значение θ , используя явление Стокса (см. стр. 571), потребовав для этого, чтобы изменение асимптотической формулы для ϕ , когда ζ берется на окружности с центром $\zeta=0$, соответствовало изменению ряда, дающего решение около $\zeta=0$. Рассмотрение определяющего уравнения (см. стр. 503) для уравнения (6.3.26) показывает, что решение, конечное при $z=0$, имеет вид произведения z^m на ряд Тейлора по z . Следовательно, если ϕ вещественно для больших z вдоль положительной вещественной полусоси (фазовый угол $\varphi=0$), то оно равно произведению $e^{im\pi}$ на вещественную функцию для $\varphi=\pi$ (z отрицательно и велико) и его главный член должен равняться произведению $e^{im\varphi}$ на вещественную функцию, если φ не является целым кратным π (z комплексно и велико по модулю).

Положим $\phi \simeq (1/2 \sqrt{z}) [e^{ik\zeta+i\theta} + e^{-ik\zeta-i\theta}]$; это выражение вещественно при $\varphi=0$, и мы исследуем сначала его поведение для $\varphi=\pi/2$ ($\zeta=i|\zeta|$). Здесь первый член в квадратных скобках незначителен при больших ζ , и асимптотическая формула дает

$$\phi = e^{im\pi/2} \cdot \text{вещественная функция} \simeq (1/2 \sqrt{|z|}) e^{k|\zeta|-i\theta-i\pi/4}, \quad z=|z|e^{i\pi/2},$$

так что $\theta = -\frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2} \right)$. Для проверки этого результата положим также $\varphi=-\pi/2$ ($\zeta=-i|\zeta|$). Здесь второй член незначителен и

$$\phi = e^{-im\pi/2} \cdot \text{вещественная функция} \simeq (1/2 \sqrt{|z|}) e^{k|\zeta|+i\theta+i\pi/4}, \quad z=|z|e^{-i\pi/2},$$

так что опять $\theta = -\frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2} \right)$. Значит, асимптотической формой для собственных функций в этом случае будет

$$\phi \simeq \frac{1}{\sqrt{z}} \cos \left[\frac{\pi kz}{b} - \frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right], \quad -\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi,$$

что совпадает с асимптотическим поведением, которое дается формулой (5.3.68). Если граничное условие при $z=b$ имеет вид $\phi=0$, то асимптотическое выражение для собственных значений таково:

$$k_n \simeq n + \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad \lambda_n = (\pi k_n/b)^2; \quad n \text{ велико.}$$

Ту же технику можно с успехом применить для других случаев, когда один или оба предела являются особыми точками. Более полное исследование асимптотических формул будет проведено в гл. 9. Из приведенного здесь рассуждения можно заключить, что для любого из обычных видов граничных условий (все равно, в особых или обыкновенных точках) можно указать асимптотическую формулу, дающую подходящее приближение, если подобрать фазовый угол θ в выражении

$$\phi \simeq \frac{1}{(pr)^{1/4}} \cos \left(\sqrt{\lambda} \int_a^z \sqrt{\frac{r}{p}} dz + \theta \right). \quad (6.3.27)$$

Подобным образом асимптотическая формула для высших собственных значений оказывается такой:

$$\lambda_n \simeq \left(\int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dz \right)^{-2} (n\pi + \alpha)^2,$$

где значение α зависит от частного вида граничных условий как в a , так и в b .

Сравнение с рядом Фурье. Из этого исследования мы видим, что в высших членах любой ряд по собственным функциям ведет себя подобно ряду Фурье. Можно доказать, что разность между первыми n членами ряда по собственным функциям и первыми n членами ряда Фурье, взятых для одного и того же интервала и для одной и той же функции, является равномерно сходящейся к нулю при неограниченном возрастании n .

Чтобы это показать, перейдем к новой независимой переменной ζ и новой зависимой переменной y , как указано в (6.3.22). Обозначим через $f(\zeta)$ представляемую функцию $F(z)$, умноженную на $(pr)^{1/4}$ и выраженную через ζ . При этих операциях в f не появится новых особенностей или разрывов. Разложение f в переменной ζ имеет вид [см. формулы (6.3.17) и (6.3.18)]

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= [p(z)r(z)]^{1/4} \int_a^b F(t) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{E_m^2} \phi_m(z) \phi_m(t) r(t) dt = \\ &= \int_a^b f(\tau) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{E_m^2} y_m(\zeta) y_m(\tau) \sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}} dt = \\ &= \int_0^{\pi} f(\tau) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{N_m^2} y_m(\zeta) y_m(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6.3.28)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_m(z) &= y_m(\zeta)/(pr)^{1/4}, \quad F(t) = f(\tau)/(pr)^{1/4}, \\ \zeta &= \frac{\pi}{J} \int_a^z \sqrt{\frac{r(z)}{p(z)}} dz, \quad \tau = \frac{\pi}{J} \int_a^t \sqrt{\frac{r}{p}} dz, \quad J = \int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dz, \\ E_m^2 &= \int_a^b \phi_m r dz, \quad N_m^2 = \int_0^{\pi} y_m^2(\zeta) d\zeta = \frac{\pi E_m^2}{J}. \end{aligned}$$

Однако функцию f можно выразить в интервале $0 < \zeta < \pi$ рядом Фурье. Например, можно применить ряд по косинусам

$$f(\zeta) = \int_0^{\pi} f(\tau) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{\pi} \cos m\zeta \cdot \cos m\tau d\tau, \quad (6.3.29)$$

где $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_n = 2$ ($n > 0$) называются *множителями Неймана*.

Если граничные условия, налагаемые на функцию ϕ , таковы, что асимптотический вид ϕ_n дается формулой (6.3.25), то вид членов с y в ряде с возрастанием n будет приближаться к виду косинусоидальных членов. Оба ряда будут приближаться почленно один к другому, и в конце концов отдельные члены станут совсем близкими друг к другу, совпадающими в гораздо больших деталях, чем можно было бы ожидать. Многие ряды

по собственным функциям сходятся лишь условно (то есть сходятся только из-за того, что члены имеют чередующиеся знаки и частично взаимно уничтожаются). Многие из трудностей, сопровождающих исследование представления отдельных функций при помощи собственных функций, проистекают из этой слабой сходимости. Эти трудные случаи детально изучены для рядов Фурье, и потому если мы сможем показать, что то, что имеет место для ряда Фурье, справедливо и для других рядов по собственным функциям, то мы избавимся от значительной части работы. Если окажется, что разность между рядами (6.3.28) и (6.3.29) *абсолютно сходится* (то есть ряд из *абсолютных величин* разностей сходится), то тем самым будет установлено требуемое детальное соответствие рядов.

Например, согласно формуле (6.3.11), ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{N_m^2} y_m(\zeta) y_m(\tau)$$

в определенном смысле представляет дельта-функцию $\delta(\zeta - \tau)$. Такой ряд далек от абсолютной сходимости, но можно показать, что если из граничных условий следует формула (6.3.25), то функция

$$\Phi_n(\zeta, \tau) = \sum_{m=0}^n \left[\frac{1}{N_m^2} y_m(\zeta) y_m(\tau) - \frac{s_m}{\pi} \cos m\zeta \cos m\tau \right]$$

при стремлении n к бесконечности ограничена. Мы докажем это интересное соотношение, применяя еще раз асимптотическую форму для y_m , полученную из формулы (6.3.25):

$$\begin{aligned} y_m(\zeta) &\simeq \cos \left[m\zeta + \frac{\zeta}{\pi m} (B - A) + \frac{A}{m} \right], \\ A &= \frac{J_a}{\beta} \sqrt{\frac{p}{r}} \text{ при } z = a, \quad B - \text{то же выражение при } z = b, \\ y_m(\zeta) &\simeq \cos \left[\frac{\zeta}{\pi m} (B - A) + \frac{A}{m} \right] \cos m\zeta - \sin \frac{1}{m} \left[\frac{\zeta}{\pi} (B - A) + A \right] \sin m\zeta \rightarrow \\ &\rightarrow \cos m\zeta \left\{ 1 - \frac{1}{2m^2} \left[\frac{\zeta}{\pi} (B - A) + A \right]^2 \right\} - \frac{1}{m} \left[\frac{\zeta}{\pi} (B - A) + A \right] \sin m\zeta, \end{aligned}$$

и нормирующие постоянные имеют вид $N_m^2 \simeq \pi +$ члены порядка $1/m^2$ и выше. Разность между членами в квадратных скобках в выражении Φ_n велика для малых значений m , но для всех больших и больших значений m (если n достаточно велико) эта разность приближается к малой величине

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{m} \left\{ \left[\frac{\zeta}{\pi} (B - A) + A \right] \sin m\zeta \cos m\tau - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\tau}{\pi} (B - A) + A \right] \sin m\tau \cos m\zeta \right\} + \text{члены порядка } 1/m^2 \text{ и выше.} \end{aligned}$$

Члены порядка $1/m^2$ сходятся абсолютно, и потому их сумма ограничена; ряд $\sum \frac{\sin m\zeta}{m}$ сходится, и потому сумма членов, умноженных на $1/m$, также ограничена, чем и доказывается ограниченность функции Φ_n при $n \rightarrow \infty$. Мы можем утверждать, что она всегда меньше некоторой конечной величины D , независимо от значений n , ζ или τ (если $0 < \zeta < \pi$, $0 < \tau < \pi$).

При помощи тех же рассуждений можно показать, что разность

$$\int_0^\pi \Phi_n(\zeta, \tau) f(\tau) d\tau$$

между первыми n членами разложения непрерывной функции $f(\zeta)$ по собственным функциям y_n и первыми n членами разложения $f(\zeta)$ в ряд по косинусам равномерно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Здесь мы сравниваем наш ряд по собственным функциям с рядом по косинусам. При других граничных условиях надо сравнивать с рядом по синусам и т. д.; оказывается, что для каждого разложения по собственным функциям можно построить ряд Фурье, имеющий с этим разложением такую же тесную связь, как показано выше.

Сформулируем наши выводы на формальном языке: разложение любой непрерывной функции по собственным функциям *сходится или расходится в любой точке так же, как соответствующий ряд Фурье*. В любом интервале оно сходится абсолютно тогда и только тогда, когда соответствующий ряд Фурье сходится абсолютно в этом интервале.

Явление Гиббса. Мы показали, что соответственно выбранный ряд по собственным функциям может дать совпадение в смысле сходимости в среднем, даже если функция имеет конечное число разрывов. Однако надо отметить некоторые трудности, появляющиеся при применении такого ряда для подсчета значений функции вблизи разрыва.

На рис. 6.9 показана функция $F(x)$ с разрывом при $x = x_0$. Первые $n+1$ членов соответствующего ряда по собственным функциям

$$S_n(x) = \int_a^b F(u) \sum_{m=0}^n \frac{1}{E_m^2} \phi_m(x) \phi_m(u) r(u) du$$

не могут дать разрыва, так как конечное число непрерывных функций не может дать бесконечного наклона, требуемого при разрыве. Как показывает тонкая линия на рисунке, частная сумма $S_n(x)$ пытается достичь бесконечного наклона при $x = x_0$, и при этом она *перебегает* за разрыв на некоторое расстояние. Получающаяся кривая для S_n проходит на краю экрана, причем длина световой волны обратно пропорциональна n . Даже при сколь угодно больших n это «перебегание» сохраняется и полный ряд имеет «закраины» на концах разрыва, отмеченные буквами D^+ и D^- на второй части рис. 6.9. Эти дополнительные пики нулевой ширины не мешают ряду сходиться к функции в среднем, но указывают на ограничения, связанные с представлением функций при помощи рядов по собственным функциям.

Можно исследовать явление Гиббса более точно, если взять в качестве примера ряд Фурье. Рассмотрим представление функции

$$F(x) = \begin{cases} +1 & \text{для } 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{для } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

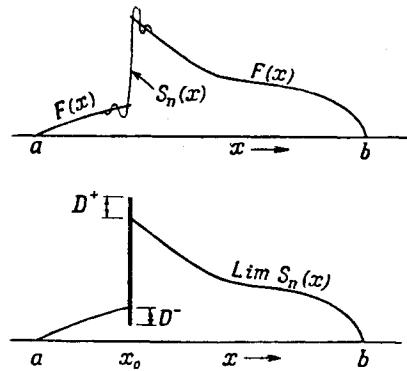


Рис. 6.9. Явление Гиббса.
Разрывная функция $F(x)$, приближенная n -й частной суммой $S_n(x)$ ряда.

при помощи ряда, периодического по x с периодом 2π , которое имеет вид

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi dt - \int_\pi^{2\pi} dt \right) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\cos mx \cdot \cos mt + \sin mx \cdot \sin mt) \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2s+1} \sin [(2s+1)x]. \end{aligned}$$

Здесь перед нами вырожденный случай, однако применение суммы произведений для всех собственных функций под знаком интеграла все еще возможно.

Подсчитаем сумму всех членов от $\sin x$ до $\sin nx$ (это не будет суммой первых n членов, так как в данном случае все члены с четными n отсутствуют), производя суммирование под знаком интеграла до интегрирования. Подинтегральная функция равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \cos [m(x-t)] &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-n}^n e^{im(x-t)} = \frac{1}{2\pi} e^{-in(x-t)} \sum_{s=0}^{2n} [e^{i(x-t)}]^s = \\ &= \frac{e^{-i(x-t)}}{2\pi} \frac{1 - e^{i(2n+1)(x-t)}}{1 - e^{i(x-t)}} = \frac{\sin [(n+1/2)(x-t)]}{2\pi \sin [(x-t)/2]}, \end{aligned} \quad (6.3.30)$$

так что сумма до $\sin nx$ включительно равна

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \frac{\sin [(n+1/2)(t-x)]}{\sin [(t-x)/2]} dt - \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin [(n+1/2)(t-x)]}{\sin [(t-x)/2]} dt \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-x}^{\pi-x} d\theta - \int_x^{\pi+x} d\theta \right\} \frac{\sin (n+1/2)\theta}{\sin (\theta/2)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-x}^x \frac{\sin (n+1/2)\theta}{\sin (\theta/2)} d\theta - \int_{\pi-x}^{\pi+x} \frac{\sin (n+1/2)\theta}{\sin (\theta/2)} d\theta \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-(n+1/2)x}^{+(n+1/2)x} du - \int_{(n+1/2)(\pi-x)}^{(n+1/2)(\pi+x)} du \right\} \frac{\sin u}{(2n+1) \sin [u/(2n+1)]}. \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

Если $0 < x < \pi$, а n велико, то первый из двух интегралов в последних двух формах значительно больше второго. Последняя форма показывает, что если $n \rightarrow \infty$, а x не стремится одновременно к нулю или π (то есть x на некоторую конечную величину больше нуля и меньше π), то второй интеграл стремится к нулю, а первый — к

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = 1.$$

Значит, в интервале $\varepsilon < x < \pi - \varepsilon$, где ε мало, но, конечно, сумма S_n сходится к 1 при $n \rightarrow \infty$; подобным образом для $\pi + \varepsilon < x < 2\pi - \varepsilon$ (а также для $-\pi + \varepsilon < x < -\varepsilon$) $S_n \rightarrow -1$ при $n \rightarrow \infty$.

Однако будем теперь подсчитывать значение S_n для $x = \pi/(2n+1)$, когда n стремится к бесконечности (то есть одновременно с $n \rightarrow \infty$ устремлять $x \rightarrow 0$ по выбранному закону). Вновь отбрасывая второй интеграл, который опять стремится к нулю, имеем

$$S_n \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin u}{u} du = 1,179 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, ряд, пытаясь следовать разрыву при $x=0$, перебегает отметку почти на 18% в области исчезающей малой ширины, прежде чем он возвратится к правильному единичному значению.

Мы уже показали, что ряды по другим собственным функциям по отношению к сходимости ведут себя подобно ряду Фурье. Поэтому надо ожидать подобного перебегания у точек разрыва и для других рядов. Так как область перебегания имеет исчезающую малую ширину, то интеграл от ряда дает правильное значение, даже если интегрирование распространяется на разрыв. Однако требуется соблюдать осторожность при дифференцировании таких рядов. Если данный ряд равномерно сходится, то ряд, получающийся из него почленным интегрированием, сходится наверняка, однако ряд, получающийся при почленном дифференцировании, — не обязательно.

Производящие функции, полиномы Лежандра. Для большинства систем собственных функций имеются простые соотношения между последовательными собственными функциями (рекуррентные формулы), а выражения для нормирующих постоянных часто довольно просты. Многие из этих полезных равенств наиболее легко найти, детально изучая разложение по собственным функциям некоторой более или менее простой функции. Мы ищем функцию двух переменных $\Phi(t, z)$, имеющую разложение вида

$$\Phi(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \psi_n(z), \quad (6.3.32)$$

где ψ_n — изучаемая система собственных функций, а коэффициент a_n не зависит от z и t . Другими словами, функция Φ должна быть так связана с системой ψ_n , чтобы каждый член ее разложения равнялся произведению степени t на соответствующую собственную функцию от z и на коэффициент, не зависящий от z и t . Такая функция Φ называется *производящей функцией* для системы собственных функций ψ_n . Сравнение формулы (6.3.32) с формулами (4.3.3) и (4.3.1) показывает, что производящая функция связана с тем или иным интегральным представлением собственных функций.

Производящие функции часто тесно связаны с построением решений при помощи функции Грина, которое было указано на стр. 653 и 661 и будет изучаться в следующей главе. В качестве примера того, какую помощь могут оказать производящие функции, выведем свойства полиномов Лежандра (см. стр. 560). Эти полиномы появляются при решении уравнения Лапласа в сферических координатах и связаны с функцией Грина $1/R$, где $R^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta$, соотношением [см. формулу (5.3.28)]

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_2^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad r_1 > r_2.$$

Упростим его для получения производящей функции для $P_n(z)$:

$$\Phi(t, z) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tz}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(z), \quad |t| < 1.$$

Отсюда при помощи дифференцирования по t получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{z-t}{(1+t^2-2tz)^{3/2}}, \text{ или } (1+t^2-2tz) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (t-z) \Phi = 0.$$

Подставляя ряд в это уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} mt^{m-1} P_m(z) + \sum_{s=0}^{\infty} st^{s+1} P_s(z) - \sum_{n=0}^{\infty} 2nzt^n P_n(z) + \\ + \sum_{s=0}^{\infty} t^{s+1} P_s(z) - \sum_{n=0}^{\infty} zt^n P_n(z) = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при t^n , находим рекуррентные соотношения $2n+1)zP_n(z) = (n+1)P_{n+1}(z) + nP_{n-1}(z)$ для $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. (6.3.33)

Дифференцирование Φ по z дает другое соотношение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{t}{(1+t^2-2tz)^{3/2}}, \text{ или } (1+t^2-2tz) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = t\Phi,$$

откуда

$$\sum_{s=0}^{\infty} t^s P'_s + \sum_{m=0}^{\infty} t^{m+2} P'_m = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} [2zP'_n + P_n], \text{ где } P'_n = \frac{d}{dz} P_n(z).$$

Приравнивая коэффициенты при степенях t^{n+1} , получаем

$$P'_0 = 0, \quad P'_1 = P_0, \quad P'_{n+1} + P'_{n-1} = 2zP'_n + P_n, \quad n > 0. \quad (6.3.34)$$

Можно вывести также

$$2t^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + t\Phi = (1-t^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

что приводит к рекуррентным формулам

$$P'_0 = 0, \quad P'_1 = P_0, \quad (2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}, \quad n > 0. \quad (6.3.35)$$

При помощи комбинирования этих трех равенств или же посредством дальнейшего манипулирования с производящей функцией можно получить дальнейшие формулы:

$$\begin{aligned} P'_{n+1} = (n+1)P_n + zP'_n, \quad P'_{n-1} = -nP_n + zP'_n, \\ (1-z^2)P'_n = nP_{n-1} - nzP_n \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

и, наконец,

$$(1-z^2)P''_n - 2zP'_n + n(n+1)P_n = 0.$$

Последнее, конечно, является дифференциальным уравнением [см. (5.3.23)] для функций Лежандра $P_n(z)$.

При помощи прямого разложения $\Phi(t, z)$ находим, что $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$; остальные P можно получить из формулы (6.3.33). Громоздкие, но не вызывающие затруднений выкладки дают общую формулу

$$P_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left\{ z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} z^{n-4} - \dots \right\}, \quad (6.3.37)$$

откуда можно найти, что

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ (-1)^{\frac{1}{2}n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \quad (6.3.38)$$

Отсюда или при помощи подстановки $z = \pm 1$ в выражение для Φ и сравнения коэффициентов при t^n получаем

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \quad (6.3.39)$$

Мы видим, что каждая из этих собственных функций представляет собой полином относительно z степени n , имеющий при четном n только четные степени z , а при нечетном n — только нечетные степени. Обратно, каждую степень z можно выразить через конечное число P_n , причем нечетную степень — через P_n с нечетными значениями n , не превосходящими показателя степени z , а четную степень — через P_n со всеми четными n , не превосходящими показателя. Эти разложения можно получить также при помощи непосредственных выкладок:

$$\begin{aligned} 1 &= P_0(z), \quad z = P_1(z), \quad z^2 = \frac{2}{3} P_2(z) + \frac{1}{3} P_0(z), \quad z^3 = \frac{2}{5} P_3(z) + \frac{3}{5} P_1(z), \\ z^n &= \frac{(2n+1)n(n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots(n+1)} P_n(z) + \\ &\quad + \frac{(2n-3)n(n-2)\dots 4}{(2n-1)(2n-3)\dots(n+1)} P_{n-2}(z) + \dots + \frac{1}{n+1} P_0(z), \\ &\quad n = 4, 6, 8, \dots \\ z^n &= \frac{(2n+1)(n-1)(n-3)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots(n+2)} P_n(z) + \\ &\quad + \frac{(2n-3)(n-1)(n-3)\dots 4}{(2n-1)(2n-3)\dots(n+2)} P_{n-2}(z) + \dots + \frac{3}{n+2} P_1(z), \\ &\quad n = 5, 7, 9, \dots \end{aligned} \quad (6.3.40)$$

Значит, любая функция, аналитическая в круге $|z| < 1$ и потому допускающая в нем разложение в сходящийся ряд по степеням z , может быть разложена в сходящийся ряд по функциям $P_n(z)$. Производящая функция Φ для P_n тесно связана с ядром интегрального представления (5.3.26) для P_n , как это, конечно, и должно быть.

Следует, кстати, заметить, что функции Лежандра можно получить следующим образом. Если мы хотим представить любую аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию z , то это можно сделать посредством степенного ряда, но степени z не ортогональны при интегрировании от -1 до $+1$ (хотя они ортогональны при интегрировании по окружности с центром в начале координат); поэтому мы начинаем с 1 и z (которые ортогональны), (выбираем комбинацию z^2 и 1 , ортогональную 1 (и z), и т. д., выбирая каждую функцию $\psi_n(z)$ в виде линейной комбинации z^n, z^{n-2}, \dots , ортогональной ψ_m ($m < n$) при интегрировании от -1 до $+1$). Получающиеся ψ_n будут пропорциональны сферическим гармоникам $P_n(z)$ (см. таблицу в конце этой главы).

Формулу, приведенную на стр. 517 и выражющую $P_n(z)$ через n -ю производную от $(z^2 - 1)^n$, можно также получить из производящей функции. Решение квадратного уравнения $y = z + \frac{1}{2}t(y^2 - 1)$, стремящееся к z при $t \rightarrow 0$, равно

$$y = \frac{1}{t} [1 - \sqrt{1 - 2zt + t^2}], \quad \text{откуда } \frac{\partial y}{\partial z} = \Phi(t, z) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t^n P_n(z).$$

Однако это решение квадратного уравнения можно получить и при помощи разложения Лагранжа [см. (4.5.8)]:

$$y = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z^2 - 1)^n,$$

откуда

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n = \Phi(t, z).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , имеем

$$P_0(z) = 1, \quad P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n. \quad (6.3.41)$$

Последняя формула дает возможность подсчитать нормирующий интеграл для функций Лежандра. Допустим сначала, что $n > m$. Тогда

$$I_{mn} = \int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = \frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \frac{d^m}{dz^m} (1-z^2)^m \frac{d^n}{dz^n} (1-z^2)^n dz.$$

Интегрируя m раз по частям, получаем

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \frac{(-1)^{m+n-1}}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} (1-z^2)^m \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (1-z^2)^n dz = \dots = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} (1-z^2)^m \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} (1-z^2)^n dz = \\ &= \frac{(-1)^{n-m} (2m)!}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} (1-z^2)^n dz = 0, \quad > m. \end{aligned}$$

С другой стороны, если $n = m$, то последний интеграл равен

$$I_{nn} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (1-z^2)^n dz = \frac{2}{2n+1} = E_n^2. \quad (6.3.42)$$

Таким образом, мы показали, что эти функции взаимно ортогональны (как это, конечно, и должно быть, поскольку они являются собственными функциями), и подсчитали нормирующие постоянные E_n [см. формулу (6.3.16)]. Для доказательства того, что система полна и что ряд

$$S(x) = \int_{-1}^1 f(\zeta) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) P_n(\zeta) \right] d\zeta \quad (6.3.43)$$

дает хорошее совпадение в смысле сходимости в среднем для произвольной кусочно-гладкой функции $f(x)$, можно применить наши общие вариационные соображения. Можно ожидать, конечно, что вблизи каждого разрыва будет наблюдаться явление Гиббса, но что ряд можно интегрировать, будучи уверенным, что такие интегралы всегда равны соответствующим интегралам от функции f . (Однако можно встретиться с затруднениями при дифференцировании ряда.) Например, если f — непрерывная функция, то ряд в квадратных скобках в формуле (6.3.43) можно считать эквивалентным дельта-функции $\delta(x - \zeta)$ в области $-1 < (x, \zeta) < 1$.

Кроме дельта-функции, при помощи ряда по полиномам Лежандра можно представить другую чрезвычайно полезную функцию:

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(w)}{z-w} dw P_n(\zeta).$$

Если z не находится на вещественной оси между -1 и $+1$, то интеграл в квадратных скобках сходится и может быть подсчитан при помощи интегрирования по частям:

$$(-1)^n \frac{2n+1}{2^{n+1} n!} \int_{-1}^1 \frac{1}{z-w} \frac{d^n}{dw^n} (1-w^2)^n dw = \frac{2n+1}{2^{n+1}} \int_{-1}^1 \frac{(1-w^2)^n}{(z-w)^{n+1}} dw = (2n+1) Q_n(z),$$

где $Q_n(z)$ [см. формулу (5.3.29)] — функция Лежандра второго рода. Мы получаем полезный ряд

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n(z) P_n(\zeta). \quad (6.3.44)$$

Он сходится только при $|z| > 1$ и $|\zeta| < 1$, но интегралы от этого ряда, умноженного на аналитические функции, можно рассматривать для еще более широких областей переменных, чем в случае ряда для дельта-функции. Однако важно помнить, что область определения функции $Q_n(z)$ из-за ветвления имеет разрез вдоль вещественной оси z между -1 и $+1$.

Последнее равенство имеет некоторые интересные и полезные следствия. Во-первых, разложение функции $f(z)$, аналитической внутри эллипса C , имеющего фокусы в точках ± 1 , и на нем, записывается в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z),$$

где коэффициент a_n определяется любой из следующих формул:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2\pi i} \oint_C f(t) Q_n(t) dt = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \\ &= \frac{n+1/2}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) dx. \end{aligned} \quad (6.3.45)$$

Первая форма интеграла полезна для функций, аналитических при больших значениях $|z|$, так как на контуре C можно применить асимптотическую формулу (5.3.30) для Q_n вдоль большого эллипса. Во-вторых, применяя производящую функцию для P_n , мы находим, что

$$(1+t^2 - 2tz)^{-1/2} - \operatorname{arch} \frac{t-z}{\sqrt{z^2-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n Q_n \quad (6.3.46)$$

чем определяется производящая функция для Q_n (хотя Q_n не является собственной функцией).

Из подходящих производящих функций можно вывести много других полезных систем одномерных собственных функций. Некоторые из них будут приведены в таблице в конце этой главы, некоторые другие войдут в задачи.

Собственные функции для нескольких измерений. До сих пор мы исследовали собственные функции для одного измерения, именно, решая уравнения Лиувилля с одним независимым переменным, удовлетворяющие граничным условиям довольно общего типа в двух концах интервала. Уравнения с частными производными по трем или более переменным порождают собственные функции, зависящие от более чем одного переменного. Это — решения уравнения с частными производными, полученного при отделении одной из координат, оставившей взамен себя константу разделения. Решение этого уравнения должно удовлетворять некоторому простому граничному условию вдоль некоторой граничной линии или поверхности (обычно однородным условиям Дирихле или Неймана или же их однородной комбинации). Это обычно возможно только для некоторых дискретных значений (собственных значений) константы разделения.

Многие из выводов теории Штурма-Лиувилля можно перенести на многомерный случай. Для большинства видов уравнения имеется наименьшее собственное значение, и собственная функция, соответствующая этому наименьшему (нижнему) значению, обычно не имеет узловых линий (или поверхностей) внутри границы. Однако собственные функции нельзя расположить в каком-либо простом, линейном порядке, как это было в случае одного измерения. Трудность состоит в том, что имеется более одного решения с одним узлом (даже если нет вырождения). Однако можно расположить решения в своего рода двумерном порядке, так как обычно оказывается, что узлы в двумерном случае распадаются на два семейства (см. стр. 472) и возрастание числа узлов одного рода всегда влечет возрастание соответствующего собственного значения.

В тех случаях, когда имеется наименьшее собственное значение, когда собственные значения не имеют верхней грани и существует вариационное уравнение, эквивалентное дифференциальному уравнению для собственных функций, можно применить рассуждения, изложенные на предыдущих страницах, для доказательства того, что эти более общие собственные функции образуют полную ортогональную систему (а в вырожденных случаях они могут быть сделаны ортогональными), при помощи которой можно представить в виде ряда любую кусочно-гладкую функцию внутри границы.

Если уравнение с частными производными для собственных функций само разделяется, эти факты легко доказать. Каждая собственная функция равна тогда просто произведению собственных функций от разделенных координат (за исключением вырожденных случаев, когда решения могут быть конечными комбинациями произведений для каждого из вырожденных состояний). Ортогональность и полноту можно вывести из ортогональности и полноты одномерных множителей.

В качестве примера можно рассмотреть случай однородной гибкой мембранны плотности ρ (на единицу площади), натянутой на жесткую опору с равномерной силой натяжения T на единицу длины. Уравнением движения будет волновое уравнение

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad c^2 = \frac{T}{\rho},$$

где Ψ — смещение мембранны от ее положения равновесия. Предполагая простую гармоническую зависимость от времени, можно отделить временной множитель, так как $\Psi = \phi(x, y) e^{-i\omega t}$, где

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}; \quad (6.3.47)$$

получается уравнение Гельмгольца в двух переменных x и y (или, после преобразования, в переменных r и φ и т. д.) с константой разделения k^2 .

Если опора имеет вид прямоугольника со сторонами, лежащими на прямых $x=0$ и a , $y=0$ и b , то собственные функции и собственные значения равны

$$\begin{aligned}\phi_{mn}(x, y) &= \sin(\pi mx/a) \sin(\pi ny/b), \\ k_{mn}^2 &= \pi^2 [(m/a)^2 + (n/b)^2], \quad m, n = 1, 2, 3, 4, \dots\end{aligned}\quad (6.3.48)$$

Так как отдельные множители взаимно ортогональны, то и произведения обладают этим свойством, и при помощи тех же рассуждений, что и выше, получаем, что ϕ_{mn} образуют полную систему. Узловые линии (линии внутри прямоугольника, где $\phi = 0$) либо перпендикулярны оси x , либо же перпендикулярны оси y . Число первых и вторых равно соответственно $m-1$ и $n-1$. Значит, хотя расположение k_{mn}^2 в порядке возрастания не порождает простой последовательности чисел m и n , тем не менее возрастание m на 1 увеличивает на 1 число узлов, перпендикулярных оси x , и увеличивает соответствующее k^2 , а возрастание n на 1 увеличивает число узлов, перпендикулярных оси y , и также увеличивает k^2 .

Если $a=b$, имеем вырожденный случай, так как тогда $k_{mn}=k_{nm}$ и для одного и того же собственного значения k имеется по крайней мере две собственные функции. В этом случае в качестве собственной функции можно было бы взять любую линейную комбинацию функций ϕ_{mn} и ϕ_{nm} . Поскольку уже ϕ_{mn} взаимно ортогональны, целесообразно пользоваться ими самими.

Значит, любую кусочно-гладкую функцию $f(x, y)$ можно разложить в ряд

$$f(x, y) = \sum_{m,n} \left[\frac{4}{ab} \int_0^a du \int_0^b f(u, v) \phi_{mn}(u, v) dv \right] \phi_{mn}(x, y). \quad (6.3.49)$$

Если $f(x, y)$ является аналитической функцией при $0 < x < a$ и $0 < y < b$, то ряд будет равномерно сходиться в этих интервалах; если f имеет разрывы, то для ряда может обнаруживаться явление Гиббса у разрывов, однако почленно проинтегрированный ряд будет сходиться.

Если в соответствующих границе координатах уравнение не разделяется, то его анализ несколько более сложен. К сожалению, подробно исследовано только два неразделяющихся случая, в одном из которых граница представляет собой прямоугольный равнобедренный треугольник. Возможно, что это слишком простой случай, чтобы выявить все сложности; тем не менее он заслуживает некоторого внимания (см. § 11.2).

Чтобы сделать наше изложение конкретным, вновь рассмотрим мемброну, но сейчас будем считать, что граница состоит из трех прямолинейных отрезков, соединяющих начало координат и точки $(0, a)$ и $(a, 0)$. Уравнения будут те же, что и выше, и для простой гармонической зависимости от времени получится уравнение Гельмгольца (6.3.47). Решение, равное произведению $\sin(\mu\pi x/a) \cdot \sin(\nu\pi y/a)$, обращается в нуль на частях осей x и y , принадлежащих границе, но не равно нулю вдоль третьей, диагональной части. Однако комбинация

$$\sin(\mu\pi x/a) \sin(\nu\pi y/a) \mp \sin(\mu\pi y/a) \sin(\nu\pi x/a)$$

равна нулю и вдоль этой части (знак $-$ или $+$ ставится в зависимости от того, будет ли число $|\mu - \nu|$ четным или нечетным). Значит, для этого

случае собственными функциями являются

$$\begin{aligned}\psi_{mn}(x, y) = & \sin \left[\frac{\pi}{a} (m+n)x \right] \sin \left[\frac{\pi}{a} ny \right] - \\ & - (-1)^m \sin \left[\frac{\pi}{a} (m+n)y \right] \sin \left[\frac{\pi}{a} nx \right],\end{aligned}\quad (6.3.50)$$

где m и n — целые положительные числа. Чтобы показать, как удовлетворить граничным условиям вдоль диагональной части границы, повернем наши

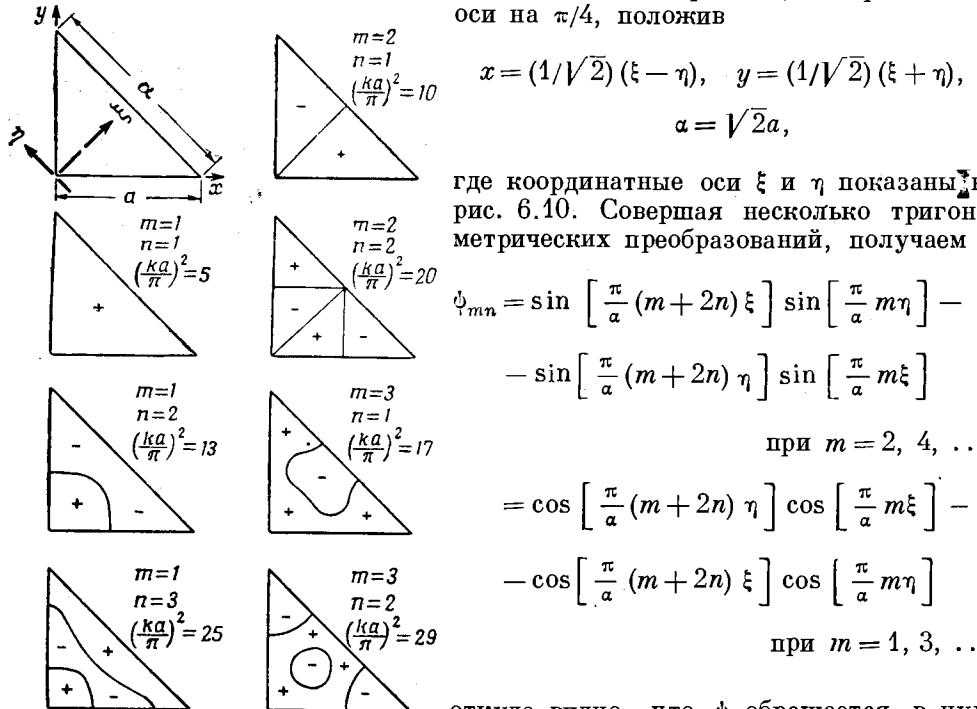


Рис. 6.10. Собственные функции для треугольной мембраны.

Линии внутри границы обозначают положение узловых линий, на которых $\phi=0$, для малых значений квантовых чисел m и n .

где координатные оси ξ и η показаны на рис. 6.10. Совершая несколько тригонометрических преобразований, получаем

$$\begin{aligned}\psi_{mn} = & \sin \left[\frac{\pi}{a} (m+2n)\xi \right] \sin \left[\frac{\pi}{a} m\eta \right] - \\ & - \sin \left[\frac{\pi}{a} (m+2n)\eta \right] \sin \left[\frac{\pi}{a} m\xi \right] \\ & \text{при } m = 2, 4, \dots, \\ = & \cos \left[\frac{\pi}{a} (m+2n)\eta \right] \cos \left[\frac{\pi}{a} m\xi \right] - \\ & - \cos \left[\frac{\pi}{a} (m+2n)\xi \right] \cos \left[\frac{\pi}{a} m\eta \right] \\ & \text{при } m = 1, 3, \dots,\end{aligned}$$

откуда видно, что ϕ обращается в нуль при $\xi = a/2$, чему соответствует диагональная часть границы.

Собственные значения в этом случае равны

$$k_{mn}^2 = \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 [(m+n)^2 + n^2] = \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 [m^2 + 2mn + 2n^2]; \quad (6.3.51)$$

они имеют наименьшее значение ($m=n=1$) и не имеют верхней грани. Собственные функции взаимно ортогональны и являются решениями вариационного уравнения

$$\oint \int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0, \quad \oint \int \phi^2 dx dy = E_{nm}^2 = \frac{1}{8} a^2.$$

Следовательно, эти функции образуют полную систему. Однако взаимосвязь между значениями k^2 , с одной стороны, и числом и расположением узловых линий, с другой, не очевидна.

Узловые линии для некоторых из собственных функций показаны на рис. 6.10. Заметим, что эти линии не распадаются на два взаимно ортогональных семейства, как это будет для прямоугольной границы (и в действительности для всех случаев разделения). Можно сказать только, что если m или n возрастает, то число узлов увеличивается и k^2 возрастает (это является существенным результатом теории Штурма — Лиувилля).

Разложение функции $f(x, y)$ по этим собственным функциям имеет тот же вид, что и (6.3.49), однако интегралы в квадратных скобках берутся по внутренности треугольника вместо внутренности прямоугольника, а множитель $4/a^2$ перед интегралами заменяется на $8/a^2$. Относительно сходимости можно сделать такие же замечания, какие были сделаны несколько выше.

Разделимость констант разделения. Осложнения, появляющиеся, если для данной границы нет подходящих разделяющих координат, обычно столь существенны, что систему собственных функций нельзя подсчитать, а краевую задачу нельзя решить. Но даже если разделение можно осуществить, могут возникнуть некоторые до сих пор не отмеченные осложнения, которые делают решение краевой задачи практически весьма затруднительным. Эти трудности появляются в случаях, рассмотренных на стр. 489—491, когда нет полного разделения констант разделения.

Если константы разделения разделяются [случай А, формула (5.1.41)], то уравнения для ξ_2 - и ξ_3 -множителей содержат только одну константу разделения каждое и тем самым отвечают простому виду уравнения Лиувилля, которое мы уже подробно исследовали. Границные условия для множителя X_2 определяют собственные значения k_2 , а условия для X_3 — собственные значения k_3 , и эти значения можно подставить как известные постоянные в уравнение для X_1 , чтобы определить собственные значения k_1 . Ряд по собственным функциям, получающийся при удовлетворении граничного условия на поверхности $\xi_1 = \text{const}$, представляет собой тогда простой двойной ряд по всем собственным значениям k_2 и всем собственным значениям k_3 .

В случае В₂, указанном в формуле (5.1.42), все еще возможно получить собственные значения для одного множителя, а именно X_3 , не зная значений других констант разделения.

Однако в других случаях константы разделения не разделяются и построение рядов по собственным функциям для удовлетворения граничных условий требует для каждого члена ряда одновременного решения системы уравнений для двух собственных значений. В качестве примера возникающих осложнений и в то же время для указания метода решения рассмотрим случай колебаний эллиптической мембраны. Разделяя уравнение Гельмгольца $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ в эллиптических координатах:

$$x = d \cos \varphi \cdot \operatorname{ch} \mu, \quad y = d \sin \varphi \cdot \operatorname{sh} \mu, \quad \psi = M(\mu) \Phi(\varphi),$$

получаем

$$\frac{d^2M}{d\mu^2} + (h^2 \operatorname{ch}^2 \mu - b) M = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + (b - h^2 \cos^2 \varphi) \Phi = 0,$$

где $h = kd$, а k связано с частотой колебания $\nu = \omega/2\pi$ (поскольку применение уравнения Гельмгольца соответствует допущению, что движение является простым гармоническим, с временным множителем $e^{-i\omega t}$) соотношением $k = \omega/c = 2\pi\nu/c$. Постоянная b представляет собой константу разделения, однако, конечно, $h = 2\pi\nu d/c$ также является константой разделения, так что оба уравнения содержат обе константы. Согласно сказанному в § 5.2, второе из этих уравнений совпадает с уравнением (5.2.67).

Границное условие для Φ состоит в периодичности по φ , а граничное условие для M — в том, что M должно быть конечным и непрерывным при $\mu = 0$ и обращаться в нуль на эллипсе $\mu = \mu_0$, соответствующем границе. Надо выбрать b и h одновременно так, чтобы оказались выполненными обе системы условий.

Для этого мы решим уравнение относительно Φ , считая h известным. Как показано на стр. 530, периодические решения уравнения Маттье выра-

жаются в виде рядов Фурье. Их два сорта: одна система решений $Se_m(h, \cos \varphi)$, четных по φ , и другая система решений $So_m(h, \cos \varphi)$, нечетных по φ ; первой системе собственных функций соответствуют собственные значения $be_m(h)$, а второй системе — собственные значения $bo_m(h)$. Эти собственные значения перемежаются, так что для данного h

$$be_0 < bo_1 < be_1 < \dots < bo_m < be_m < bo_{m+1} < \dots$$

Значит, если h было бы произвольным образом фиксировано, то последовательность Se , So образовывала бы полную ортогональную систему собственных функций.

Однако h не фиксировано, и поэтому мы получили только взаимосвязь между h и последовательностью значений b , при которой удовлетворяются граничные условия для Φ .

Решения уравнения для M даются формулами (5.3.90) и (5.3.91), и потому нам надо сначала выяснить, будут ли функции Je и Ne удовлетворять условию непрерывности при $\mu = 0$. Рассмотрение данных координат показывает, что $(\mu = 0, \varphi = \alpha)$ и $(\mu = 0, \varphi = -\alpha)$ определяют одну и ту же точку ($x = d \cos \alpha$, $y = 0$), и после нескольких минут размышления мы увидим, что для непрерывности Φ и ее производной при переходе через линию $\mu = 0$ множитель M должен иметь на ней нулевую производную, если множитель Φ четен по φ , и M должен обращаться в нуль при $\mu = 0$, если множитель Φ нечетен по φ . В силу сказанного на стр. 595, мы видим, что для $Se_m(h, \cos \varphi)$ подходит решение $Je_m(h, \operatorname{ch} \mu)$ с теми же значениями h и m (то есть с тем же значением b), а для So_m подходит решение Jo_m с соответствующими h и m . Значит, в этой задаче функции Ne , No не применяются.

Наконец, потребуем, чтобы выполнялось условие $M = 0$ при $\mu = \mu_0$. Для любого данного значения b можно выбрать h так, чтобы это имело место, но, конечно, b также зависит от h , так что h и b надо определять одновременно. На практике следует подсчитать ряд кривых, дающих последовательность значений μ , при которых $Je_m(h, \operatorname{ch} \mu)$, например, обращается в нуль для каждого из различных значений h . Эти значения можно обозначить через $\mu_{mn}^e(h)$, причем индекс m соответствует индексу для Je_m , а индекс n указывает, какую точку мы имеем в виду из последовательности нулевых точек (μ_{m1} может быть наименьшим значением, μ_{m2} — следующим и т. д.).

Таким образом, мы имеем двойную последовательность значений μ в соответствии с различными значениями m и различными значениями n . Каждое из этих значений является функцией от h . Теперь мы обращаем задачу, находя значение h , которое делает один из корней $\mu_{mn}(h)$ равным координате μ_0 границы. Корень уравнения $\mu_{mn}^e(h) = \mu_0$ обозначим через he_{mn} , а уравнения $\mu_{mn}^o(h) = \mu_0$ — через ho_{mn} . С помощью этих значений можно затем подсчитать допустимые значения частоты ν свободных колебаний эллиптической мембранны. Частному значению частоты $\omega_{mn}/2\pi = (c/2\pi d) he_{mn}$ будет соответствовать двумерная собственная функция $Se_m(he_{mn}, \cos \varphi) \cdot Je_m(he_{mn}, \operatorname{ch} \mu)$, а частоте $\omega_{mn}^o/2\pi = (c/2\pi d) ho_{mn}$ — другая собственная функция $So_m(ho_{mn}, \cos \varphi) Jo_m(ho_{mn}, \operatorname{ch} \mu)$. Отсюда полное решение будет записываться в виде

$$\sum_{m,n} [A_{mn} Se_m Je_m \cos(\omega_{mn}^e t + \alpha_{mn}) + B_{mn} So_m Jo_m \cos(\omega_{mn}^o t + \beta_{mn})],$$

где числа A , B , α и β определяются начальными значениями смещения и скорости мембранны.

Очевидно, конечно, что множители Se , So взаимно ортогональны, если все они соответствуют одному и тому же значению h . Однако члены по-

леднего ряда берутся для различных значений h каждый, так что ни множители Se_m , ни множители So_m не являются все взаимно ортогональными (хотя все Se все еще ортогональны всем So). Однако общие рассуждения, проведенные на стр. 676, показывают, что рассматриваемые двумерные собственные функции взаимно ортогональны, так что функции $Je_m(h e_{mn}, \operatorname{ch} \mu)$, а также функции $Jo_m(h o_{mn}, \operatorname{ch} \mu)$ должны быть взаимно ортогональными в интервале $0 < \mu < \mu_0$ для различных значений n , тогда как функции $Se_m(h e_{mn}, \cos \varphi)$ должны быть взаимно ортогональными для различных значений m . Значит, все члены ряда ортогональны друг другу, и коэффициенты A, B и фазовые углы α, β можно определить обычным образом.

На этом примере мы показали, что технику удовлетворения граничным условиям при помощи собственных функций можно применить всегда, если в соответствующих границе координатах уравнение разделяется, даже если константы разделения не разделяются в получающихся обыкновенных уравнениях. Такие случаи требуют значительно больших подсчетов для получения решения, чем случаи, когда одно из разделенных уравнений содержит только одну константу разделения; однако эти выкладки являются прямым, не требующим привлечения новых принципов.

Плотность собственных значений. Довольно случайное распределение собственных значений, обнаруживающееся уже для простых двумерных случаев, вызывает вопрос, который мы до сих пор не ставили: можно ли что-либо сказать о числе собственных значений между λ и $\lambda + \varepsilon$? Это число является разрывной функцией от λ и ε (так как собственные значения образуют дискретное множество), однако можно попытаться подсчитать среднее число собственных значений между λ и $\lambda + \varepsilon$. Возможно, что эта величина будет «сглаженным» приближением истинного числа и будет непрерывной функцией от λ и ε .

Такую асимптотическую функцию плотности собственных значений можно получить для одномерного случая при помощи асимптотической формулы, следующей за формулой (6.3.27). При этом мы будем подсчитывать плотность чисел k_n , где $k_n^2 = \lambda_n$. Это, вообще говоря, более полезно. Например, если мы имеем дело с волновым уравнением, то k пропорционально допустимой частоте свободных колебаний системы. Условно будем называть k_n также собственным значением. Асимптотическая формула для k_n имеет вид

$$k_n = \sqrt{\lambda_n} \simeq (n\pi + \alpha) / \int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dz.$$

Эта формула указывает на то, что большие значения k распределены вдоль вещественной оси k равномерно. Асимптотически расстояние между последовательными значениями равно $\pi / \int_a^b \sqrt{r/p} dz$, откуда число собственных значений, меньших k ,

$$n(k) \simeq \frac{k}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dz,$$

и потому среднее число собственных значений между k и $k + dk$

$$dn \simeq \left[\frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dz \right] dk, \quad (6.3.52)$$

где величину в квадратных скобках можно назвать средней плотностью собственных значений k для больших значений k .

Заметим, что эта плотность пропорциональна интегралу от функции $\sqrt{r/p}$, взятыму по интервалу (a, b) . Если r и p имеют одинаковую размерность (в этом случае $1/k$ имеет размерность длины), то интеграл от $\sqrt{r/p}$ имеет размерность длины. Для одномерного волнового уравнения r и p равны единице и средняя плотность собственных значений равна как раз произведению $1/\pi$ на расстояние от a до b . Подинтегральная функция $\sqrt{r/p}$ связана с коэффициентами Ламе криволинейных координат, так что отклонение $\sqrt{r/p}$ от единицы некоторым образом связано с кривизной рассматриваемой координаты. Интеграл $\int \sqrt{r/p} dz$ можно назвать

эффективной длиной интервала для изучаемой координаты и границы.

Обращаясь теперь к двумерному случаю, мы находим здесь, что плотность собственных значений k уже не является даже приближенно не зависящей от k . Например, рассматривая значения, данные в формуле (6.3.48), для прямоугольной мембранны, мы найдем, что плотность собственных значений *возрастает* с возрастанием k . Это легко показать вследствие особенно простой взаимосвязи между k и целыми m и n в случае прямоугольной мембранны. Формула (6.3.48) аналогична соотношению, определяющему расстояние от начала координат до точки, заданной декартовыми координатами $\pi m/a$ и $\pi n/b$. Эти точки, для целых значений m и n , на рис. 6.11 являются точками пересечения линий прямоугольной сетки. Допустимые значения k отвечают расстоянию любой из этих точек решетки от начала координат.

Можно поэтому говорить о «плотности допустимых точек в пространстве k ». Так как интервалы решетки в двух направлениях равны π/a и π/b , то средняя плотность точек равна ab/π^2 , где $ab = A$, то есть *площади*, заключенной внутри границы. Следовательно, для этого простого случая среднее число собственных значений k , меньших некоторого k ,

$$n(k) \simeq \frac{A}{\pi^2} \left(\frac{1}{4} \pi k^2 \right) = \frac{A}{4\pi} k^2,$$

где величина в круглых скобках представляет собой площадь, заключенную между линиями $r = k$, $y = 0$ и $x = 0$. Дифференциал

$$dn \simeq \left[\frac{Ak}{2\pi} \right] dk \quad (6.3.53)$$

дает плотность собственных значений k для этого простого случая (величина в квадратных скобках). Мы видим, что она пропорциональна k (это мы и хотели доказать), а также пропорциональна площади A , заключенной внутри прямоугольной границы.

Однако можно пойти дальше, так как мы замечаем, что на рис. 6.11 точки покрывают не весь первый квадрант. Так как точки с $m=0$ или $n=0$ отсутствуют (для граничного условия $\phi=0$), то надо удалить половину полос решетки, примыкающих к обеим осям, и более точная

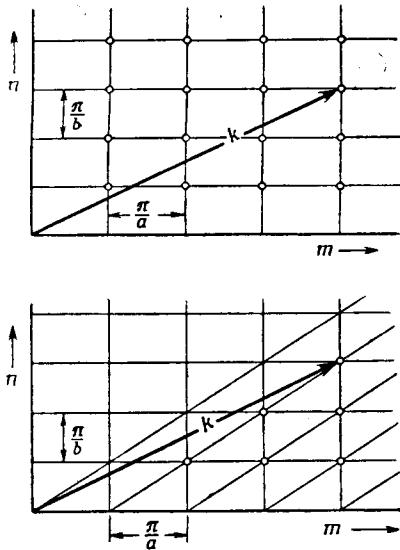


Рис. 6.11. Распределение собственных значений для прямоугольной и треугольной мембранны.

Длина вектора k равна значению $\sqrt{\lambda}$.

заключенной внутри границы. Следовательно, для этого простого случая среднее число собственных значений k , меньших некоторого k ,

формула будет иметь вид

$$n(k) \simeq (ab/\pi^2) \left[\pi k^2/4 - (k\pi/2a) - (k\pi/2b) \right] = (A/4\pi)k^2 - (L/4\pi)k,$$

или

$$dn \simeq [(Ak/2\pi) - (L/4\pi)] dk, \quad (6.3.54)$$

где $L = 2a + 2b$ представляет собой периметр границы.

Этот второй член в выражении для плотности собственных значений зависит от граничных условий. Например, если граничные условия на прямоугольнике состоят в равенстве нулю нормальной производной от ψ , а не самой ψ , то выражение для собственных значений k будет то же, но точки с $m=0$ и $n=0$ теперь допускаются. Следовательно, в этом случае функция плотности имела бы вид $(Ak/2\pi) + (L/4\pi)$.

Получается, что первый член в средней плотности не зависит от точного вида поставленных граничных условий, по крайней мере для некоторых типов граничных условий, а зависит только от площади, заключенной внутри границы. Второй член зависит от частного вида наложенного граничного условия.

Можно разобрать другие случаи, когда известны точные решения двумерного уравнения Гельмгольца (например, случай круглой мембранны). Оказывается, что если вид границы меняется, но площадь A остается постоянной, то точки, изображающие допустимые значения k , перемещаются на « k -плоскости», однако средняя плотность точек не меняется. Кроме того, можно показать, что если граничные условия не меняются при варьировании вида границы, то поправочный член (член с периметром L границы) не меняет своей формы. Можно проверить оба эти утверждения, рассмотрев случай треугольной мембранны. Здесь удаление половины площади исключает половину точек в первом квадранте. Детальный подсчет показывает, что для граничного условия $\psi=0$ формула (6.3.54) имеет место, причем $A = a^2/2$ и $L = 2a + \sqrt{2}a^2$.

По-видимому, формула (6.3.54) справедлива для границы любого вида при условиях $\psi=0$ на границе. Доказано, что форма первого члена (который является главным членом для больших k) сохраняется в общем случае. На второй член доказательство не было распространено, хотя во всех подробно разработанных случаях не было найдено ни одного противоречившего примера. Во всяком случае, если мы имеем дело с большими значениями k , то можно пренебречь вторым членом в плотности и пользоваться только первым членом, о котором известно, что он пригоден для любых границ и любых разумных граничных условий.

Таким образом, для собственных функций с большими номерами плотность собственных значений не зависит от k в одномерных случаях, пропорциональна k в двумерных случаях и, аналогично, пропорциональна k^2 в трехмерных случаях. В каждом случае плотность также пропорциональна «размеру» части пространства, заключенного внутри границы: длине для одного измерения, площади для двух и т. д. Если уравнение есть уравнение Гельмгольца, а интервал не искривлен, то эти «размеры» являются настоящими длинами, площадями и т. д.; но если координаты криволинейные и линии или поверхности, составляющие границу, искривлены, то «размеры» являются эффективными длинами, площадями и т. д., равными интегралам от некоторых комбинаций коэффициентов Ламе, подобным интегралу $\int V \sqrt{r/p} dz$ для одномерного случая.

Непрерывное распределение собственных значений. Из предыдущего рассуждения мы видим, что при возрастании размера области промежутки между собственными значениями уменьшаются. Например, в одномерном случае средняя разность между последовательными собственными значениями, согласно формуле (6.3.52), равна отношению π к эффективной длине $\int \sqrt{r/p} dz$ интервала. Если эта длина стремится к бесконечности, то промежутки между собственными значениями стремятся к нулю, и в конце концов все значения λ (или k), большие наименьшего значения, становятся собственными значениями. В этом предельном случае получается непрерывное распределение собственных значений, и наши представления рядами превращаются в интегральные представления.

Этот переход можно показать, развивая наш первый пример, приведенный на стр. 659. Допустим, что расстояние a между концами интервала изменения x неограниченно возрастает. Тогда длина волны собственной функции $\sin(\pi nx/a)$ при данном n , а также нормирующая постоянная $E_n = \sqrt{a/2}$ этой функции будут расти. Ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{a} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a f(\zeta) \sin \frac{\pi n \zeta}{a} d\zeta$$

сохранит свой общий вид, но каждый отдельный член будет уменьшаться по величине и (для данного конечного значения x) будет изменяться все менее и менее быстро при переходе от n к следующему n ; при росте n каждый член становится исчезающе малым, а скорость изменения коэффициентов в квадратных скобках — исчезающе медленной. При переходе к пределу целесообразно применять не n в качестве переменной суммирования, а квадратный корень $k = \pi n/a$ из константы разделения λ . Промежутки между допустимыми значениями этой переменной становятся все меньше и меньше, пока в конце концов k не станет непрерывной переменной и суммирование по n не превратится в интеграл по k от нуля до бесконечности.

Когда a растет, среднее число $(a/\pi) dk$ собственных значений k между k и $k + dk$, выражаемое формулой (6.3.52), становится все ближе и ближе к истинному числу, так как на любом конечном сегменте dk находится все больше и больше допустимых значений k . В то же время последовательные члены суммы, взятые для собственных функций при этих собственных значениях внутри dk , отличаются друг от друга все меньше и меньше (во всяком случае, для конечных значений x), так что в конечном счете можно представить сумму всех членов между $n = ak/\pi$ и $n + (a dk/\pi)$ в виде

$$\frac{a dk}{\pi} \sin kx \cdot \frac{2}{a} \int_0^a f(\zeta) \sin k\zeta d\zeta,$$

и, когда a стремится к пределу, сумма в конце концов переходит в интеграл

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin kx \int_0^{\infty} f(\zeta) \sin k\zeta d\zeta dk, \quad (6.3.55)$$

который можно применять для представления любой кусочно-гладкой функции в интервале $0 < x < \infty$, обращающейся в нуль на концах интервала. Это — один из видов интеграла Фурье (см. стр. 429). К более общему

виду

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta \quad (6.3.56)$$

можно прийти, рассматривая более общие граничные условия, чем условие периодичности с периодом a функций от x .

Однако вовсе не обязательно получать свойства собственных функций для непрерывных собственных значений при помощи неуклюжего предельного процесса. С точки зрения функционального пространства вектор \mathbf{F} , представляющий любую функцию F , можно выразить через его компоненты $F(x)$ вдоль единичных векторов $e(x)$ (соответствующих каждому значению x из рассматриваемого интервала) или через его компоненты $f(k)$ вдоль другой системы единичных векторов $e(k)$ (соответствующих каждому допустимому значению k). Вместо одного непрерывного множества и одного дискретного множества мы имеем теперь два непрерывных множества, что дает более симметричную картину.

Собственные функции по-прежнему являются проекциями векторов $e(k)$ на векторы $e(x)$, но так как здесь получаются две системы единичных векторов, то эти собственные функции представляют собой теперь направляющие косинусы, и весь формализм приобретает значительную симметрию. Собственные функции $\psi(k, x)$ являются в одно и то же время как компонентами векторов $e(k)$ по векторам $e(x)$, так и компонентами векторов $e(x)$ по векторам $e(k)$. Распространяя формулы (6.3.17) на рассматриваемый случай, получаем, что компонента $F(x)$ произвольного вектора \mathbf{F} по направлению $e(x)$ связана с компонентой $f(k)$ вектора \mathbf{F} по направлению, задаваемому вектором $e(k)$, при помощи соотношений

$$F(z) = \int f(k) \psi(k, z) r(k) dk, \quad f(k) = \int F(z) \bar{\psi}(k, z) r(z) dz, \quad (6.3.57)$$

где функция $r(k)$ связана с плотностью собственных значений k вдоль оси k так же, как $r(x)$ связана с плотностью собственных значений вдоль x .

Интегрирование здесь производится по областям допустимых значений k и x , иногда от 0 до ∞ , но чаще от $-\infty$ до ∞ . Возможность устремления k к $-\infty$ не означает, что собственные значения λ не имеют нижней границы, так как $\lambda = k^2$, и если только k вещественно, то $\lambda > 0$. Кроме того, когда мы включаем отрицательные значения k , можно считать ϕ комплексной величиной (как e^{ikx} в примере), если пользоваться комплексно сопряженной величиной $\bar{\phi}$ во втором интеграле.

Свойства нормированности и ортогональности этих собственных функций выражаются при помощи формул, обобщающих формулы стр. 677:

$$\begin{aligned} r(k) \int \psi(k, z) \bar{\psi}(x, z) r(z) dz &= \delta(k - x), \\ r(z) \int \phi(k, z) \bar{\phi}(k, \zeta) r(k) dk &= \delta(z - \zeta), \end{aligned} \quad (6.3.58)$$

причем оба интеграла соответствуют дельта-функции. Функции ϕ представляют собой направляющие косинусы, поскольку и $e(x)$, и $e(k)$ являются единичными векторами, так что множители E_m равны единице и не присутствуют в формулах явно. Как всегда, для выражений, соответствующих дельта-функциям, они должны применяться в интегралах, а не в дифференциалах или сами по себе. Наиболее полезный вид нормирующего интеграла, соответствующего обычному определению дельта-функции

ции, таков:

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \delta(z - \zeta) d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{при } |z| > \Delta, \\ 1 & \text{при } |z| < \Delta. \end{cases}$$

Другими словами, в пределе при $\Delta \rightarrow 0$ получаем

$$\int_{k_0 - \Delta}^{k_0 + \Delta} r(x) dx \int \psi(k, z) \bar{\psi}(x, z) r(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{при } |k - k_0| > \Delta, \\ 1 & \text{при } |k - k_0| < \Delta \end{cases} \quad (6.3.59)$$

и аналогичное соотношение с переставленными z и k , соответствующее $\delta(z - \zeta)$. Обычно пределы второго интеграла сначала полагаются конечными, но большими (0 и R или $-R$ и R , где R велико), а затем распространяются до бесконечности для удобства вычислений.

В качестве примера рассмотрим уравнение Бесселя, получающееся при разделении уравнения Гельмгольца в полярных координатах:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 r - \frac{m^2}{r} \right) R = 0, \quad (6.3.60)$$

где m представляет собой константу разделения, которая порождается ф-множителем и является целой, если φ изменяется от 0 до 2π (другими словами, если Φ периодична по φ).

Если граничные условия для R состоят в том, что R конечна в осьной точке $r = 0$ и $R = 0$ при $r = a$, то собственными функциями являются функции Бесселя [см. формулу (5.3.63)]:

$$\begin{aligned} \psi_n(r) &= J_m(\alpha_n r/a), \quad J_m(\alpha_n) = 0, \\ k_n &= \alpha_n/a, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.3.61)$$

Эти функции ортогональны (с функцией плотности r):

$$\int_0^a J_m\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right) J_m\left(\frac{\alpha_l r}{a}\right) r dr = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq n, \\ -\frac{a^2}{2} J_{m+1}(\alpha_n) J_{m-1}(\alpha_n) & \text{при } l = n, \end{cases}$$

так что мы имеем полную систему собственных функций ($n = 0, 1, 2, \dots$) для каждого значения m .

Если a взять бесконечным, то собственные значения k будут образовывать непрерывное множество от $k = 0$ до бесконечности. Поэтому функция $J_m(kr)$ пропорциональна собственной функции для непрерывного k .

Для нормировки положим $\psi(k, z) = AJ_m(kz)$ и определим A , применяя формулу (6.3.59). Как указано выше, для упрощения вычислений следует положить верхний предел второго интеграла равным R , а затем устремить R к ∞ . Применяя асимптотическое выражение для J и производя вычисления при $m > 0$, имеем

$$\begin{aligned} A^2 \int_{k_0 - \Delta}^{k_0 + \Delta} x dx \int_0^R J_m(kz) J_m(xz) z dz &= \\ &= A^2 \int_{k_0 - \Delta}^{k_0 + \Delta} x dx \left[\frac{xR J_m(kR) J_{m-1}(xR) - kR J_m(xR) J_{m-1}(kR)}{k^2 - x^2} \right] \simeq \\ &\simeq A^2 \int_{k_0 - \Delta}^{k_0 + \Delta} x dx \left\{ \frac{2/\pi}{k^2 - x^2} \sin[(k - x)R] \right\} \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} \begin{cases} A^2 & \text{при } |k - k_0| < \Delta, \\ 0 & \text{при } |k - k_0| > \Delta. \end{cases} \end{aligned}$$

Окончательный результат справедлив также при $m = 0$. Поэтому нормирующая постоянная A равна единице, нормированная собственная функция равна как раз $J_m(kz)$, а выражение, соответствующее интегральной формуле Фурье (6.3.55), имеет вид

$$f(z) = \int_0^\infty J_m(kz) k dk \int_0^\infty f(\zeta) J_m(k\zeta) \zeta d\zeta \quad (6.3.62)$$

и называется *интегралом Фурье — Бесселя*.

Собственные значения для уравнения Шредингера. При решении уравнения Шредингера встречаются случаи, когда собственные значения дискретны для одного интервала значений и непрерывны для другого. Рассмотрение взаимосвязи между уравнением Шредингера [см. формулу (2.6.28)] и задачей Штурма — Лиувилля покажет, как это получается, и, быть может, прольет новый свет на результаты теории Штурма — Лиувилля [см. также исследование уравнений (12.3.25) и (12.3.27)].

Уравнение Шредингера для одного измерения имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi = 0, \quad (6.3.63)$$

где m — масса рассматриваемой частицы, E — ее полная энергия в рассматриваемом состоянии, V — потенциальная энергия и $\hbar = h/2\pi$ — видоизмененная постоянная Планка. Вероятность того, что частица находится между x и $x+dx$, пропорциональна $|\psi|^2 dx$, а средняя «плотность тока» частицы пропорциональна мнимой части $\bar{\psi} \cdot d\psi/dx$ (то есть если ψ является вещественной функцией для вещественного x , то результирующий средний ток равен нулю).

Согласно классической механике, частица может находиться только там, где энергия частицы E больше потенциальной энергии V ; в таких областях, чем больше значение $E - V$ (= кинетической энергии), тем больше плотность тока и тем меньше плотность вероятности нахождения частицы. Плотность вероятности нахождения частицы пропорциональна величине $(1/\text{скорость}) \sim 1/\sqrt{E-V}$, а вероятная плотность тока пропорциональна $\sqrt{E-V}$. Энергия E , всюду меньшая V , невозможна; возможны все энергии E , для которых E где-либо больше V . Если частица находится в минимуме потенциала, отделенного от другого минимума пиком высоты, большей E , то эта частица не может перейти из одного минимума в другой.

В противоположность этому уравнение Шредингера больше ограничивает допустимые значения энергии, но меньше ограничивает расположение частицы, как показывает вывод уравнения (стр. 234 и 299). Рассмотрим случай, когда $V(x)$ имеет минимум (который можно для удобства расположить в $x=0$), а асимптотическое значение V больше этого минимума, и исследуем уравнение с точки зрения задачи Штурма — Лиувилля (см. стр. 671).

Если E всюду меньше V , то решение уравнения (6.3.63) — не колеблющееся; оно ведет себя скорее как вещественные экспоненты e^x и e^{-x} , и никакая комбинация двух независимых решений не даст решения, конечного как при $x = -\infty$, так и при $x = +\infty$. Как указано на рис. 6.8, если решение стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$, то оно будет стремиться к бесконечности при $x \rightarrow +\infty$. Значит, энергия, меньшая $V(x)$ всюду вдоль вещественной оси x , не допускается.

Если E меньше, чем $V(-\infty)$ и $V(+\infty)$, но больше, чем $V(0)$, минимальное значение V , то ψ все еще ведет себя подобно вещественным экспо-

нентам в тех областях, где $E < V$, заворачивая от оси x ; но там, где $E > V$, она заворачивает к оси, подобно тригонометрической функции. Функция ϕ , начиная от нуля при $x = -\infty$, будет экспоненциально возрастать, пока x не достигнет значения, где $V(x) = E$, после чего ϕ будет в течение некоторого времени искривляться обратно к оси. После второй точки, где $V = E$, она будет вновь иметь экспоненциальное поведение. Для некоторого значения E , большего $V(0)$, это обратное искривление будет как раз достаточным для того, чтобы ϕ плавно перешла в функцию, подобную e^{-ax} справа от начала, так что ϕ искривляется вверх как раз настолько, чтобы обратиться в нуль при $x = +\infty$.

Это значение E является *наименьшим собственным значением* энергии. Соответствующая собственная функция имеет максимальное значение где-то вблизи $x = 0$, в области, где $E > V$. Это — область, внутри которой должна содержаться частица, согласно классической физике. Однако величина $|\phi|^2$ не становится внезапно равной нулю при $V > E$; она убывает по экспоненциальному закону к нулю в обе стороны, если E — собственное значение, так что, согласно волновой механике, имеется малая, но конечная вероятность нахождения частицы в области, где потенциальная энергия больше полной (то есть где кинетическая энергия отрицательна).

Если E возрастает дальше, то соответствующая функция ϕ вновь становится бесконечной при $x = +\infty$ или $x = -\infty$, пока при следующем собственном значении функция ϕ не сможет опять обратиться в нуль в обоих концах интервала. Эта собственная функция имеет узел где-то в области, в которой $E > V$.

И так этот процесс продолжается и дает только дискретное множество энергий, значения которых определяются требованием конечности ϕ , пока мы не достигнем энергии, равной наименьшему асимптотическому значению V (мы принимаем для упрощения формулировок, что $V(-\infty) < V(+\infty)$). Выше этой энергии E больше V от $-\infty$ до некоторого конечного положительного значения x , и ϕ колеблется во всей этой области x . Значит, ни одно решение рассматриваемого дифференциального уравнения не стремится к бесконечности при $x \rightarrow -\infty$, и мы можем выбрать для любого значения E подходящую линейную комбинацию, которая будет стремиться к нулю по экспоненциальному закону при $x \rightarrow +\infty$. Таким образом, *любое значение энергии, большее $V(-\infty)$, является допустимым*.

Так как экспоненциально исчезающие решения являются вещественными функциями для вещественного x , то собственные функции для дискретных энергий [меньших либо $V(-\infty)$, либо $V(\infty)$] всюду вещественны (более точно, фазовый угол этих собственных функций не зависит от x и вполне может быть взят равным нулю). Так как они вещественны и их производные вещественны, то средняя плотность тока (пропорциональная мнимой части $\bar{\phi} \cdot d\phi/dz$) равна нулю. Классическое объяснение этого состоит в том, что в точках, где V возрастает выше E , частица обращает направление своего движения, так что в каждой точке частицу можно с равной вероятностью найти идущей в любом из двух направлений и результирующий ток равен нулю.

Это верно и для непрерывной области собственных значений E между $V(-\infty)$ и $V(+\infty)$, так как частица здесь выходит из $-\infty$, отражается от потенциального «барьера» и возвращается в $-\infty$.

Если E больше и $V(-\infty)$, и $V(+\infty)$, то оба решения уравнения всюду конечны, так что можно выбирать любые их линейные комбинации. Некоторые из этих комбинаций дадут ненулевые значения для средней плотности тока в соответствии с классическим утверждением, что если E больше $V(-\infty)$ и $V(+\infty)$, то частица может пройти от $-\infty$ до $+\infty$.

без отражения. Весь этот вопрос будет рассмотрен позднее, в другой главе.

Дискретные и непрерывные собственные значения. В качестве примера этого рода поведения возьмем симметричный случай потенциальной функции $V = -V_0 \operatorname{ch}^{-2}(x/d)$ [см. формулу (12.3.22)]. Этот потенциал имеет минимум $-V_0$ при $x=0$ и возрастает асимптотически до нуля при $x \rightarrow \pm \infty$. После подходящего выбора масштаба и констант уравнение Шредингера (6.3.63) приобретает вид

$$(d^2\psi/dw^2) + (\lambda + Q \operatorname{ch}^{-2} w) \psi = 0, \quad w = x/d. \quad (6.3.64)$$

Дальнейшие преобразования, а именно подстановки $\lambda = -K^2$, $z = (1 + \operatorname{th} w)/2 = e^w/(e^w + e^{-w})$ и $\psi = \operatorname{ch}^{-K} w \cdot F(z)$, приводят к уравнению

$$z(z-1) \frac{d^2F}{dz^2} + (K+1)(2z-1) \frac{dF}{dz} + [K(K+1) - Q] F = 0,$$

которое является как раз уравнением (5.2.42) для гипергеометрической функции

$$F\left(K + \frac{1}{2} + P, K + \frac{1}{2} - P | K + 1 | z\right),$$

где $P = \sqrt{Q + \frac{1}{4}}$. Имеется и второе решение, но оно становится бесконечным при $z=0$. Значит, решение остающееся конечным при $x = -\infty$, имеет вид

$$\psi = \operatorname{ch}^{-K}(w) F\left(K + \frac{1}{2} + P, K + \frac{1}{2} - P | K + 1 | \frac{e^w}{e^w + e^{-w}}\right). \quad (6.3.65)$$

Рассмотрение формулы (5.2.49) показывает, что эта функция становится бесконечной при $z=1$ ($w \rightarrow \infty$), кроме случаев, когда величина $K + \frac{1}{2} - P$ является целой отрицательной, то есть когда $K = \sqrt{Q + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} - n$, где n может быть нулем или любым целым положительным числом, меньшим $\sqrt{Q + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$. Поэтому дискретные собственные значения λ , пропорциональные энергии, таковы:

$$\lambda_n = - \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{Q + \frac{1}{4}} \right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad n < \sqrt{Q + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}. \quad (6.3.66)$$

Для таких значений λ собственная функция ψ представляет собой многочлен относительно z . Заметим, что если Q положительно (то есть если имеется потенциальная «яма»), то будет существовать по крайней мере одно дискретное состояние ($n=0$), хотя других может не быть, если Q мало.

Для положительных значений энергии K мнимое и можно положить $K = ik$, где $\lambda = k^2$. В этом случае двумя независимыми решениями вблизи $z=0$ ($w \rightarrow \infty$) являются

$$[2\operatorname{ch} w]^{-ik} F\left(P + \frac{1}{2} + ik, -P + \frac{1}{2} + ik | 1 + ik | \frac{e^w}{e^w + e^{-w}}\right),$$

которое можно обозначить через $\psi(k)$, и

$$e^{-ikw} F\left(P + \frac{1}{2}, -P + \frac{1}{2} | 1 - ik | \frac{ew}{e^w + e^{-w}}\right),$$

которое можно обозначить через $\psi(-k)$. Таким образом, для каждого значения λ имеются две собственные функции. Для очень большого отрицательного w эти два решения приводятся к $e^{ikw} = e^{ikx/d}$ и $e^{-ikw} = e^{-ikx/d}$, причем обе эти функции конечны при $w = -\infty$. Одна представляет волну, идущую в положительном направлении (и соответственно имеющую положительную плотность тока), а другая — в отрицательном направлении (с отрицательной плотностью тока). Подобным образом оба решения конечны и вблизи $w = +\infty$ для всех значений k , так что допускается любое положительное значение параметра энергии λ .

В этом случае имеются как дискретные, так и непрерывные собственные значения. Наше разложение по собственным функциям должно включать ряд по немногим дискретным значениям (сумму по n для n , меньших $\sqrt{Q + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}$) и интеграл по k от $-\infty$ до $+\infty$ (включающий, таким образом, обе собственные функции для каждого положительного собственного значения λ). Чтобы получить явный вид суммы и интеграла с соответствующими значениями нормирующих множителей, требовался бы более подробный анализ задачи, чем это стоит делать здесь. Он будет проведен вновь в § 12.3.

Дифференцирование и интегрирование как операторы. Это исследование уравнения Шредингера (а также трактовка факторизации на стр. 678) может напомнить нам, что иногда полезно рассматривать дифференцирование и умножение на постоянную (и также интегрирование) как операторы. Рассмотрим вектор f с компонентами $f(x)$, вектор af с компонентами $af(x)$, вектор $\mathcal{P}f$ с компонентами $df(x)/dx$ и вектор $\mathcal{Q}f$ с компонентами

$$\int_0^x f(w) dw.$$

Эти операторы можно складывать (то есть "они удовлетворяют законам дистрибутивности и коммутативности для сложения"); например, вектор $(\mathcal{P} + \mathcal{Q}f) = (\mathcal{Q} + \mathcal{P})f$ имеет компоненты

$$\frac{d}{dx} f(x) + \int_0^x f(w) dw = \int_0^x f(w) dw + \frac{d}{dx} f(x).$$

Как \mathcal{P} , так и \mathcal{Q} коммутируют со скалярным оператором a , но \mathcal{P} не коммутирует с \mathcal{Q} , так как

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(w) dw = f(x), \quad \text{а} \quad \int_0^x \frac{d}{dw} f(w) dw = f(x) - f(0),$$

и потому

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} = 1, \quad \text{тогда как} \quad \mathcal{Q}\mathcal{P} \neq 1, \tag{6.3.67}$$

где 1 — единичный оператор. Однако если следить за порядком перемножения, то интегральный оператор \mathcal{Q} можно рассматривать как обратный к дифференциальному оператору \mathcal{P} и записывать в виде \mathcal{P}^{-1} .

Как \mathcal{F} , так и \mathcal{F}^{-1} можно итерировать. Компонентами $\mathcal{F}^n \mathbf{f}$ являются $(d^n/dx^n) f(x)$, а компонентами $\mathcal{F}^{-n} \mathbf{f}$ —

$$\int_0^x du_1 \int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_{n-1}} du_n f(u_n).$$

Положительные степени \mathcal{F} , действующие на постоянный вектор \mathbf{A} , дают нуль, в то время как отрицательные степени дают ненулевой результат. Например, компонентами $\mathcal{F}^{-n} \mathbf{A}$ служат $Ax^n/n!$ При помощи интегрирования по частям можно видеть, что компонентами $\mathcal{F}^{-2} \mathbf{f}$ служат

$$\int_0^x du \int_0^u f(w) dw = \int_0^x (x-w) f(w) dw.$$

Повторное применение этого соображения показывает, что компонентами $\mathcal{F}^{-n} \mathbf{f}$ являются

$$\int_0^x \frac{(x-w)^{n-1}}{(n-1)!} f(w) dw. \quad (6.3.68)$$

С рядами из операторов (при обычных условиях сходимости) можно обращаться в точности так же, как с обыкновенными рядами. Например, компонентами вектора

$$\left\{ \sum_n a_n \mathcal{F}^{-n} \right\} \mathbf{f} \text{ служат } \int_0^x \left[\sum_n a_n \frac{(x-w)^{n-1}}{(n-1)!} \right] f(w) dw,$$

если ряд из интегралов сходится. Посредством этого можно определить смысл выражений, содержащих обратные операторы, таких, как $[\mathcal{F}^{-1}/(1 - \alpha \mathcal{F}^{-1})] \mathbf{f}$. Подходя к этому выражению формально, мы подсчитаем его при помощи разложения в ряд по степеням \mathcal{F}^{-1} . Компоненты получающегося при этом вектора $(\mathcal{F}^{-1} + \alpha \mathcal{F}^{-2} + \alpha^2 \mathcal{F}^{-3} + \dots) \mathbf{f}$ равны

$$\int_0^x \left[1 + \alpha \frac{x-w}{1!} + \alpha^2 \frac{(x-w)^2}{2!} + \dots \right] f(w) dw = e^{\alpha x} \int_0^x e^{-\alpha w} f(w) dw; \quad (6.3.69)$$

результат неожиданно компактный.

Чтобы увидеть, как можно применить эту технику, и, кстати, чтобы до некоторой степени сделать законным это несколько беззаботное обращение с символами, подсчитаем решение дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} - \alpha y = f(x). \quad (6.3.70)$$

Обычными средствами можно найти, что решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = y(0) e^{\alpha x} + e^{\alpha x} \int_0^x e^{-\alpha w} f(w) dw.$$

Для решения уравнения (6.3.70) символьским методом заметим, что оно эквивалентно операторному уравнению $(\mathcal{F} - \alpha) y = \mathbf{f}$, которое после интегрирования по x приобретает вид

$$\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} y - \alpha \mathcal{F}^{-1} y = \mathcal{F}^{-1} \mathbf{f}.$$

Применяя формулу (6.3.67) и деля обе части на $1 - \alpha\mathcal{P}^{-1}$, мы найдем, что $y(x)$ как раз равно компонентам вектора

$$[\mathcal{P}^{-1}\mathbf{f} + y(0)]/(1 - \alpha\mathcal{P}^{-1}) = y(0) + \mathcal{P}^{-1}[\mathbf{f} + \alpha y(0)]/(1 - \alpha\mathcal{P}^{-1}),$$

то есть в силу (6.3.69) равно

$$y(0) + e^{\alpha x} \int_0^x e^{-\alpha w} [f(w) + \alpha y(w)] dw,$$

что совпадает с решением, полученным обычным путем.

Надо заметить, что обе части уравнения (6.3.70), записанного в операторном виде, нельзя было непосредственно делить на $\mathcal{P} - \alpha$. В противном случае y равнялось бы компонентам вектора $(\mathcal{P} - \alpha)^{-1}\mathbf{f}$, и результат не включал бы необходимую постоянную $y(0)$.

Эта техника, намеченная здесь, будет исследована более подробно позже. Сейчас мы хотим указать только, что дифференциальные уравнения можно рассматривать как изображения *операционных уравнений* с операторами \mathcal{P} и \mathcal{P}^{-1} , соответствующими дифференцированию и интегрированию, и что такие операционные уравнения поддаются некоторому количеству алгебраических преобразований, если учитывать ограничения в отношении коммутиирования.

Задача о собственных значениях в абстрактном векторном пространстве. Вопрос о дискретных собственных значениях и о допустимых решениях имеет значительно более широкую область приложений, чем только дифференциальные уравнения, как показывает внимательный просмотр § 2.6 и подсказывает аналогия в абстрактном векторном пространстве. Во многих случаях в теоретической физике имеет место ситуация, которую можно описать при помощи некоторого рода оператора, действующего на вектор. Так, в случае упругости это оператор растяжения (или сжатия), действующий на обычный трехмерный вектор и дающий результирующее смещение; в случае обыкновенного дифференциального уравнения это комбинация только что определенных операторов \mathcal{P} , действующая на «вектор», соответствующий функции $\psi(x)$ (которую можно рассматривать как компоненту вектора вдоль направления единичного вектора $e(x)$); в случае уравнения Дирака оператор представляет собой комбинацию операторов, переставляющих четыре компоненты $\psi_1(x), \dots, \psi_4(x)$, и дифференциальных операторов, действующих на x . В каждом из этих случаев можно говорить о векторе \mathbf{F} и об операторе \mathfrak{A} , который, вообще говоря, переводит \mathbf{F} в другой вектор \mathbf{E} , как об этом говорилось в § 1.6.

Вектор \mathbf{F} можно описать при помощи его компонент вдоль подходящих осей координат (x, y, z -компоненты вдоль декартовых осей для упругого смещения, значения $F(x)$ при каждом x как компоненты вдоль осей, соответствующих векторам $e(x)$, для дифференциальных уравнений, различные спиральные состояния для уравнения Дирака и т. д.). Оператор должен быть задан соответственно при помощи матрицы компонент

$$\mathbf{F} = \sum_n F_n e_n, \quad \mathfrak{A} = \sum_{mn} \mathbf{e}_m A_{mn} \mathbf{e}_n^*$$

[см. формулу (1.6.35)],

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{F} = \sum_m \left(\sum_n A_{mn} F_n \right) \mathbf{e}_m = \mathbf{E},$$

где матрица (A_{mn}) изображает \mathfrak{A} . Если рассматриваемые оси повернуть, то

компоненты \mathbf{F} и \mathfrak{A} изменяются в соответствии с обычными правилами преобразования, данными в гл. 1.

Представлением о системе осей, соответствующих единичным векторам e_n , можно пользоваться и в случае, когда «индексы» являются непрерывными переменными (как для $e(x)$), и скалярное произведение надо изображать в виде интеграла по x вместо суммы по индексу n . Таким же образом необходимо перейти от сумм к интегралам и в других местах, где это требуется. В связи с этим надо напомнить рассуждения, следовавшие за формулой (6.3.7).

Например, пусть операторному уравнению $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{E}$ соответствует дифференциальное уравнение $\mathcal{A}_x F(x) = E(x)$, где \mathcal{A}_x представляет собой обыкновенный дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{A}_x = f(x) \frac{d^2}{dx^2} + g(x) \frac{d}{dx} + h(x),$$

который мы исследовали в этой главе. Тогда скалярному произведению $(\mathbf{G}^* \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathbf{F})$ будет соответствовать интеграл

$$\int_a^b \overline{G}(x) \mathcal{A}_x F(x) dx$$

\overline{G} является комплексно сопряженным к G) и т. д.

Почти во всех интересных случаях оператор \mathfrak{A} является эрмитовым; это означает, что его эрмитово сопряженный оператор \mathfrak{A}^* , получающийся, если заменить в матрице строки на столбцы и затем перейти к комплексно сопряженной матрице, равен самому \mathfrak{A} . Мы вывели некоторые следствия этого требования на стр. 86 – 90. Посмотрим, что это значит для дифференциального оператора, компоненты которого соответствуют континууму значений x .

Эрмитово сопряженным к оператору \mathfrak{A} является такой оператор \mathfrak{A}^* , что если $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{E}$, то $\mathbf{E}^* = \mathbf{F}^* \cdot \mathfrak{A}^*$, другими словами,

$$\mathbf{G}^* \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathbf{F}) = (\mathfrak{A}^* \cdot \mathbf{G})^* \cdot \mathbf{F}. \quad (6.3.71)$$

Если оператор вещественный, то понятие эрмитовой сопряженности соответствует понятию сопряженности для дифференциальных операторов, данному на стр. 499. Например, в интегральном виде левую часть формулы (6.3.71) можно записать как

$$\int_a^b \overline{G}(x) \mathcal{A}_x F(x) dx = \int_a^b \overline{G}(x) \left[f \frac{d^2 F}{dx^2} + g \frac{d F}{dx} + h F \right] dx.$$

Но согласно формуле (5.2.10), последний интеграл равен

$$\int_a^b [\widetilde{\mathcal{A}}_x G] F dx + [P(\overline{G}, F)]_a^b,$$

где $\widetilde{\mathcal{A}}_x$ представляет собой сопряженный дифференциальный оператор, определенный равенством

$$\frac{d^2}{dx^2} (fG) - \frac{d}{dx} (gG) + hG = \widetilde{\mathcal{A}}_x G$$

и исследованный на стр. 548. Если как $F(x)$, так и $G(x)$ удовлетворяют соответствующим граничным условиям при $x = a$ и b , то присоединенная

билинейная форма $P(\bar{G}, F)$ равна нулю в a и b , и мы получаем

$$\int_a^b \bar{G} \mathcal{A}_x F dx = \int_a^b [\widetilde{\mathcal{A}}_x G] F dx,$$

что соответствует соотношению (6.3.71), определяющему оператор, сопряженный к \mathcal{A}_x . Это значит, что наше применение слова *сопряженный* в связи с обобщенными операторами \mathcal{A} соответствует нашему применению того же слова для обычного дифференциального оператора \mathcal{A}_x , если оператор \mathcal{A}_x вещественный. Если оператор \mathcal{A}_x не вещественный, то его эрмитово сопряженный будет комплексно сопряженным к его сопряженному оператору, $\mathcal{A}^* = \widetilde{\mathcal{A}}$. Следовательно, обычный дифференциальный оператор, *самосопряженный* в смысле, указанном на стр. 669, соответствует вещественному *эрмитову оператору*, самосопряженному в операторном смысле. (Мы уже видели, что уравнение Лиувилля является самосопряженным.) Этот вопрос мы исследуем более полно в § 7.5.

Если \mathcal{A} эрмитов, то, будет ли он дифференциальным оператором или оператором более общего вида, имеет место равенство

$$(G^* \cdot \mathcal{A} \cdot F) = (F \cdot \mathcal{A}^* \cdot G^*). \quad (6.3.72)$$

Это означает, что если \mathcal{A} эрмитов, то величина $(F^* \cdot \mathcal{A} \cdot F)$ вещественная, независимо от того, каков вектор F . В квантовой механике эта величина обычно называется *средним значением* \mathcal{A} в состоянии, характеризуемом вектором F . Если \mathcal{A} соответствует физической величине (положению, импульсу и т. д.), то его среднее значение, конечно, должно быть вещественным.

В большом числе случаев это среднее значение $(F^* \cdot \mathcal{A} \cdot F)$ не только вещественно, но *всегда положительно* для всех (ненулевых) векторов F . В таких случаях оператор называется *положительно определенным* эрмитовым оператором.

Каждому оператору \mathcal{A} отвечает совокупность *собственных векторов* E_n , для которых

$$\mathcal{A} \cdot E_n = a_n E_n,$$

где a_n представляет собой собственное значение \mathcal{A} , соответствующее E_n . Из сказанного выше легко вывести, что если оператор \mathcal{A} является эрмитовым или положительно определенным, то *все его собственные значения будут соответственно вещественными или положительными*. Как мы видели выше, собственные значения могут образовывать ряд дискретных значений, или непрерывную область, или же комбинацию и того и другого.

Мы уже исследовали собственные векторы несколько раз; наша цель здесь — увязать наши предыдущие результаты с результатами настоящего параграфа о собственных функциях. Например, в связи с формулой (1.6.9) мы показали, что собственные векторы заданного оператора взаимно ортогональны, чему соответствует тот результат, что собственные функции для данного дифференциального уравнения и данных граничных условий являются взаимно ортогональными. Можно, конечно, нормировать наши собственные векторы, чтобы получить ортогональную систему единичных векторов e_n . Их имеется столько же, сколько «измерений» в абстрактном векторном пространстве, соответствующем оператору \mathcal{A} . Следовательно, любой вектор в том же абстрактном пространстве можно выразить через его компоненты вдоль главных осей оператора \mathcal{A} :

$$F = \sum_n F_n e_n, \quad F_n = (F^* \cdot e_n).$$

Это кажущееся очевидным утверждение соответствует основной теореме о разложении для собственных функций. Чтобы показать общность этой теоремы, доказанной ранее для дифференциальных операторов, наметим здесь рассуждение для общего оператора \mathcal{A} . Для того чтобы собственные векторы данного оператора \mathcal{A} образовывали *полную систему*, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. \mathcal{A} *самосопряженный* (или *эрмитов*), то есть для любого вектора F скалярное произведение $(F^* \cdot \mathcal{A} \cdot F)$ вещественно.

2. \mathcal{A} *положительно определенный*, то есть для любого вектора F произведение $(F^* \cdot \mathcal{A} \cdot F)$ больше нуля.

3. Уравнение для собственных векторов

$$\mathcal{A} \cdot E_n = a_n E_n \quad (6.3.73)$$

соответствует некоторому вариационному принципу. Такой принцип может быть совершенно общим. Например, можно подсчитывать скалярную (вещественную и положительную) величину

$$D(F) = (F^* \cdot \mathcal{A} \cdot F) / (F^* \cdot F) \quad (6.3.74)$$

для произвольного вектора F . Вариационное требование, чтобы F был вектором, для которого D имеет *минимальное* значение, дает собственный вектор E_0 уравнения (6.3.73), а значение D при $F = E_0$ как раз равно собственному значению a_0 .

Для доказательства этого рассмотрим вариацию D , когда F и F^* меняются на произвольные малые величины δF и δF^* , и потребуем, чтобы $\delta D = 0$. Умножая (6.3.74) на $(F^* \cdot F)$ и варьируя, мы получаем с учетом того, что $\delta D = 0$,

$$D[(\delta F^* \cdot F) + (F^* \cdot \delta F)] = [(\delta F^* \cdot \mathcal{A} \cdot F) + (F^* \cdot \mathcal{A} \cdot \delta F)],$$

или

$$[\delta F^* \cdot (\mathcal{A} \cdot F - DF)] + [(F^* \cdot \mathcal{A} - DF^*) \cdot \delta F] = 0.$$

Так как δF^* и δF являются произвольными независимыми вариациями, то вариационное требование, таким образом, эквивалентно равенству (6.3.73) и его сопряженному, причем D равно a .

Как было указано выше, вектор, дающий минимальное значение D , равен E_0 , а соответствующее значение D равно наименьшему (нижнему) собственному значению a_0 (которое больше нуля, поскольку \mathcal{A} — положительно определенный оператор).

Вектор, дающий минимальное значение D при дополнительном требовании ортогональности к E_0 , равен E_1 , а соответствующее значение D равно следующему собственному значению a_1 . Для доказательства этого утверждения надо считать, что с оператором \mathcal{A} можно обращаться, как если бы он был аналитической функцией, то есть что операторы \mathcal{A}^{-1} , $\sqrt{\mathcal{A}}$ и т. д. имеют тот же смысл, что и их алгебраические двойники. Мы указывали, что это возможно для дифференциальных и интегральных операторов.

Если это так, то можно показать, что собственные векторы любой функции $\mathfrak{H}(\mathcal{A})$, которую можно выразить в виде ряда по степеням \mathcal{A} , равны соответствующим собственным векторам \mathcal{A} , а собственные значения равны эквивалентной функции $H(a_n)$ от соответствующих собственных значений a_n . Отсюда следует, что решения вариационной задачи $\delta B = 0$, где

$$B = [F^* \cdot \mathfrak{H}(\mathcal{A}) \cdot F] / (F^* \cdot F),$$

равны как раз собственным векторам E_n , решениям уравнения (6.3.73), если соответствующая алгебраическая функция $H(a)$ всегда вещественна и положительна для вещественного положительного a . Получающиеся стационарные значения B равны значениям $H(a_n)$. (Доказательство этого утверждения можно предоставить читателю; конечно, оно верно, только если оператор \mathfrak{A} положительно определенный.)

Произведение $K = [F^* \cdot (\mathfrak{A} - a_0) \cdot F]$, где a_0 — наименьшее собственное значение \mathfrak{A} , не может быть отрицательным, независимо от выбора вектора F , как показывает рассмотрение вариационного уравнения. Также не может быть отрицательным произведение $J = [F^* \cdot (\mathfrak{A} - a_0)(\mathfrak{A} - a_1) \cdot F]$, где a_1 — следующее собственное значение, так как минимальные значения выражения

$$\frac{J}{F^* \cdot F} = \frac{F^* \cdot \left[\mathfrak{A} - \frac{1}{2}(a_0 + a_1) \right]^2 \cdot F}{F^* \cdot F} - \frac{1}{4}(a_0 - a_1)^2$$

достигаются для F , равного либо E_0 , либо E_1 . Для этих двух векторов J равно нулю, тогда как K равно нулю только для $F = E_0$. Следовательно, величина J/K *нигде не отрицательна и равна нулю лишь при $F = E_1$* . Из этого последнего предложения можно вывести, что утверждение, которое мы сделали выше и хотели доказать, уже доказано. Для этого мы построим вектор $G = \sqrt{\mathfrak{A} - a_0} F$, который автоматически ортогонален низшему собственному вектору E_0 ($G^* \cdot E_0 = 0$), а в остальном совершенно произведен. Составим затем бариационное отношение

$$D(G) = \frac{G^* \cdot \mathfrak{A} \cdot G}{G^* \cdot G} = \frac{J}{K} + a_1.$$

Предложение, выделенное курсивом, показывает, что минимальное значение D достигается для $G = \sqrt{a_1 - a_0} E_1$ и равно a_1 , что и надо было доказать.

Показав, что минимальное значение D для вектора, ортогонального к E_0 , равно a_1 , а соответствующий вектор равен E_1 , можно продолжить рассуждения и прийти к тому, что

$$D(G) \geq a_{s+1}, \text{ если } G^* \cdot E_m = 0, m = 0, 1, \dots, s; \quad (6.3.75)$$

это равносильно утверждению, приведенному перед формулой (6.3.21).

Для общего случая произвольного оператора может не быть бесконечной последовательности собственных значений. Если векторное пространство имеет только n измерений (то есть если все векторы в пространстве можно выразить в виде линейной комбинации лишь n взаимно ортогональных векторов), то имеется ровно n собственных векторов и n собственных значений (в вырожденных случаях некоторые из собственных значений могут равняться друг другу, но все равно будет n взаимно ортогональных собственных векторов), так как пока можно составить вектор, ортогональный первым s собственным векторам, по-прежнему можно найти новый собственный вектор и соответствующее собственное значение. Только при $s = n$ будет невозможно найти вектор, ортогональный предыдущим, и тогда последовательность оборвется. Следовательно, для векторного пространства конечного числа измерений число взаимно ортогональных собственных векторов равно числу измерений, и эта система собственных векторов будет полной, так как, по определению, любой вектор в этом пространстве можно выразить в виде линейной комбинации такого числа попарно ортогональных векторов.

Для векторных пространств бесконечного числа измерений доказательство полноты не так просто [см. рассуждения, следующие за формулой (6.3.7)]. Сначала надо доказать, что последовательность собственных значений стремится к бесконечности, когда n стремится к бесконечности. Однако доказательство этой теоремы для положительно определенного эрмитова оператора наиболее общего вида завело бы нас слишком далеко в сложные вопросы современной алгебры. На стр. 673 мы показали, что это верно для дифференциальных операторов типа Лиувилля. Это верно также для квантовомеханических операторов, имеющих бесконечное число допустимых состояний. Если мы допустим, что это верно в общем случае, то наше доказательство полноты получится по той же схеме, что и доказательство, приведенное на стр. 685—687. Так как рассуждения в терминах абстрактных операторов «чище», чем рассуждения для дифференциальных уравнений, то мы вновь бегло проведем доказательство.

Желая выразить произвольный вектор G через единичные собственные векторы e_m , мы построим конечную сумму

$$S_n = \sum_{m=0}^n C_m e_m, \quad C_m = e_m^* \cdot G, \quad (6.3.76)$$

где

$$\mathfrak{A} \cdot e_m = a_m e_m \text{ и } e_m^* \cdot e_s = \delta_{ms}.$$

Вектор

$$J_n = G - S_n$$

ортогонален первым $n+1$ собственным векторам \mathfrak{A} , так как $e_m^* \cdot J_n = 0$ при $m \leq n$. Отсюда по формуле (6.3.75) получаем, что

$$D(J_n) = \frac{1}{J_n^* \cdot J_n} [J_n^* \cdot \mathfrak{A} \cdot J_n] \geq a_{n+1},$$

или

$$\begin{aligned} J_n^* \cdot J_n &\leq \frac{1}{a_{n+1}} \left[\left(G^* - \sum_{m=0}^n \bar{C}_m e_m^* \right) \cdot \mathfrak{A} \cdot \left(G - \sum_{m=0}^n C_m e_m \right) \right] = \\ &= \frac{1}{a_{n+1}} \left[(G^* \cdot \mathfrak{A} \cdot G) - \sum_{m=0}^n a_m |C_m|^2 \right]. \end{aligned}$$

Однако второй член в квадратных скобках положителен, так как он равен сумме произведений квадратов величин на собственные значения (которые все положительны). Значит,

$$J_n^* \cdot J_n < \frac{1}{a_{n+1}} (G^* \cdot \mathfrak{A} \cdot G).$$

Поскольку ни одна из величин в скобках (так же как и a_{n+1}) не может быть отрицательной и $(G^* \cdot \mathfrak{A} \cdot G)$ не зависит от n , а $a_{n+1} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, мы имеем $(J_n^* \cdot J_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и потому J_n , равный разности между произвольным вектором G и первыми $n+1$ членами его разложения в ряд по собственным векторам e_m , стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. Значит, полный ряд ($n \rightarrow \infty$) равен вектору G , и мы вновь доказали, что e_n образуют полную систему собственных векторов.

Подобным образом любой оператор (в том же абстрактном пространстве) можно выразить через его компоненты вдоль главных осей для \mathfrak{A} .

В частности, сам оператор \mathfrak{A} имеет особенно простой вид

$$\mathfrak{A} = \sum_n \mathbf{e}_n a_n \mathbf{e}_n^*, \text{ т. е. } A_{mn} = a_n \delta_{mn},$$

где a_n есть собственное значение оператора \mathfrak{A} , соответствующее собственному вектору \mathbf{e}_n . Другими словами, матрица оператора, отнесенная к собственным главным осям, является *диагональной матрицей*.

Другие общие свойства, применимые равным образом к абстрактным векторным операторам и к обычным дифференциальным операторам, были уже рассмотрены в §§ 1.6 и 2.6; еще некоторые будут выведены позже. Теперь должно быть очевидно, что абстрактное векторное изображение имеет значительное преимущество в простоте из-за наличия простой геометрической аналогии, делающей неоценимой эту новую точку зрения почти во всех наших задачах.

Задачи к главе 6

6.1. Сеточный потенциал $\varphi(m, n)$ удовлетворяет разностному уравнению (6.2.6) и должен удовлетворять граничным условиям на граничных линиях $n=0, n=5, m=0, m=5$. Показать, что решение, удовлетворяющее требованию, что φ принимает значение φ_v в v -й граничной точке, имеет вид

$$\varphi(m, n) = \sum_v G(m, n | v) \varphi_v,$$

где $G(m, n | v)$ представляет собой решение уравнения (6.2.6), равное нулю во всех граничных точках, кроме v -й, где оно имеет единичное значение. Показать, что все G можно получить из этих функций, построенных для точек (0,1) и (0,2). Подсчитать эти две G с точностью до трех десятичных знаков для каждого внутреннего узла.

6.2. Показать, что решение разностного уравнения Пуассона

$$\psi(m+1, n) + \psi(m-1, n) + \psi(m, n+1) + \psi(m, n-1) - 4\psi(m, n) = F(m, n),$$

где $F(m, n)$ — заданная функция и $\psi = 0$ во всех граничных точках, равно

$$\psi(m, n) = \sum_{\mu, v} G(m, n | \mu, v) F(\mu, v),$$

где $G(m, n | \mu, v)$ представляет собой решение разностного уравнения Пуассона, если $F(\mu, v) = 1$, все прочие $F = 0$ и $G = 0$ во всех граничных точках. Каковы значения G для 4×4 -сетки задачи 6.1? Как можно скомбинировать эти результаты с результатами задачи 6.1, чтобы получить общее решение уравнения Пуассона, удовлетворяющее общим граничным условиям?

6.3. Дифференциальное уравнение является простым параболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

а граница состоит из линий $x=0, x=\pi$ и $t=0$. Показать, что при граничном условии $\psi=0$ для $x=0$ и $x=\pi$ решение при $t \geq 0$ имеет вид

$$\psi(x, t) = \sum_{v=1}^{\infty} A_v \sin vx \cdot \exp(-v^2 t),$$