ГЛАВА 7

Функции Грина

В предыдущей главе мы начали изучение центральной задачи теории поля, состоящей в построении решения данного дифференциального уравнения при заданных граничных условиях. В ней мы исследовали технику разложения по собственным функциям — метод, приводящий к цели прямым путем, если только можно найти подходящую для рассматриваемых границ систему координат, допускающую разделение переменных в рассматриваемом уравнении с частными производными. Однако результат обычно получается в виде бесконечного ряда, который часто сходится довольно медленно, что затрудняет общий анализ поведения решения в целом, его особенностей у краев и т. д. Для некоторых видов задач более желательно иметь решение в замкнутой форме, хотя бы в форме интеграла, включающего замкнутые функции. Использование функций Грина представляет собой как раз такой подход.

Этот метод достаточно очевиден физически. Для получения поля, порожденного некоторым распределением источников (зарядов, или источников тепла, или чем бы то ни было, что порождает поле), мы подсчитываем эффект от каждой элементарной части источника и складываем все эти эффекты. Если $G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)$ представляет собой поле в *точке наблюдения* $\mathbf{r}$, порожденное единичным точечным источником в *точке источника* $\mathbf{r}_0$, то поле в $\mathbf{r}$, порожденное совокупностью источников, распределенных с плотностью $\rho(\mathbf{r}_0)$, равно интегралу от $G\cdot\rho$ по всей области изменения $\mathbf{r}_0$, занятой источником. Функция G называется *функцией Грина*.

Этим методом можно также строить решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям. Именно, мы подсчитываем поле в $\mathbf{r}$, когда граничные значения решения (или его нормальной производной, в зависимости от того, рассматриваются ли условия Дирихле или Неймана) равны нулю в каждой точке поверхности, *за исключением* точки $\mathbf{r}_0^s$ (которая находится на поверхности). В $\mathbf{r}_0^s$ граничное значение имеет характер дельта-функции, так что интеграл от него по малому участку поверхности вблизи $\mathbf{r}_0^s$ равен единице. Это поле в $\mathbf{r}$ (*не* на границе) можно обозначить через $G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0^s)$; тогда общее решение для произвольного выбора граничных значений $\phi_0(\mathbf{r}_0^s)$ (или нормальной производной N_0) равно интегралу от $G\phi_0$ (или GN_0) по граничной поверхности. Эти функции G также называются функциями Грина.

Тот факт, что решение неоднородного уравнения для поля, порожденного распределением источников, можно найти в виде интеграла по пространству от произведения плотности источников на функцию Грина, не особенно удивителен, так же как и то, что решение однородного уравнения, имеющее заданные значения на границе, можно получить в виде интеграла по граничной поверхности от произведения этих значений на другую функцию Грина. Однако полезно и (возможно) неожиданно то, что эти две функции Грина *не* являются различными; *по существу это одна и та же функция*. Для каждого из линейных уравнений с частными производными

гл. 1—3 можно получить функцию, которая, будучи проинтегрирована по объему, изображает поле распределенных источников. Если же ее (или ее нормальную производную) проинтегрировать по поверхности, то она будет изображать поле, порожденное граничными условиями, заданными на поверхности.

Физически это означает, что задание граничных условий на поверхности эквивалентно заданию распределения источников на этой поверхности. Для электростатического случая это, возможно, не новое положение. Граничное условие на заземленном проводнике состоит в равенстве потенциала на поверхности нулю. Помещая поверхностное распределение диполей непосредственно около границы проводника (двигаясь из проводника внутрь области, занятой полем, мы пересечем сначала поверхность проводника, затем бесконечно близкую поверхность, на которой распределен заряд плотности $+\sigma$, и затем бесконечно близкую поверхность с зарядом плотности $-\sigma$), мы получим, что значения потенциала непосредственно около дипольного слоя отличаются от нуля на величину, пропорциональную плотности момента дипольного слоя (произведению σ на расстояние между $+\sigma$ и $-\sigma$). Это не так ново и в случае потока несжимаемой жидкости. Граничное условие на твердой поверхности состоит в равенстве нулю нормальной производной от потенциала скорости на поверхности. Помещение бесконечно близко от этой твердой границы простого слоя источников даст на ней значения нормальной производной потенциала скорости, пропорциональные поверхностной плотности слоя источников. Как мы увидим, такая возможность удовлетворять граничным условиям при помощи поверхностных интегралов от функций источника делает применение функций источника (функций Грина) особенно полезным.

Желательно подчеркнуть связь между источниками и граничными условиями посредством выбора терминологии. Уравнение поля в присутствии источников является *неоднородным* уравнением с частными производными (например, уравнением Пуассона $\nabla^2\psi = -4\pi\rho$). Неоднородный член, не содержащий ψ, содержит плотность источников ρ. Обратно, уравнение поля, в котором отсутствуют источники, является *однородным* уравнением (например, уравнением Лапласа $\nabla^2\psi = 0$).

Аналогично можно сказать (и мы уже говорили), что граничные условия, требующие равенства поля нулю на поверхности, являются *однородными граничными условиями* (нулевые значения дают однородные условия Дирихле; нулевая нормальная производная — однородные условия Неймана; требование равенства $a\psi + b\partial\psi/\partial n$ нулю на поверхности дает однородные смешанные условия).

Обратно, требование, чтобы ψ принимало заданные значения ψ_0 (не всюду равные нулю) на поверхности, называется *неоднородным* условием Дирихле; в этом случае граничные значения можно считать «порожденными» поверхностным дипольным слоем источников, соответствующих неоднородному уравнению. Подобным образом требование, чтобы $\partial\psi/\partial n = N_0$ (N_0 — не всюду нуль) на поверхности, называется неоднородным условием Неймана, а требование $a\psi + b\partial\psi/\partial n = F_0$ на поверхности можно назвать неоднородным смешанным условием. Если либо уравнение, либо граничные условия неоднородны, то можно считать, что источники присутствуют; если и уравнение, и граничные условия однородны, то источники отсутствуют.

Конечно, имеется другая, более очевидная причина того, что в обоих случаях применяется одно и то же определяющее прилагательное. Решения однородных уравнений, умноженные на произвольный постоянный множитель, все равно остаются решениями, и то же можно сказать о функциях, удовлетворяющих однородным граничным условиям; решения неоднородных уравнений или функции, удовлетворяющие неоднородным граничным условиям, нельзя так преобразовывать.

Поэтому функция Грина является решением для случая, когда *однородность имеет место всюду, кроме одной точки*. Если точка на границе, то функцию Грина можно применять, чтобы удовлетворить неоднородным граничным условиям; если точка находится в пространстве вне границы, то функцию Грина можно применять, чтобы удовлетворить неоднородному уравнению. Таким образом, при помощи нашей терминологии мы в состоянии высказывать утверждения, справедливые одновременно для граничных условий и для распределений источников.

7.1. Точки источников и граничные точки

В предыдущей главе мы применяли понятия абстрактного векторного пространства для «геометризации» наших функциональных идей. Функция $F(x, y, z)$ рассматривалась как удобное обозначение для записи компонент вектора $\mathbf{F}$ вдоль каждого направления из несчетного множества направлений, соответствующих всем точкам (x, y, z) области внутри границы. Дельта-функция $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ изображала единичный (относительно интегрирования в первой степени) вектор $\mathbf{e}(\mathbf{r}_0)$ в направлении, соответствующем точке (x_0, y_0, z_0) (где $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$; следует заметить, что $\mathbf{r}$ представляет собой вектор в трехмерном пространстве, тогда как $\mathbf{e}$ и $\mathbf{F}$ являются векторами в абстрактном векторном пространстве).

Формулировка в абстрактном векторном пространстве. В гл. 6 и § 1.6 мы исследовали преобразование координат при переходе от осей, направленных вдоль единичных векторов $\mathbf{e}(\mathbf{r})$, к осям, направленным вдоль единичных векторов $\mathbf{e}_n$, которые соответствовали собственным функциям — решениям ψ_n определенных дифференциальных уравнений

$$\mathscr{L}(\psi_n)=\lambda_n\psi_n.$$

Векторы $\mathbf{e}_n$ являются собственными векторами абстрактного векторного оператора $\mathfrak{L}$, соответствующего дифференциальному оператору $\mathscr{L}$:

$$\mathfrak{L}(\mathbf{e}_n)=\lambda_n\mathbf{e}_n. \tag{7.1.1}$$

Мы показали, что единичные векторы $\mathbf{e}_n$ взаимно ортогональны и что вектор, соответствующий искомому решению, удовлетворяющему заданным граничным условиям, можно построить однозначно в виде суммы отдельных собственных векторов:

$$\mathbf{F}=\sum A_n\mathbf{e}_n, \quad \text{или} \quad F(x, y, z)=\sum A_n\psi_n(x, y, z).$$

Так как дифференциальные операторы $\mathscr{L}$ и соответствующие векторные операторы $\mathfrak{L}$ *линейны*, то решения можно складывать; на основе этого строится решение в виде ряда. Был развит метод непосредственного вычисления компонент A_n, в результате чего наша абстрактная схема дала сильную, практичную технику решения краевых задач.

Очевидно, что возможны и другие полезные разложения $\mathbf{F}$. Одна из таких возможностей проявляется при изучении неоднородного уравнения

$$\mathscr{L}(F)=-4\pi\rho(x, y, z). \tag{7.1.2}$$

Для решения этого уравнения при помощи собственных функций мы разлагаем как ρ, так и F по собственным функциям. Если вектор, соответствующий ρ, равен $\mathbf{P}=\sum B_n\mathbf{e}_n$ и если принять, что $\mathbf{F}=\sum A_n\mathbf{e}_n$, то неизвестные коэффициенты A_n можно определить при помощи подстановки в уравнение

$$\mathfrak{L}(\mathbf{F})=-4\pi\mathbf{P}, \quad \sum\lambda_n A_n\mathbf{e}_n=-4\pi\sum B_n\mathbf{e}_n.$$

Однако неоднородный вектор $\mathbf{P}$ можно было бы разложить по единичным векторам $\mathbf{e}(x_0, y_0, z_0)$ вместо $\mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{P} = \sum_{x_0, y_0, z_0} \rho(x_0, y_0, z_0)\, \mathbf{e}(x_0, y_0, z_0),$$

что соответствует формуле (представляющей собой одно из определений дельта-функции)

$$\rho(x, y, z) = \iiint \rho(\mathbf{r}_0)\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\, dx_0\, dy_0\, dz_0.$$

Затем мы решаем более простое неоднородное уравнение

$$\mathfrak{L}(\mathbf{G}) = -4\pi \mathbf{e}(x_0, y_0, z_0) \tag{7.1.3}$$

(если это возможно). Компоненты решения $\mathbf{G}$ в (x, y, z)-системе являются решениями более простого неоднородного дифференциального уравнения

$$\mathscr{L}(G) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{7.1.4}$$

Компоненты G, полученные из решения уравнения (7.1.4), являются функциями как координат x, y, z (независимых переменных дифференциального оператора $\mathscr{L}$), так и x_0, y_0, z_0 (положения «источника» дельта-функции), соответствующих единичному вектору $\mathbf{e}(x_0, y_0, z_0)$, выбранному в уравнении (7.1.3). В конце § 7.5 мы покажем, что функции $\mathbf{G}(x, y, z \mid x_0, y_0, z_0) = \mathbf{G}(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0)$ для различных значений x_0, y_0, z_0 являются компонентами вдоль направления $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ скорее *оператора*, чем вектора. Этот оператор переводит вектор $\mathbf{P}$, неоднородную часть, в вектор $\mathbf{F}$ — решение. Ввиду линейности мы ожидаем, что решением уравнения

$$\mathfrak{L}(\mathbf{F}) = -4\pi \sum_{x_0, y_0, z_0} \rho(\mathbf{r}_0)\, \mathbf{e}(\mathbf{r}_0) \text{ будет } \mathbf{F} = \sum_{x_0, y_0, z_0} \rho(\mathbf{r}_0)\, \mathbf{G}(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0), \tag{7.1.5}$$

т. е. сумма всех отдельных решений для единичных векторов в правой части, каждое из которых умножено на соответствующую амплитуду $\rho(\mathbf{r}_0)$. Следовательно, надо ожидать, что решением неоднородного дифференциального уравнения (7.1.2) будет

$$F(x, y, z) = \iiint G(x, y, z \mid x_0, y_0, z_0)\, \rho(x_0, y_0, z_0)\, dx_0\, dy_0\, dz_0, \tag{7.1.6}$$

где G является решением уравнения (7.1.4) и называется *функцией Грина*. Таким образом, с абстрактной векторной точки зрения получается, что решение посредством функций Грина есть представление через единичные векторы $\mathbf{e}(x, y, z)$, тогда как решение посредством собственных функций есть представление через единичные векторы $\mathbf{e}_n$. Значительно более полное исследование этого представления будет дано в конце этой главы.

В этой главе мы наметим, как находить единичные решения G и определять, когда представления сходятся, а также рассмотрим другие уточняющие детали, аналогичные тем, которые мы изучили в предыдущей главе, прежде чем смогли уверенно применять технику собственных функций.

Граничные условия и поверхностные заряды. Мы еще не показали, чем может помочь возможность решать неоднородное *уравнение* (с однородными граничными условиями) при решении однородного уравнения с неоднородными *граничными условиями*. Прежде чем вдаваться в детали, разберем простой пример, который, быть может, пояснит принцип. Позже будет показано, что решение уравнения Пуассона

$$\nabla^2 G = -4\pi\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

с однородными условиями Дирихле ($G=0$ на поверхности S на рис. 7.1) представляет собой функцию, стремящуюся к бесконечности как $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$ при $\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0$. Здесь мы хотим лишь указать, что упомянутое решение G

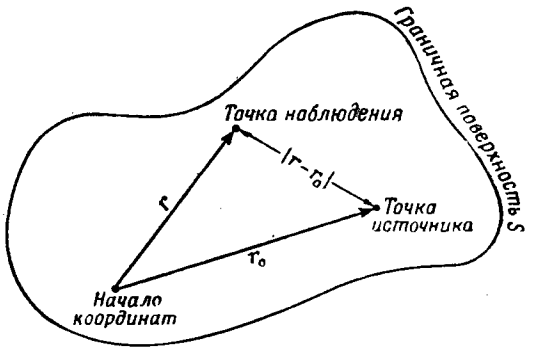

Рис. 7.1. Точка источника, точка наблюдения и граничная поверхность для функции Грина.

можно применить как для построения решения при произвольном распределении заряда внутри поверхности S, так и *для построения решения при произвольных граничных условиях Дирихле* на S (т. е. для $\psi=\psi_s$ на поверхности).

Действительно, заменим неоднородные граничные условия на однородные, но при этом добавим поверхностное распределение зарядов, расположенных внутри области, где ищется решение, бесконечно близко к граничной поверхности. Увеличим картину вблизи граничной поверхности, как

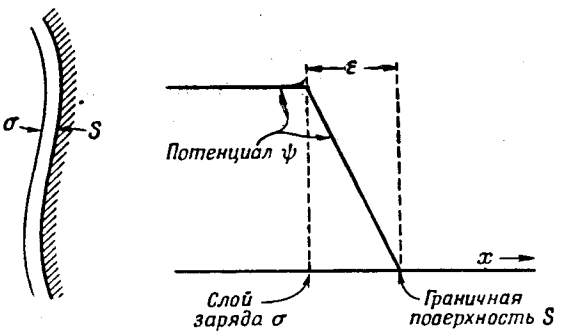

Рис. 7.2. Потенциал слоя источника σ на малом расстоянии ε вне заземленной поверхности.

показано на рис. 7.2. Плотность поверхностного заряда, заменяющего неоднородные граничные условия, возьмем равной σ/ε, где ε — малое расстояние от поверхности S. Возьмем ε значительно меньшим радиуса кривизны поверхности, а также меньшим расстояний, на которых σ заметно меняется. Итак, мы заменяем неоднородные условия на однородные плюс этот слой заряда, так что мы теперь требуем, чтобы потенциал на граничной поверхности равнялся нулю. Для расстояний порядка ε поверхность можно считать плоскостью (которую можно принять за плоскость y, z), а плотность заряда σ/ε можно считать равномерной.

Таким образом, мы приходим к задаче о плоском поверхностном заряде с постоянной поверхностной плотностью σ/ε, расположенном на расстоянии ε параллельно заземленному плоскому проводнику при $x=0$. Из элементарной электростатики вспоминаем, что при переходе через поверхностный заряд с плотностью σ/ε нормальная составляющая градиента потенциала меняется скачком на величину $4\pi\sigma/\varepsilon$. Так как ε очень мало, то градиент между зарядом и границей должен быть несравненно больше, чем градиент по другую сторону поверхностного заряда вблизи от него, и вторым по сравнению с первым можно пренебречь.

Следовательно, градиент между $x=-\varepsilon$ и $x=0$ должен приближенно равняться $-4\pi\sigma/\varepsilon$, а потенциал в этой области должен быть равным

$$\psi=-(4\pi\sigma/\varepsilon)\,x, \qquad -\varepsilon<x<0,$$

и потому потенциал по другую сторону поверхностного заряда при $x=-\varepsilon$ вблизи него должен быть равен $\psi=4\pi\sigma$. Отсюда, если сделать поверхностную плотность σ/ε слоя поверхностного заряда, бесконечно близкого к заземленной поверхности, равной $\psi_s/(4\pi\varepsilon)$, то *потенциал при приближении к поверхностному заряду со стороны $x<-\varepsilon$ будет как раз равняться* ψ_s, т. е. граничному значению, которому мы хотели удовлетворить.

Таким образом, мы сделали правдоподобной идею о том, что решение однородного уравнения, удовлетворяющее неоднородным граничным условиям, эквивалентно решению неоднородного уравнения, удовлетворяющему однородным граничным условиям, с неоднородной частью, представляющей поверхностный слой заряда с плотностью, пропорциональной неоднородным граничным значениям, бесконечно близкий к граничной поверхности. Конечно, мы не *доказали* этой эквивалентности; мы сделали только ее правдоподобной. Мы также не увидели, где эквивалентность теряется (можно ожидать, например, что эквивалентность нарушается между слоем заряда и поверхностью). Однако, указав цель, мы сможем легче найти путь к ее достижению.

Между прочим, было бы нетрудно сделать правдоподобным удовлетворение неоднородных условий Неймана при помощи подобной замены на однородные условия (нулевая $\partial\psi/\partial n$ на S) плюс поверхностный слой у границы с поверхностной плотностью, пропорциональной заданной на границе нормальной производной. Таким образом, мы начинаем видеть, как решения неоднородных уравнений связаны с решениями для неоднородных условий и как поверхностный слой может заменить граничные условия.

Простой пример. Прежде чем разбирать задачу во всей ее общности, мы рассмотрим некоторые подробности на простом примере. Возьмем двумерное уравнение Пуассона

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-4\pi\rho\,(x,\ y) \tag{7.1.7}$$

внутри прямоугольной границы $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. Прежде всего мы напомним полученное методом собственных функций решение в случае $\rho=0$ (однородное уравнение) при однородных граничных условиях ($\psi=0$) на трех сторонах $x=0$, $x=a$, $y=0$, но неоднородных условиях ($\psi=\psi_b(x)$) вдоль стороны $y=b$. Согласно формуле (6.3.2), это решение имеет вид

$$\psi\,(x,\ y)=\int\limits_0^a \psi_b\,(\xi)\,G^b\,(x,\ y\,|\,\xi)\,d\xi,$$

где

$$G^b(x, y \mid \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\pi n y/a)}{\operatorname{sh}(\pi n b/a)} \sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi n \xi}{a}. \tag{7.1.8}$$

Величина G^b в квадратных скобках является функцией координат x и y, а также положения ξ на линии $y = b$. Ее можно назвать *функцией Грина* для граничных условий на этой линии $y = b$. Для получения решения мы умножаем эту функцию на заданное граничное значение ψ и интегрируем по границе.

Чтобы показать, как связана эта функция с решением уравнения Пуассона для точечного источника (точечный источник для двух измерений — это то же, что линейный источник для трех измерений), мы далее исследуем две формы решения неоднородного уравнения (которое, согласно формуле (7.1.4), является уравнением для функции Грина с точечным источником в x_0, y_0)

$$\nabla^2\psi = -4\pi\delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0) \tag{7.1.9}$$

при однородных граничных условиях $\psi = 0$ на всех четырех граничных линиях.

В непосредственной близости от источника $[R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \ll a^2, b^2]$ решение должно вести себя так, как если бы границы вообще не было. Решение уравнения (7.1.9) для границы на бесконечности есть $\psi = -2\ln R = -\ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$, так что можно было бы ожидать, что решение уравнения (7.1.9) для конечной границы стремится к бесконечности как $-2\ln R$, когда расстояние R становится значительно меньшим расстояния между точкой источника (x_0, y_0) и ближайшей границей.

Имеются два пути решения уравнения (7.1.9) (и потому также уравнения (7.1.7)). Один, более простой аналитически и более тяжелый с вычислительной точки зрения, состоит в разложении в двойной ряд Фурье

$$\psi = \sum_{m,\,n} A_{mn} \sin\frac{\pi m x}{a} \sin\frac{\pi n y}{b}.$$

Этот ряд не является решением уравнения Лапласа $\nabla^2\psi = 0$, но мы вскоре покажем, что он *может* быть решением уравнения Пуассона (7.1.7); при этом, чтобы быть решением уравнения (7.1.9), он должен удовлетворять уравнению Лапласа всюду, *кроме одной точки* (x_0, y_0). Для решения уравнения (7.1.7) разложим $\rho(x, y)$ в ряд Фурье:

$$\rho(x, y) = \sum_{m,\,n} P_{mn} \sin\frac{\pi m x}{a} \sin\frac{\pi n y}{b},$$

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta \sin\frac{\pi m \xi}{a} \sin\frac{\pi n \eta}{b}\, \rho(\xi, \eta),$$

и подставим оба ряда в (7.1.7). Тогда можно будет определить коэффициенты A_{mn}, и в результате мы получим решение

$$\psi(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{m,\,n} \frac{P_{mn}}{(m/a)^2 + (n/b)^2} \sin\frac{\pi m x}{a} \sin\frac{\pi n y}{b} =$$

$$= \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta\, G(x, y \mid \xi, \eta)\, \rho(\xi, \eta), \tag{7.1.10}$$

где

$$G(x, y \mid \xi, \eta) = \frac{16}{\pi ab} \sum_{m, n} \frac{\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sin(m\pi\xi/a) \sin(n\pi\eta/b)}{(m/a)^2 + (n/b)^2}$$

есть функция Грина для неоднородного уравнения. Нетрудно видеть, что G является решением уравнения (7.1.9) для однородных граничных условий. Она равна потенциалу в точке (x, y) от единичного точечного заряда в (ξ, η). Плохая сходимость ряда проистекает из того, что он должен стремиться к бесконечности как логарифм, когда (x, y) стремится к (ξ, η) (как мы указали несколько выше и докажем в следующем параграфе). Для более хорошего распределения ρ ряд (7.1.10) сходится быстрее.

Еще одно свойство G, которым вообще обладают все эти функции Грина: *она симметрична относительно перестановки* (x, y) *и* (ξ, η). Другими словами, потенциал в (x, y), порожденный зарядом в (ξ, η), равен потенциалу в (ξ, η), порожденному тем же зарядом в (x, y), если граничные условия не меняются. Этот вывод, что перестановка источника и наблюдателя не меняет G, иногда называется *принципом взаимности*.

Связь между объемной и поверхностной функциями Грина. Однако ряд (7.1.10) все еще далек от выражения, стоящего в квадратных скобках в (7.1.8). Прежде всего это выражение является простым рядом, тогда как ряд (7.1.10) — двойной. Попытаемся решить уравнение (7.1.7) при помощи простого ряда. Для этого положим

$$\psi(x, y) = \sum_m F_m(y) \sin\frac{\pi m x}{a}, \quad \rho(x, y) = \sum_m \rho_m(y) \sin\frac{\pi m x}{a}, \tag{7.1.11}$$

где F_m требуется подсчитать, а

$$\rho_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a \rho(\xi, y) \sin\frac{\pi m \xi}{a}\, d\xi.$$

Подстановка в уравнение (7.1.7) дает для $F_m(y)$ обыкновенное неоднородное уравнение

$$\frac{d^2}{dy^2} F_m - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 F_m = -4\pi\rho_m(y).$$

Чтобы применить формулу (5.2.19) для решения такого уравнения, заметим, что двумя независимыми решениями однородной части будут

$$y_1 = \operatorname{sh}(\pi m y/a), \quad y_2 = \operatorname{sh}[(\pi m/a)(b - y)].$$

Эти решения независимы, так как их определитель Вронского

$$\Delta(y_1, y_2) = -\frac{\pi m}{a}\left[\operatorname{sh}\frac{\pi m y}{a} \operatorname{ch}\frac{\pi m}{a}(b - y) + \operatorname{ch}\frac{\pi m y}{a} \operatorname{sh}\frac{\pi m}{a}(b - y)\right] =$$
$$= -(\pi m/a) \operatorname{sh}(\pi m b/a)$$

отличен от нуля (и постоянен, как это и должно быть). Подставляя все это в (5.2.19) и выбирая пределы интегрирования такими, чтобы F_m равнялось нулю при $y = 0$ и $y = b$, имеем

$$F_m(y) = \frac{4a}{m \operatorname{sh}(\pi m b/a)} \left\{\operatorname{sh}\frac{\pi m y}{a} \int_y^b \rho_m(\eta) \operatorname{sh}\frac{\pi m}{a}(b - \eta)\, d\eta + \right.$$
$$\left. + \operatorname{sh}\frac{\pi m}{a}(b - y) \int_0^y \rho_m(\eta) \operatorname{sh}\frac{\pi m \eta}{a}\, d\eta\right\} = \int_0^b g_m(y \mid \eta)\, \rho_m(\eta)\, d\eta,$$

где

$$g_m(y\,|\,\eta)=\frac{4a}{m\,\mathrm{sh}\,(\pi mb/a)}\times\begin{cases}\mathrm{sh}\,(\pi my/a)\cdot\mathrm{sh}\,[(\pi m/a)\,(b-\eta)] & \text{для } \eta>y,\\ \mathrm{sh}\,(\pi m\eta/a)\cdot\mathrm{sh}\,[(\pi m/a)\,(b-y)] & \text{для } \eta<y.\end{cases}$$

Функция $g_m(y\,|\,\eta)$ обращается в нуль, когда y или η равно нулю или b, и ее производная имеет разрыв (см. стр. 123) величины -4π при $y=\eta$.

Наконец, подставляя все эти решения вновь в формулу (7.1.11), мы получаем простую форму для решения:

$$\psi(x,\,y)=\int\limits_0^a d\xi\int\limits_0^b G(x,\,y\,|\,\xi,\,\eta)\,\rho(\xi,\,\eta)\,d\eta, \tag{7.1.12}$$

где

$$G(x,\,y\,|\,\xi,\,\eta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{8\sin\frac{\pi mx}{a}\cdot\sin\frac{\pi m\xi}{a}}{m\,\mathrm{sh}\,(\pi mb/a)}\times\begin{cases}\mathrm{sh}\,(\pi my/a)\cdot\mathrm{sh}\,[(\pi m/a)\,(b-\eta)] & \text{для } \eta>y,\\ \mathrm{sh}\,(\pi m\eta/a)\cdot\mathrm{sh}\,[(\pi m/a)\,(b-y)] & \text{для } \eta<y.\end{cases}$$

Так как этот интеграл для ψ имеет тот же вид, что и интеграл в формуле (7.1.10), то и функция G, данная здесь, должна равняться G, данной там. Простой (но утомительный) процесс разложения g_m в ряд Фурье по y показывает, что обе функции G в самом деле тождественны.

Однако при помощи этого последнего выражения для G можно лучше выяснить связь между решением неоднородного уравнения при однородных граничных условиях и данным в (7.1.8) решением однородного уравнения при неоднородных граничных условиях; действительно, если единственным зарядом внутри границ является поверхностный заряд с плотностью $(1/4\pi\varepsilon)\,\psi_b(\xi)$, расположенный на исчезающе малом расстоянии ε от поверхности $y=b$, то при $\eta=b-\varepsilon$, т. е. в единственном месте, где ρ отлично от нуля, имеем

$$G(x,\,y\,|\,\xi,\,b-\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\sim}\sum_m\frac{8\pi\varepsilon}{a}\sin\frac{\pi mx}{a}\cdot\sin\frac{\pi m\xi}{a}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,(\pi my/a)}{\mathrm{sh}\,(\pi mb/a)},\qquad y<b-\varepsilon.$$

Так как область $b-\varepsilon<y<b$ должна стать исчезающе малой, то она не будет участвовать в нашем рассмотрении, хотя надо помнить, что в этой бесконечно узкой области производная от G претерпевает разрыв, обращаясь в нуль при $y=b$. Подставляя последнее значение для G в формулу (7.1.12), можно видеть, что потенциал, порождаемый тонким слоем заряда поверхностной плотности $(1/4\pi\varepsilon)\,\psi_b(x)$ на бесконечно малом расстоянии ε от заземленной пластинки $y=b$, представляется точно тем же интегралом, что и потенциал (7.1.8), получающийся, когда на поверхности $y=b$ задается неоднородное граничное условие $\psi_b(x)$.

Общее решение. Можно прийти к тому же равенству двух решений несколько иным путем, возможным при более общих условиях. Заметим, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,\,y\,|\,\xi,\,\eta)\right]_{y<\eta}\underset{\eta\to b}{\longrightarrow}-4\pi G_b(x,\,y\,|\,\xi), \tag{7.1.13}$$

где G_b определено формулой (7.1.8), так что равенство (7.1.8) можно переписать следующим образом:

$$\psi(x,\,y)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\psi_0(S_0)\left[\frac{\partial}{\partial n_0}G(x,\,y\,|\,S_0)\right]dS_0, \tag{7.1.14}$$

где величина в квадратных скобках есть производная функции $G(x,\,y\,|\,x_0,\,y_0)$ от x_0, y_0 по нормали к граничной поверхности S_0 (в данном случае S_0 есть $y_0=b$, так что производная берется по y_0 или η), причем координаты

x_0, y_0 берутся на этой поверхности. Интеграл от этой производной, умноженной на заданное граничное значение ψ_0, берется по поверхности (в данном случае интегрирование производится по x_0 или ξ).

Эта стенографическая запись раскрывает соотношение между функцией Грина для неоднородного уравнения и функцией Грина для неоднородных граничных условий, но о некоторых вещах ничего не говорит. Например, в ней не указана структура разрыва функции G, получающегося, когда точка (x_0, y_0) стремится к поверхности S_0 (производная от G имеет *разрыв* при $y = y_0 = \eta$, который попадает прямо на поверхность, когда точка (x_0, y_0) достигает поверхности). Получающееся решение ψ не имеет разрыва *внутри* области, окруженной граничной поверхностью, но должен иметься разрыв как раз на самой границе (на самом деле этот разрыв должен быть таким, чтобы ψ равнялась нулю непосредственно за поверхностью и равнялась $\psi_0(S_0)$ непосредственно внутри поверхности в области, окруженной границей).

При дальнейшем применении формулы (7.1.14) надо заботиться о том, чтобы при получении функции Грина для граничных условий из $G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)$ сначала устремить «точку источника» (x_0, y_0) к поверхности S_0 и только после этого позволить точке (x, y) приблизиться к соответствующей граничной поверхности S пространства «точек наблюдения». Переходя к пределу в этом порядке, мы видим из формул (7.1.13) и (7.1.8), что, когда сначала η стремится к b, а затем y стремится к b, предел равен

$$\frac{\partial}{\partial\eta} G(x, y\,|\,\xi, \eta) \to -\frac{8\pi}{a} \sum_n \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{n\pi\xi}{a} = -4\pi\,\delta(x-\xi).$$

Значит, функция Грина для поверхности (вычисленная на поверхности) является дельта-функцией, соответствующей граничным условиям, равным нулю всюду, кроме точки $x = \xi$. Это, конечно, соответствует нашему интуитивному представлению о природе функции Грина.

Подведем итоги: для решения краевых задач, помимо техники собственных функций, имеется другой метод, в котором решается неоднородное уравнение при однородных граничных условиях для «точечного источника» в некоторой точке $\mathbf{r}_0$ внутри границы. Получающаяся функция $G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)$, функция Грина для внутреннего объема, симметрична относительно перестановки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$, разрывна или имеет разрывную производную при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ и удовлетворяет по $\mathbf{r}$ однородным граничным условиям на граничной поверхности S, а по $\mathbf{r}_0$ — на аналогичной поверхности S_0. Решение общего неоднородного уравнения имеет вид (7.1.12), т. е. $\psi(\mathbf{r})$ получается при интегрировании $G\rho$ по $\mathbf{r}_0$-области внутри S_0.

Если однородные граничные условия, которым удовлетворяет G, состоят в том, что $G = 0$ на S и S_0, то решение для неоднородных граничных условий [$\psi = \psi(S)$ на S] имеет вид (7.1.14), где производная от G берется в координатах $\mathbf{r}_0$ по нормали к S_0 для $\mathbf{r}_0$, исчезающе близкого к S_0. Далее, точка $\mathbf{r}_0$ устремляется «на» S_0 и интегрирование после умножения на $\psi(S_0)$ производится по граничной *поверхности*.

Если однородными граничными условиями на G служат условия Неймана (нулевая нормальная производная от G на S), то решение для неоднородных условий ($\partial\psi/\partial n = N(S)$ на S) имеет вид

$$\psi(x, y) = 4\pi \int_{S_0} N(S_0)\, G(x, y\,|\,S_0)\, dS_0. \tag{7.1.15}$$

Это будет доказано позже. Рассмотрения этого параграфа не заканчивают нашего «доказательства» формулы (7.1.14); они только начинают наше исследование.

Функция Грина и производящие функции. Формулы (7.1.8) — (7.1.12) показывают, что функции Грина и собственные функции тесно связаны. Позже в этой главе мы получим общую формулу для разложения функции Грина по собственным функциям. Нетрудно показать, что такие формулы разложения служат обильным источником производящих функций для собственных функций [см. формулу (6.3.32)]. В случае, исследуемом в этом параграфе, мы получаем производящую функцию, интегрируя функцию $G_b(x, y \mid \xi)$, определенную формулой (7.1.8), по ξ от нуля до a. Только члены с нечетным n дают ненулевые интегралы, так что, разлагая гиперболический синус на составляющие его экспоненты, имеем

$$\int_0^a G_b(x, y \mid \xi)\, d\xi = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[(2n+1)(\pi y/a)]}{\operatorname{sh}[(2n+1)(\pi b/a)]} \frac{\sin[(2n+1)(\pi x/a)]}{(2n+1)} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^{2n+1}}{2n+1} \frac{\sin[(2n+1)(\pi x/a)]}{\operatorname{sh}[(2n+1)(\pi b/a)]}, \qquad \gamma = e^{\pi y/a}. \quad (7.1.16)$$

Это соотношение не особенно полезно, так как функция G_b не дана в замкнутом виде. Однако легко видеть, что если возможно получить замкнутый вид для G, то тем самым можно построить производящие функции для соответствующих собственных функций.

7.2. Функции Грина для установившихся колебаний

Прежде чем приступить к более сложным случаям, целесообразно упростить обозначения, возвратившись к векторной символике. Точке x, y, z в трехмерном пространстве соответствует радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Функция Грина $G(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0)$ зависит от положения двух точек: *точки наблюдения*, в которой поле измеряется, имеющей радиус-вектор $\mathbf{r}$ и *координаты* x, y, z *наблюдателя*, и *точки источника*, в которой помещается единичный источник, имеющий радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ и *координаты источника* x_0, y_0, z_0. Граничная поверхность в координатах x, y, z обозначается буквой S, а в координатах x_0, y_0, z_0 — буквой S_0. Функция Грина с точкой наблюдения в $\mathbf{r}$ и с источником на границе обозначается через $G(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0^s)$. Элемент объема в пространстве переменных x, y, z обозначается через $dv\,(= dxdydz)$, аксиальный вектор, изображающий элемент граничной поверхности S, обозначается через $d\mathbf{A}$, и элемент граничной поверхности S_0—через $d\mathbf{A}_0$. Оба эти вектора направлены *наружу*, из объема, заключенного внутри границы.

Элемент нормальной составляющей градиента G на поверхности в координатах источника можно тогда записать в виде $\operatorname{grad}_0 G(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0^s) \cdot d\mathbf{A}_0$, где индекс нуль у градиента указывает, что производную надо брать по x_0, y_0, z_0. Дельта-функцию для трех измерений можно записать в виде $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$; она имеет интегральное свойство

$$\iiint F(\mathbf{r})\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\, dv = F(\mathbf{r}_0). \qquad (7.2.1)$$

Наконец, ∇_0^2 с индексом нуль есть оператор Лапласа в координатах источника, тогда как в координатах наблюдателя он обозначается просто ∇^2.

Теорема Грина. Чтобы получить вполне строгий вывод свойств функции Грина, будет выгодно воспользоваться вариантом теоремы Гаусса. Для любой замкнутой поверхности S теорема Гаусса, записанная формулой (1.4.7), утверждает, что поток любого «достаточно гладкого» векторного поля через поверхность S (наружу) равен интегралу от дивергенции