

Функция Грина и производящие функции. Формулы (7.1.8) – (7.1.12) показывают, что функции Грина и собственные функции тесно связаны. Позже в этой главе мы получим общую формулу для разложения функции Грина по собственным функциям. Нетрудно показать, что такие формулы разложения служат обильным источником производящих функций для собственных функций [см. формулу (6.3.32)]. В случае, исследуемом в этом параграфе, мы получаем производящую функцию, интегрируя функцию $G_b(x, y | \xi)$, определенную формулой (7.1.8), по ξ от нуля до a . Только члены с нечетным n дают ненулевые интегралы, так что, разлагая гиперболический синус на составляющие его экспоненты, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^a G_b(x, y | \xi) d\xi &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[(2n+1)(\pi y/a)]}{\operatorname{sh}[(2n+1)(\pi b/a)]} \frac{\sin[(2n+1)(\pi x/a)]}{(2n+1)} = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^{2n+1}}{2n+1} \frac{\sin[(2n+1)(\pi x/a)]}{\operatorname{sh}[(2n+1)(\pi b/a)]}, \quad \gamma = e^{\pi y/a}. \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

Это соотношение не особенно полезно, так как функция G_b не дана в замкнутом виде. Однако легко видеть, что если возможно получить замкнутый вид для G , то тем самым можно построить производящие функции для соответствующих собственных функций.

7.2. Функции Грина для установившихся колебаний

Прежде чем приступить к более сложным случаям, целесообразно упростить обозначения, возвратившись к векторной символике. Точки x, y, z в трехмерном пространстве соответствуют радиус-вектор $\mathbf{r} = xi + yj + zk$. Функция Грина $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ зависит от положения двух точек: *точки наблюдения*, в которой поле измеряется, имеющей радиус-вектор \mathbf{r} и *координаты* x, y, z *наблюдателя*, и *точки источника*, в которой помещается единичный источник, имеющий радиус-вектор \mathbf{r}_0 и *координаты источника* x_0, y_0, z_0 . Границная поверхность в координатах x, y, z обозначается буквой S , а в координатах x_0, y_0, z_0 — буквой S_0 . Функция Грина с точкой наблюдения в \mathbf{r} и с источником на границе обозначается через $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^S)$. Элемент объема в пространстве переменных x, y, z обозначается через $dv (= dx dy dz)$, аксиальный вектор, изображающий элемент граничной поверхности S , обозначается через dA , и элемент граничной поверхности S_0 — через dA_0 . Оба эти вектора направлены *наружу*, из объема, заключенного внутри границы.

Элемент нормальной составляющей градиента G на поверхности в координатах источника можно тогда записать в виде $\operatorname{grad}_0 G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^S) \cdot dA_0$, где индекс нуль у градиента указывает, что производную надо брать по x_0, y_0, z_0 . Дельта-функцию для трех измерений можно записать в виде $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$; она имеет интегральное свойство

$$\iiint F(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = F(\mathbf{r}_0). \quad (7.2.1)$$

Наконец, ∇_0^2 с индексом нуль есть оператор Лапласа в координатах источника, тогда как в координатах наблюдателя он обозначается просто ∇^2 .

Теорема Грина. Чтобы получить вполне строгий вывод свойств функции Грина, будет выгодно воспользоваться вариантом теоремы Гаусса. Для любой замкнутой поверхности S теорема Гаусса, записанная формулой (1.4.7), утверждает, что поток любого «достаточно гладкого» векторного поля через поверхность S (наружу) равен интегралу от дивергенции:

этого поля по всему объему, заключенному внутри S . Под «достаточной гладкостью» мы понимаем то, что вектор не должен иметь разрывов в величине или в производной на S и что дивергенция интегрируема.

Рассмотрим теперь две «достаточно гладкие» скалярные функции $U(\mathbf{r})$ и $V(\mathbf{r})$ от \mathbf{r} . По ним построим вектор $U \operatorname{grad} V$. Теорема Гаусса утверждает, что поток этого вектора через S равен интегралу от дивергенции $U \operatorname{grad} V$ по объему, заключенному внутри S . Так как

$$\operatorname{div}(U \operatorname{grad} V) = (\operatorname{grad} U) \cdot (\operatorname{grad} V) + U \nabla^2 V,$$

то в указанных выше обозначениях имеем (где dA направлено наружу из области, заключенной внутри границы)

$$\oint U \operatorname{grad} V \cdot dA = \iiint (\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} V) dv + \iiint U \nabla^2 V dv.$$

Однако можно получить также подобное соотношение для другого вектора $V \operatorname{grad} U$. Вычитая одно из другого, получаем

$$\oint [U \operatorname{grad} V - V \operatorname{grad} U] \cdot dA = \iiint [U \nabla^2 V - V \nabla^2 U] dv, \quad (7.2.2)$$

где поверхностный интеграл берется от наружной нормальной компоненты вектора, заключенного в квадратные скобки, по замкнутой поверхности S , а объемный интеграл берется от скалярной величины в квадратных скобках по всему объему внутри S . Границная поверхность может быть конечной (по протяженности) или бесконечной. Например, она может быть конечной сферой, причем объемное интегрирование распространяется по внутренности сферы, а dA направлено от центра сферы. Или же она может состоять из этой конечной сферы и бесконечной сферы, причем «внутренность» в этом случае будет бесконечный объем между этими сферами, и dA на конечной сфере направлено к центру (от «внутренности»), а на бесконечной сфере — наружу. Аналогично можно построить и другие частные примеры.

Это соотношение между поверхностным и объемным интегралами называется *теоремой Грина*. Как мы видели, она является частным случаем теоремы Гаусса. Вскоре мы увидим, как она применяется к выводу свойств функции Грина.

Функция Грина для уравнения Гельмгольца. Начнем с изучения функции Грина для уравнения Гельмгольца

$$\mathcal{L}\psi \equiv \nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \quad (7.2.3)$$

при некоторых граничных условиях на замкнутой поверхности S . В соответствии с нашим кратким введением в § 1, нам надо сейчас доказать следующие свойства функции Грина.

1. Функция Грина является симметричной функцией координат двух точек, именно, координат точки наблюдения и точки источника:

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = G_k(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}) \quad (7.2.4)$$

(соотношение взаимности). Эта функция удовлетворяет некоторым однородным граничным условиям как на S , так и на S_0 и имеет разрыв (вида, который надо определить) при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$.

2. Используя эту функцию, можно получить решение неоднородного уравнения с данными однородными граничными условиями или же решение однородного уравнения с неоднородными граничными условиями. В силу линейности уравнения мы можем также решить неоднородное уравнение с неоднородными граничными условиями при помощи наложения обоих частных решений.

3. Решения для неоднородных граничных условий имеют разрыв на границе. Например, если ψ задано на поверхности (условия Дирихле), то решение будет иметь заданное значение ψ непосредственно внутри границы и будет равно нулю непосредственно за ней. В случае условий Неймана, когда задается нормальная производная, будет разрыв у этой производной.

Требуемая функция Грина является решением неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) + k^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (7.2.5)$$

для единичного точечного источника в \mathbf{r}_0 , удовлетворяющим однородным граничным условиям (либо нулевое значение, либо нулевая нормальная производная от G) на граничной поверхности S (и также, в координатах источника, на S_0). Дельта-функция определена формулой (7.2.1) и симметрична относительно вращения около \mathbf{r}_0 . Более сложные источники — диполи и т. д. — можно рассматривать как состоящие из этих простых источников. Отметим, что ∇^2 в (7.2.5) действует в координатах наблюдателя.

Мы хотим теперь показать, что решение неоднородного уравнения

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = -4\pi \rho(\mathbf{r}) \quad (7.2.6)$$

при произвольных условиях Дирихле (или Неймана) на замкнутой граничной поверхности S можно выразить через функцию G . Для этого мы умножим (7.2.5) на ψ , а (7.2.6) на G и вычтем один результат из другого, в то же время меняя местами \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 :

$$G_k(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}) \nabla_0^2 \psi(\mathbf{r}_0) - \psi(\mathbf{r}_0) \nabla_0^2 G_k(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}) = 4\pi [\psi(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - G_k(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}_0)].$$

Интегрируя это равенство по всем координатам источника x_0, y_0, z_0 внутри S_0 , мы получаем в силу свойства дельта-функции и формулы (7.2.4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \iiint [G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \nabla_0^2 \psi(\mathbf{r}_0) - \psi(\mathbf{r}_0) \nabla_0^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)] dv_0 + \\ + \iint \int \rho(\mathbf{r}_0) G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) dv_0 = \begin{cases} \psi(\mathbf{r}) & \text{для } \mathbf{r} \text{ внутри } S, \\ 0 & \text{для } \mathbf{r} \text{ вне } S. \end{cases} \end{aligned}$$

Интересно указать, какое значение имеет правая часть, если точка наблюдения находится на S . До некоторой степени это дело соглашения; но если такое соглашение принято, то надо проводить его последовательно. В дальнейшем мы будем всегда считать, если не оговаривается противное, что эта разрывная функция равна $\psi(\mathbf{r})$ внутри и на S и равна нулю вне S .

Теперь мы применяем теорему Грина (7.2.2) для упрощения левой части. В соответствии с нашим соглашением, мы измеряем градиент по направлению изнутри наружу (или, что то же, элемент поверхности dA указывает изнутри объема, где надо вычислить поле), так что интеграл по поверхности равен обычному потоку. Применение формулы (7.2.2) дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \oint [G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \operatorname{grad}_0 \psi(r_0^s) - \psi(r_0^s) \operatorname{grad}_0 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s)] \cdot dA_0 + \\ + \iint \int \rho(\mathbf{r}_0) G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) dv_0 = \begin{cases} \psi(\mathbf{r}) & \text{для } \mathbf{r} \text{ внутри и на } S, \\ 0 & \text{для } \mathbf{r} \text{ вне } S, \end{cases} \quad (7.2.7) \end{aligned}$$

откуда можно найти наше решение как для неоднородного уравнения, так и для неоднородных граничных условий.

Решение неоднородного уравнения. Например, для неоднородного уравнения ($\rho \neq 0$) с однородными граничными условиями Дирихле ($\psi = 0$ на S) мы выбираем G также равной нулю как на S , так и на S_0 . Тогда

поверхностный интеграл по S_0 равен нулю и

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \int \int \rho(\mathbf{r}_0) G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) dv_0 \quad (7.2.8)$$

для \mathbf{r} внутри или на S . Эта функция автоматически удовлетворяет однородным граничным условиям ($\psi = 0$ на S) и является решением уравнения (7.2.6). Если граничным условием служит однородное условие Неймана (нормальная производная ϕ равна нулю на S), то мы выбираем G_k удовлетворяющей тем же условиям в обеих системах координат, как наблюдателя, так и источника. Тогда опять поверхности интеграл равен нулю и имеет место формула (7.2.8). Значит, формула (7.2.8) дает решение неоднородного уравнения (7.2.6) для однородных граничных условий, если G_k удовлетворяет тем же условиям, что и ϕ .

На самом деле эта формула имеет место также, когда граничные условия состоят в том, что функция ψ на S равна произведению функции $f(\mathbf{r}_0^s)$ на нормальную производную от ϕ на S , если только G_k удовлетворяет тем же условиям. Наиболее общие однородные граничные условия имеют вид

$$\psi(\mathbf{r}^s) = f(\mathbf{r}^s) \frac{\partial}{\partial n} \psi, \quad G_k(\mathbf{r}^s | \mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}^s) \frac{\partial}{\partial n} G_k, \quad G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) = f(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} G_k.$$

Если $f = 0$, получаются однородные условия Дирихле; если $1/f = 0$ — однородные условия Неймана. Вне зависимости от значений f поверхности интеграл в формуле (7.2.7) исчезнет, что приведет к формуле (7.2.8) для решения. Конечно, не все условия допустимы в физических задачах. Например, если суммарный заряд внутри S отличен от нуля, то нельзя ожидать, что нормальная производная ϕ равна нулю на всей границе, так что нельзя ожидать, чтобы для решения уравнения Лапласа производная $\partial G / \partial n$ была равна нулю на границе. Что именно возможно, обычно указывают физические соображения.

Для неоднородных граничных условий, если они являются условиями Дирихле [$\phi = \phi_0(\mathbf{r}_0^s)$ на S_0], мы полагаем G_k равной нулю на S и также на S_0 . Тогда получаем уже исследованное на стр. 743 решение

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint \phi_0(\mathbf{r}_0^s) \text{grad}_0 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \cdot d\mathbf{A}_0 \quad (7.2.9)$$

для \mathbf{r} внутри и на S при неоднородных условиях Дирихле для ϕ , если G_k равно нулю на S и S_0 . Заметим вновь, что вектор $d\mathbf{A}_0$ направлен *наружу* из области, где ищется поле, так что интегрируемая компонента градиента — это *наружная* нормальная компонента. Здесь мы получаем наше решение в виде интеграла только по граничной поверхности; неоднородные граничные условия удовлетворяются посредством *расположения слоя заряда на поверхности*. Для условий Дирихле получается двойной слой, что яствует из рассмотрения $\text{grad } G$.

Если ϕ должно удовлетворять неоднородным граничным условиям Неймана, т. е. производная от ϕ по внешней нормали к S равна $N(\mathbf{r}^s)$, то мы полагаем нормальную производную G_k на S равной нулю и получаем решение

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) N(\mathbf{r}_0^s) \cdot d\mathbf{A}_0 \quad (7.2.10)$$

для \mathbf{r} внутри или на S , причем N представляет собой заданную нормальную составляющую градиента функции ϕ и нормальная производная G на S и S_0 равна нулю. В этом случае поверхности заряд, порождающий нормальную производную N , равен как раз $N/4\pi$ и представляет собой простой, а не двойной, слой заряда.

Наконец, если граничные условия имеют общий неоднородный вид

$$\frac{\partial}{\partial n_0} \psi + f(r_0^s) \psi = F_0(r_0^s), \quad (7.2.11)$$

то мы требуем, чтобы G удовлетворяла соответствующему однородному условию

$$\frac{\partial}{\partial n_0} G_k + f(r_0^s) G_k = 0,$$

где обе нормальные производные внешние; тогда решение однородного уравнения при условии (7.2.11) имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \oint G_k(\mathbf{r} | r_0^s) F_0(r_0^s) dA_0, \\ -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{F_0(r_0^s)}{f(r_0^s)} \text{grad}_0 G_k(\mathbf{r} | r_0^s) \cdot dA_0. \end{cases} \quad (7.2.12)$$

Можно пользоваться любым из двух видов поверхностного интеграла. Первый более полезен, если f мало или равно нулю (условия Неймана); второй — если $1/f$ мало или равно нулю (условия Дирихле), но F/f ограничено.

Решения, данные формулами (7.2.9), (7.2.10) и (7.2.12), построены для однородного уравнения ($\rho = 0$ внутри границы). Если мы хотим решить неоднородное уравнение (7.2.6) с неоднородными граничными условиями, то надо сложить объемный интеграл типа (7.2.8) с соответствующим поверхностным интегралом, взяв G в объемном интеграле удовлетворяющей тем же однородным граничным условиям, что и G в поверхностном интеграле.

Общие свойства функции Грина. Теперь мы совсем точно доказали большую часть утверждений, сделанных в § 7.1 и на стр. 744. Граничные условия удовлетворяются посредством расположения на поверхности распределения диполей (для условий Дирихле) или простого заряда (для условий Неймана) с плотностью, пропорциональной требуемому значению функции ϕ или ее нормальной производной, которое надо умножить на значение нормальной производной от соответствующей функции Грина G или значение самой G . Мы также обратили внимание на разрыв решения, так как интеграл равен ϕ на и внутри S , но равен нулю вне S .

Но мы еще не доказали, что G является симметричной функцией \mathbf{r} и r_0 , как это утверждает формула (7.2.4). Как функция от \mathbf{r} , G удовлетворяет уравнению (7.2.5), а для источника в \mathbf{r}_1 — уравнению

$$\nabla^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) + k^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1).$$

Умножая (7.2.5) на $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1)$ и это новое уравнение на $G(\mathbf{r} | r_0)$, вычитая один результат из другого и применяя теорему Грина (7.2.2), имеем

$$\begin{aligned} & -\oint [G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) \text{grad} G(\mathbf{r} | r_0) - G(\mathbf{r} | r_0) \text{grad} G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1)] \cdot dA = \\ & = 4\pi \int \int [G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - G(\mathbf{r} | r_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)] dv = 4\pi [G(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_0)]. \end{aligned}$$

Так как обе функции G удовлетворяют одним и тем же однородным граничным условиям, то поверхностный интеграл исчезает, и мы получаем условие взаимности $G(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_0)$, если только как \mathbf{r}_0 , так и \mathbf{r}_1 находятся внутри или на поверхности.

Остается изучить еще более важный вопрос о поведении $G(\mathbf{r} | r_0)$, когда точка наблюдения находится вблизи точки источника, т. е. когда длина вектора $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ мала в сравнении с расстоянием любой из этих

точек до ближайшей точки на граничной поверхности. Из структуры уравнения (7.2.5) мы видим, что если

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

мало по сравнению с расстоянием от S или S_0 , то функция G зависит только от R . Другими словами, ввиду полной симметрии источника функция G не может зависеть от направления \mathbf{R} , она может зависеть только от его длины. Как мы заметили раньше, надо ожидать, что функция G должна иметь особенность при $R = 0$.

Говоря на более математическом языке, надо ожидать, что $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ можно разделить на две части: во-первых, часть, которая всюду регулярна и непрерывна внутри S и зависит от граничных условий, наложенных на G у S , и, во-вторых, часть, которая регулярна и непрерывна всюду внутри S , *кроме* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, является функцией только от R и имеет особенность при $R = 0$. Эту последнюю часть можно обозначить через $g_k(R)$. Значит, можно сказать, что если точка наблюдения и (или) точка источника не находятся бесконечно близко к S , то

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \underset{R \rightarrow 0}{\simeq} g_k(R), \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0. \quad (7.2.13)$$

Чтобы выяснить поведение g_k при малых R , мы проинтегрируем (в координатах наблюдателя x, y, z) обе части уравнения (7.2.5) по малому шару радиуса ε с центром в \mathbf{r}_0 . Это даст

$$\iiint \nabla^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) dv + k^2 \iiint G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) dv = -4\pi.$$

Интеграл в правой части равен -4π в силу свойств дельта-функции, так как шар, по которому производится интегрирование, содержит точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$.

Сделаем теперь ε достаточно малым, чтобы соотношение (7.2.13) имело место, и подставим g_k вместо G_k в остающиеся интегралы. Кроме того, предположим, что оператор Лапласа от особенности является более «особенным», чем сама особенность, так что в пределе первый интеграл преобладает. Тогда получим

$$\iiint \nabla^2 g_k(R) dv \rightarrow -4\pi \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где координатами при интегрировании по шаровому объему будут R, θ, φ , а элемент объема равен $dv = R^2 dR \cdot \sin \theta d\theta d\varphi$.

Применяя теорему Гаусса (1.4.7), мы получаем, что суммарный поток $\operatorname{grad} g$ наружу через поверхность сферы с центром в \mathbf{r}_0 радиуса ε равен -4π :

$$\oint \operatorname{grad} g_k \cdot dA \rightarrow -4\pi.$$

Так как g_k зависит только от радиальной координаты R маленькой сферы, то $\operatorname{grad} g_k$ имеет всюду радиальное направление, параллельное dA , и его величина всюду на поверхности одинакова. Значит, поверхностный интеграл в пределе равен произведению dg_k/dR при $R = \varepsilon$ на площадь $4\pi\varepsilon^2$ сферы, и мы приходим к формуле

$$(dg_k/dR)_{R=\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow -4\pi \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

или, что то же,

$$\frac{d}{dR} g_k(R) \underset{R \rightarrow 0}{\simeq} -\frac{1}{R^2}.$$

Таким образом, мы в результате получаем $g_k(R) \simeq -\frac{1}{R}$, или

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \simeq \frac{1}{R}, \quad \text{когда } R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \rightarrow 0, \quad (7.2.14)$$

если ни \mathbf{r} , ни \mathbf{r}_0 не находятся слишком близко к S или S_0 . Теперь нетрудно видеть, что выше мы законно пренебрегли объемным интегралом от G .

Итак, можно сказать, что, как функция координат (x, y, z) точки наблюдения, функция Грина представляет собой регулярное непрерывное решение однородного уравнения $\nabla^2 G + k^2 G = 0$ внутри S , за исключением точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, где она имеет особенность, указанную формулой (7.2.14). Эта особенность проистекает из наличия единичного точечного источника, причем уравнение (7.2.5) неоднородно только в этой точке. Заметим, что предельная форма $1/R$ не зависит от k , так что этот результат имеет место также для уравнения Лапласа.

Формула (7.2.14) справедлива для трех измерений. Можно провести подобное рассмотрение для двумерного случая, причем можно показать, что для двух измерений

$$G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \simeq -2 \ln R, \quad R \rightarrow 0. \quad (7.2.15)$$

В одномерном случае уравнение (7.2.5) принимает вид

$$\frac{d^2}{dx^2} G + k^2 G = -4\pi \delta(x - x_0).$$

Как указано на стр. 743, здесь будет разрыв производной, так что если проинтегрировать по x от $x_0 - \varepsilon$ до $x_0 + \varepsilon$, то интеграл от $k^2 G$ будет стремиться к нулю, тогда как интеграл от второй производной

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \frac{d^2 G}{dx^2} dx = \left[\frac{dG}{dx} \right]_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \rightarrow -4\pi, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.2.16)$$

Значит, для одного измерения функция Грина G имеет разрыв производной, равный -4π , при $x = x_0$.

Возвращаясь к сказанному на стр. 123—125, мы видим, что функции Грина для уравнения Гельмгольца, указанные выше, удовлетворяют требованиям, приведенным в формулах (7.2.14), (7.2.15) или (7.2.16), в зависимости от числа измерений. Например, после формулы (2.1.10) мы указали, что функция Грина для струны равна $(2\pi i/k) \cdot e^{ik|x-x_0|}$; она удовлетворяет соотношению (7.2.16). Подобным образом, мы знаем, что функция Грина для точечного источника в трех измерениях равна e^{ikR}/R .

Эффект граничных условий. Рассмотрим, как влияют граничные условия на функцию Грина, чтобы можно было видеть, как построить требуемую функцию в каждом интересном случае. По-видимому, простейшим является случай, когда граница расположена на бесконечности, так как тогда ее эффект должен быть наименьшим. Для трех измерений нам требуется решение уравнения $(\nabla^2 + k^2) G = 0$, определенное всюду, за исключением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, которое стремится к нулю [и (или) производная которого стремится к нулю] при $R \rightarrow \infty$ и которое имеет особенность порядка $1/R$ при $R \rightarrow 0$. Имеются два линейно независимых решения с такими свойствами (и пригодна любая линейная комбинация этих решений):

$$e^{ikR}/R, \quad e^{-ikR}/R, \quad \cos(kR)/R \text{ и т. д.}; \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

Очевидно, что даже если граница находится на бесконечности, то выбор все-таки должен производиться на основании граничных условий.

Чтобы сделать выбор, мы обратимся к исходному зависящему от времени решению волнового уравнения $\nabla^2 \Gamma = (1/c^2) \partial^2 \Gamma / \partial t^2$. Мы получили уравнение Гельмгольца, приняв простую гармоническую зависимость решения волнового уравнения от времени. На стр. 125 и 700 мы положили это решение равным $\Phi e^{-i\omega t} = \Psi e^{-ikct}$, откуда Φ есть решение уравнения Гельмгольца. Следовательно, если G надо применять к простому гармоническому

решению волнового уравнения, то полным решением будет Ge^{-ikct} . Отсюда, если мы хотим иметь волны, идущие от точки источника, то надо применять

$$G_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = g_h(R) = e^{ikR}/R, \text{ граница на бесконечности,} \quad (7.2.17)$$

так как тогда полное решение $(1/R)e^{ik(R-ct)}$ представляет расходящуюся волну. В тех редких случаях, когда нам нужны сходящиеся волны, надо выбрать функцию e^{-ikR}/R . Для границы, расположенной всюду на конечном расстоянии от \mathbf{r}_0 , может не быть полного поглощения энергии поверхностью. Часть может отражаться обратно к источнику, и тогда надо пользоваться комбинацией расходящихся и сходящихся волн. Однако в большинстве случаев мы пользуемся решением в виде расходящейся волны, данным формулой (7.2.17).

Решения уравнения Гельмгольца иногда используются при решении уравнения диффузии $\nabla^2\Psi = (1/a^2)\partial\Psi/\partial t$. Здесь для описания процесса распространения диффундирующего вещества, концентрация которого изменяется величиной Ψ , мы полагаем $\Psi = \phi e^{-k^2 a^2 t}$; ϕ вновь будет решением уравнения $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$. Обычно требуют, чтобы ϕ была всюду вещественной; отсюда

$$G_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \cos(kR)/R,$$

так что возможная функция Грина для уравнения диффузии равна

$$\frac{1}{R} \cos(kR) e^{-a^2 k^2 t},$$

что соответствует «выходящей» диффузии, когда граница находится на бесконечности, а «источник» диффузии обладает экспоненциально затухающей зависимостью от времени. Как будет показано позже, для функции Грина уравнения диффузии на самом деле обычно применяется совсем другое решение уравнения диффузии, соответствующее «источнику» значительно более «правильного» вида.

В случае двух измерений решения уравнения Гельмгольца, симметричные относительно $R = 0$, являются решениями уравнения

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dg}{dR} \right) + k^2 g = 0,$$

которое представляет собой уравнение для функций Бесселя нулевого порядка [см. формулу (5.3.63)]. Нам требуются решения, имеющие при $R = 0$ особенность, причем такую, как указано в (7.2.15). Возможными решениями являются функции Ганкеля [см. формулу (5.3.69)], в частности, функция

$$\begin{aligned} G_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = g_h(R) &= i\pi H_0^{(1)}(kR) \simeq -2 \ln(kR) \quad \text{при } R \rightarrow 0, \\ &\simeq \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR + \frac{1}{4}\pi)} \quad \text{при } R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

представляет собой точную функцию Грина в двумерном случае для границы на бесконечности и расходящихся волн. Если требуются сходящиеся волны, то применяется вторая функция Ганкеля, а если нужна вещественная функция (как в частном случае уравнения диффузии), то можно пользоваться произведением π на функцию Неймана $N_0(kR)$ [см. формулу (5.3.75)].

Наконец, в одномерном случае функция Грина для расходящихся волн, простирающихся до бесконечности в обоих направлениях, уже дана формулой (7.2.16). Она равна

$$G_h(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = g_h(R) = \frac{2\pi i}{k} e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}. \quad (7.2.19)$$

Метод изображений. Теперь мы обратимся к задаче получения функций Грина для ограниченных областей. Сначала рассмотрим один метод — *метод изображений*, в котором непосредственно применяется полученная выше функция $g_k(R)$. Каков физический эффект введения границы? Без границы соответствующая функция Грина равнялась $g_k(R)$. Если введена граница, то, скажем, в электростатике возникает потенциал, порождаемый индуцированным зарядом на граничной поверхности, который в свою очередь порождается приложенным электрическим полем $g_k(R)$. В акустике эффект границы состоит в возникновении отражений, которые надо добавить к волне, выходящей из источника, чтобы получить полное давление. Значит, можно ожидать, что

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = g_k(R) + F_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0), \quad (7.2.20)$$

где $F_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ представляет граничный эффект. $F_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ не может иметь особенности внутри области, так что $G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \rightarrow g_k(R)$ при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$. Метод изображений, описывающий *отраженные* волны в акустике или индуцированный заряд в электростатике, можно применить для определения $F_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$.

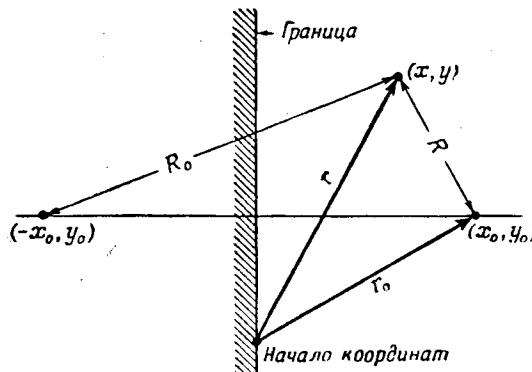


Рис. 7.3. Изображение точки источника (x_0, y_0) в плоскости $x=0$.

Рассмотрим простой случай, показанный на рис. 7.3. Единичный линейный заряд расположен при (x_0, y_0) перед бесконечной проводящей металлической пластинкой. Потенциал на поверхности пластины при $x=0$ должен равняться нулю, так что функция Грина должна удовлетворять граничным условиям Дирихле. В методе изображений вводится линейный заряд противоположного знака в зеркально-симметричной точке $(-x_0, y_0)$, как показано. Полный потенциал для $x \geq 0$ равен тогда

$$G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = -2 \ln(R/R_0), \quad x \geq 0. \quad (7.2.21)$$

На эквипотенциальной плоскости $R = R_0$ и $G_0 = 0$, так что граничные условия удовлетворяются. Так как $g_0(R) = -2 \ln R$, то мы видим, что $F_0 = 2 \ln R_0$. Единственная особенность, имеющаяся в области, представляющей физический интерес ($x > 0$), находится в месте расположения заряда, $R = 0$. Другая особенность получается при $R_0 = 0$ ($x < 0$), т. е. в области, где выражение (7.2.21) уже не применимо.

Легко обобщить формулу (7.2.21) для нахождения G_k . Введя отражение, как выше, найдем

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \pi i [H_0^{(1)}(kR) - H_0^{(1)}(kR_0)]. \quad (7.2.22)$$

Отражение падающей волны зеркалом, требующее в этом случае равенства G нулю, дается выражением $H_0^{(1)}(kR_0)$. (Начиная отсюда, мы в этом па-

графе не будем писать верхний индекс (1), так как мы всегда будем пользоваться функцией Ганкеля первого рода.)

Если, с другой стороны, поверхность жесткая или если, в случае уравнения Лапласа, требуется решать задачи с известными распределениями заряда, а не потенциалами, то соответствующими граничными условиями будут условия Неймана $\partial\psi/\partial n = 0$. Метод изображений можно применить и здесь; заряд или источник в зеркально-симметричной точке надо взять того же знака (или той же фазы), так что

$$G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = -2 \ln(RR_0), \quad G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \pi i [H_0(kR) + H_0(kR_0)].$$

Граничные условия удовлетворяются, в чем можно убедиться, подсчитав производную по x при $x=0$.

В качестве иллюстрации подсчитаем эффект от потенциала $f(y)$ (уже не нулевого) на плоскости. Из формулы (7.2.9) имеем

$$\psi(\mathbf{r}) = -(1/4\pi) \int \psi(\mathbf{r}_0^s) (\partial G_0 / \partial n_0) dS_0 = +(1/4\pi) \int_{-\infty}^{\infty} f(y_0) (\partial G_0 / \partial x_0)_{x_0=0} dy_0.$$

Вводя функцию Грина (7.2.21) и подсчитывая производную, находим

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y')}{x^2 + (y-y')^2} dy'. \quad (7.2.23)$$

Мы встречались с этой формулой раньше. Она была выведена при помощи теории функций комплексного переменного в гл. 4 [формула (4.2.13)] при единственном требовании, чтобы ψ удовлетворяла уравнению Лапласа. Интересно проверить непосредственно, что решение удовлетворяет граничным условиям.

Как указано на стр. 744, это должно дать представление δ -функции. Для этой цели рассмотрим функцию

$$\Delta(x, \eta) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + \eta^2}.$$

Заметим, что $\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x, \eta) d\eta = 1$. Для исследования ее свойств при $x \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$ перепишем $\Delta(x, \eta)$ в виде

$$\Delta(x, \eta) = \frac{1}{\pi x} [1 + (\eta/x)^2]^{-1}.$$

Если положить $\eta = 0$, то при $x \rightarrow 0$ функция $\Delta(x, 0)$ ($= 1/\pi x$) строго возрастает. С другой стороны, для $\eta \neq 0$ при $x \rightarrow 0$ функция $\Delta(x, \eta)$ ($\simeq x/\pi\eta^2$) стремится к нулю. Мы видим, что $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta(x, \eta)$ представляет собой функцию, интеграл от которой всегда равен единице и значения которой при $\eta = 0$ возрастают к бесконечности для $x \rightarrow 0$, а при $\eta \neq 0$ стремятся к нулю. Значит,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Delta(x, \eta) = \delta(\eta).$$

Отсюда в (7.2.23)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\mathbf{r}) = \int \delta(y - y') f(y') dy' = f(y),$$

как и требуется. Функция $\Delta(x, y)$ особенно полезна для задач, связанных с уравнением Лапласа, так как, будучи вещественной частью аналитической функции $1/\pi z = 1/\pi(x + iy)$, она является решением уравнения Лапласа.

Метод изображений можно применить и к границам другой формы. Например, его можно применить, если граница представляет собой окруж-

ность. Применение теории функций Грина приводит к интегральной формуле Пуассона (4.2.24). По поводу дальнейших подробностей мы отошлем читателя к задачам и к гл. 10, так как метод изображений для окружности будет действовать только для уравнения Лапласа.

Применение метода изображений допускают и некоторые другие границы симметричного вида. Однако, вообще говоря, при этом получаются бесконечные ряды с обычными ограничениями их пригодности. В качестве примера

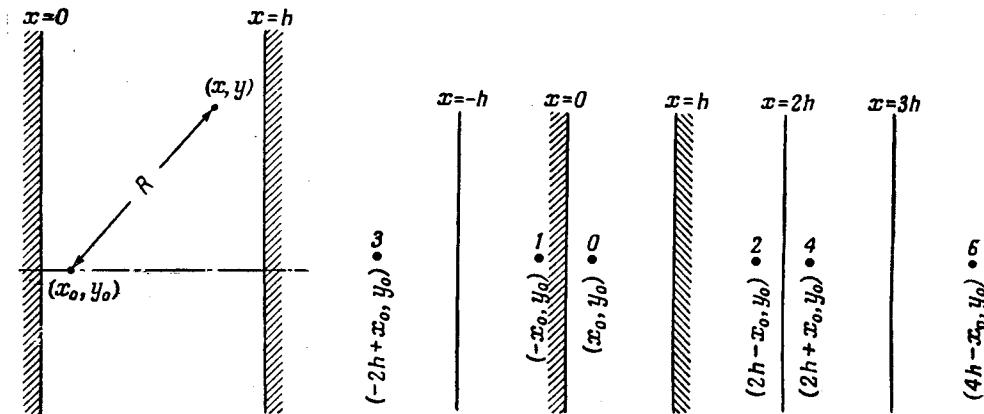


Рис. 7.4. Поле между параллельными плоскостями от источника в точке (x_0, y_0) .

Рис. 7.5. Последовательность образов источника рис. 7.4.

рассмотрим расположение, показанное на рис. 7.4, где источник находится между двумя бесконечными плоскостями $x=0$, $x=h$, на которых на функцию Грина накладываются граничные условия Неймана $\partial\phi/\partial n=0$.

Ряд изображений. Мы применяем метод изображений посредством последовательных шагов, не учитывая каждую из границ $x=0$ и $x=h$ по очереди. Учитывая только границу $x=0$, мы вводим изображение источника при $x=-x_0$, а учитывая только $x=h$ — изображение при $x=2h-x_0$. Они обозначены цифрами 1 и 2 на рис. 7.5. Однако, хотя 1 и 0 вместе порождают потенциал, удовлетворяющий условиям Неймана при $x=0$, надо добавить эффект источника 2, который, конечно, не удовлетворяет условию $\partial\phi/\partial n=0$ при $x=0$. Чтобы устранить эффект точки 2, мы вводим теперь изображение 3 в (x_0-2h, y_0) точки 2 относительно $x=0$. Подобным образом для устранения эффекта точки 1 в плоскости $x=h$ вводится источник 4 при $x=2h+x_0$. Однако теперь становится необходимым устраниить эффект точки 3 при $x=h$; необходимо ввести изображение 6 в $(3h-x_0, y_0)$. Процесс продолжается неограниченно, приводя к бесконечному числу изображений основного источника. Это не должно удивлять, так как любой луч, выходящий из источника, испытывает бесконечное число отражений. Каждое изображение соответствует одному из этих отражений.

Выпишем теперь получающуюся функцию Грина. Источники расположены в (x_0+2nh, y_0) и в $(2mh-x_0, y_0)$, где m и n — целые. Значит,

$$G_h = \pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ H_0 [k \sqrt{(x-x_0-2nh)^2 + (y-y_0)^2}] + \right. \\ \left. + H_0 [k \sqrt{(x+x_0-2nh)^2 + (y-y_0)^2}] \right\}$$

(где мы имеем в виду функции Ганкеля первого рода, не выписывая верхнего индекса). Записывая более сжато, имеем

$$G_k = \pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} [H_0(k|r - r'_n|) + H_0(k|r - r''_n|)], \quad (7.2.24)$$

где

$$r'_n = a_x[2nh + x_0] + a_y y_0, \quad r''_n = a_x[2nh - x_0] + a_y y_0.$$

Ряд (7.2.24) применим, если играют роль только сам источник и, быть может, его несколько первых отражений. Так будет, если точка наблюдения r очень близка к точке источника, т. е. $r \rightarrow r_0$ из-за особенности функции $H_0(k|r - r'_0|)$. Остающиеся отражения дают поправку к непосредственному эффекту источника. К сожалению, ряд (7.2.24) сходится не очень быстро, так что подсчет поправки является довольно утомительным делом. Для подсчета ее порядка выясним поведение отдельных членов при $|n| \rightarrow \infty$. Тогда

$$|r - r'_n| \underset{|n| \rightarrow \infty}{\simeq} 2|n|h \pm (x - x_0), \quad |r - r''_n| \underset{|n| \rightarrow \infty}{\simeq} 2|n|h \pm (x + x_0). \quad (7.2.25)$$

Заметим, что эти приближения справедливы, только если

$$2|n|h \gg \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Ясно, что эта асимптотическая форма достигается тем более быстро, т. е. для тем меньших значений n , чем ближе находится точка наблюдения к источнику. Для больших значений $2nhk$ функцию Ганкеля можно заменить ее асимптотическим выражением, так что (полагаем для определенности $n > 0$)

$$\begin{aligned} H_0(k|r - r'_n|) + H_0(k|r - r''_n|) &\underset{knh \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{1}{i\pi knh}} [e^{ik(2nh-x+x_0)} + \\ &+ e^{ik(2nh-x-x_0)}] = \sqrt{\frac{4}{i\pi knh}} e^{ik(2nh-x)} \cos(kx_0). \end{aligned}$$

Поэтому высшие члены ряда для G_k аппроксимируются рядом

$$\Sigma = \frac{4}{V i\pi kh} e^{-ikx} \cos kx_0 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{e^{2iknh}}{\sqrt{n}}, \quad (7.2.26)$$

где N выбирается достаточно большим, чтобы обеспечить справедливость приведенных выше приближений. Бесконечную сумму оцениваем, заменяя ее на соответствующий интеграл:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{e^{2iknh}}{\sqrt{n}} \underset{N}{\simeq} \int_N^{\infty} \frac{e^{2ikhv}}{\sqrt{v}} dv \underset{2kh \sqrt{N} \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{e^{2ikh} \sqrt{N}}{2ikh \sqrt{N}}. \quad (7.2.27)$$

Этот интеграл можно также вычислить непосредственно через интегралы Френеля. Если

$$C(u) = \int_0^u \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt, \quad S(u) = \int_0^u \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt, \quad (7.2.28)$$

то

$$\int_N^{\infty} \frac{e^{2ikhv}}{\sqrt{v}} dv = \sqrt{\frac{\pi}{kn}} \left[\frac{1}{2} - C\left(\sqrt{\frac{4khN}{\pi}}\right) + \frac{1}{2} i - iS\left(\sqrt{\frac{4khN}{\pi}}\right) \right].$$

Если применить простое выражение (7.2.27), то Σ приобретает вид

$$\Sigma \simeq \frac{2}{V k^3 h^3 \pi N} e^{-\frac{3}{4}\pi i} e^{2ikh} \sqrt{N} \cos kx_0. \quad (7.2.29)$$

Таким образом, мы видим, что если kh значительно больше единицы, то весь ряд (7.2.24) можно выразить простой формулой (7.2.29) с $N=1$. Для волнового уравнения $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, так что для всей суммы можно применить простое выражение, если λ значительно меньше расстояния h между пластинками. Единственным членом, не включенным в Σ , будет тогда член с $n=0$, выражающий непосредственное влияние источника на наблюдателя. Повторяя: если $h \gg \lambda$ и $|x - x_0| \ll h$, то значение ϕ в точке наблюдения (x, y) равно сумме основного слагаемого $\pi i H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$ и малой поправки, пропорциональной Σ .

Другие разложения. В случае если одно или оба из этих условий не выполняются, требуется более тщательное исследование. Если \mathbf{r} находится на некотором расстоянии от источника, а kh ни велико, ни мало, то разложение по изображениям источника можно преобразовать, чтобы получить более быстро сходящийся ряд. Это можно осуществить с помощью формулы суммирования Пуассона (4.8.28)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} F(v),$$

где

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-iv\tau} d\tau. \quad (7.2.30)$$

Для применения формулы суммирования Пуассона к данной задаче требуется преобразование Фурье функции $H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$. Позже в этой главе (см. стр. 762) мы покажем, что

$$H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) = \frac{i}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dK_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iK_x(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}}{k^2 - K^2} dK_y. \quad (7.2.31)$$

Интеграл не вполне определен, если не указать, каким способом обходится полюс $K = k$. Это будет сделано в процессе вычислений.

Теперь нам надо подсчитать значение

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv\tau} \left\{ H_0 \left[k \sqrt{\left(x - x_0 - \frac{\tau}{\pi} h \right)^2 + (y - y_0)^2} \right] + H_0 \left[k \sqrt{\left(x + x_0 - \frac{\tau}{\pi} h \right)^2 + (y - y_0)^2} \right] \right\} d\tau.$$

Если ввести (7.2.31) в подинтегральную функцию, I примет вид

$$\begin{aligned} I &= \frac{i}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dK_y \int_{-\infty}^{\infty} dK_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv\tau} \left\{ \frac{e^{i[K_x(x-x_0 - \frac{\tau}{\pi}h) + K_y(y-y_0)]}}{k^2 - K^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{i[K_x(x+x_0 - \frac{\tau}{\pi}h) + K_y(y-y_0)]}}{k^2 - K^2} \right\} d\tau = \\ &= \frac{2i}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iK_y(y-y_0)} dK_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iK_x x}}{k^2 - K^2} \cos(K_x x_0) dK_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv\tau} e^{-iK_x \tau h / \pi} d\tau. \end{aligned}$$

Интеграл по τ можно непосредственно выразить через дельта-функцию (при этом мы применяем интегральную теорему Фурье):

$$I = \frac{4i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iK_y(y-y_0)} dK_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iK_x x} \cos K_x x_0 \cdot \delta(\tau + K_x h/\pi)}{k^2 - K_x^2 - K_y^2} dK_x.$$

Интеграл по K_x легко подсчитать, применяя основное свойство δ -функции, состоящее в том, что $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) f(z-a) dz = f(a)$. Имеем

$$I = \frac{4i}{h} e^{-i\pi\nu x/h} \cos \frac{\pi\nu x_0}{h} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iK_y(y-y_0)} dK_y}{(k^2 - \pi^2\nu^2/h^2) - K_y^2}.$$

Окончательно интегрирование можно выполнить только после указания пути интегрирования в плоскости K_y . Специальный путь C , показанный на рис. 7.6,

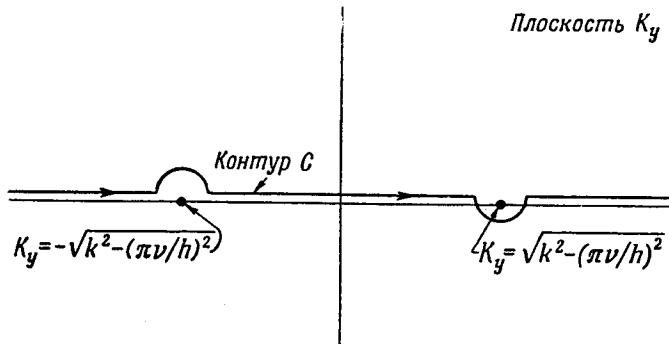


Рис. 7.6. Контур C для интегрирования в формуле (7.2.31).

выбран так, чтобы I удовлетворяло тому граничному условию, что точка $x = x_0$, $y = y_0$ является только источником, а не стоком или и источником, и стоком.

Подсчет этого интеграла при помощи интегральной формулы Коши (4.2.8) был рассмотрен в гл. 4, стр. 392. Мы находим, что

$$I = \frac{4\pi}{h} e^{-i\pi\nu x/h} \cos \frac{\pi\nu x_0}{h} \cdot \frac{e^{i|y-y_0|} \sqrt{k^2 - (\pi\nu/h)^2}}{\sqrt{k^2 - (\pi\nu/h)^2}}.$$

Окончательное разложение для функции Грина приобретает вид

$$\begin{aligned} G_k(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0) &= \frac{2\pi i}{h} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi\nu x/h} \cos \frac{\pi\nu x_0}{h} \cdot \frac{e^{i|y-y_0|} \sqrt{k^2 - (\pi\nu/h)^2}}{\sqrt{k^2 - (\pi\nu/h)^2}} = \\ &= \frac{2\pi i}{h} \sum_{v=0}^{\infty} \epsilon_v \cos \frac{\pi\nu x}{h} \cos \frac{\pi\nu x_0}{h} \cdot \frac{e^{i|y-y_0|} \sqrt{k^2 - (\pi\nu/h)^2}}{\sqrt{k^2 - (\pi\nu/h)^2}}. \end{aligned} \quad (7.2.32)$$

Этот результат особенно полезен при $|y - y_0| \gg 1$, так как если $\pi\nu/h > k$, то члены ряда экспоненциально убывают. Таким образом, число членов, требуемое для получения хорошей аппроксимации, имеет порядок $hk/\pi = 2h/\lambda$. (Заметим, что если v становится большим, то соответствующие члены в (7.2.32) становятся независимыми от k .) Мы видим, что последнее разложение дополняет разложение для Σ . Разложение (7.2.24) по изображениям источника осуществимо, если $hk \gg 1$, а разложение (7.2.32) применимо, когда $hk \ll 1$.

Разложение по изображениям источника пригодно для коротких длин волн и вблизи источника, так как тогда эффект границы менее важен; разложение (7.2.32) пригодно для больших длин волн и на значительном расстоянии от источника. Ряд (7.2.32) представляет собой разложение Фурье, вполне аналогичное формуле (7.1.12); его можно получить более непосредственно, чем в примененном здесь окольном методе, основанном на отражениях и на формуле суммирования Пуассона. Значение данного нами вывода состоит в раскрытии связи между двумя типами разложений.

Выражение (7.2.32) в отличие от (7.2.29) точно равняется ряду (7.2.24) и всегда сходится. За исключением случая, когда $hk/\pi = 2h/\lambda$ имеет порядок единицы, ряд сходится не очень быстро, так что надо поискать средства улучшения его сходимости. Для этого мы обратимся к замечанию, приведенному в скобках в последнем абзаце, что члены разложения (7.3.32) для большого u не зависят от k . Это приводит к мысли использовать функцию Грина $G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ для уравнения Лапласа, которую часто можно выразить в замкнутом виде. Если написать

$$G_k = G_0 + (G_k - G_0),$$

то разложение для $G_k - G_0$ будет сходиться быстрее, чем для одной G_k .

Если выбрать условия Дирихле при $x=0$ и $x=h$, то соответствующая статическая функция G_0 получится в замкнутом виде; $G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ тогда равна статическому потенциалу для единичного заряда в (x_0, y_0) между двумя заземленными пластинками. С целью рассмотреть более трудную задачу мы выберем условия Неймана, при которых G_0 соответствует установившемуся потоку жидкости, порожденному единичным источником в (x_0, y_0) . Однако установившийся поток нуждается в стоке (в данном случае на бесконечности), как и в источнике, а это не включено в условия. Таким образом, требуется небольшое видоизменение, которое мы сейчас сделаем, чтобы принять в расчет и сток.

Мы начнем с ряда

$$G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = 4 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \cos \frac{\pi v x}{h} \cdot \cos \frac{\pi v x_0}{h} \cdot e^{-(\pi v/h) |y - y_0|}, \quad (7.2.33)$$

к которому приводится (7.2.32) при $k=0$ (если опустить член с $v=0$). Применяя повторно соотношение

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} e^{-vb} = -\ln(1 - e^{-b}),$$

мы получаем

$$\Gamma_0 = R(x+x_0|y-y_0) + R(x-x_0|y-y_0), \quad (7.2.34)$$

где

$$R(a|b) = -\ln[1 - 2e^{-\pi|b|/h} \cos(\pi a/h) + e^{-2\pi|b|/h}].$$

Нетрудно показать (например, подсчитывая $\nabla^2 \Gamma_0$), что Γ_0 представляет собой решение уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \Gamma_0 = -4\pi[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (1/h)\delta(y - y_0)], \quad (7.2.35)$$

которое соответствует единичному положительному заряду в (x_0, y_0) и единичному отрицательному заряду, равномерно распределенному вдоль линии $y=y_0$, перпендикулярной обеим граничным линиям $x=0$ и $x=h$. Так как полное распределение заряда между двумя граничными линиями в среднем равно нулю, то можно удовлетворить условиям Неймана без того, чтобы

статическое решение принимало бесконечные значения на бесконечности. Можно также непосредственно убедиться, дифференцируя (7.2.35), в том, что $\partial G/\partial x$ равно нулю при $x=0$ и $x=h$.

Поэтому окончательным выражением для G_k будет

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = R(x + x_0 | y - y_0) + R(x - x_0 | y - y_0) + \frac{2\pi i}{hk} e^{ik|y-y_0|} + \\ + 4 \sum_{v=1}^{\infty} \cos \frac{\pi v x}{h} \cdot \cos \frac{\pi v x_0}{h} \cdot \left[\frac{e^{-\sqrt{(\pi v/h)^2 - k^2} |y-y_0|}}{\sqrt{v^2 - (kh/\pi)^2}} - \frac{1}{v} e^{-(\pi v/h) |y-y_0|} \right]. \quad (7.2.36)$$

Этот ряд сходится достаточно быстро. Другие случаи, когда статическая функция Грина оказывается замкнутым выражением, можно разобрать на основании результатов гл. 10.

Возможность применения метода изображений ограничивается случаями, в которых граница составлена из прямых линий для двух измерений или плоскостей для трех измерений. Из этого правила имеется одно исключение. Именно, в случае уравнения Лапласа (с условиями Дирихле) метод изображений можно применить для окружности в двух измерениях и для сферы в трех измерениях. Указанное ограничение для метода изображений естественно ожидать на основании элементарных соображений геометрической оптики, так как хорошо известно, что единственным зеркалом, для которого образ точечного источника снова представляет собой точку, является плоское зеркало. Конечно, это не значит, что метод изображений нельзя применить к границам другого вида, но тогда он применяется только приближенно. Поэтому мы обратимся к более общему представлению функций Грина посредством собственных функций.

Разложение функции Грина по собственным функциям. Метод собственных функций, исследованный в гл. 6, лимитируется только простотой определения требуемых собственных функций. Так как точные решения достижимы только в разделяющих системах координат, то разложение функций Грина по собственным функциям практически осуществимо только в этих случаях.

Пусть собственные функции равны ψ_n , а соответствующие собственные значения равны k_n , т. е.

$$\nabla^2 \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0. \quad (7.2.37)$$

Здесь n представляет все требуемые индексы, определяющие все рассматриваемые частные функции ψ_n . Кроме того, как показано в предыдущей главе, функции ψ_n образуют ортонормированную систему:

$$\int \bar{\psi}_n \psi_m dV = \delta_{nm}, \quad (7.2.38)$$

где область интегрирования R ограничена поверхностью, на которой ψ_n удовлетворяет однородным граничным условиям. Функция Грина $G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ удовлетворяет тем же условиям. Дополнительно предполагается, что функции ψ_n образуют полную систему, так что $G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ можно разложить в ряд по ψ_n :

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \sum_n A_n \psi_n(\mathbf{r}).$$

Введя это разложение в уравнение с частными производными, которому удовлетворяет G_k ,

$$\nabla^2 G_k + k^2 G_k = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

мы находим, что

$$\sum_n A_n (k^2 - k_n^2) \psi_n(\mathbf{r}) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Пользуясь формулой (7.2.38), мы умножаем обе части последнего уравнения на $\bar{\psi}_n(\mathbf{r})$ и интегрируем по объему R . Получаем

$$A_n = \frac{4\pi \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0)}{k_n^2 - k^2},$$

так что

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r})}{k_n^2 - k^2} \quad (7.2.39)$$

— требуемое разложение. Пример такого разложения мы имеем в формуле (7.1.10).

Неожиданной особенностью формулы (7.2.39) является ее несимметрическая зависимость от \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 для комплексного ψ_n вопреки приведенному выше доказательству того, что G_k должно зависеть от этих переменных симметрично. Конечно, это только кажущееся противоречие. Дело в том, что так как скалярное уравнение Гельмгольца не включает явно никаких комплексных чисел, то $\bar{\psi}_n$ также является решением уравнения (7.2.37) и потому также включено в ортонормированную систему ψ_n . Таким образом, здесь будет простой случай вырождения, так как одному собственному значению принадлежат две собственные функции — как ψ_n , так и $\bar{\psi}_n$. Поэтому в сумму (7.2.39) будет включен как член

$$\frac{\bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r})}{k_n^2 - k^2},$$

так и член

$$\frac{\bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}_0)}{k_n^2 - k^2},$$

так что в действительности выражение (7.2.39) симметрично и вещественно.

Другим интересным моментом является поведение G_k при $k \rightarrow k_n$. Мы видим, что G_k как функция от k аналитична всюду, за исключением простых полюсов при $k = \pm k_n$ с вычетами $\mp 2\pi \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r})/k_n$. Значит, если функция Грина известна в замкнутом виде, то собственные функции ψ_n и собственные значения k_n можно найти, исследуя G_k в ее полюсах.

Эти особенности имеют простое физическое истолкование, так как они являются как раз бесконечностями, появляющимися, когда недиссилиптивная колебательная система возбуждается одной из ее резонансных частот. Чтобы сделать это соответствие более ясным, мы напомним, что уравнение с частными производными, которому удовлетворяет потенциал скорости, созданный точечным источником в \mathbf{r}_0 с угловой частотой ω , имеет вид

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) e^{-i\omega t}.$$

Однако $\psi = e^{-i\omega t} G_k$, $k = \omega c$. Отсюда если $k = k_n$, то система возбуждается одной из ее резонансных частот, что при отсутствии трения приводит к бесконечной амплитуде. Имеется одна ситуация, в которой это возбуждение не будет бесконечным. Так будет, если функция, выражющая пространственную зависимость источника, ортогональна $\bar{\psi}_n$. Действительно, если ψ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = -4\pi \rho,$$

то

$$\psi = \int \rho G_k dV_0 = 4\pi \sum_m \frac{\int \bar{\psi}_m(\mathbf{r}_0) \rho(\mathbf{r}_0) dV_0}{k_m^2 - k^2} \psi_m(\mathbf{r}). \quad (7.2.40)$$

Если $\int \bar{\Psi}_n(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV = 0$, то n -й член исчезает. Тогда в ряде (7.2.39) n -й член отсутствует и k может равняться k_n , не обращая G_k в бесконечность. Функция Грина для таких задач (мы будем употреблять здесь термин «видоизмененная функция Грина» и обозначение Γ_{kn}) удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 + k_n^2) \Gamma_{kn} = -4\pi [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \bar{\Psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r}) - \bar{\Psi}_n(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}_0)].$$

Значит,

$$\Gamma_{kn} = 4\pi \sum_{m \neq n} \frac{\bar{\Psi}_m(\mathbf{r}_0) \psi_m(\mathbf{r})}{k_m^2 - k_n^2}, \quad (7.2.41)$$

где под записью $m \neq n$ мы понимаем, что опускаются все члены, для которых $k_m = \pm k_n$. Мы уже исследовали один такой случай для функции Грина уравнения Лапласа, когда граничными условиями служили однородные условия Неймана. В этом случае одним из собственных значений было $k = 0$, и ему соответствовала постоянная как собственная функция. Значение k для уравнения Лапласа также равно нулю, и мы нашли целесообразным применить видоизмененную функцию Грина Γ_0 .

Теперь мы дадим некоторые примеры применения формулы (7.2.39). Они совсем просты, если рассматриваются полностью ограниченные области, так как если в этом случае собственные функции и соответствующие собственные значения известны, то функции ϕ надо только нормировать, чтобы их можно было подставить в формулу. Пример разложения такого вида дает формула (7.1.10).

Разложения для бесконечной области. Поэтому мы обратимся к другим типам областей, из которых простейшей является неограниченная бесконечная область. Мы показали ранее в этом параграфе [формула (7.2.18)], что в этом случае для источника (а не для стока) двумерная функция Грина равна $iH_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$. Полную ортонормированную систему, по которой ее можно разложить, дают, в частности, плоские волны

$$\frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}},$$

где $\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = K_x x + K_y y$, а K_x и K_y могут принимать любое численное значение. Чтобы получить полную систему, необходимо в соответствии с интегральной теоремой Фурье иметь совокупность значений K , простирающуюся от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль пути в комплексной плоскости K_x и K_y , соединяющего эти две точки. Так как K_x и K_y являются непрерывными переменными (см. стр. 708 по поводу перехода от дискретного к непрерывному), то в формуле (7.2.39) сумму надо заменить интегралом:

$$g_k(R) = i\pi H_0(kR) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dK_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}}{K^2 - k^2} dK_y. \quad (7.2.42)$$

Это представление было применено в формуле (7.2.31) ($K^2 = K_x^2 + K_y^2$). Опять важно заметить, что интеграл не определен, если не задан путь интегрирования около полюсов подинтегральной функции. Путь интегрирования в плоскости K_y дан на рис. 7.7. Он выбран так, чтобы привести к волне, выходящей из точки источника $R = 0$. Тогда можно осуществить интегрирование по K_y , что даст для $Y > 0$

$$i\pi H_0(kR) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(K_x X + \sqrt{k^2 - K_x^2} Y)}}{\sqrt{k^2 - K_x^2}} dK_x.$$

Пусть $K_x = k \cos(\theta + \varphi)$, где $\varphi = \arctg(Y/X)$; тогда

$$\pi H_0(kR) = \int_{-\infty}^{-i\infty} e^{ikR \cos \theta} d\theta.$$

При этом контур интегрирования по θ должен, конечно, быть таким, чтобы дать сходящийся интеграл. Принимая во внимание исходные пределы, мы

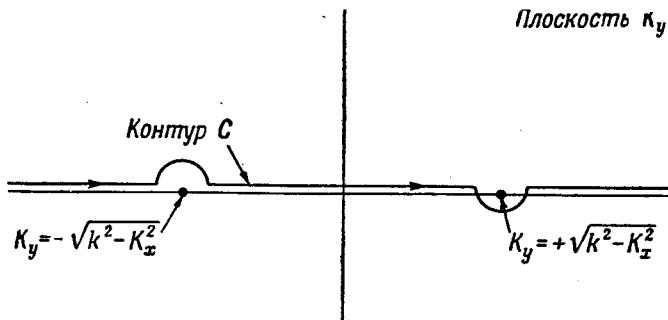


Рис. 7.7. Контур C для интегрирования в формуле (7.2.42).

видим, что этот контур должен идти от $+i\infty$ до $-i\infty$. Сходимость получается, если контур провести несколько слева от мнимой оси в верхней полуплоскости и справа от нее в нижней полуплоскости, как показано

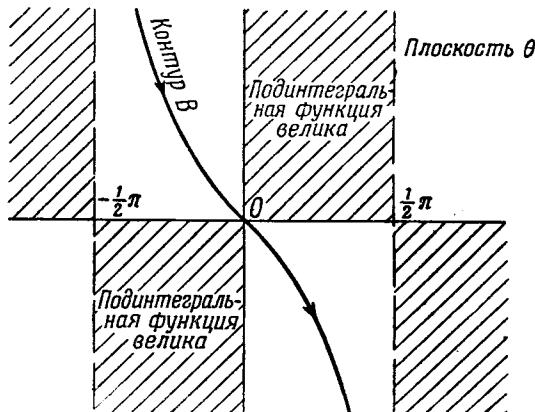


Рис. 7.8. Контур B для интегрального представления функции $H_0(kR)$.

на рис. 7.8. Нашим окончательным результатом будет хорошо известное интегральное представление для функции Ганкеля [см. формулу (5.3.69)]:

$$H_0(kR) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{ikR \cos \theta} d\theta. \quad (7.2.43)$$

Полярные координаты. Формула (7.2.42) дает представление функции Грина $g_k(\mathbf{r})$ в бесконечной двумерной области, пригодное для задач, в которых наиболее удобны прямоугольные координаты. Рассмотрим теперь общую формулу (7.2.39), применяя собственные функции, отвечающие полярным координатам. Этими функциями будут

$$e^{im\varphi} J_m(kr).$$

Их также нужно нормировать. Нормирующий множитель для функции, выражающей зависимость от φ , равен $1/\sqrt{2\pi}$. Нормирующий множитель N_m для радиальной функции получается из соотношения, отвечающего непрерывным собственным значениям (в данном случае k):

$$\lim_{\Delta k \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[N_m^2 \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} dk' \int_0^R J_m(kr) J_m(k'r) r dr \right] = 1.$$

Значение неопределенного интеграла по r равно (см. формулы в конце гл. 11)

$$\int J_m(kr) J_m(k'r) r dr = \frac{k'r J_m(kr) J_{m-1}(k'r) - kr J_m(k'r) J_{m+1}(kr)}{k^2 - k'^2}.$$

Так как R велико, можно воспользоваться асимптотическим поведением

$$J_m(x) \simeq \sqrt{2/\pi x} \cos \left[x - \frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right],$$

данным в формуле (5.3.68). Мы находим, что N_m не зависит от m и равно \sqrt{k} . Поэтому нормированными собственными функциями будут

$$\sqrt{k/2\pi} e^{im\varphi} J_m(kr). \quad (7.2.44)$$

Подстановка (7.2.44) в (7.2.39) дает

$$i\pi H_0(kR) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_m(Kr) J_m(Kr_0)}{K^2 - k^2} K dK,$$

где контур интегрирования еще надо уточнить. Фактический подсчет доказывает, что для расходящихся волн требуется как раз такой контур, какой показан на рис. 7.7, с полюсами при $\pm k$. Последнее разложение можно переписать так, чтобы оно включало только положительные m следующим образом:

$$i\pi H_0(kR) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} e_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_m(Kr) J_m(Kr_0)}{K^2 - k^2} K dK. \quad (7.2.45)$$

Возможно подсчитать интеграл по K методами теории функций. Однако это осуществляется довольно сложными выкладками. Предпочтительнее вывести разложение (7.2.45) другим приемом, который можно распространить на другие системы координат и граничные поверхности.

Общая техника. Это как раз метод, который был применен в § 7.1 для установления связи между поверхностной функцией Грина (7.1.8) и объемной функцией Грина (7.1.10). Мы разлагаем объемную функцию Грина по полной системе функций, содержащих все координаты, кроме одной (в настоящем случае имеются только две координаты, r и φ), с коэффициентами, являющимися неопределенными функциями не включенной координаты. Таким образом, мы положим

$$g_k(R) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{im(\varphi - \varphi_0)} p_m(r | r_0). \quad (7.2.46)$$

Сравнивая с (7.2.45), мы замечаем, что

$$p_m(r | r_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_m(Kr) J_m(Kr_0)}{K^2 - k^2} K dK.$$

Мы подставим (7.2.46) в уравнение для $g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$:

$$\nabla^2 g_k + k^2 g_k = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

В полярных координатах оно имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g_k}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g_k}{\partial \varphi^2} + k^2 g_k = -\frac{4\pi\delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0)}{r}. \quad (7.2.47)$$

(Правая часть этого уравнения содержит выражение δ -функции в полярных координатах. Это выражение должно удовлетворить требованиям, чтобы $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ исчезало всюду, кроме $r = r_0$ и $\varphi = \varphi_0$, а интеграл по всему пространству давал единицу: $\iint \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) r dr d\varphi = 1$. Легко проверить, что эти требования удовлетворяются.)

Если подставить разложение (7.2.46) в (7.2.47), то получится

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{im(\varphi - \varphi_0)} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp_m}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) p_m \right] = -\frac{4\pi\delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0)}{r}.$$

Умножим обе части этого равенства на $e^{-in\varphi}$ и проинтегрируем по φ от 0 до 2π . При интегрировании левой части мы используем ортогональные свойства системы функций $e^{im\varphi}$. Получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp_m}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) p_m = -\frac{4\pi\delta(r - r_0)}{r}. \quad (7.2.48)$$

Мы видим, что $p_m(r | r_0)$ является одномерной функцией Грина для оператора Штурма—Лиувилля

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dy}{dr} \right) + r \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) y = 0$$

[см. уравнение (6.3.12)]. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $\mathcal{L}(\psi) = v$ дается формулой (5.2.19) в виде

$$\psi = y_2 \int_z^z \frac{vy_1 dz}{\Delta(y_1, y_2)} + y_1 \int_z^z \frac{vy_2 dz}{\Delta(y_1, y_2)},$$

где z — независимая переменная, y_1 и y_2 — два независимых решения однородного уравнения

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{dy}{dz} \right) + z \left(k^2 - \frac{m^2}{z^2} \right) y = 0,$$

а $\Delta(y_1, y_2)$ — определитель Бронского

$$\Delta(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 \\ y_2 & y'_2 \end{vmatrix}.$$

Функция v представляет собой неоднородный член, в данном случае $-4\pi\delta(r - r_0)/r$.

Пределы интегрирования в выражении для ψ зависят от специального выбора независимых функций y_1 и y_2 и от граничных условий на p_m . Мы возьмем пределы (это допустимо, так как мы не выбрали y_1 и y_2) меньшим $z (= r)$ в первом интеграле и большим z во втором. Тогда

$$p_m = y_2(r) \int_a^r \frac{-4\pi\delta(u - r_0)}{r_0 \Delta(y_1, y_2)} y_1(u) du + y_1(r) \int_r^b \frac{-4\pi\delta(u - r_0) y_2(u) du}{r_0 \Delta(y_1, y_2)}.$$

Для $r < r_0$ первый интеграл равен нулю, тогда как для $r > r_0$ равен нулю второй интеграл. Отсюда

$$p_m = \frac{-4\pi}{r_0 \Delta(y_1, y_2)} \times \begin{cases} y_1(r) y_2(r_0) & \text{для } r \leq r_0, \\ y_2(r) y_1(r_0) & \text{для } r \geq r_0, \end{cases} \quad (7.2.49)$$

причем определитель Вронского подсчитывается в r_0 . Границные условия определяют, какие из решений однородного уравнения надо применять. В рассматриваемом случае решениями являются функции Бесселя $J_m(kr)$, $N_m(kr)$ и любая их линейная комбинация. Границные условия состоят в следующем: (1) p_m должна быть конечной при $r=0$, так как g_k имеет единственную особенность при $r=r_0$, и (2) точка $r=r_0$ должна быть источником, потому что $g_k(R)$ взята в виде расходящейся волны. Отсюда $y_1 = J_m(kr)$ и $y_2 = H_m(kr)$.

Наконец, надо подсчитать $\Delta(y_1, y_2)$ при $r=r_0$. Здесь полезно применить формулу (5.2.3), выражающую зависимость определителя Вронского от аргумента:

$$\Delta(z) = \Delta(z_0) [f(z_0)/f(z)],$$

если дифференциальное уравнение для y_1 (или y_2) имеет вид

$$\frac{d}{dz} \left(f \frac{dy}{dz} \right) + qy = 0.$$

В рассматриваемом случае $f=r$, так что $\Delta(y_1, y_2) = \text{const}/r$. Чтобы определить постоянную, можно воспользоваться первыми членами степенного ряда около нуля ($r=0$) или асимптотического ряда около $r=\infty$, так как соотношение $\Delta(y_1, y_2) = \text{const}/r$ должно удовлетворяться каждым членом степенного или асимптотического ряда для $\Delta(y_1, y_2)$. Например, применяем соотношения

$$\begin{aligned} J_m(kr) &\underset{kr \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{2/\pi kr} \cos \left[kr - \frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right], \\ H_m(kr) &\underset{kr \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{2/\pi kr} e^{i \left[kr - \frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]}. \end{aligned}$$

Определитель Вронского равен асимптотически

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi kr} \left\{ ik \cos \left[kr - \frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] e^{i \left[kr - \frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]} + \right. \\ \left. + k \sin \left[kr - \frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] e^{i \left[kr - \frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]} \right\}. \end{aligned}$$

Но это выражение равно $2i/\pi r$, так что $\Delta(y_1, y_2) = 2i/\pi r$. Объединяя все наши результаты, получаем окончательно

$$p_m = 2\pi^2 i \times \begin{cases} J_m(kr) H_m(kr_0) & \text{для } r \leq r_0, \\ J_m(kr_0) H_m(kr) & \text{для } r \geq r_0. \end{cases} \quad (7.2.50)$$

Заметим, что p_m равно значению интеграла, получающегося в формуле (7.2.46). Вводя (7.2.50) в разложение для $g_k(R) = i\pi H_0(kR)$, получаем разложение для $H_0(kR)$:

$$\begin{aligned} H_0(kR) &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi_0)} \times \begin{cases} J_m(kr) H_m(kr_0) & \text{для } r \leq r_0, \\ J_m(kr_0) H_m(kr) & \text{для } r \geq r_0; \end{cases} \\ H_0(kR) &= \sum_{m=0}^{\infty} e_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \times \begin{cases} J_m(kr) H_m(kr_0) & \text{для } r \leq r_0, \\ J_m(kr_0) H_m(kr) & \text{для } r \geq r_0. \end{cases} \quad (7.2.51) \end{aligned}$$

Мы привели подробный вывод формулы (7.2.51), так как он будет служить образцом для подсчета разложений других функций Грина. Эти разложения очень полезны, как показывает следующее вычисление. Мы выведем разложение функции e^{ikx} (плоской волны, проходящей слева направо) в полярных координатах, а затем из него получим интегральное представление функции Бесселя J_m [указанное в формуле (5.3.65)]. Заметим, что $H_0(kR)$ изображает волну, выходящую из источника в r_0 . Чтобы получить плоскую волну, проходящую слева направо, необходимо поместить источник в $-\infty$, т. е. считать, что $r_0 \rightarrow \infty$ и $\varphi_0 \rightarrow \pi$. Тогда

$$R = \sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2} \underset{\substack{r_0 \rightarrow \infty \\ \varphi_0 \rightarrow \pi}}{\simeq} r_0 \left(1 + \frac{r}{r_0} \cos \varphi \right) = r_0 + x.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} H_0(kR) &\underset{\substack{r_0 \rightarrow \infty \\ \varphi_0 \rightarrow \pi}}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} e^{i \left[k(r_0+x) - \frac{\pi}{4} \right]} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m \cos m\varphi \cdot J_m(kr) \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} e^{i \left[kr_0 - \frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]}, \end{aligned}$$

или

$$e^{ikx} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \cos m\varphi \cdot J_m(kr) \quad (7.2.52)$$

— требуемое разложение. Этот ряд был приведен в гл. 5 в ином виде [см. формулу (5.3.65)].

Наконец, пользуясь свойствами ортогональности системы $\cos m\varphi$, можно вывести интегральное представление для $J_m(kr)$. Умножаем обе части равенства (7.2.52) на $\cos n\varphi$ и интегрируем от 0 до π . Получаем

$$J_n(kr) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{ikr \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi. \quad (7.2.53)$$

Это соотношение было выведено другим способом в гл. 5 [см. формулу (5.3.65)].

Общая формула. Обратимся теперь к задаче вывода разложения функции Грина для любой из обобщенных систем координат, в которых скалярное уравнение Гельмгольца разделяется. Напомним некоторые результаты исследования техники разделения переменных (см. стр. 612 и далее). Если ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 — три ортогональные обобщенные координаты с коэффициентами Ламе h_1 , h_2 и h_3 , то оператор Лапласа равен

$$\nabla^2 \psi = \sum_{n=1}^3 \frac{M_n}{S f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(f_n \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right), \quad (7.2.54)$$

Величина f_n зависит только от ξ_n (т.е. f_1 является функцией только от ξ_1); S есть определитель Штеккеля (5.1.25), элементы которого Φ_{nm} являются функциями только от ξ_n (т. е. Φ_{1m} зависит только от ξ_1); M_n представляет собой алгебраическое дополнение определителя S , на который в разложении S (5.1.26) умножается Φ_{n1} . M_1 зависит от ξ_2 и ξ_3 , но не зависит от ξ_1 . В скалярном уравнении Гельмгольца, записанном в координатах ξ_1 , ξ_2 ,

ξ_3 , переменные разделяются, так что

$$\psi = X_1(\xi_1) X_2(\xi_2) X_3(\xi_3),$$

где

$$\frac{1}{f_n X_n} \frac{d}{d\xi_n} \left(f_n \frac{dX_n}{d\xi_n} \right) + \sum_{m=1}^3 \Phi_{nm}(\xi_n) k_m^2 = 0, \quad (7.2.55)$$

причем $k_1^2 = k^2$, а k_2^2 и k_3^2 — две константы разделения. Множители f_n и элементы определителя S приведены в таблице в конце гл. 5. Нам потребуется также условие Робертсона $h_1 h_2 h_3 = S f_1 f_2 f_3$ (5.1.32).

Чтобы увидеть, как разложить функцию Грина в этих общих координатах, целесообразно вернуться к выводу разложения (7.2.51) функции Грина в полярных координатах. Там φ -множители оказываются собственными функциями, не зависящими от постоянной k , входящей в уравнение Гельмгольца. С другой стороны, r -множители зависят и от k и от собственных значений m для φ -множителей; по этой и по другим причинам r -множители не могут быть приняты за собственные функции.

Таким образом, функция G была разложена в ряд по собственным функциям для φ -множителей. Поэтому r -множители для каждого члена ряда удовлетворяли неоднородному уравнению, решение которого можно было выразить через два независимых решения соответствующего однородного уравнения, придав таким способом к разложению.

Мы испробуем тот же метод для трех общих координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Из трех констант разделения $k_1 = k$, k_2 , k_3 значение первой, k , определяется уравнением Гельмгольца, которое мы решаем. Другие две, k_2 и k_3 , пригодны, чтобы стать собственными значениями для системы двумерных собственных функций, по которым мы разлагаем функцию Грина G . Обычно выбор того, какие два из координатных множителей должны быть собственными функциями, очевиден. Например, в сферических координатах две из трех переменных, φ и θ , являются углами и имеют конечную область значений, причем граничные условия, которые можно наложить для получения собственных функций, достаточно просты (периодичность и конечность). В других случаях (таких, как круговые цилиндрические координаты r, φ, z) только одна из координат (для цилиндрических координат это φ) имеет конечную область значений, а любой из остальных двух (например, z) должна отвечать система собственных функций для бесконечного интервала, в результате чего для одной из констант разделения k_2 или k_3 получается непрерывная совокупность собственных значений.

Пусть мы нашли, что ξ_2 - и ξ_3 -множители можно превратить в собственные функции с соответствующими парами собственных значений для k_2 и k_3 . Упорядочим некоторым способом допустимые значения k_2 и k_3 ; например, наименьшее собственное значение k_2 можно обозначить через k_{20} , следующее — через k_{21} и т. д., m -е через k_{2m} , тогда как допустимые значения k_3 — через $k_{30}, k_{31}, \dots, k_{3n}, \dots$; собственная функция, соответствующая значениям k_{2m}, k_{3n} , равна $X_{2m}(\xi_2) X_{3n}(\xi_3)$, хотя X_2 может также зависеть от n , а X_3 — от m . Для упрощения записи мы будем обозначать пары целых чисел (m, n) одной буквой p или q , а произведение собственных функций — одной буквой W . Тогда p -я собственная функция в координатах ξ_2, ξ_3 равна $W_p(\xi_2, \xi_3)$ для собственных значений k_{2p}, k_{3p} . В дальнейшем мы будем считать, что как ξ_2 , так и ξ_3 изменяются на конечных интервалах, так что значения как k_{2p} , так и k_{3p} дискретны и разложение по собственным функциям представляет собой ряд по p (m и n). Переход к случаям, когда одна или обе из совокупностей собственных значений представляют собой континuum, так что разложение превращается в интеграл (подобно тому как интеграл Фурье заменяет ряд Фурье), обычно нетруден.

Следовательно, мы допускаем существование полной системы собственных функций $W_q(\xi_2, \xi_3)$ (мы выбрали ξ_2 и ξ_3 для определенности, так как пригодна любая пара, для которой выполняются необходимые условия), удовлетворяющих условиям ортогональности и нормированности

$$\int \int \bar{W}_q(\xi_2, \xi_3) W_p(\xi_2, \xi_3) \rho(\xi_2, \xi_3) d\xi_2 d\xi_3 = \delta_{qp}, \quad (7.2.56)$$

где ρ — весовая функция. (Относительно весовой функции в одномерном случае см. стр. 725.) Мы будем предполагать, что эта система собственных функций существует при произвольном k для значений ξ_2 и ξ_3 в интересующей нас области. Конечно, функция W_q может зависеть от k . Тогда по аналогии с (7.2.46) мы напишем

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = \sum_q X_{1q}(\xi_1 | \xi'_1) B_q(\xi'_2, \xi'_3) W_q(\xi_2, \xi_3), \quad (7.2.57)$$

где функции X_q и B_q надо определить.

В обобщенных координатах уравнение, определяющее G_k , имеет вид

$$\sum_{n=1}^3 \frac{M_n}{S f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(f_n \frac{\partial G}{\partial \xi_n} \right) + k_1^2 G = -4\pi \frac{\delta(\xi_1 - \xi'_1) \delta(\xi_2 - \xi'_2) \delta(\xi_3 - \xi'_3)}{h_1 h_2 h_3}. \quad (7.2.58)$$

Заметим, что представление функции $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, стоящее в правой части с коэффициентом -4π , обладает обычными свойствами дельта-функции: оно равно нулю при всех ξ_1, ξ_2, ξ_3 , за исключением $\xi_1 = \xi'_1, \xi_2 = \xi'_2, \xi_3 = \xi'_3$, а интеграл от него по всему пространству равен единице. Приступим теперь к подстановке ряда (7.2.57) в уравнение (7.2.58). Нам потребуется результат применения оператора $\nabla^2 + k_1^2$ к $W_q(\xi_2, \xi_3)$. Только два из членов суммы в (7.2.58) содержат производные от W_q . Так как W_q равно произведению решений $X_2(\xi_2)$ и $X_3(\xi_3)$ уравнений (7.2.55), то отсюда вытекает, что

$$\sum_{n=2}^3 \frac{M_n}{S f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(f_n \frac{\partial W_q}{\partial \xi_n} \right) = - \sum_{n=2}^3 \frac{M_n}{S} \left[\sum_{m=1}^3 \Phi_{nm}(\xi_n) k_{mq}^2 \right] W_q,$$

где мы придали константам разделения дополнительный индекс q , указывающий на их соответствие функции W_q .

Сумму по n можно упростить, пользуясь свойством определителя S [см. формулу (5.1.27)]:

$$\sum_n M_n \Phi_{nn} = S \delta_{1m}.$$

Значит,

$$\sum_{n=2,3} \frac{M_n}{S f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(f_n \frac{\partial W_q}{\partial \xi_n} \right) = -k_1^2 W_q + \frac{M_1}{S} \left(\sum_m k_{mq}^2 \Phi_{1m} \right) W_q.$$

Отсюда, если подставить ряд (7.2.57) в (7.2.58), получится

$$\begin{aligned} \sum_q B_q(\xi'_2, \xi'_3) W_q(\xi_2, \xi_3) \frac{M_1}{S} \left[\frac{1}{f_1} \frac{d}{d\xi_1} \left(f_1 \frac{dX_{1q}}{d\xi_1} \right) + \sum_{m=1}^3 k_{mq}^2 \Phi_{1m}(\xi_1) X_{1q} \right] &= \\ &= -4\pi \frac{\delta(\xi_1 - \xi'_1) \delta(\xi_2 - \xi'_2) \delta(\xi_3 - \xi'_3)}{h_1 h_2 h_3}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись условием ортонормальности (7.2.56) и условием Робертсона (5.1.32), мы находим, что

$$B_q(\xi'_2, \xi'_3) = \frac{\rho(\xi'_2, \xi'_3) \bar{W}_q(\xi'_2, \xi'_3)}{M_1(\xi'_2, \xi'_3) f_2(\xi'_2) f_3(\xi'_3)} \quad (7.2.59)$$

$$\frac{1}{f_1} \frac{d}{d\xi_1} \left(f_1 \frac{dX_{1q}}{d\xi_1} \right) + \left(\sum_{m=1}^3 k_{mq}^2 \Phi_{1m} \right) X_{1q} = -\frac{4\pi}{f_1} \delta(\xi_1 - \xi'_1). \quad (7.2.60)$$

Таким образом, как в разобранном выше примере полярных координат, X_{1q} является одномерной функцией Грина. Следуя методу, примененному при решении уравнения (7.2.48), можно выразить X_{1q} через два независимых решения (y_1 и y_2) однородного уравнения

$$\frac{1}{f_1} \frac{d}{d\xi_1} \left(f_1 \frac{dy}{d\xi_1} \right) + \sum k_{mp}^2 \Phi_{1m} y = 0.$$

Мы получаем

$$X_{1q}(\xi_1 | \xi'_1) = -\frac{4\pi}{\Delta(y_{1q}, y_{2q}) f_1(\xi'_1)} \times \begin{cases} y_{1q}(\xi_1) y_{2q}(\xi'_1) & \text{для } \xi_1 \leq \xi'_1, \\ y_{1q}(\xi'_1) y_{2q}(\xi_1) & \text{для } \xi_1 \geq \xi'_1, \end{cases} \quad (7.2.61)$$

где Δ — определитель Вронского, вычисленный в ξ'_1 . Как в исследовании на стр. 765, выбор применяемых решений y_1 и y_2 зависит от граничных условий задачи¹⁾. Определитель Вронского в данном случае имеет вид

$$\Delta(y_1, y_2) = \frac{\text{const}}{f_{12}}, \quad (7.2.62)$$

так что множитель $\Delta(y_1, y_2)/f_1$ постоянен.

Значит, разложение $G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$ таково:

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = -4\pi \frac{h_1}{h_2 h_3} \rho(\xi'_2, \xi'_3) \sum_q \bar{W}_q(\xi'_2, \xi'_3) W_q(\xi_2, \xi_3) \times \\ \times \frac{1}{\Delta(y_{1q}, y_{2q})} \times \begin{cases} y_{1q}(\xi_1) y_{2q}(\xi'_1) & \text{для } \xi_1 \leq \xi'_1, \\ y_{1q}(\xi'_1) y_{2q}(\xi_1) & \text{для } \xi_1 \geq \xi'_1, \end{cases} \quad (7.2.63)$$

где коэффициенты Ламе h и определитель Вронского Δ являются функциями координат со штрихом, а ρ — весовая функция, определенная в формуле (7.2.56). Из этого разложения методом, примененным в рассмотренном выше случае полярных координат, возможно, вообще говоря, получить разложение плоской волны и интегральные представления участвующих в них функций. Наконец, так как теперь можно выразить плоские волны и функцию Грина в различных системах координат, то становится возможным выразить решения уравнения Гельмгольца в одной системе координат через решения, соответствующие другой системе.

Функции Грина и собственные функции. Функцию Грина для задачи Штурма—Лиувилля (см. стр. 668)

$$\frac{d}{dx} \left(P \frac{dG}{dx} \right) + (q + \lambda r) G = -4\pi \delta(x - x_0) \quad (7.2.64)$$

можно выразить в виде бесконечного ряда (7.2.39) по собственным функциям однородного дифференциального уравнения, соответствующего (7.2.64):

$$\frac{d}{dx} \left(P \frac{d\psi_n}{dx} \right) + (q + \lambda_n r) \psi_n = 0 \quad (7.2.65)$$

с однородными граничными условиями при $x = a$ и $x = b$. Эти собственные функции можно взять так, чтобы они образовывали полный ортонормальный ряд, так что

$$\int_a^b \bar{\psi}_n(x) \psi_m(x) r dx = \delta_{nm}. \quad (7.2.66)$$

¹⁾ Решение $y_{1q}(\xi_1)$ должно удовлетворять однородному граничному условию, наложенному на G_k при $\xi_1 = a$, а решение $y_{2q}(\xi_1)$ — соответствующему условию при $\xi_1 = b$, где $a < b$ — границы интервала изменения переменной ξ_1 . — Прим. ред.

Бесконечный ряд для $G_\lambda(x|x_0)$ имеет вид

$$G_\lambda(x|x_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\psi}_n(x)\psi_n(x_0)}{\lambda_n - \lambda}. \quad (7.2.67)$$

С другой стороны, функцию G можно выразить через два независимых решения y_1 и y_2 уравнения (7.2.64) при помощи метода, которым была выведена формула (7.2.49). Получается

$$G_\lambda(x|x_0) = -\frac{4\pi}{p(x_0)\Delta(y_1, y_2)} \times \begin{cases} y_1(x)y_2(x_0) & \text{для } x < x_0, \\ y_2(x)y_1(x_0) & \text{для } x > x_0. \end{cases} \quad (7.2.68)$$

Сравнивая это выражение, имеющее различный вид для различных областей значений x , с формулой (7.2.67), можно получить информацию о функциях ψ_n и соответствующих собственных значениях λ_n . Это дает очень сильный метод исследования свойств собственных функций, который действительно время от времени применялся как основа всей описанной в гл. 6 теории. Здесь мы удовлетворимся исследованием тех результатов, которые представляют практическое значение.

Основная идея состоит в том, что $G_\lambda(x|x_0)$ как функция λ имеет простые полюсы при $\lambda = \lambda_n$ с вычетами $-4\pi\bar{\psi}_n(x)\psi_n(x_0)$. Эти же самые особенности должно иметь и представление (7.2.68), имеющее замкнутый вид [а не вид бесконечного ряда, как (7.2.67)]. Отсюда, рассматривая (7.2.68), возможно (в принципе) получить собственные значения λ_n , а также соответствующие собственные функции ψ_n , уже нормированные.

Поясним предложенный метод на простом примере. Пусть уравнение (7.2.65) имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda\psi = 0,$$

а граничные условия состоят в том, что $\psi = 0$ при $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Тогда соответствующее y_1 равно $\sin \sqrt{\lambda}(x-a)$, а $y_2 = \sin \sqrt{\lambda}(x-b)$. Значение $\Delta(y_1, y_2)$ равно

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(x-a) \cdot \cos \sqrt{\lambda}(x-b) - \\ - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}(x-a) \cdot \sin \sqrt{\lambda}(x-b) = \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(b-a). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$G_\lambda'(x|x_0) = \frac{-4\pi}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(b-a)} \times \begin{cases} \sin \sqrt{\lambda}(x-a) \cdot \sin \sqrt{\lambda}(x_0-b) & \text{для } x < x_0, \\ \sin \sqrt{\lambda}(x_0-a) \cdot \sin \sqrt{\lambda}(x-b) & \text{для } x > x_0. \end{cases}$$

Собственные значения являются нулями функции $\sin \sqrt{\lambda}(b-a)$, так что получается хорошо знакомый результат $\sqrt{\lambda_n} = n\pi/(b-a)$. Вычеты здесь равны

$$-[8\pi/(b-a)](-1)^n \sin[n\pi(x-a)/(b-a)] \cdot \sin[n\pi(x_0-b)/(b-a)],$$

или

$$-[8\pi/(b-a)] \sin[n\pi(b-x)/(b-a)] \cdot \sin[n\pi(b-x_0)/(b-a)].$$

Отсюда $\psi_n(x)\psi_n(x_0)$ равно

$$[2/(b-a)] \sin[n\pi(b-x)/(b-a)] \cdot \sin[\pi n(b-x_0)/(b-a)],$$

так что нормированные собственные функции имеют вид

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{n\pi(b-x)}{b-a}.$$

Эти собственные функции удовлетворяют условиям ортогональности и нормированности (7.2.66) при $r = 1$ и образуют полную систему. Таким образом, мы видим, что если можно найти два независимых решения и составить из них комбинации, из которых одна удовлетворяет граничному условию в одной граничной точке, а другая — в другой, и если можно подсчитать определитель Бронского, то можно найти нормированные ортогональные собственные функции и собственные значения.

Сравнивая этот метод с более обычным методом, рассмотренным в гл. 6, мы видим, что в итоге получается то же самое. Однако описанный сейчас метод дает также нормировку, что в других методах часто требует вычисления сложных интегралов.

Мы будем иметь случай воспользоваться этим методом для более сложных функций в задачах к этой главе, а также при определении и нормировке собственных функций, возникающих в задачах для двух и более измерений. С тем же процессом в несколько ином виде мы встретимся в § 11.1.

7.3. Функция Грина для скалярного волнового уравнения

Функция Грина для скалярного уравнения Гельмгольца, только что исследованная в § 7.2, особенно полезна при решении неоднородных задач, т. е. задач, возникающих при наличии источников внутри объема или на граничной поверхности. Функция Грина для скалярного волнового уравнения должна нести аналогичные обязанности, т. е. также должна давать возможность решать скалярное волновое уравнение при наличии источников. Для получения некоторого представления об уравнении, которому должна удовлетворять эта функция, рассмотрим типичную неоднородную задачу. Пусть ψ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi q(\mathbf{r}, t). \quad (7.3.1)$$

Функция $q(\mathbf{r}, t)$ описывает плотность источников и дает не только распределение источников в пространстве, но также зависимость источников от времени в каждой точке пространства. Кроме уравнения (7.3.1), необходимо сформулировать граничные и начальные условия, чтобы получить единственное решение этого уравнения. Условие на граничной поверхности может быть условием Дирихле, или Неймана, или линейной комбинацией обоих. Условия по временной координате должны быть условиями Коши (см. стр. 638, гл. 6). Следовательно, необходимо задать значения ϕ и $\partial\phi/\partial t$ при $t = t_0$ для каждой точки рассматриваемой области. Пусть эти значения равны $\psi_0(\mathbf{r})$ и $v_0(\mathbf{r})$ соответственно.

Вид уравнения (7.3.1) подсказывает, что уравнение, определяющее функцию Грина $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$, имеет форму

$$\nabla^2G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2G}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0). \quad (7.3.2)$$

Мы видим, что источник имеет характер импульса при $t = t_0$ в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Поэтому G описывает эффект от этого импульсного источника с течением времени, распространяющийся от $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. При этом, как и в случае скалярного уравнения Гельмгольца, G должна удовлетворять однородным граничным условиям, наложенным на функцию ψ на границе. Для начальных условий представляется разумным допустить, что G и $\partial G/\partial t$ должны равняться нулю при $t < t_0$; это значит, что импульсный источник, действовавший в момент t_0 , не должен проявлять себя в предшествующее время.