

Эти собственные функции удовлетворяют условиям ортогональности и нормированности (7.2.66) при $r = 1$ и образуют полную систему. Таким образом, мы видим, что если можно найти два независимых решения и составить из них комбинации, из которых одна удовлетворяет граничному условию в одной граничной точке, а другая — в другой, и если можно подсчитать определитель Бронского, то можно найти нормированные ортогональные собственные функции и собственные значения.

Сравнивая этот метод с более обычным методом, рассмотренным в гл. 6, мы видим, что в итоге получается то же самое. Однако описанный сейчас метод дает также нормировку, что в других методах часто требует вычисления сложных интегралов.

Мы будем иметь случай воспользоваться этим методом для более сложных функций в задачах к этой главе, а также при определении и нормировке собственных функций, возникающих в задачах для двух и более измерений. С тем же процессом в несколько ином виде мы встретимся в § 11.1.

7.3. Функция Грина для скалярного волнового уравнения

Функция Грина для скалярного уравнения Гельмгольца, только что исследованная в § 7.2, особенно полезна при решении неоднородных задач, т. е. задач, возникающих при наличии источников внутри объема или на граничной поверхности. Функция Грина для скалярного волнового уравнения должна нести аналогичные обязанности, т. е. также должна давать возможность решать скалярное волновое уравнение при наличии источников. Для получения некоторого представления об уравнении, которому должна удовлетворять эта функция, рассмотрим типичную неоднородную задачу. Пусть ψ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi q(\mathbf{r}, t). \quad (7.3.1)$$

Функция $q(\mathbf{r}, t)$ описывает плотность источников и дает не только распределение источников в пространстве, но также зависимость источников от времени в каждой точке пространства. Кроме уравнения (7.3.1), необходимо сформулировать граничные и начальные условия, чтобы получить единственное решение этого уравнения. Условие на граничной поверхности может быть условием Дирихле, или Неймана, или линейной комбинацией обоих. Условия по временной координате должны быть условиями Коши (см. стр. 638, гл. 6). Следовательно, необходимо задать значения ϕ и $\partial\phi/\partial t$ при $t = t_0$ для каждой точки рассматриваемой области. Пусть эти значения равны $\psi_0(\mathbf{r})$ и $v_0(\mathbf{r})$ соответственно.

Вид уравнения (7.3.1) подсказывает, что уравнение, определяющее функцию Грина $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$, имеет форму

$$\nabla^2G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2G}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0). \quad (7.3.2)$$

Мы видим, что источник имеет характер импульса при $t = t_0$ в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Поэтому G описывает эффект от этого импульсного источника с течением времени, распространяющийся от $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. При этом, как и в случае скалярного уравнения Гельмгольца, G должна удовлетворять однородным граничным условиям, наложенным на функцию ψ на границе. Для начальных условий представляется разумным допустить, что G и $\partial G/\partial t$ должны равняться нулю при $t < t_0$; это значит, что импульсный источник, действовавший в момент t_0 , не должен проявлять себя в предшествующее время.

Не следует думать, что примененное здесь соотношение между причиной и следствием очевидно. Направленность течения времени несомненна для макроскопических событий, но возможность экстраполяции этого опыта на микроскопические явления не ясна. Действительно, как уравнения движения в механике, так и уравнения Максвелла, которые могут привести к волновому уравнению, не имеют никакой асимметрии по времени. Поэтому для микроскопических событий могут оказаться возможными «эффекты» распространения во времени назад; в последние годы начали оформляться теории, применяющие такие решения волнового уравнения. Однако исследование вопроса о том, как такие решения могут все-таки привести к связи между причиной и следствием во времени для макроскопических событий, уело бы нас слишком далеко.

Пока мы будем в основном пользоваться нулевыми начальными условиями для $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ и $\partial G / \partial t$ при $t < t_0$, хотя не следует забывать существования иных возможностей.

Соотношение взаимности. Вытекающая из условий Коши, как указано выше, направленность времени означает, что, обобщая соотношение взаимности $G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = G_k(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r})$ посредством включения времени, мы не приходим к равенству $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, t_0 | \mathbf{r}, t)$. Действительно, если $t > t_0$, то второе выражение равно нулю. Чтобы получить соотношение взаимности, необходимо обратить направление течения времени, так что соотношение взаимности приобретает вид

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}, -t). \quad (7.3.3)$$

Для истолкования этого равенства удобно положить $t_0 = 0$. Тогда получим, что $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, 0) = G(\mathbf{r}_0, 0 | \mathbf{r}, -t)$. Мы видим, что эффект в точке \mathbf{r} в момент t от импульсного источника, действовавшего в \mathbf{r}_0 в момент 0, равен эффекту в \mathbf{r}_0 в момент 0 импульсного источника, действовавшего в \mathbf{r} в момент $-t$, т. е. на время t раньше.

Для доказательства соотношения (7.3.3) напишем уравнения, которым удовлетворяют обе функции Грина:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0),$$

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1)}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(t - t_1).$$

Умножая первое на $G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1)$, а второе на $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$, вычитая один результат из другого и производя интегрирование по исследуемой области и по времени t от $-\infty$ до t' , где $t' > t_0$ и $t' > t_1$, получаем

$$\int_{-\infty}^{t'} dt \int \left[G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \nabla^2 G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) - G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \nabla^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) - \right. \\ \left. - \frac{1}{c^2} G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \right] dV = \\ = 4\pi [G(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}_1, -t_1) - G(\mathbf{r}_1, t_1 | \mathbf{r}_0, t_0)]. \quad (7.3.4)$$

Левую часть последнего равенства можно преобразовать при помощи теоремы Грина и тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) - G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \right] = \\ = G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) - G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0),$$

Тогда левая часть примет вид

$$\int_{-\infty}^{t'} dt \int dS \cdot [G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \operatorname{grad} G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) - \\ - G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \operatorname{grad} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)] + \\ + \frac{1}{c^2} \int dV \left[G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1)}{\partial t} - \right. \\ \left. - G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \frac{\partial G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t} \right]_{t=-\infty}^{t=t'}.$$

Первый из этих интегралов равен нулю, так как обе функции Грина удовлетворяют одинаковым однородным граничным условиям на S . Второй также равен нулю, как мы сейчас увидим. На нижнем пределе как $G(\mathbf{r}, -\infty | \mathbf{r}_0, t_0)$, так и ее производная по времени равны нулю в силу условия причинности. В момент $t = t'$ функция $G(\mathbf{r}, -t' | \mathbf{r}_1, -t_1)$ и ее производная по времени обращаются в нуль, так как момент $-t'$ предшествует моменту $-t_1$. Значит, левая часть равенства (7.3.4) обращается в нуль, что приводит к теореме взаимности (7.3.3).

Теперь покажем, как с помощью функции Грина можно выразить решение неоднородной задачи (включающей начальные условия) для скалярного волнового уравнения. Нам потребуется уравнение (7.3.1)

$$\nabla_0^2 \psi(\mathbf{r}_0, t_0) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} = -4\pi q(\mathbf{r}_0, t_0),$$

а также

$$\nabla_0^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0).$$

Это последнее равенство можно получить из (7.3.2) при помощи соотношения взаимности. Как обычно, умножаем первое уравнение на G , второе на ψ и вычитаем один результат из другого. Интегрируем по интересующему нас объему и по t_0 от 0 до t^+ . Под символом t^+ мы будем понимать $t + \varepsilon$, где ε произвольно мало. Этот предел вводится, чтобы избежать окончания интегрирования точно в пике дельта-функции. Пользуясь окончательными формулами, важно иметь в виду, что предел равен t^+ , а не точно t . Получаем

$$\int_0^{t^+} dt_0 \int dV_0 \left[G \nabla_0^2 \psi - \psi \nabla_0^2 G + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t_0^2} \psi - G \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} \right) \right] = \\ = 4\pi \left[\psi(\mathbf{r}, t) - \int_0^{t^+} dt_0 \int dV_0 q(\mathbf{r}_0, t_0) G \right].$$

Вновь применяя теорему Грина и т. д., находим

$$\int_0^{t^+} dt_0 \oint dS_0 \cdot (G \operatorname{grad}_0 \psi - \psi \operatorname{grad}_0 G) + \frac{1}{c^2} \int dV_0 \left[\frac{\partial G}{\partial t_0} \psi - G \frac{\partial \psi}{\partial t_0} \right]_0^{t^+} + \\ + 4\pi \int_0^{t^+} dt_0 \int dV_0 q(\mathbf{r}_0, t_0) G = 4\pi \psi(\mathbf{r}, t).$$

Подинтегральная функция в первом интеграле задана граничными условиями. Во втором интеграле при подстановке $t = t^+$ подинтегральная функция обращается в нуль в силу начальных условий для G . Оставшийся

предел включает только начальные условия. Отсюда

$$\begin{aligned} 4\pi \psi(\mathbf{r}, t) = & 4\pi \int_0^t dt_0 \int dV_0 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) q(\mathbf{r}_0, t_0) + \\ & + \int_0^t dt_0 \oint dS_0 \cdot (G \operatorname{grad}_0 \psi - \phi \operatorname{grad}_0 G) - \\ & - \frac{1}{c^2} \int dV_0 \left[\left(\frac{dG}{dt_0} \right)_{t_0=0} \psi_0(\mathbf{r}_0) - G_{t_0=0} v_0(\mathbf{r}_0) \right], \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

где $\psi_0(\mathbf{r}_0)$ и $v_0(\mathbf{r}_0)$ — начальные значения ψ и $\partial\psi/\partial t$.

Формула (7.3.5) дает полное решение неоднородной задачи, включая удовлетворение начальным условиям. Поверхностные интегралы, как и в случае уравнения Гельмгольца, надо аккуратно определить. Как и в том случае, мы примем, что значение на поверхности равно пределу значений функции при приближении к поверхности изнутри.

Первые два интеграла в правой части последней формулы (7.3.5) имеют почти такой же вид, как интегралы, получающиеся в аналогичной формуле для случая уравнения Гельмгольца. Первый представляет эффект объемных источников; второй — эффект граничных условий на (пространственной) границе области. Последний член содержит начальные условия. Его можно истолковать, если спросить, какой требуется вид источника q , чтобы функция ψ началась при $t=0$ требуемым образом. Можно ожидать, что это потребует силу импульсного типа в момент $t=0^+$. На основании (7.3.5) можно показать, что член с источником, требуемый для воспроизведения начальных условий, равен

$$\frac{1}{c^2} [\psi_0(\mathbf{r}_0) \delta'(t_0) + v_0(\mathbf{r}_0) \delta(t_0)],$$

где под $\delta'(t_0)$ мы понимаем производную от δ -функции. Она обладает следующим свойством:

$$\int_a^b f(x) \delta'(x) dx = \begin{cases} -f'(0), & \text{если } x=0 \text{ находится внутри интервала } (a, b); \\ 0, & \text{если } x=0 \text{ находится вне интервала } (a, b). \end{cases}$$

Можно понять физический смысл написанных членов. Член типа $v_0 \delta(t_0)$ требуется, чтобы представить импульсную силу, придающую каждой точке среды начальную скорость $v_0(\mathbf{r}_0)$. Чтобы получить начальное смещение, импульс, действующий в момент $t_0=0$, должен длиться короткое время, пока не будет достигнуто требуемое смещение. В этот момент прилагается второй импульс, чтобы уменьшить скорость до нуля, но оставить смещение неизменным. Можно заметить, что первый член $\psi(\mathbf{r}_0, t_0) \delta'(t_0)$ имеет такой вид, если записать его в форме

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\psi(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\delta(t_0 + \epsilon) - \delta(t_0 - \epsilon)}{2\epsilon} \right].$$

Вид функции Грина. Чтобы сделать формулу (7.3.5) применимой, нужно знать функцию G . Как и в случае скалярного уравнения Гельмгольца, мы найдем ее сначала для бесконечной области. Обозначим эту функцию через g . Метод, примененный в случае скалярного уравнения Гельмгольца, включает оценку относительного порядка особенностей функций $\nabla^2 g$ и $\partial^2 g / \partial t^2$ в уравнении

$$\nabla^2 g - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0).$$

Можно обосновать, что функция $\nabla^2 g$ имеет более сильную особенность, так как она содержит вторую производную от трехмерной δ -функции $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$. Такое обоснование не очень удовлетворительно. Однако в данный момент допустим, что это верно. Позже мы возвратимся к последнему уравнению и выведем более строгое результа, который сейчас получим.

Интегрируя обе части уравнения по малому шаровому объему с центром в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, т. е. $R = 0$, и пренебрегая членом с производной по времени, получаем, как в предыдущем параграфе,

$$g \underset{R \rightarrow 0}{\simeq} \delta(t - t_0)/R. \quad (7.3.6)$$

Как и ранее, мы приступим теперь к отысканию такого решения однородного уравнения, которое удовлетворяет этому условию, так как ясно, что g удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 g - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0, \quad \text{когда } R \text{ и } t - t_0 \text{ не равны нулю.}$$

При $R = 0$ надо воспользоваться условием (7.3.6). Так как мы имеем дело с точечными источниками в бесконечной среде, то g является функцией от R , а не от \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 в отдельности. Отсюда

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial g}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 (gR)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (gR)}{\partial t^2} = 0. \quad (7.3.7)$$

Решениями этого уравнения служат функции

$$g = \frac{h[R/c - (t - t_0)] + k[R/c + (t - t_0)]}{R},$$

где h и k — любые функции. Сравнивая с условием (7.3.6), мы видим, что представляются две возможности (или любая их линейная комбинация):

$$g = \delta[R/c - (t - t_0)]/R \quad \text{и} \quad g = \delta[R/c + (t - t_0)]/R.$$

Но вторую из них надо исключить, так как она не удовлетворяет наложенному ранее условию, которое требует, чтобы эффект от импульса, действовавшего в момент t_0 , ощущался на удалении R только при $t > t_0$. Следовательно,

$$g = \frac{\delta[R/c - (t - t_0)]}{R} \quad (R, t - t_0 > 0), \quad (7.3.8)$$

что представляет сферическую волну, распространяющуюся от источника с радиальной скоростью c .

Теперь можно сделать апостериорную проверку нашего начального допущения о том, что особенность у $\nabla^2 g$ более высокого порядка, чем у $\partial^2 g / \partial t^2$. На это указывает наличие множителя $1/R$, но для доказательства требуется довольно тонкий учет бесконечностей. Поэтому мы задержимся, чтобы придать формуле (7.3.8) более прочное обоснование, и только после этого вернемся к обсуждению выводов, вытекающих из этой формулы. Применяя сферические координаты для $\delta(R) = \delta(r - r_0)$ и обозначив

$$\tau = t - t_0,$$

можно, делая те же шаги, которые привели к (7.3.7), получить более общее уравнение, справедливо также для R и τ , равных нулю:

$$\frac{\partial^2 (Rg)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (Rg)}{\partial \tau^2} = -\frac{2\delta(R)}{R} \delta(\tau).$$

Численный множитель 2 появляется из-за того, что переменная R пробегает только неотрицательные значения. Отсюда $\int_0^\infty \delta(R) dR = \frac{1}{2}$.

Чтобы перейти к дальнейшему, желательно воспользоваться соотношением

$$\frac{\delta(R)}{R} = -\delta'(R). \quad (7.3.9)$$

Для его доказательства умножим $\delta(R)/R$ на дифференцируемую функцию $f(R)$ и проинтегрируем по R . Пусть

$$f(R) = f(0) + f'(0)R + f''(0)\frac{R^2}{2!} + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(R)\delta(R)}{R} dR &= f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(R)}{R} dR + f'(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(R) dR + \\ &\quad + \frac{f''(0)}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} R \delta(R) dR + \dots \end{aligned}$$

Первый из полученных членов представляет собой интеграл от нечетной функции, так что его главное значение по Коши равно нулю; второй член дает $f'(0)$; третий и все высшие члены дают нули. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(R)\delta(R)}{R} dR = f'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(R)\delta(R) dR = - \int_{-\infty}^{\infty} f(R)\delta'(R) dR.$$

Это равенство можно также вывести более непосредственно из определения производной следующим образом:

$$\delta'(R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta(R+\varepsilon) - \delta(R-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{\delta(R+\varepsilon)}{-R} - \frac{\delta(R-\varepsilon)}{R} \right] = -\frac{\delta(R)}{R}.$$

Возвращаясь к уравнению, мы можем теперь написать

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}(Rg) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(Rg) = 2\delta'(R)\delta(\tau).$$

Ясно, что следует ввести координаты

$$\xi = R - c\tau, \quad \eta = R + c\tau. \quad (7.3.10)$$

Надо определить также смысл произведения $\delta'(R)\delta(\tau)$ в новых переменных. Для этого заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau dR \cdot f(\tau, R) \delta'(R) \delta(\tau) = - \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right)_{R, \tau=0}.$$

Это выражение можно переписать как $-(\partial f / \partial \xi + \partial f / \partial \eta)_{\xi, \eta=0}$. Следовательно, после преобразования (7.3.10)

$$\delta'(R)\delta(\tau) = 2c [\delta'(\xi)\delta(\eta) + \delta'(\eta)\delta(\xi)]. \quad (7.3.11)$$

Появившийся множитель $2c$ как раз компенсирует изменение элемента площади при переходе от переменных R, τ к переменным ξ, η .

Таким образом, уравнение, которому удовлетворяет Rg , в новых переменных ξ и η приобретает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}(Rg) = c [\delta'(\xi)\delta(\eta) + \delta'(\eta)\delta(\xi)],$$

или

$$Rg = c \int_{-\infty}^{\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\eta} \delta'(\xi)\delta(\eta) d\eta + c \int_{\xi}^{\infty} d\xi \int_{\eta}^{\infty} \delta(\xi)\delta'(\eta) d\eta.$$

Пределы интегрирования выбраны так, чтобы привести к решению, удовлетворяющему требуемым начальным условиям. После интегрирования получаем

$$Rg = c \delta(\xi) u(\eta) - c \delta(\eta) [1 - u(\xi)], \quad (7.3.12)$$

$$\text{где } u(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{для } \eta < 0, \\ 1 & \text{для } \eta > 0, \end{cases} \text{ откуда } 1 - u(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{для } \xi < 0, \\ 0 & \text{для } \xi > 0. \end{cases}$$

Второй член в (7.3.12) можно отбросить; можно показать, что всюду один или оба из его сомножителей равны нулю. Функция $\delta(\eta)$ отлична от нуля, только если $\eta = 0$ (т. е. если $ct = -R$), но в этой точке $\xi = 2R$, так что $1 - u(\xi) = 0$. С другой стороны, в первом члене $\delta(\xi)$ отлично от нуля, если $ct = R$, т. е. когда $\eta = 2R$ и $u(\eta) = 1$. Заменяя в (7.3.12) ξ на $R - c(t - t_0)$, а $u(\eta)$ на 1 (для $R, t - t_0 > 0$) и разрешая относительно g , мы приходим к (7.3.8), что и требуется.

Чтобы получить некоторое представление о значении формулы (7.3.8), рассмотрим случай бесконечной области с начальными условиями $\phi = \partial\psi/\partial t = 0$ при $t = 0$. Тогда

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^{t^+} dt_0 \int \frac{\delta[(R/c) - (t - t_0)]}{R} q(\mathbf{r}_0, t_0) dV_0, \quad t^+ = t + \epsilon,$$

и окончательно

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{q(\mathbf{r}_0, -R/c)}{R} dV_0. \quad (7.3.13)$$

Мы видим, что эффект в \mathbf{r} в момент t определяется значением функции источника q в \mathbf{r}_0 в момент $t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$. Это утверждение как раз означает, что скорость распространения возмущения равна c . Если скорость распространения становится бесконечной, то решение приводится к известному решению уравнения Пуассона, имеющему вид потенциала, как это и должно быть, поскольку неоднородное скалярное волновое уравнение в этом пределе превращается в уравнение Пуассона. Вследствие этого решение (7.3.13) часто называют *запаздывающим потенциалом*.

Поле подвижного источника. В качестве простого примера рассмотрим точечный источник, движущийся в бесконечной среде со скоростью \mathbf{v} . Тогда $q = q_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt})$, где q_0 определяется интенсивностью источника. Из (7.3.5) имеем

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= q_0 \int_0^{t^+} dt_0 \int \frac{\delta[(R/c) - (t - t_0)] \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{vt}_0)}{R} dV_0 = \\ &= q_0 \int_0^{t^+} \frac{\delta[(1/c)|\mathbf{r} - \mathbf{vt}_0| - (t - t_0)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{vt}_0|} dt_0. \end{aligned}$$

Положим

$$p = \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{vt}_0| + t_0.$$

Тогда

$$dp = dt_0 \left(\frac{v^2 t_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c |\mathbf{r} - \mathbf{vt}_0|} + 1 \right),$$

так что

$$\psi(\mathbf{r}, t) = q_0 \int_{r/c}^{t + |\mathbf{r} - vt^+|/c} \frac{dp \delta(p - t)}{(1/c)(v^2 t_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) + |\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0|}.$$

Особенность δ -функции здесь находится в $p = t$. Этим должен определяться такой момент t_0 , что сигнал, вышедший из источника в момент t_0 , достигнет \mathbf{r} в момент t (см. рис. 7.9). Время $t - t_0$ должно быть равно пройденному расстоянию $|\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0|$, деленному на c ; $t - t_0 = |\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0|/c$, что

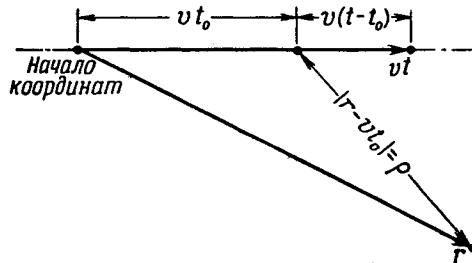


Рис. 7.9. Запаздывающий потенциал подвижного источника.

как раз равносильно $p = t$. Таким образом, величина $|\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0| = p$ равна расстоянию источника от точки наблюдения \mathbf{r} в момент $t - p/c$. Время t_0 , называемое *запаздывающим временем*, представляет собой решение уравнения $p = t$ и дает момент времени и потому положение источника $\mathbf{v}t_0$ в запаздывающий момент. Интегрируя по p , получаем

$$\psi(\mathbf{r}, t) = q_0 \left[\frac{1}{(1/c)(v^2 t_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) + |\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0|} \right]_{p=t}.$$

Вводя $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{v}t_0$, имеем

$$\psi(\mathbf{r}, t) = q_0 \frac{1}{\rho - \mathbf{v} \cdot \rho/c}, \quad (7.3.14)$$

где ρ представляет собой вектор, проведенный в момент $t_0 = t - \rho/c$ из положения источника в точку наблюдения. Это решение другим методом мы получили в гл. 2, где было показано, что множитель $1 - \mathbf{v} \cdot \rho/c$ надо ввести, чтобы принять в расчет движение источника в течение интегрирования, так как этот множитель требуется для нормировки источника (см. стр. 208).

Двумерное решение. Если распределение источника q не зависит от z , получается задача, в которой ψ зависит только от двух пространственных координат — от x и y . «Двумерный точечный источник» для такой задачи представляет собой однородный линейный источник, простирающийся от $z_0 = -\infty$ до $z_0 = +\infty$ вдоль прямой, параллельной оси z и проходящей через (x_0, y_0) . Поэтому функцию Грина для двумерных задач можно найти, интегрируя трехмерный точечный источник от $z_0 = -\infty$ до $z_0 = +\infty$:

$$g(\rho, t | \rho_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\delta((R/c) - (t - t_0))]}{R} dz_0,$$

где $\rho = xi + yj$ — радиус-вектор в плоскости x, y . Можно ожидать, что g является функцией от $|\rho - \rho_0| = P$ и $t - t_0 = \tau$. В самом деле, последнее

равенство можно переписать в виде

$$g(P, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta[(R/c - \tau)]}{R} d\zeta,$$

где $\zeta = z_0 - z$ и

$$R^2 = \zeta^2 + P^2, \quad d\zeta/dR = R/\zeta.$$

Отсюда

$$g(P, \tau) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\delta[(R/c) - \tau]}{\sqrt{R^2 - P^2}} dR = \frac{2}{\sqrt{c^2\tau^2 - P^2}} \int_0^{\infty} \delta[(R/c) - \tau] dR,$$

или окончательно

$$g(P, \tau) = \begin{cases} \frac{2c}{\sqrt{c^2\tau^2 - P^2}} & \text{для } P < c\tau, \\ 0 & \text{для } P > c\tau. \end{cases} \quad (7.3.15)$$

На соотношении (7.3.15) видно поразительное различие между двумерным и трехмерным случаями. Для трех измерений эффект от импульсного источника по истечении времени τ оказывается сосредоточенным на сфере радиуса $R = c\tau$ с центром в точке источника. Так будет из-за функции $\delta(R/c - \tau)$, участвующей в формуле (7.3.8). Для двух измерений эффект импульсного источника в момент τ распространяется на всю область $P < c\tau$. Конечно, при $P = c\tau$ имеется особенность, но по сравнению с особенностью δ -функции в трехмерном случае она очень слабая. Объяснение этого различия можно легко получить, рассматривая линейный источник для трех измерений. По истечении времени τ эффект каждого точечного источника, которые составляют линейный источник, обнаружится в своей области плоскости xy . Таким образом, мы заключаем, что импульсный линейный источник испускает цилиндрическую волну с возмущением, имеющимся не только на волновой поверхности $P = c\tau$. За этой волновой поверхностью остается «след». Этот след характерен для двумерных задач и не появляется ни в трехмерных, ни, как мы увидим, в одномерных задачах. Это было уже упомянуто на стр. 641.

Одномерные решения. Трехмерное распределение источника, соответствующее функции Грина, зависящей только от $x - x_0$ (не зависящей от $y - y_0$ и $z - z_0$), представляет собой плоский источник, по которому точечные источники (или, что то же, линейные источники) распределены равномерно. Такие функции Грина полезны для задач, в которых нет пространственной зависимости от y и z . Эту функцию можно получить из (7.3.15), интегрируя $g(P, \tau)$ по y_0 при фиксированных x и x_0 . Положим $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$; тогда

$$g(\xi, \tau) = 2c \int_{-\tau}^{\tau} \frac{d\eta}{\sqrt{c^2\tau^2 - \xi^2 - \eta^2}}, \quad \gamma = \sqrt{c^2\tau^2 - \xi^2} \quad \text{для } |\xi| < c\tau, \\ = 0 \quad \text{для } |\xi| > c\tau.$$

Интегрирование по η легко осуществляется и дает $2c\pi$, так что

$$g(\xi, \tau) = 2c\pi \left[1 - u\left(\frac{|\xi|}{c} - \tau\right) \right]^1. \quad (7.3.16)$$

¹⁾ В формуле (7.3.16) $u(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$ как и на стр. 778.—Прим. ред.

Вновь заметим, что эффект импульсного источника, действующего в момент t_0 в точке x_0 в одномерном случае (или эффект плоского источника, помещенного на плоскости $x = x_0$ в случае трех измерений), не сконцентрирован в точках $|x - x_0| = c(t - t_0)$, а проявляется во всей области протяженностью $2c(t - t_0)$, середина которой находится в $x = x_0$.

Начальные условия. Чтобы лучше понять различные выражения (7.3.8), (7.3.15) и (7.3.16), рассмотрим начальную задачу. Допустим, что начальная скорость v_0 и начальное смещение ϕ_0 известны в каждой точке пространства; каковы скорость и смещение в момент t , если считать, что источники отсутствуют, т. е. $g = 0$? Решение этой задачи можно получить из (7.3.5):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \left\{ g_{t=0} v_0(\mathbf{r}_0) - \left(\frac{\partial g}{\partial t_0} \right)_{t_0=0} \phi_0(\mathbf{r}_0) \right\} dV_0. \quad (7.3.17)$$

Интегрирование распространяется по всему пространству [мы приняли также, что поверхностный интеграл в (7.3.5) исчезает на бесконечности].

Рассмотрим сначала одномерный случай, где можно просто подсчитать (7.3.17) и непосредственно истолковать результат. Для одного измерения выражение (7.3.17) принимает вид

$$\psi(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \left\{ g_{t=0} v_0(x_0) - \left(\frac{\partial g}{\partial t_0} \right)_{t_0=0} \phi_0(x_0) \right\} dx_0,$$

где g дается формулой (7.3.16). Функции $g_{t=0}$ и $(\partial g / \partial t_0)_{t_0=0}$ имеют значения $2c\pi[1 - u(|\xi|/c - t)]$ и $-2c\pi\delta(|\xi|/c - t)$ соответственно, где $|\xi| = |x - x_0|$. Нетрудно выполнить интегрирование и получить

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(x_0) dx_0 + \phi_0(x + ct) + \phi_0(x - ct) \right\}. \quad (7.3.18)$$

Это общеизвестное решение Даламбера одномерной начальной задачи [см. формулу (11.1.58)]. Его можно также получить непосредственно из дифференциального уравнения (см. стр. 639).

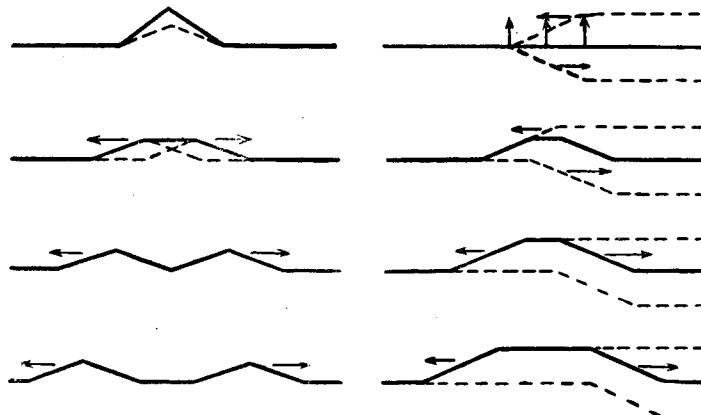


Рис. 7.10. Слева показано движение струны, которую оттянули и отпустили (т. е. в начальный момент дано лишь смещение). Справа показано движение струны после удара (т. е. в начальный момент ей лишь сообщили скорость).

Сплошные линии изображают струну в последовательные моменты, а пунктирные — вид двух «частичных волн» (илюзиях в противоположных направлениях), сумма которых дает форму струны.

Из формулы (7.3.18) мы видим, что если для среды, скажем для струны, дано начальное смещение без скорости, то начальное отклонение разбивается

на две одинаковые волны, из которых одна идет в положительном направлении оси x , а другая — в отрицательном. Сумма обеих волн при $t = 0$ дает начальное смещение ψ_0 . В течение некоторого времени, когда они частично перекрываются, вид составного отклонения будет довольно сложным, пока они в конце концов не разделятся. Это показано на рис. 7.10 слева. Заметим, что позади каждой волны не остается следа. В двумерных задачах, как мы увидим, такой след возникает.

Начальная задача для двух измерений решается формулой (7.3.17). Здесь удобно поместить начало координат в точку наблюдения. Тогда

$$\psi(0, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \left\{ g_{t=0} v_0(\rho_0) - \left(\frac{\partial g}{\partial t_0} \right)_{t=0} \psi_0(\rho_0) \right\} dS_0,$$

где g выражается формулой (7.3.15). Отсюда, вводя полярные координаты и замечая, что $\partial g / \partial t_0 = -\partial g / \partial t$, получаем

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2\pi c} \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{ct} \rho_0 \frac{v_0(\rho_0)}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho_0^2}} d\rho_0 + \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{ct} \rho_0 \frac{\psi_0(\rho_0)}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho_0^2}} d\rho_0 \right] \right\}. \quad (7.3.19)$$

Эта формула показывает, что значение ψ в точке зависит от исходных значений $\partial\psi/\partial t$ и ψ внутри круга радиуса ct с центром в точке наблюдения.

Как и при исследовании одномерного случая, рассмотрим начальное условие $v_0 = 0$. Кроме того, пусть $\psi_0(\rho_0) = \delta(\rho_0 - \rho)$, т. е. начальное движение имеет вид импульса в точке ρ . Тогда

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{ct} \frac{\rho_0 \delta(\rho - \rho_0) d\rho_0}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho_0^2}} \right] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right], & \text{если } \rho < ct, \\ 0, & \text{если } \rho > ct. \end{cases}$$

Этот результат можно записать в виде

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u(ct - \rho)}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right] = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{ct u(ct - \rho)}{(c^2 t^2 - \rho^2)^{3/2}} + \frac{u \delta(ct - \rho)}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right\}.$$

Таким образом, до момента, когда $ct = \rho$, в начале координат нет никакого эффекта. В этот момент в начало координат приходит возмущение в виде импульса (второй член последнего выражения). Однако за этим возмущением остается след, описываемый первым членом, который при $ct \gg \rho$ убывает со временем как $1/c^2 t^2$. Сопоставим это с результатами, полученными для аналогичного импульсного возмущения в x_0 в одномерном случае. Там сигнал достигал точки x в момент $|x - x_0|/c$. Он был точной копией исходного сигнала, за исключением уменьшения амплитуды в два раза; следа не было. Это различие между одномерным и двумерным случаями показано на рис. 7.11.

Наличие следа характерно для распространения в однородной среде в двумерном случае. Для трех измерений, как и для одного, форма возмущения, вызванного импульсом, остается неизменной при распространении от его исходного положения. Это непосредственно видно из формулы (7.3.8) для функции Грина в случае трех измерений. Наличие δ -функции предотвращает создание следа. Этим не обязательно гарантируется неизменность вида возмущения. В одномерных задачах сохраняется вид возмущения, которое создается начальным смещением (с нулевой скоростью). Для трех измерений верно обратное. Сохраняется вид возмущения, для которого начальное смещение равно нулю, но задана начальная скорость.

Это можно показать при помощи вывода формулы, аналогичной (7.3.19) и (7.3.18). Вводя трехмерную функцию Грина в (7.3.17) и беря начало

координат в качестве точки наблюдения, имеем

$$\phi(0, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int d\Omega_0 \int \left[r_0 \delta\left(\frac{r_0}{c} - t\right) v_0(\mathbf{r}_0) - r_0 \delta'\left(\frac{r_0}{c} - t\right) \psi_0(\mathbf{r}_0) \right] dr_0,$$

где $d\Omega_0$ — элемент телесного угла на сфере в «нуликовых» координатах (т. е. $\sin \theta_0 d\theta_0 d\phi_0$). Непосредственно ясно, что эффект, получающийся в точке наблюдения в момент t , определяется условиями, имевшими вначале место

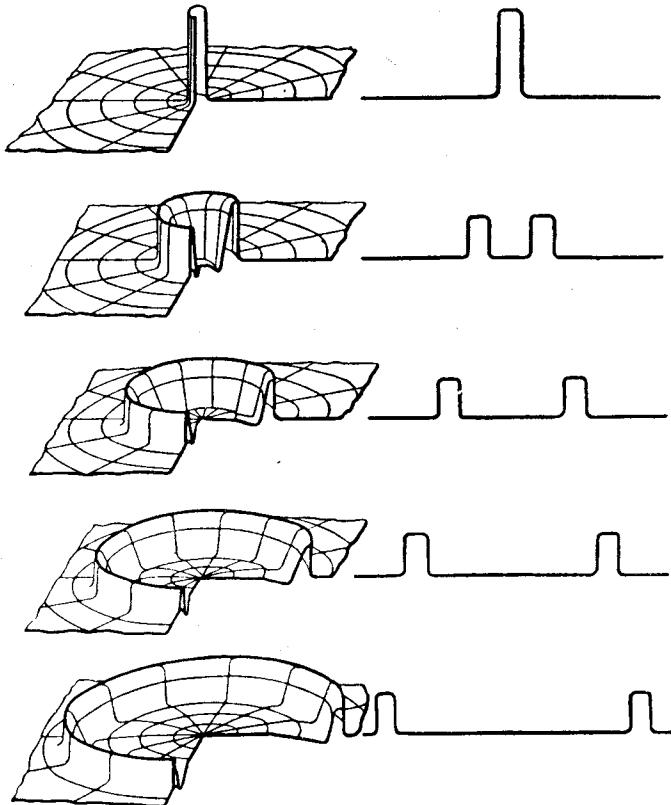


Рис. 7.11¹ Поведение струны и поведение мембраны.

Верхние рисунки показывают начальные очертания, а нижние — картину в последующие моменты. Четвертая часть мембраны вырезана, чтобы показать ее форму, со «следом» позади переднего крутого фронта волны.

на поверхности сферы радиуса ct с центром в точке наблюдения. Теперь можно выполнить интегрирование по r_0 . Нам нужно явно записать зависимость ψ_0 и v_0 от координат θ_0, φ_0 на поверхности сферы, например, $\psi_0(\mathbf{r}_0) = \psi_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$. Первый интеграл вычисляем, пользуясь свойствами δ -функции. Получаем $c^2 t v_0(ct, \theta_0, \varphi_0)$.

Чтобы подсчитать второй член, можно проинтегрировать по частям или воспользоваться свойством производной δ' (см. стр. 775)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta'(x' - x) dx' = -f'(x).$$

Поэтому второй член равен $-c^2 \{\delta[t\psi_0(ct, \theta_0, \varphi_0)]/\partial t\}$. Объединяя эти ре-

зультаты, получаем окончательно

$$\psi(0, t) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_0 \left\{ tv_0(ct, \theta_0, \varphi_0) + \frac{\partial}{\partial t} [t\psi_0(ct, \theta_0, \varphi_0)] \right\}. \quad (7.3.20)$$

Непосредственная зависимость ψ от v_0 и появление производной, действующей на ψ_0 , находятся в соответствии с нашими предварительными замечаниями. Формула (7.3.20) известна как *решение Пуассона*.

Принцип Гюйгенса. Функцию Грина для бесконечной области можно также применить для получения математического выражения принципа Гюйгенса. С элементарной точки зрения принцип Гюйгенса постулирует, что каждая точка фронта волны ведет себя как точечный источник, испускающий сферическую волну, которая распространяется со скоростью c . Поэтому поле в данной точке через некоторое время равно сумме полей от каждого из этих точечных источников; огибающая этих волн для всех точек представляет собой фронт волны в это время.

Для вывода этого принципа обратимся к общему уравнению (7.3.5) и рассмотрим случай, когда источников нет (т. е. $q=0$ внутри поверхности S) и, кроме того, начальные значения ψ и $\partial\psi/\partial t$ равны нулю. Мы видим, что объемный интеграл в формуле (7.3.5), включающий начальное условие, равен нулю, так что в левой части остается только

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t dt_0 \oint dS_0 \cdot \left\{ \left[\frac{\delta(t_0 - t + R/c)}{R} \right] \text{grad}_0 \psi - \psi \text{grad}_0 \left[\frac{\delta(t_0 - t + R/c)}{R} \right] \right\},$$

где мы подставили (7.3.8) в левую часть (7.3.5). Проинтегрировать по t_0 первый член не слишком трудно:

$$\int_0^t \frac{1}{R} \delta \left(t_0 - t + \frac{R}{c} \right) \text{grad}_0 \psi(\mathbf{r}_0, t_0) dt_0 = \frac{1}{R} \text{grad}_0 \psi \left(\mathbf{r}_0, t - \frac{R}{c} \right).$$

Второй член проинтегрировать не намного труднее, если следить за написанием δ и δ' . Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \psi \text{grad}_0 \left[\frac{\delta(t_0 - t + R/c)}{R} \right] dt_0 = \\ & = \int_0^t \psi \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\delta(t_0 - t + R/c)}{R} \right] \text{grad}_0 R dt_0 = \\ & = \int_0^t \psi(\mathbf{r}_0, t_0) (\mathbf{R}/R^3) \left[-\delta \left(t_0 - t + \frac{R}{c} \right) + \frac{R}{c} \delta' \left(t_0 - t + \frac{R}{c} \right) \right] dt_0 = \\ & = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \left\{ \psi \left(\mathbf{r}_0, t - \frac{R}{c} \right) + \frac{R}{c} \left[\frac{\partial}{\partial t_0} \psi(\mathbf{r}_0, t_0) \right]_{t_0=t-(R/c)} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция ψ в точке \mathbf{r} в момент t внутри S , где нет источников, имеющая внутри S нулевые начальные значения, целиком определяется интегралом от поверхностных значений на S :

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4\pi} \oint dS_0 \cdot \left[\frac{1}{R} \text{grad}_0 \psi(\mathbf{r}_0, t_0) + \frac{\mathbf{R}}{R^3} \psi(\mathbf{r}_0, t_0) - \right. \\ & \left. - \frac{\mathbf{R}}{cR^2} \frac{\partial}{\partial t_0} \psi(\mathbf{r}_0, t_0) \right]_{t_0=t-(R/c)}. \quad (7.3.21) \end{aligned}$$

Если теперь часть поверхности S_0 расположена вдоль фронта волны, а остальная часть — на бесконечности или там, где ψ равно нулю, то мож-

но сказать, что значения поля ψ в (\mathbf{r}, t) определяются полем ϕ в точках фронта волны в более ранний момент $t - R/c$. С другой точки зрения, действие фронта волны в точках перед ним в более позднее время эквивалентно действию распределенных по поверхности волнового фронта источников: во-первых, действию простого поверхностного слоя источников, пропорционального составляющей градиента ϕ по нормали к фронту волны; во-вторых, действию двойного слоя, пропорционального самой ϕ , и, наконец, действию любопытного простого слоя, пропорционального скорости изменения ϕ во времени на поверхности. Это последнее действие наиболее сильно проявляется прямо впереди поверхности, но ослабевает пропорционально косинусу угла между нормалью к поверхности и направлением распространения (т. е. направлением \mathbf{R}).

В большинстве случаев (за исключением простых и тривиальных) точные значения ϕ , $\text{grad} \phi$ и $\partial \phi / \partial t$ вдоль всего фронта волны точно не известны. Но во многих интересных случаях эти величины приближенно известны, так что формулу (7.3.21) можно применять для приближенного подсчета значений ϕ в более позднее время. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в § 11.4.

Границы в конечной части пространства. Теперь обратимся к эффекту, получающемуся при введении границы, на которой функция Грина должна удовлетворять заданным граничным условиям. Техника, которая может здесь служить, вполне подобна той, которая была рассмотрена в предшествующем § 7.2 для стационарного случая.

Как и в том случае, имеются два метода: метод изображений и метод собственных функций. Исследуем сначала метод изображений, причем воспользуемся знанием функции Грина для бесконечной области. Единственная особенность, естественно, имеется в точке источника в момент его действия, так что вообще

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\delta[t_0 - t - (R/c)]}{R} + F(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0),$$

где F — решение однородного волнового уравнения, свободное от особенностей в рассматриваемой области.

Здесь полезен простой пример. На рис. 7.12 источник находится в Q ; он действует в момент t_0 . Бесконечная жесткая плоскость расположена при $x = 0$. Чтобы удовлетворить граничным условиям на плоскости, мы добавляем отраженное импульсное возмущение, возникающее в изображении I точки Q в тот же момент t_0 . Чтобы получить требуемое обращение в нуль нормальной производной при $x = 0$, эффекты этих импульсных возмущений надо сложить, так что

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\delta(t_0 - t + R/c)}{R} + \frac{\delta(t_0 - t + R'/c)}{R'}.$$

Легко проверить, что $(\partial G / \partial x)_{x=0}$ равно нулю для всех t . Эффект второго члена состоит в том, что он дает отражение от плоскости $x = 0$ в соответствующее время. Это — единственное отражение, и потому требуется только один дополнительный член к функции Грина для бесконечной области. Заметим, что в случае волнового уравнения необходимо задавать не только положение изображения источника, но также и момент t' , в который возникает отраженный импульс. К счастью, в большинстве задач это решается просто, а именно, все отраженные импульсы возникают в тот же момент t' ,

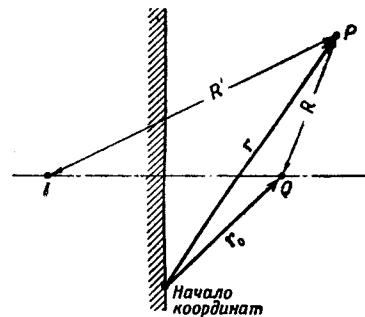


Рис. 7.12. Образ I импульсного источника волны в Q .

что и исходный импульс. Для достаточно регулярных геометрий возможно пользоваться методом изображений почти так же, как и для случая уравнения Гельмгольца.

Разложение по собственным функциям. Мы применяем функцию Грина для уравнения Гельмгольца. Выражение $G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) e^{-i\omega t}$ представляет собой решение волнового уравнения с простым гармоническим точечным источником, расположенным в \mathbf{r}_0 . При $\omega = kc$ имеем

$$\nabla^2 [G_k e^{-i\omega(t-t_0)}] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [G_k e^{-i\omega(t-t_0)}] = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) e^{-i\omega(t-t_0)}.$$

При помощи соответствующего наложения этих простых гармонических решений можно получить функцию Грина для импульсного источника в точке пространства, соответствующего уравнению (7.3.2). Для этой цели мы воспользуемся интегральным представлением δ -функции:

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega.$$

На основании линейности надо ожидать, что функция Грина для импульсного источника связана с решением уравнения Гельмгольца соотношением

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega, \quad (7.3.22)$$

где $\omega = kc$ и $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) = G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$. Это соотношение будет более тщательно выведено в § 11.1. Простота формулы (7.3.22) обманчива. Следует вспомнить, что для конечных областей функция G_k имеет особенности всякий раз, когда $k = k_n$, где k_n — собственное значение скалярного уравнения Гельмгольца для решения ψ_n , удовлетворяющего тем же граничным условиям, что и G_k . Более определенно, если функции ψ_n нормированы, то в силу (7.2.39)

$$G_k = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r})}{k_n^2 - k^2}.$$

Поэтому интегрирование в (7.3.22) нельзя производить вдоль вещественной оси ω (или k), а надо эти особенности некоторым способом обойти. Выбор контура диктует рассмотренный выше *принцип причинности*. Чтобы это увидеть, внесем разложение для G_k в интеграл (7.3.22):

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 2c^2 \sum_n \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t_0)}}{\omega_n^2 - \omega^2} d\omega, \quad \omega_n = ck_n.$$

Контур надо выбрать так, чтобы $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0$ для $t < t_0$. Соответствующий контур показан на рис. 7.13. Он параллелен вещественной оси и проходит непосредственно над ней. Если $t > t_0$, то контур можно замкнуть в нижней полуплоскости полуокружностью большого ($\rightarrow \infty$) радиуса без изменения значения интеграла. Теперь можно воспользоваться интегральной формулой Коши (4.2.9), что даст $(2\pi/\omega_n) \sin \omega_n(t - t_0)$. Если $t < t_0$, контур можно замкнуть полуокружностью в верхней полуплоскости. Так как в верхней полуплоскости нет особых точек, то значение интеграла для $t < t_0$ равно нулю. Отсюда

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 4\pi c^2 \sum_n \frac{\sin [\omega_n(t-t_0)]}{\omega_n} u(t-t_0) \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r}), \quad (7.3.23)$$

где $u(t - t_0)$ — единичная функция, равная нулю при $t < t_0$ и единице при $t > t_0$.

Воспользовавшись формулой (7.3.23), можно теперь явно подсчитать решение задачи с начальными и граничными значениями, данное в формуле

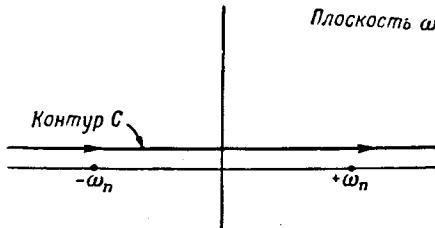


Рис. 7.13. Контур для интеграла (7.3.22).

ле (7.3.5). Рассмотрим каждый член формулы (7.3.5) в отдельности. Первый член ψ_1 дает эффект источников, распределенных по всему объему:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \int_0^{t^+} dt_0 \int G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) q(\mathbf{r}_0, t_0) dV_0 = \\ &= 4\pi c^2 \sum_n \frac{1}{\omega_n} \int_0^{t^+} dt_0 \int \sin[\omega_n(t - t_0)] \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r}) q(\mathbf{r}_0, t_0) dV_0.\end{aligned}$$

Пусть

$$\varphi_n(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t}.$$

Тогда

$$\psi_1 = -4\pi c^2 \operatorname{Im} \left\{ \sum_n \frac{\varphi_n(\mathbf{r}, t)}{\omega_n} \int_0^{t^+} dt_0 \int q(\mathbf{r}_0, t_0) \bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_0, t_0) dV_0 \right\}. \quad (7.3.24)$$

Мы видим, что амплитуда возбуждения n -й гармоникой пропорциональна кратному интегралу в (7.3.24). Возбуждаемая амплитуда велика, если пространственная зависимость q очень близка к φ_n , а временная зависимость — к $e^{-i\omega_n t}$, как и следовало ожидать. В случае точного резонанса $q \approx e^{-i\omega_n t}$ замечаем, что ψ_1 линейно возрастает со временем и более не колеблется.

Второй член формулы (7.3.5) дает эффект источников, распределенных на границе. Результаты до некоторой степени подобны тем, которые получены из первого члена. Третий член включает удовлетворение начальным условиям. В дальнейшем нам понадобятся $G_{t_0=0}$ и $(\partial G / \partial t_0)_{t_0=0}$:

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, 0) = 4\pi c^2 \sum_n \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} u(t) \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}_0), \quad (7.3.25)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_0} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \right]_{t_0=0} = -4\pi c^2 \sum_n \cos(\omega_n t) u(t) \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}_0), \quad (7.3.26)$$

где мы подставили $[\sin(\omega_n t)/\omega_n] \delta(t) = 0$. Третий член в (7.3.5) приобретает вид

$$\begin{aligned}\psi_3 &= \sum_n \left\{ \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} u(t) \psi_n(\mathbf{r}) \int \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) v_0(\mathbf{r}_0) dV_0 + \right. \\ &\quad \left. + \cos \omega_n t \psi_n(\mathbf{r}) \int \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}_0) dV_0 \right\}. \quad (7.3.27)\end{aligned}$$

Можно непосредственно проверить, что $\phi_3(t=0)$ как раз равно ϕ_0 , а $(\partial\phi_3/\partial t)_{t=0} = v_0$, как и требуется. Это также показывает, что мы могли бы получить формулу (7.3.27) прямо, не используя функцию Грина. С другой стороны, этим подтверждается законность основной формулы (7.3.5) для случая конечных областей.

Нестационарные малые колебания круглой мембранны. В этом месте будет полезен пример, показывающий характер результатов, полученных для задач, содержащих зависимость от времени. Пусть для круглой мембранны радиуса a с натяжением T и массой σ на единицу площади дано начальное смещение малого участка вокруг ее центра. Края мембранны закреплены, так что граничные условия имеют вид $\psi(r)=0$ при $r=a$. Мы представим начальные условия при помощи δ -функции:

$$\phi_0(\mathbf{r}) = A\delta(\mathbf{r}), \quad v_0(r) = 0. \quad (7.3.28)$$

Здесь A — постоянная. Вводя (7.3.28) в (7.3.27), получим решение начальной задачи

$$\psi(r, t) = A \sum_n \cos \omega_n t \cdot \psi_n(\mathbf{r}) \bar{\psi}_n(0). \quad (7.3.29)$$

Для перехода к дальнейшему необходимо получить собственные функции $\phi_n(\mathbf{r})$. Это будет очень подробно рассмотрено в § 11.2. Сейчас заметим, что уравнение Гельмгольца в полярных координатах (r, φ) разделяется и что общее решение, конечное и однозначное для $r < a$, является суммой членов $e^{\pm im\varphi} J_m(kr)$, где J_m — функция Бесселя первого рода порядка m (m — целое число).

Теперь необходимо ввести граничные условия при $r=a$. Это приводит к уравнению, определяющему k :

$$J_m(ka) = 0. \quad (7.3.30)$$

Обозначим значения k , удовлетворяющие этому уравнению, через k_{mp} , где индекс m указывает порядок функции Бесселя, а буква p — номер корня уравнения (7.3.30). Для целей этого примера достаточно воспользоваться асимптотическим видом $J_m(ka)$ (5.3.68):

$$J_m(ka) \underset{ka \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \cos \left[ka - \frac{2m+1}{4}\pi \right].$$

Таким образом, $J_m(ka)$ равно нулю, когда аргумент косинуса равен нечетному числу, умноженному на $\pi/2$:

$$k_{mp} a \simeq \frac{1}{4}(2m+1)\pi + \frac{1}{2}(2p+1)\pi, \quad p \text{ — целое.}$$

Теперь можно вернуться к выражению (7.3.29), дающему решение при начальном смещении импульсного вида при $r=0$, $t=0$. Таким образом, функции ϕ_n равны

$$\phi_n = N_{mp} J_m(k_{mp} r) e^{\pm im\varphi},$$

где каждому n мы поставили в соответствие определенную пару целых чисел (m, p) и определенный знак в показателе. Множитель N_{mp} выбран так, что

$$\int \bar{\phi}_n \phi_n dA = 1,$$

где областью интегрирования служит мембрана. Для (7.3.29) требуется $J_m(0)$. Так как $J_m(z) \underset{z \rightarrow 0}{=} O(z^m)$, то мы видим, что $J_m(0) = \delta_{0m}$ [см. формулу (5.3.63)]. Поэтому сумма (7.3.29) приводится к сумме по функциям Бесселя

нулевого порядка. Отсутствие угловой зависимости неудивительно, если принять во внимание круговую симметрию начального смещения (7.3.28). Результирующее отклонение в последующий момент t в положении r дается формулой

$$\psi(r, t) = A \sum_p \cos(k_{0p} ct) N_{0p}^2 J_0(k_{0p} r). \quad (7.3.31)$$

Формула (7.3.31) точная. Заметим, что система функций $N_{0p} \cos(k_{0p} ct) \times J_0(k_{0p} r)$ описывает свободные радиальные колебания мембраны. В общем случае результат воздействия начального смещения можно выразить в виде наложения свободных колебаний, причем каждое из них происходит со своей собственной частотой. Другим будет результат постоянного действия на мембрану силы данной частоты. В последнем случае вынужденное колебание мембраны будет иметь ту же частоту, что и действующая сила, а пространственная зависимость будет представлять суперпозицию функций $\phi_n(r)$, каждая из которых выражает колебание с частотой действующей силы.

Рассмотрим результат воздействия в самой начальной точке $r = 0$. Формула (7.3.31) принимает вид

$$\psi(0, t) = A \sum_p \cos(k_{0p} ct) \cdot N_{0p}^2.$$

Введем приближенное значение нулей:

$$\psi(0, t) \simeq A \sum_p \cos\left(\frac{2p+3}{4} \cdot \frac{\pi c t}{a}\right) N_{0p}^2. \quad (7.3.32)$$

Когда смещение вновь сосредоточится в $r = 0$? На первый взгляд может показаться, что это произойдет при $t = 2a/c$, т. е. после того как передний фронт смещения дойдет до края мембраны и вернется обратно в центр. Однако это не так. Как можно видеть из асимптотического поведения функции

$$J_0(z) \simeq \sqrt{2/\pi z} \cos\left(z - \frac{1}{4}\pi\right),$$

при прохождении от области $r \simeq 0$ до $r \simeq a$ появляется изменение фазы на $\pi/4$. Это характерно для распространения в двух измерениях. Ни для одного, ни для трех измерений не получается такого изменения фазы.

Из-за этого изменения фазы передний фронт возмущения должен сделать два перехода от центра до края, чтобы получилось окончательное изменение фазы на π и смещение вновь сосредоточилось в точке $r = 0$. Поэтому можно ожидать, что толчок воссоздается при $r = 0$, когда $ct = 4a$. В этом легко убедиться при помощи подстановки в (7.3.32), так как

$$\psi(0, 4a/c) \simeq -A \sum_p N_{0p}^2.$$

[Начальный толчок $\psi(0, 0)$ равен $A \sum N_{0p}^2$.] Нам хотелось бы подчеркнуть, что это явление имеет место только в двумерном случае; в случае одного или трех измерений его не будет. Толчок в центре сферы радиуса a воссоздается в центре в момент $t = 2a/c$.

Имеется еще один, последний момент, также показывающий удивительную разницу в распространении волн для двух измерений в сравнении с одним или тремя. В последнем случае начальное смещение в соответствующее время точно воссоздается. Для двух измерений это не так, потому что при движении волны остается след. Это можно видеть в настоящем примере следующим образом. Выражение (7.3.32) приближенное, так как применялись приближенные значения корней функции Бесселя J_0 . Если воспользоваться

зоваться точными значениями корней, то оказывается, что не существует значений ct , для которых фаза $k_{0p} ct$ точно одна и та же для всех p . Другими словами, не было бы значений ct , для которых повторились бы первоначальные соотношения фаз между всеми свободными колебаниями, возбужденными начальным смещением. Таким образом, свободные колебания никогда не будут интерферировать настолько, чтобы точно воссоздать начальную ситуацию.

В качестве другого примера построения функции Грина для скалярного волнового уравнения выведем выражение (7.3.8) функции Грина для бесконечного пространства при помощи непосредственного применения метода наложения. В этом случае

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = e^{ikR}/R, \quad k = \omega/c,$$

так что

$$g(R, \tau) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kR - \omega\tau)} d\omega = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[(R/c) - \tau]} d\omega.$$

Следует заметить, что мы сознательно выбрали знак между величинами kR и $\omega\tau$ таким, чтобы $e^{i(kR - \omega\tau)}/R$ изображало волну, расходящуюся из источника с течением времени, т. е. с возрастанием τ . Этим способом мы удовлетворяем принципу причинности. Теперь воспользуемся интегральным представлением δ -функции [см. формулу, предшествующую (7.3.32)] и получим

$$g(R, \tau) = \delta[(R/c) - \tau]/R.$$

Уравнение Клейна—Гордона. Функция Грина для зависящего от времени уравнения Клейна—Гордона удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \kappa^2 G = -4\pi \delta(t - t_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (7.3.33)$$

Легко убедиться, что функцией Грина для уравнения Клейна—Гордона можно пользоваться почти так же, как функцией Грина для скалярного волнового уравнения. Например, условие взаимности (7.3.3) и общее решение (7.3.5) имеют место также и здесь. Однако имеются важные физические различия между обеими функциями. Это легче всего показать, рассматривая кляйн-гордонову функцию Грина для бесконечной области, т. е. получив аналог функции (7.3.8). Функцию $g(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ можно получить путем наложения решений с простой гармонической зависимостью от времени $e^{-i\omega(t-t_0)}$, вместо того чтобы решать уравнение с правой частью, имеющей импульсную зависимость $\delta(t - t_0)$ от времени. Необходимое наложение дается формулой (7.3.22). Частные решения имеют вид $g(R | \sqrt{\omega^2 - c^2\kappa^2})$ и удовлетворяют уравнению

$$[\nabla^2 + (\omega/c)^2 - \kappa^2] g[R | \sqrt{\omega^2 - (c\kappa)^2}] = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Решение этого уравнения есть

$$g = \frac{\exp[i\sqrt{(\omega/c)^2 - \kappa^2} R]}{R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|. \quad (7.3.34)$$

В пределе при $\omega/c \gg \kappa$ формула (7.3.34) принимает вид $g = e^{i(\omega/c)R}/R$, как и должно быть. Для противоположного случая $\omega/c \ll \kappa$

$$\underset{\omega/c \ll \kappa}{g \simeq e^{-\kappa R}/R},$$

что дает характерную «затухающую» пространственную зависимость. Это, конечно, не связано с какой-либо диссипацией. Из одномерной механичес-

кой аналогии (гл. 2, стр. 137 и далее) со струной, погруженной в упругую среду, мы видим, что это получается как следствие жесткости среды.

Воспользовавшись (7.3.22), можно теперь написать в качестве решения (7.3.33), пригодного для бесконечной среды,

$$g(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i [\sqrt{(\omega/c)^2 - x^2} R - \omega \tau] d\omega, \quad (7.3.35)$$

где $\tau = t - t_0$. Функция g является функцией только от R и τ , как и ожидалось. Теперь надо задать путь интегрирования. До этого удобно для изучения вопросов сходимости ввести такую функцию $h(R, \tau)$, что

$$\partial h(R, \tau) / \partial R = R g(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0). \quad (7.3.36)$$

Отсюда

$$h(R, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp i [\sqrt{(\omega/c)^2 - x^2} R - \omega \tau]}{\sqrt{(\omega/c)^2 - x^2}} d\omega. \quad (7.3.37)$$

Подинтегральная функция имеет точки ветвления $\omega = \pm cx$. Расположение пути интегрирования относительно этих точек ветвления определяется условием причинности. Выберем путь и линию ветвления, как показано

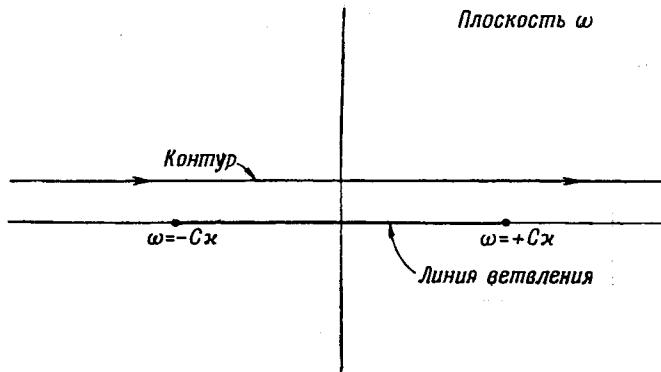


Рис. 7.14. Контур для интеграла (7.3.37) при $R > c\tau$.

на рис. 7.14. Заметим сначала, что $h=0$, если $R > c\tau$, как требует для этого случая принцип причинности. В пределе для большого ω показатель экспоненты в (7.3.37) приближается к $i\omega[(R/c) - \tau] = i\omega |(R/c) - \tau|$. Поэтому путь интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости ω без изменения значения интеграла. Так как подинтегральная функция не имеет особенностей в верхней полуплоскости, то интеграл равен нулю.

Рассмотрим теперь h для $R < c\tau$. Тогда контур деформируется так, как показано на рис. 7.15. Его можно теперь привести к более известному виду. Введем новую переменную θ так, что

$$\tau = |\sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}| \operatorname{ch} \theta,$$

и положим $\omega = cx \operatorname{ch} x$. Тогда

$$h(R, \tau) = \frac{c}{2\pi i} \int_{\infty + \frac{3}{2}\pi i}^{\infty - \frac{1}{2}\pi i} \exp [-ixc | \sqrt{\tau^2 - (R/c)^2} | \operatorname{ch}(x - \theta)] dx.$$

Наконец, положим $x - \theta = i\xi$; тогда

$$h(R, \tau) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi-i\infty}^{+\frac{1}{2}\pi-i\infty} \exp[-ixc\sqrt{\tau^2 - (R/c)^2} \cos \xi] d\xi.$$

Это — как раз интегральное представление функции Бесселя нулевого порядка [см. формулу (5.3.65)], так что

$$h(R, \tau) = -cJ_0[xc\sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}], \quad R < c\tau.$$

Комбинируя это с выражением для $c\tau < R$, окончательно получаем:

$$h(R, \tau) = -cJ_0[xc\sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}] u[\tau - (R/c)].$$

Поэтому функция Грина равна

$$g(R, \tau) = \frac{1}{R} \frac{\partial h}{\partial R} = \frac{\delta[\tau - (R/c)]}{R} J_0[xc\sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}] - \frac{x}{\sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}} J_1[xc\sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}] u[\tau - (R/c)],$$

или

$$g(R, \tau) = \frac{\delta[\tau - (R/c)]}{R} - \frac{x}{\sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}} J_1[xc\sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}] u[\tau - (R/c)]. \quad (7.3.38)$$

Мы замечаем, что $g(R, \tau)$ в пределе при $x \rightarrow 0$ приводится к функции Грина для скалярного волнового уравнения (7.3.8), как это и должно быть.

Если мы будем наблюдать возмущение на расстоянии R от импульсного источника через время τ после его действия, то найдем, что при $R > c\tau$ возмущение отсутствует, т. е. волна, порожденная импульсным источником, не имела достаточно времени, чтобы достичь точки наблюдения R . При $R = c\tau$ приходит импульс от начального возмущения, уменьшенный по амплитуде, как это и должно быть, в $1/R$ раз. За ним остается след, который выражается вторым членом формулы (7.3.38). Этот след для больших значений времени убывает по амплитуде из-за множителя $[\tau^2 - (R/c)^2]^{-3/4}$.

Нетрудно объяснить это явление, если заметить, что фазовая скорость плоской волны, удовлетворяющей уравнению Клейна — Гордона, является функцией от ω :

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{(\omega/c)^2 - x^2}}, \quad \text{или} \quad \frac{v}{c} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - (xc)^2}}.$$

Так как возмущение от импульсного источника составлено из гармонических возмущений различных частот, то не удивительно, что соответствующие этим гармоническим возмущениям плоские волны достигают точки наблюдения, имея относительные фазы, отличные от тех, которые они имели в начале. Равносильное описание можно получить, рассматривая пример из механики для уравнения Клейна — Гордона, данный в § 2.1.

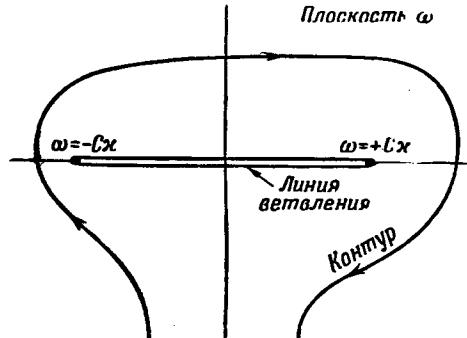


Рис. 7.15. Контур для интеграла (7.3.37) при $R < c\tau$.