7.4. Функция Грина для уравнения диффузии

Уравнение диффузии во многих аспектах качественно отличается от скалярного волнового уравнения, и, конечно, на функциях Грина эти различия будут проявляться. Наиболее важной характерной особенностью является асимметрия уравнения диффузии относительно временнóй переменной. Если, например, $\psi(\mathbf{r}, t)$ — решение скалярного волнового уравнения, то и $\psi(\mathbf{r}, -t)$ будет решением. Однако если $\psi(\mathbf{r}, t)$ — решение уравнения диффузии

$$\nabla^2\psi = a^2\partial\psi/\partial t, \tag{7.4.1}$$

то функция $\psi(\mathbf{r}, -t)$ уже не будет его решением; она будет решением совсем другого уравнения

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}, -t) = -a^2\partial\psi/\partial t.$$

Таким образом, уравнение приносит вместе с собой направленность во времени, т. е. оно различает прошедшее и будущее. Скалярное волновое уравнение и вообще все уравнения, приложимые к микроскопическим (например, атомным) явлениям, симметричны во времени. Направленность во времени уравнения диффузии является следствием того, что поле, в котором происходит диффузия, изображает поведение некоторого среднего свойства совокупности многих частиц. Как можно вывести из теорем термодинамики, неправильности таких средних, которые первоначально могли существовать, с течением времени сглаживаются. Обращаясь в будущее, мы видим, что энтропия возрастает; обращаясь в прошлое, видим, что энтропия была меньше.

Причинность и взаимность. Как и в случае скалярного волнового уравнения, можно решать различные неоднородные задачи и начальную задачу для уравнения диффузии при помощи функции Грина, которая удовлетворяет однородным граничным условиям и условию причинности:

$$G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad \text{если} \quad t < t_0. \tag{7.4.2}$$

Уравнение, которому удовлетворяет G, содержит импульсный точечный источник:

$$\nabla^2 G - a^2\,\partial G/\partial t = -4\pi\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,\delta(t - t_0). \tag{7.4.3}$$

Чтобы истолковать (7.4.3), будем считать G температурой среды. Тогда импульсный точечный источник означает введение единичного количества тепла в $\mathbf{r}_0$ в момент t_0. При этом функция G дает температуру в дальнейшие моменты для любой другой точки среды и потому описывает распространение тепла от его исходного распределения.

Функция G удовлетворяет условию взаимности, в котором, как и для скалярного волнового уравнения, время надо обратить, так как причинность требует выполнения соотношения (7.4.2). Мы покажем, что

$$G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, -t_0 \mid \mathbf{r}, -t). \tag{7.4.4}$$

Функция $G(\mathbf{r}_0, -t_0 \mid \mathbf{r}, -t)$ дает эффект в $\mathbf{r}_0$ в момент $-t_0$ от источника тепла, помещенного в среду в точке $\mathbf{r}$ в момент $-t$. Так как $t_0 < t$, то последовательность моментов расположена в требуемом порядке. Другое истолкование можно получить, рассматривая *сопряженную* функцию

$\widetilde{G}(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0)$, определенную соотношением

$$G(\mathbf{r}, -t \mid \mathbf{r}_0, -t_0) = \widetilde{G}(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0). \tag{7.4.5}$$

Функция $\widetilde{G}$ удовлетворяет уравнению с обращенным временем

$$\nabla^2 \widetilde{G} + a^2 \partial \widetilde{G}/\partial t = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\, \delta(t - t_0).$$

Условие (7.4.2) заменяется на $\widetilde{G}(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = 0$ при $t > t_0$. Другими словами, $\widetilde{G}$ дает развитие обратно во времени источника, помещенного в $\mathbf{r}_0$ в момент t_0. Условие взаимности теперь записывается так:

$$G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = \widetilde{G}(\mathbf{r}_0, t_0 \mid \mathbf{r}, t). \tag{7.4.6}$$

Функция G описывает развитие при возрастании времени, приводящее от исходного источника к конечному распределению. Функция $\widetilde{G}$ описывает тот же процесс в обратном порядке, начиная от конечного распределения и идя обратно во времени к исходному источнику. Вопрос о сопряженных функциях будет рассмотрен позже в этой главе.

Доказательство формул (7.4.4) или (7.4.6) проходит по тому же образцу, что и в предыдущем параграфе. Надо рассмотреть два уравнения:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) - a^2 \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\, \delta(t - t_0),$$

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, -t \mid \mathbf{r}_1, -t_1) + a^2 \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{r}, -t \mid \mathbf{r}_1, -t_1) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\, \delta(t - t_1).$$

Умножаем первое из них на $G(\mathbf{r}, -t \mid \mathbf{r}_1, -t_1)$, второе на $G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0)$, вычитаем одно из другого и интегрируем по интересующей нас области и по t от $-\infty$ до t_0^+. Применяя затем теорему Грина, получаем

$$\int_{-\infty}^{t_0^+} dt \int \{G(\mathbf{r}, -t \mid \mathbf{r}_1, -t_1) \operatorname{grad}[G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0)] -$$
$$- G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) \operatorname{grad}[G(\mathbf{r}, -t \mid \mathbf{r}_1, -t_1)]\} \cdot d\mathbf{S} -$$
$$- a^2 \int dV \int_0^{t_0^+} \{G(\mathbf{r}, -t \mid \mathbf{r}_1, -t_1) \frac{\partial}{\partial t} [G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0)] +$$
$$+ G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial t} [G(\mathbf{r}, -t \mid \mathbf{r}_1, -t_1)]\}\, dt =$$
$$= 4\pi [G(\mathbf{r}_1, t_1 \mid \mathbf{r}_0, t_0) - G(\mathbf{r}_0, -t_0 \mid \mathbf{r}_1, -t_1)].$$

Первый из интегралов обращается в нуль в силу однородных граничных условий, которым удовлетворяет функция G. Во втором можно произвести интегрирование по времени, что даст

$$[G(\mathbf{r}, -t \mid \mathbf{r}_1, -t_1)\, G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0)]_{t=-\infty}^{t=t_0^+}.$$

На нижнем пределе второй из двух множителей обращается в нуль в силу условия (7.4.2). На верхнем пределе первый множитель равен нулю опять в силу (7.4.2), причем мы молчаливо предполагали, что t_1 находится внутри интервала интегрирования.

Теперь условие взаимности получается непосредственно. Можно также получить уравнения, которым удовлетворяют G и $\widetilde{G}$ как функции t_0. Например,

из (7.4.6) имеем

$$\nabla_0^2 G + a^2 \frac{\partial G}{\partial t_0} = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\delta(t-t_0),$$
$$\nabla_0^2 \widetilde{G} - a^2 \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial t_0} = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\delta(t-t_0). \tag{7.4.7}$$

Неоднородные граничные условия. Теперь мы с помощью функции G получим решение неоднородного уравнения диффузии с неоднородными граничными условиями и заданными начальными условиями. Надо решить уравнение

$$\nabla_0^2\psi - a^2\,\partial\psi/\partial t_0 = -4\pi\rho(\mathbf{r}_0, t_0), \tag{7.4.8}$$

где ρ, функция источника, является известной функцией пространственных и временнóй координат. Умножим это уравнение на G, а первое из уравнений (7.4.7) — на ψ; вычтем одно равенство из другого, проинтегрируем по пространству и по времени от 0 до t^+:

$$\int_0^{t^+} dt_0 \int [\psi\nabla_0^2 G - G\nabla_0^2\psi]\,dV_0 + a^2 \int dV_0 \int_0^{t^+} \left[\psi\frac{\partial G}{\partial t_0} + G\frac{\partial\psi}{\partial t_0}\right] dt_0 =$$
$$= 4\pi \int_0^{t^+} dt_0 \int \rho G\,dV_0 - 4\pi\,\psi(\mathbf{r}, t).$$

К первому из этих интегралов можно применить теорему Грина. Во втором можно произвести интегрирование по времени. Заметим, что $G(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}_0, t^+) = 0$. Окончательно

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^{t^+} dt_0 \int \rho(\mathbf{r}_0, t_0)\,G(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}_0, t_0)\,dV_0 +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{t^+} dt_0 \int d\mathbf{S}_0\cdot[G\,\mathrm{grad}_0\,\psi - \psi\,\mathrm{grad}_0\,G] + \frac{a^2}{4\pi}\int dV_0\,[\psi G]_{t_0=0}. \tag{7.4.9}$$

Функция G выбирается так, чтобы удовлетворить однородным граничным условиям, соответствующим тем граничным условиям, которым удовлетворяет функция ψ. Например, если ψ удовлетворяет однородным или неоднородным условиям Дирихле, то G берется удовлетворяющей однородным условиям Дирихле. Первые два члена в (7.4.9) представляют знакомые эффекты объемных источников и граничных условий, тогда как третий член включает эффект начальных значений ψ_0 функции ψ. Если были бы даны начальные значения $\partial\psi/\partial t$, то лучше вместо уравнения для ψ рассмотреть уравнение, которому удовлетворяет $\partial\psi/\partial t$. Пусть $v = \partial\psi/\partial t$. Тогда из (7.4.8) получаем

$$\nabla^2 v - a^2\frac{\partial v}{\partial t} = -4\pi\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

т. е. уравнение того же вида, что и (7.4.8), так что его можно анализировать тем же способом. Следовательно, при помощи (7.4.9) можно рассмотреть любой тип начального условия. Как мы видели в гл. 6, для уравнения диффузии нельзя задавать *как* начальное значение, *так и* начальную производную.

Функция Грина для бесконечной области. Теперь мы приступим к построению частных примеров функций Грина для этого случая. Как

обычно, сначала надо исследовать функцию Грина $g(R, \tau)$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, $\tau = t - t_0$, для бесконечной среды. Можно вывести выражения для одного, двух или трех измерений одновременно. Пусть g — одно-, дву- или трехмерный интеграл Фурье:

$$g(R, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} \gamma(\mathbf{p}, \tau)\, dV_p,$$

где n равно 1, 2 или 3 в зависимости от числа измерений и такова же размерность переменной интегрирования dV_p. Так как

$$\nabla^2 g - a^2 \frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} \left[-p^2\gamma - a^2 \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \right] dV_p$$

и

$$\delta(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} dV_p,$$

то мы получаем для γ уравнение

$$a^2\, d\gamma/d\tau + p^2\gamma = 4\pi\, \delta(\tau),$$

которое имеет решение $\gamma = (4\pi/a^2) e^{-(p^2/a^2)\tau} u(\tau)$; при этом мы выбрали решение, согласованное с требованием причинности. Отсюда

$$g(R, \tau) = \frac{4\pi}{(2\pi)^n a^2} u(\tau) \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} e^{-(p^2/a^2)\tau} dV_p,$$

или

$$g(R, \tau) = \frac{4\pi}{(2\pi)^n a^2} u(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip_x R_x} e^{-(p_x^2/a^2)\tau} dp_x \right] \ldots .$$

Преобразуя экспоненты в интеграле, можно точно подсчитать каждый член произведения. В первом члене

$$ip_x R_x - \frac{p_x^2}{a^2}\tau = -\left(\frac{p_x\sqrt{\tau}}{a} - \frac{iaR_x}{2\sqrt{\tau}} \right)^2 - \frac{a^2 R_x^2}{4\tau} = -\frac{\tau}{a^2}\xi^2 - \frac{a^2 R_x^2}{4\tau}.$$

Поэтому интеграл можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau\xi^2/a^2) - (a^2 R_x/4\tau)} dp_x, \quad \xi = p_x - \frac{ia^2 R_x}{2\tau},$$

и при помощи подходящей замены переменной можно показать, что он равен

$$e^{-a^2 R_x^2/4\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau\xi^2/a^2)}\, d\xi = a\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\, e^{-(a^2 R_x^2/4\tau)}.$$

Подставляя этот результат в выражение для g, получаем

$$g(R, \tau) = \frac{4\pi}{a^2} \left(\frac{a}{2\sqrt{\pi\tau}} \right)^n e^{-(a^2 R^2/4\tau)} u(\tau). \tag{7.4.10}$$

Функция g обладает важным интегральным свойством, имеющим место для всех значений n:

$$\int g(R, \tau)\, dV = \frac{4\pi}{a^2}, \quad \tau > 0. \tag{7.4.11}$$

Эта формула выражает сохранение тепловой энергии. В момент t_0 в $\mathbf{r}_0$ введен источник тепла. Теплота диффундирует в среду, но таким образом, что полная тепловая энергия не изменяется.

Функция $g(R, \tau)$ в одномерном случае, $n=1$, изображена на рис. 7.16 для нескольких значений τ. Заметим, что кривая имеет строгий максимум при $R=0$ и что ширина кривой возрастает с ростом τ. При $\tau=0$ ширина нулевая, так как тепло только что введено и все сконцентрировано при $R=0$. Так как соотношение (7.4.11) тем не менее имеет место, то мы видим, что

$$g(R, \tau) \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} \frac{4\pi}{a^2} \delta(R),$$

чем часто пользуются в качестве примера δ-функции. Когда τ становится отличным от нуля, температура немедленно поднимается повсюду, причем наиболее резко выраженное повышение происходит, конечно, вблизи $R=0$, т. е. при $R < \sqrt{4\tau/a^2}$. Позже мы рассмотрим случаи, в которых из-за соответствующей инерции скорость распространения конечна.

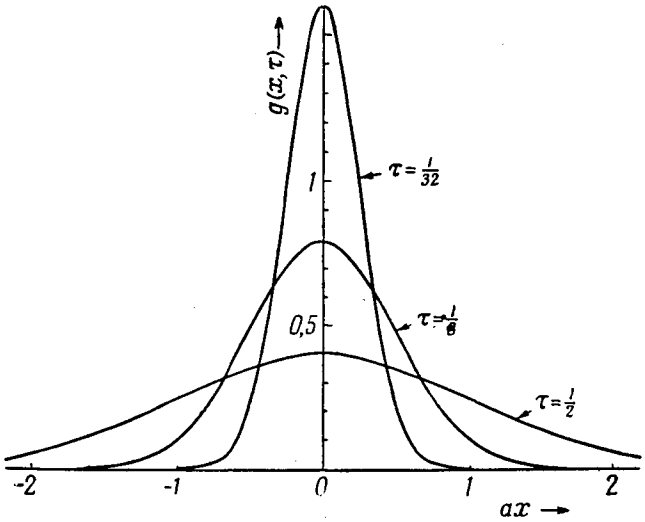

Рис. 7.16. Функция Грина уравнения диффузии в одном измерении для единичного источника, введенного при $x=0$, $t=0$, как функция x для различных моментов t.

Введем теперь (7.4.10) в формулу (7.4.9), что даст выражение $\psi(\mathbf{r}, t)$ через функцию Грина, начальное значение, распределение объемных источников и граничные условия. Рассмотрим начальную задачу. Пусть ρ равно нулю, а интересующий нас объем представляет собой бесконечную область, так что во втором члене G и ее производные равны нулю. Тогда

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{a^2}{4\pi} \int \psi_0(\mathbf{r}_0)\, g(R, t)\, dV_0. \tag{7.4.12}$$

В случае одного измерения эта формула приводится к

$$\psi(x, t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(x-x_0)^2/4t}\, \psi_0(x_0)\, dx_0. \tag{7.4.12a}$$

Формулу (7.4.12) нетрудно истолковать с помощью плотности мгновенных источников. При $t_0=0$ в каждом элементе пространства было задано некоторое количество тепла, равное для одномерного случая $\psi_0(x_0)\, dx_0$.

Эффект этого источника при $t > t_0$ получается при помощи умножения на функцию $(a/2\sqrt{\pi t})\, e^{-a^2(x-x_0)^2/4t}$, описывающую, как это тепло диффундирует от x_0. Результирующее ψ в x получается линейным наложением эффектов в x каждого из источников при различных x_0.

Конечные границы. Функцию G для ограниченных областей можно получить методом отражений или методом собственных функций. Метод отражений полностью аналогичен уже описанному для скалярного уравнения Гельмгольца. В качестве простого примера рассмотрим полупространство $x \geqslant 0$. Допустим, что температура ψ является функцией только от x и t, а температура на границе $x = 0$ меняется во времени по простому гармоническому закону

$$\psi(0, t) = T_0 \cos \omega t.$$

Чтобы воспользоваться формулой (7.4.8), нужно иметь функцию Грина, значения которой при $x = 0$ равны 0. Она получается при помощи метода изображений:

$$G(x, t \mid x_0, t_0) = \frac{4\pi}{a^2} \frac{a}{2\sqrt{\pi(t-t_0)}} \left[e^{-a^2(x-x_0)^2/4(t-t_0)} - e^{-a^2(x+x_0)^2/4(t-t_0)}\right]. \quad (7.4.13)$$

Подставим функцию Грина (7.4.13) в (7.4.9). Чтобы получить установившееся решение, перенесем «начало времени» на $t = -\infty$, когда начальные значения равны нулю. При отсутствии источников

$$\psi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{t^+} \psi(0, t_0) \left(\frac{\partial G}{\partial x_0}\right)_{x_0=0} dt_0,$$

или

$$\psi(x, t) = \frac{xaT_0}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t} \cos(\omega t_0)\, e^{-a^2x^2/4(t-t_0)} \frac{dt_0}{(t-t_0)^{3/2}}.$$

Более удобной переменной интегрирования является ξ, где

$$\xi^2 = a^2x^2/4(t - t_0).$$

Тогда

$$\psi(x, t) = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\xi^2} \cos \omega \left(t - \frac{a^2x^2}{4\xi^2}\right) d\xi =$$

$$= \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty e^{i\omega t - \xi^2 - i\omega a^2x^2/4\xi^2} d\xi \right\} =$$

$$= \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t - \sqrt{i\omega}\, ax} \int_0^\infty e^{-[\xi - (\sqrt{i\omega}\, ax/2\xi)]^2} d\xi \right\}.$$

Можно показать, что интеграл справа равен постоянной, не зависящей от x. Положим

$$J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-[\xi - (\alpha^2/\xi)]^2} d\xi.$$

Интеграл J можно записать в другом виде, если подставить $\eta = \alpha^2/\xi$:

$$J(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{\eta^2} e^{-[\eta-(\alpha^2/\eta)]^2} d\eta.$$

Отсюда

$$0 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\alpha^2}{\xi^2}\right) e^{-[\xi-(\alpha^2/\xi)]^2} d\xi.$$

Дифференцируя первое выражение для J, находим

$$J'(\alpha) = 2\int_0^\infty \left(\xi - \frac{\alpha^2}{\xi}\right)\frac{2\alpha}{\xi} e^{-[\xi-(\alpha^2/\xi)]^2} d\xi = 4\alpha \int_0^\infty \left(1 - \frac{\alpha^2}{\xi^2}\right) e^{-[\xi-(\alpha^2/\xi)]^2} d\xi = 0.$$

Следовательно, J не зависит от α и равно своему значению при $\alpha = 0$, т. е. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Отсюда

$$\psi(x, t) = \operatorname{Re}\left[T_0 e^{i\omega t - \sqrt{i\omega}\, ax}\right] = T_0 e^{-\sqrt{\omega/2}\, ax} \cos\left[\omega t - \sqrt{\omega/2}\, ax\right]. \quad (7.4.14)$$

Это выражение, очевидно, удовлетворяет граничному условию при $x = 0$. Функция $\psi(x, t)$ изображает температурную волну, которая движется со скоростью $\sqrt{2\omega}/a$, но ослабевает с ростом x. Скорость волны, как мы видим, зависит от частоты колебания температуры, причем эта скорость тем больше, чем выше частота, и стремится к бесконечности, когда ω неограниченно возрастает; этот кажущийся парадокс мы вскоре рассмотрим.

Из решения для гармонически колеблющегося граничного значения ψ при помощи интеграла Фурье можно получить решение для граничного значения с любым видом зависимости от времени.

Пусть

$$\psi(0, t) = T(t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} T(\omega) e^{-i\omega t} d\omega\right\}.$$

Тогда

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} T(\omega) e^{i\omega t - \sqrt{i\omega}\, ax} d\omega\right\}. \quad (7.4.15)$$

Для полубесконечного одномерного случая можно воспользоваться этим выражением вместо (7.4.9). Техника нахождения преобразований Фурье будет рассмотрена в § 11.1, а ее приложения к задачам диффузии — в § 12.1.

Решения при помощи собственных функций. Функцию Грина можно также разложить по собственным функциям. Пусть u_n — решение скалярного уравнения Гельмгольца в области, ограниченной поверхностью S, на которой u_n удовлетворяет однородным граничным условиям. Тогда

$$\nabla^2 u_n + k_n^2 u_n = 0 \quad \text{и} \quad \int \bar{u}_n u_m \, dV = \delta_{nm}.$$

Так как функции u_n образуют полную систему, то G можно разложить по ним; конечно, коэффициенты разложения будут зависеть от времени. Пусть

$$G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = \sum_n C_n(t, t_0)\, u_n(\mathbf{r})\, \bar{u}_n(\mathbf{r}_0).$$

Подставляя это разложение в уравнение (7.4.3), которому должно удовлетворять G, и замечая, что

$$\sum u_n(\mathbf{r})\,\bar{u}_n(\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),$$

получаем для C_n простое дифференциальное уравнение первого порядка

$$a^2\frac{dC_n}{dt} + k_n^2 C_n = 4\pi\delta(t-t_0),$$

откуда

$$C_n = \frac{4\pi}{a^2}e^{-(k_n^2/a^2)(t-t_0)}u(t-t_0).$$

Следовательно,

$$G(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}_0, t_0) = \frac{4\pi}{a^2}u(t-t_0)\sum_n e^{-(k_n^2/a^2)(t-t_0)}u_n(\mathbf{r})\,\bar{u}_n(\mathbf{r}_0). \qquad (7.4.16)$$

Это выражение можно теперь применить в формуле (7.4.9) для решения задач, включающих объемные источники, неоднородные граничные условия и начальные значения. Предположим, например, что объемных источников нет, а граничные условия однородны. Выберем собственные функции u_n, удовлетворяющие тем же однородным граничным условиям. Тогда из (7.4.9) имеем

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{a^2}{4\pi}\int \psi_0 G_{t_0=0}\,dV_0,$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n e^{-(k_n^2/a^2)t}u_n(\mathbf{r})\int \bar{u}_n(\mathbf{r}_0)\,\psi_0(\mathbf{r}_0)\,dV_0 \quad \text{для} \quad t \geqslant 0. \qquad (7.4.17)$$

При $t=0$ формула (7.4.17) сводится к разложению ψ_0 по u_n. Обратно, легко вывести выражение (7.4.17), если от обычного разложения по собственным функциям потребовать выполнения начальных условий. Пусть

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n e^{-(k_n^2/a^2)t}u_n(\mathbf{r}).$$

Полагая $t=0$, получаем

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \sum_n A_n u_n(\mathbf{r}),$$

откуда следует разложение (7.4.17).

Максимальная скорость передачи тепла. Как мы указали в § 2.4, уравнение диффузии, управляющее передачей тепла в газе, является только приближением к довольно сложному закону движения молекул газа. Один из непосредственно очевидных недостатков этого приближения заключается в том, что, согласно этому уравнению, если сообщить тепло некоторой точке тела, то температура этого тела начнет мгновенно повсюду подниматься (хотя и не одинаково). Например, функция точечного источника $G(R, \tau)$ (7.4.10) становится отличной от нуля для всех значений R сразу же, как только τ станет положительным. Так как такое мгновенное распространение тепла невозможно, то нужно принять, что уравнение диффузии справедливо только по истечении достаточно большого промежутка времени. Это время, естественно, зависит от скорости распространения тепла, которая в свою очередь зависит от средней длины свободного пробега λ молекул газа. Скорость распространения возмущения в газе является, конечно, скоростью звука c. Если время, требуемое, чтобы изменение температуры достигло рассматриваемой точки, превышено, то можно предполагать, что

уравнение диффузии приложимо. Уравнение с частными производными, учитывающее этот эффект, имеет вид

$$\nabla^2\psi = a^2 \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{7.4.18}$$

К этому уравнению можно также прийти с другой точки зрения, рассматривая изменение уравнения звуковой волны из-за диссипации. Мы встретимся с этим уравнением, рассматривая эффект потерь на сопротивление при колебании струны, а также распространение электромагнитных волн в проводящей среде.

Соответствующая функция Грина для (7.4.18) удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 G - a^2 \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\delta(t-t_0). \tag{7.4.19}$$

Мы вновь примем принцип причинности. Условие взаимности имеет вид

$$G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, -t_0 \mid \mathbf{r}, -t).$$

Аналогом формулы (7.4.9) служит формула

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^{t^+} dt_0 \int dV_0\,(\rho G) + \frac{a^2}{4\pi}\int dV_0\,[\psi G]_{t_0=0} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{t^+} dt_0 \oint d\mathbf{S}_0 \cdot [G\,\mathrm{grad}_0\,\psi - \psi\,\mathrm{grad}_0\,G] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi c^2}\int dV_0 \left[G\frac{\partial\psi}{\partial t_0} - \psi\frac{\partial G}{\partial t_0}\right]_{t_0=0}. \tag{7.4.20}$$

Теперь займемся функцией Грина $g(R, \tau)$, отвечающей (7.4.20), для бесконечной, неограниченной области. Пусть

$$g(R, \tau) = \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}\,\gamma(\mathbf{p}, \tau)\,dV_{\mathbf{p}}. \tag{7.4.21}$$

Подставляя это выражение в (7.4.19), получаем дифференциальное уравнение, определяющее $\gamma(\mathbf{p}, \tau)$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} + a^2\frac{d\gamma}{d\tau} + p^2\gamma = \frac{4\pi}{(2\pi)^n}\,\delta(\tau), \tag{7.4.22}$$

где пространственная размерность n равна 1, 2 или 3. Заметим, что γ является функцией только от p^2 и τ, так что интегрирования по углам, определяющим направление $\mathbf{p}$, которые требуются в (7.4.21), можно немедленно выполнить. Пути интегрирования в каждом случае выбираются так, чтобы удовлетворялись требуемые граничные условия:

$$\begin{aligned} g(R, \tau) &= \frac{2\pi}{iR}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipR}\,\gamma(p, \tau)\,p\,dp && \text{при } n=3,\\ &= \pi\int_{-\infty}^{\infty} H_0(pR)\,\gamma(p, \tau)\,p\,dp && \text{при } n=2,\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipR}\,\gamma(p, \tau)\,dp && \text{при } n=1. \end{aligned} \tag{7.4.23}$$

Заметим, что трехмерная функция Грина связана с одномерной. Пусть $g_3(R, \tau)$ — трехмерная функция Грина, а g_1 — одномерная. Тогда

$$g_3(R, \tau) = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial}{\partial R} g_1(R, \tau), \tag{7.4.24}$$

где мы приняли во внимание различие функций γ, которое дает правая часть уравнения (7.4.22).

Для определения γ сначала надо рассмотреть решения однородного уравнения, соответствующего (7.4.22). Они равны

$$e^{-i\omega^+ t} \quad \text{и} \quad e^{-i\omega^- t},$$

где ω^+ и ω^- — решения уравнения $\omega^2 + i\omega a^2c^2 - p^2c^2 = 0$:

$$\omega^+ = \frac{1}{2}[-ia^2c^2 + \sqrt{4p^2c^2 - a^4c^4}], \quad \omega^- = \frac{1}{2}[-ia^2c^2 - \sqrt{4p^2c^2 - a^4c^4}].$$

Подходящая линейная комбинация решений, удовлетворяющая условию $\gamma(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, равна

$$\gamma(\tau) = \frac{4\pi c^2 i}{(2\pi)^n}\frac{e^{-i\omega^+\tau} - e^{-i\omega^-\tau}}{\omega^+ - \omega^-} u(\tau).$$

Интеграл, определяющий g_1, приобретает вид

$$g_1(R, \tau) = 2c^2 i u(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega^+\tau} - e^{-i\omega^-\tau}}{\omega^+ - \omega^-} e^{ipR}\, dp,$$

где в качестве контура берется линия в верхней полуплоскости p, параллельная вещественной оси p. Линия ветвления проводится от $p = a^2c/2$ до $p = -a^2c/2$ вдоль вещественной оси. Рассмотрим теперь интеграл, содержащий $e^{-i\omega^+\tau}$:

$$\frac{1}{2c} e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau} \int_C \frac{\exp\{i[pR - \sqrt{p^2 - a^4c^2/4}\, c\tau]\}}{\sqrt{p^2 - \frac{1}{4}a^4c^2}}\, dp.$$

Если $R > c\tau$, то контур можно замкнуть полуокружностью в верхней полуплоскости. Тогда интеграл равен нулю, так как внутри контура нет особенностей. Если $R < c\tau$, то контур деформируется так, чтобы он простирался вдоль отрицательной мнимой полуоси. После этого надо подсчитать интеграл, весьма близкий к тому, с которым мы имели дело при вычислении функции Грина для уравнения Клейна — Гордона. Мы получаем (см. таблицу преобразований Лапласа в конце гл. 11)

$$-\frac{\pi i}{c} e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau} J_0\left[\frac{1}{2}a^2c\sqrt{R^2 - c^2\tau^2}\right] u(c\tau - R).$$

Рассмотрим теперь слагаемое, интеграл в котором содержит $e^{-i\omega^-\tau}$:

$$\frac{1}{2c} e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau} \int_C \frac{\exp[ipR + i\sqrt{p^2 - a^4c^2/4}\, c\tau]}{\sqrt{p^2 - \frac{1}{4}a^4c^2}}\, dp.$$

Этот интеграл равен нулю при $R + c\tau > 0$ (напомним, что в одномерном случае R может быть отрицательным), но отличен от нуля при $R + c\tau < 0$. Отсюда получаем

$$-\frac{\pi i}{c} e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau} J_0\left[\frac{1}{2}a^2c\sqrt{R^2 - c^2\tau^2}\right][1 - u(R + c\tau)].$$

Комбинирование этих двух выражений приводит к формуле

$$g_1(R, \tau) = 2\pi c\, e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau} J_0\left[\frac{a^2c}{2}\sqrt{R^2-c^2\tau^2}\right] u(c\tau - |R|). \qquad (7.4.25)$$

Читатель может убедиться в том, что это выражение стремится к точным предельным формам (7.4.10) и (7.3.16), когда $c \to \infty$ или $a \to 0$ соответственно.

Теперь можно получить трехмерную функцию g из дифференциального уравнения (7.4.24):

$$g_3(R, \tau) = \frac{c}{R} e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau} \left\{\delta(c\tau - R) + \right.$$
$$\left. + \frac{a^2cR}{2\sqrt{R^2-c^2\tau^2}} J_1\left[\frac{1}{2}a^2c\sqrt{R^2-c^2\tau^2}\right] u(c\tau - R)\right\}. \qquad (7.4.26)$$

Функцию Грина для двумерных задач проще получить, интегрируя $g_3(R, \tau)$ по компоненте z вектора $\mathbf{R}$, чем при помощи прямого рассмотрения формулы (7.4.23). Пусть $R^2 = \xi^2 + \rho^2$. Тогда

$$g_2(R, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_3(R, \tau)\, d\xi,$$

или

$$g_2(R, \tau) = \frac{2c\, e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau}}{\sqrt{c^2\tau^2 - \rho^2}} u(c\tau - \rho)\left\{1 + 2\,\mathrm{sh}^2\left[\frac{a^2c}{4}\sqrt{c^2\tau^2 - \rho^2}\right]\right\}. \qquad (7.4.27)$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\int_0^{\pi} I_1(2z\sin\theta)\, d\theta = \frac{2\,\mathrm{sh}^2 z}{z},$$

где $I_1(x) = -iJ_1(ix)$ (см. таблицы в конце гл. 10 и 11).

Рассмотрение трехмерного случая показывает физические явления, которые учитываются включением скорости распространения в уравнение диффузии или диссипативного члена в волновое уравнение. Оба члена в (7.4.26) при $R > c\tau$ равны нулю, как и надо ожидать во всех случаях, когда эффекты распространяются с конечной скоростью. Первый член воспроизводит начальное возмущение импульсного типа, уменьшенное, однако, двумя множителями. Первый, $1/R$, — это геометрический множитель, появлявшийся в решении простого волнового уравнения. Второй—множитель $e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau}$ — говорит нам, что эта часть волны, порожденной точечным источником, убывает со временем при движении через среду. Второй член в (7.4.26) образует след. Для достаточно больших промежутков времени $c\tau \gg R$ этот член приводит к обычному приближению диффузии.

Эти различия можно выявить другим способом. Решим одномерную начальную задачу. Из (7.4.20) находим

$$\psi = \frac{a^2}{4\pi}\int dx_0\,[\psi g_1]_{t_0=0} + \frac{1}{4\pi c^2}\int dx_0\left[g_1\frac{\partial\psi}{\partial t_0} - \psi\frac{\partial g_1}{\partial t_0}\right]_{t_0=0}.$$

Значит,

$$\psi = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}a^2c^2t} [\psi_0(x+ct) + \psi_0(x-ct)] +$$
$$+ e^{-\frac{1}{2}a^2c^2t} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} \left\{ \frac{a^2c}{4} I_0 \left[\frac{1}{2} a^2c \sqrt{c^2t^2-(x_0-x)^2} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} I_0 \left[\frac{1}{2} a^2c \sqrt{c^2t^2-(x_0-x)^2} \right] \right\} \psi_0(x_0)\, dx_0 +$$
$$+ \frac{1}{2c} e^{-\frac{1}{2}a^2c^2t} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} I_0 \left[\frac{1}{2} a^2c \sqrt{c^2t^2-(x_0-x)^2} \right] v_0(x_0)\, dx_0, \qquad (7.4.28)$$

где $\psi_0(x_0)$ и $v_0(x_0)$ — начальные значения ψ и $\partial\psi/\partial t$ соответственно. Заметим, что эта формула при $a \to 0$ переходит в решение Даламбера (7.3.18). Первый член тот же, что и в формуле Даламбера, за исключением убывающего во времени множителя $e^{-\frac{1}{2}a^2c^2t}$. Второй член новый и представляет эффект диффузии. Третий член при $a \to 0$ приводится к соответствующему члену в формуле Даламбера.

7. 5. Функция Грина в абстрактной операторной форме

До сих пор наше рассмотрение ограничивалось специальными видами уравнений с частными производными. Пространственный оператор имел вид ∇^2, а временной оператор отсутствовал, был равен $\partial/\partial t$ или равнялся $\partial^2/\partial t^2$ для уравнений Гельмгольца, диффузии и волнового соответственно. В настоящем параграфе мы обобщим эти рассмотрения так, что они станут применимыми к любому оператору; это позволит применять теорию к любому уравнению физики, если только оно линейное. Наш план — выделить существенные элементы предыдущего исследования и затем посмотреть, как их лучше всего обобщить.

Естественно, что рассмотрения будут несколько абстрактными. Например, вместо выписывания частного вида рассматриваемого однородного уравнения мы запишем его в операторном виде

$$\mathcal{A}\psi = 0, \qquad (7.5.1)$$

где $\mathcal{A}$ действует на координаты, от которых зависит ψ. Например, в уравнении диффузии $\mathcal{A} = \nabla^2 - a^2\partial/\partial t$ и действует на $\mathbf{r}$ и t. Другие примеры линейных операторов дают интегральные уравнения, с которыми мы встретились в гл. 2 (см. стр. 177) и которые будут исследованы более полно в гл. 8. Для них оператор $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A} = 1 - \int\limits_a^b K(x, x_0) \ldots dx_0$$

и уравнение $\mathcal{A}\psi = 0$ читается так:

$$\psi(x) - \int\limits_a^b K(x, x_0)\, \psi(x_0)\, dx_0 = 0.$$

Переменные могут включать не только пространственную и временну́ю зависимость. Так, в задачах переноса (§ 2.4) функция распределения f зависит не только от $\mathbf{r}$ и t, но также от импульса $\mathbf{p}$ и энергии E.