

Значит,

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 t} [\psi_0(x+ct) + \psi_0(x-ct)] + \\ & + e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 t} \int_{x-ct}^{x+ct} \left\{ \frac{a^2 c}{4} I_0 \left[\frac{1}{2} a^2 c \sqrt{c^2 t^2 - (x_0 - x)^2} \right] + \right. \\ & + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} I_0 \left[\frac{1}{2} a^2 c \sqrt{c^2 t^2 - (x_0 - x)^2} \right] \left. \right\} \psi_0(x_0) dx_0 + \\ & + \frac{1}{2c} e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 t} \int_{x-ct}^{x+ct} I_0 \left[\frac{1}{2} a^2 c \sqrt{c^2 t^2 - (x_0 - x)^2} \right] v_0(x_0) dx_0, \end{aligned} \quad (7.4.28)$$

где $\psi_0(x_0)$ и $v_0(x_0)$ — начальные значения ψ и $\partial\psi/\partial t$ соответственно. Заметим, что эта формула при $a \rightarrow 0$ переходит в решение Даламбера (7.3.18). Первый член тот же, что и в формуле Даламбера, за исключением убывающего во времени множителя $e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 t}$. Второй член новый и представляет эффект диффузии. Третий член при $a \rightarrow 0$ приводится к соответствующему члену в формуле Даламбера.

7. 5. Функция Грина в абстрактной операторной форме

До сих пор наше рассмотрение ограничивалось специальными видами уравнений с частными производными. Пространственный оператор имел вид ∇^2 , а временной оператор отсутствовал, был равен $\partial/\partial t$ или равнялся $\partial^2/\partial t^2$ для уравнений Гельмгольца, диффузии и волнового соответственно. В настоящем параграфе мы обобщим эти рассмотрения так, что они станут применимыми к любому оператору; это позволит применять теорию к любому уравнению физики, если только оно линейное. Наш план — выделить существенные элементы предыдущего исследования и затем посмотреть, как их лучше всего обобщить.

Естественно, что рассмотрения будут несколько абстрактными. Например, вместо выписывания частного вида рассматриваемого однородного уравнения мы запишем его в операторном виде

$$\mathcal{A}\phi = 0, \quad (7.5.1)$$

где \mathcal{A} действует на координаты, от которых зависит ϕ . Например, в уравнении диффузии $\mathcal{A} = \nabla^2 - a^2 \partial/\partial t$ и действует на x и t . Другие примеры линейных операторов дают интегральные уравнения, с которыми мы встречались в гл. 2 (см. стр. 177) и которые будут исследованы более полно в гл. 8. Для них оператор \mathcal{A} имеет вид

$$\mathcal{A} = 1 - \int_a^b K(x, x_0) \dots dx_0$$

и уравнение $\mathcal{A}\phi = 0$ читается так:

$$\phi(x) - \int_a^b K(x, x_0) \psi(x_0) dx_0 = 0.$$

Переменные могут включать не только пространственную и временную зависимость. Так, в задачах переноса (§ 2.4) функция распределения f зависит не только от x и t , но также от импульса p и энергии E .

В тех же обозначениях уравнение для функции Грина G имеет вид

$$\mathcal{A}G(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (7.5.2)$$

где \mathbf{x} — обобщенный вектор, представляющий все участвующие независимые переменные; \mathcal{A} действует на \mathbf{x} . Так, для волнового уравнения $\mathbf{x} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z + \mathbf{a}_t t$, где \mathbf{a}_x и т. д. — единичные взаимно ортогональные векторы. При этом $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ становится произведением δ -функций по отдельным координатам; например, для волнового уравнения

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0).$$

Обобщение теоремы Грина, сопряженные операторы. Наиболее важным математическим инструментом, применявшимся в исследованиях предшествующего параграфа, была теорема Грина; первая наша задача — обобщить ее. В дифференциальном виде теорема Грина утверждает, что

$$u \nabla^2 v - v \nabla^2 u = \nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u).$$

Непосредственно напрашивается обобщение этого равенства для оператора \mathcal{A} :

$$u \mathcal{A}v - v \mathcal{A}u = \nabla \cdot \mathbf{P}(u, v), \quad (7.5.3)$$

где \mathbf{P} — обобщенный вектор, выражающийся через те же единичные векторы, что и \mathbf{x} , тогда как ∇ — соответствующий градиентный оператор. Отсюда

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \partial P_x / \partial x + \partial P_y / \partial y + \partial P_z / \partial z + \partial P_t / \partial t + \dots$$

Например, в случае волнового уравнения, когда $\mathcal{A} = \nabla^2 - (1/c^2)(\partial^2 / \partial t^2)$, из (7.5.3) мы находим, что

$$\begin{aligned} u \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] v - v \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u &= \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{P} = u \nabla v - v \nabla u$, где ∇ — общий градиентный оператор.

Соотношение (7.5.3) удовлетворяется не всеми операторами \mathcal{A} . Например, в случае одномерного уравнения диффузии, $\mathcal{A} = \partial^2 / \partial x^2 - a^2 \partial / \partial t$, мы находим, что

$$u \mathcal{A}v - v \mathcal{A}u = \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right] - a^2 \left[u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right].$$

Первая пара членов в правой части имеет подходящий вид. Однако вторую пару нельзя записать в виде производной по времени от функции от u и v . Поэтому надо обобщить теорему Грина по сравнению с (7.5.3):

$$u \mathcal{A}v - v \tilde{\mathcal{A}}u = \nabla \cdot \mathbf{P}(u, v), \quad (7.5.4)$$

где $\tilde{\mathcal{A}}$ — оператор, называемый *сопряженным* к \mathcal{A} . Если $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, т. е. если имеет место равенство вида (7.5.3), оператор \mathcal{A} называется *самосопряженным*. В случае уравнения диффузии $\tilde{\mathcal{A}} = \partial^2 / \partial x^2 + a^2 \partial / \partial t$. Определение (7.5.4) является непосредственным обобщением определения сопряженного оператора, которое было дано в гл. 5 (см. стр. 499). Согласно формуле (5.2.10) оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ был определен соотношением

$$v(z) \mathcal{A}[y(z)] - y(z) \tilde{\mathcal{A}}[v(z)] = \frac{d}{dz} P(v, y),$$

где $P(v, y)$ — присоединенная билинейная форма. Это не что иное, как соотношение (7.5.4) для одномерных задач.

Вспоминая о том, каким способом применялась теорема Грина, мы видим, что нам придется заниматься решениями уравнения

$$\tilde{\mathcal{A}} \tilde{\psi} = 0 \quad (7.5.5)$$

и соответствующей функцией Грина для сопряженного оператора

$$\tilde{\mathcal{A}} \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (7.5.6)$$

Уравнение (7.5.5) называется *сопряженным* к уравнению (7.5.1), содержащему \mathcal{A} , а функция $\tilde{\psi}$ называется сопряженной к ψ . В случае одномерного уравнения диффузии уравнение $\tilde{\mathcal{A}} \tilde{\psi} = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = 0.$$

Мы видим, что $\tilde{\psi}$ удовлетворяет уравнению диффузии с обращенной временной переменной. Отсюда, если $\psi(t)$ есть решение уравнения (7.5.1), то $\tilde{\psi}(t) = \psi(-t)$ – решение уравнения (7.5.5).

Раз мы обладаем обобщением теоремы Грина, становится возможным решить неоднородную задачу

$$\mathcal{A}\psi = -4\pi \rho(\mathbf{x}) \quad (7.5.7)$$

с неоднородными краевыми условиями. Так как в теорему Грина (7.5.4) входит сопряженный оператор $\tilde{\mathcal{A}}$, то ясно, что надо сравнить (7.5.7) и (7.5.6). Умножаем последнее равенство на $\psi(\mathbf{x})$, а первое на $\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)$ и вычитаем одно из другого:

$$\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) \mathcal{A}\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \tilde{\mathcal{A}} \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = 4\pi \psi(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - 4\pi \rho(\mathbf{x}) \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0).$$

Пользуясь (7.5.4), интегрируем по объему в пространстве \mathbf{x} (который включает всю нужную с точки зрения физической задачи область изменения каждой компоненты \mathbf{x}). Например, в случае волнового уравнения мы интегрируем по времени от 0 до t_0^+ и по координатам x, y и z внутри поверхности, на которой должны удовлетворяться граничные условия. Получаем

$$\psi(\mathbf{x}_0) = \int \rho(\mathbf{x}) \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) dv + (1/4\pi) \int \nabla \cdot \mathbf{P} [\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0), \psi(\mathbf{x})] dv,$$

или

$$\psi(\mathbf{x}_0) = \int \rho(\mathbf{x}) \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) dv + (1/4\pi) \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} [\tilde{G}(\mathbf{x}^s | \mathbf{x}_0), \psi(\mathbf{x}^s)] dS, \quad (7.5.8)$$

где \mathbf{n} – направленный наружу единичный вектор, ортогональный к поверхности S , ограничивающей объем в пространстве \mathbf{x} . Для скалярного волнового уравнения последний член имеет вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{t_0^+} dt \int \mathbf{n} \cdot [\tilde{G} \nabla \psi - \psi \nabla \tilde{G}] dS - \frac{1}{4\pi c^2} \int dv \left[\tilde{G} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} \right]_{t=0}^{t_0^+}.$$

Эффект краевых условий. Для дальнейшего необходимо рассмотреть краевые условия, которым должно удовлетворять ψ . Рассмотрим случай, когда ψ удовлетворяет однородным краевым условиям на S ; другими словами, на поверхности S нет источников поля ψ . Согласно принципу наложения, решение можно получить в виде интеграла от распределения объемных источников $\rho(\mathbf{x})$, умноженного на решение, выражающее эффект от точечного источника в \mathbf{x} . Для этого надо рассмотреть два вопроса. Прежде всего надо связать G с \tilde{G} . Как мы увидим, это приведет к обобщенному

условию взаимности. Мы отложим доказательство этой теоремы на короткое время. Во-вторых, чтобы получить решение в подходящем виде, необходимо, чтобы член в (7.5.8), содержащий поверхностный интеграл, исчез. Однородные краевые условия, которым удовлетворяют функция Грина \tilde{G} и функция ψ , должны быть так согласованы, чтобы

$$\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} [\tilde{G}(\mathbf{x}^s | \mathbf{x}_0), \psi(\mathbf{x}^s)] dS = 0. \quad (7.5.9)$$

В простейшем рассмотренном нами случае скалярного уравнения Гельмгольца член с интегралом по поверхности исчезает, если функция Грина и функция ψ удовлетворяют одним и тем же однородным граничным условиям. Кроме того, в случае скалярного волнового уравнения, где мы пользовались начальными значениями для $\partial\psi/\partial t$ и ψ , т. е. условиями Коши, для функции Грина мы применяли также условие причинности (см. стр. 772).

С другой стороны, можно определить подходящие краевые условия, которым должна удовлетворять ψ (как мы указали это ранее, в § 7.2). Например, для уравнения Гельмгольца поверхностный член содержит значения ψ и $\partial\psi/\partial n$ на поверхности. Положить оба эти значения равными нулю явно не годится, так как в этом случае поверхностный интеграл обращается в нуль автоматически, краевое условие на G остается произвольным и решение неоднородного уравнения становится не единственным. Так как решение на самом деле единственно, то такое допущение о значениях ψ и $\partial\psi/\partial n$ на поверхности неправильно, и мы приходим к ослаблению граничных условий до однородных условий Дирихле, или Неймана, или некоторой их линейной комбинации. Определив граничные условия для ψ , добиваемся, чтобы поверхностный член исчез. В случае уравнения Гельмгольца G должна для этого удовлетворять тому же граничному условию, что и ψ . Подобным же способом испытание формулы (7.5.9) приводит к определению подходящих краевых условий для ψ и соответствующих условий для \tilde{G} .

Определив таким образом краевые условия на ψ и $\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)$, мы можем теперь вернуться к условию взаимности. Сравним уравнения, которым удовлетворяют G и \tilde{G} :

$$\mathcal{A}G(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \mathcal{A}\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_1) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1).$$

Умножаем первое из них на \tilde{G} , второе на G , вычитаем одно из другого и интегрируем по соответствующему объему в пространстве \mathbf{x} . Пользуясь обобщенной теоремой Грина (7.5.4), получаем

$$4\pi [\tilde{G}(\mathbf{x}_0 | \mathbf{x}_1) - G(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_0)] = \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} [\tilde{G}(\mathbf{x}^s | \mathbf{x}_0), G(\mathbf{x}^s | \mathbf{x}_1)] dS.$$

Чтобы решение неоднородной задачи об источниках с однородными краевыми условиями можно было выразить через G , не используя \tilde{G} , необходимо, чтобы между ними имелось простое алгебраическое соотношение, которое требует в свою очередь, чтобы член с поверхностным интегралом в последнем равенстве исчез. Сравнивая этот член, содержащий поверхностный интеграл, с (7.5.9), мы видим, что $G(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)$ удовлетворяет тем же условиям на S , что и ψ ; этого можно было бы ожидать на основании наших интуитивных представлений о G и о ее связи с ψ .

Окончательно получаем

$$G(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = \tilde{G}(\mathbf{x}_0 | \mathbf{x}). \quad (7.5.10)$$

Выражаясь словесно, левая часть этого равенства описывает эффект в точке \mathbf{x} от точечного источника в \mathbf{x}_0 , причем распространение возмущения описывается оператором \mathcal{A} и краевыми условиями. Выражение в правой части соответствует случаю, когда источник помещен в \mathbf{x} , эффект измеряется в \mathbf{x}_0 , а распространение возмущения, происходящее от \mathbf{x} до \mathbf{x}_0 , описывается оператором $\tilde{\mathcal{A}}$ и соответствующим краевым условием для G . Если \tilde{G} отлична от G , то в пространстве \mathbf{x} должна существовать направленность при распространении возмущения, так как обращение направления распространения изменяет результат наблюдения. Эта необратимость должна проявляться в операторе \mathcal{A} или в краевых условиях. Например, оператор \mathcal{A} для уравнения диффузии $\nabla^2 - a^2 \partial/\partial t$ не инвариантен относительно изменения направления времени, т. е. относительно подстановки $-t$ вместо $+t$. Оператор для волнового уравнения $\mathcal{A} = \nabla^2 - (1/c^2) (\partial^2/\partial t^2)$ самосопряженный ($\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$), так что из него нельзя получить направленность, например, временной координаты. Однако эту направленность можно сразу вывести из наложенных краевых условий. Так, применение условия причинности накладывает определенную асимметрию по отношению к прошедшему и будущему. Как следствие этого, принцип взаимности для функции Грина волнового уравнения при этих начальных условиях читается так:

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}, -t),$$

так что

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_0, -t_0). \quad (7.5.11)$$

Мы видим, что \tilde{G} описывает распространение от точки источника \mathbf{r}_0 до точки \mathbf{r} , которое, однако, обращено во времени, так что событие в момент t происходит на некоторое время *раньше*, чем импульс, порождающий это событие в момент t_0 (заметим, что $t < t_0$). [Например, в случае функции Грина для бесконечной области

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{1}{R} \delta \left[\frac{R}{c} + t - t_0 \right], \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

При данном R эффект ощущается в момент $t = t_0 - R/c$, т. е. на время R/c раньше, чем начало движения в t_0 . По этой причине \tilde{G} часто называется *опережающим потенциалом*, тогда как $G = (1/R) \delta[R/c - (t - t_0)]$ — *запаздывающим потенциалом*. Оба они являются решениями задачи об источнике при различных начальных условиях.

Из-за эффекта краевых условий полезно обобщить идею сопряженности. Мы введем два термина: *сопряженные краевые условия* и *сопряженная задача*. Сопряженная задача удовлетворяется функцией $\tilde{\psi}$, являющейся решением уравнения

$$\tilde{\mathcal{A}} \tilde{\psi} = 0$$

и удовлетворяющей сопряженным краевым условиям. Мы определим последние требованиям

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}[\psi, \tilde{\psi}] = 0 \text{ на граничной поверхности.} \quad (7.5.12)$$

Отсюда если ψ удовлетворяет некоторому краевому условию, то $\tilde{\psi}$ будет удовлетворять соответствующему краевому условию, которое мы назовем сопряженным краевым условием. Задача считается *самосопряженной*, если $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ и краевые условия для ψ и $\tilde{\psi}$ одинаковы. Для самосопряженных задач $\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)$.

Еще о сопряженных дифференциальных операторах. Переидем теперь к более определенному рассмотрению некоторых операторов и им сопряженных. В качестве первого примера рассмотрим одномерную ситуацию. Здесь мы вообще будем интересоваться операторами второго порядка, так что можно написать

$$\mathcal{A}v = p \frac{d^2v}{dz^2} + q \frac{dv}{dz} + rv. \quad (7.5.13)$$

Сопряженный оператор равен (см. формулу (5.2.10) и далее)

$$\tilde{\mathcal{A}}u = \frac{d^2}{dz^2}(pu) - \frac{d}{dz}(qu) + ru. \quad (7.5.14)$$

Присоединенная билинейная форма записывается в виде

$$P(u, v) = pu \frac{dv}{dz} - v \frac{d(pu)}{dz} + quv. \quad (7.5.15)$$

При каких условиях \mathcal{A} будет самосопряженным? Приравнивая $\tilde{\mathcal{A}}$ и \mathcal{A} , мы находим, что dp/dz должно равняться q . Отсюда

$$\mathcal{A}v = \frac{d}{dz} \left(p \frac{dv}{dz} \right) + rv.$$

Уравнение $\mathcal{A}v = 0$ является как раз уравнением Штурма — Лиувилля, исследованным в § 6.3. Мы видим, что среди дифференциальных операторов второго порядка только оно соответствует линейному самосопряженному оператору.

Если $dp/dz = q$, то присоединенная билинейная форма P равна

$$P = p \left(u \frac{dv}{dz} - v \frac{d}{dz} \left(p \frac{dv}{dz} \right) \right).$$

Требование $\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(\psi, \tilde{\psi}) = 0$ состоит в том, что $0 = p \left(\psi \frac{d\tilde{\psi}}{dz} - \tilde{\psi} \frac{d\psi}{dz} \right)_{z=a} = p \left(\psi \frac{d\tilde{\psi}}{dz} - \tilde{\psi} \frac{d\psi}{dz} \right)_{z=b}$, где a и b — точки, в которых удовлетворяются граничные условия. Если p конечно (и отлично от нуля) в концевых точках, то возможными условиями являются условия Дирихле ($\psi = 0$ в точках a и b), Неймана ($d\psi/dz = 0$ в точках a и b) или смешанные ($d\psi/dz = \beta\psi$ в точках a и b). Все эти граничные условия самосопряженные, так как $\tilde{\psi}$ должно удовлетворять тем же граничным условиям, что и ψ . Периодические граничные условия $\psi(a) = \psi(b)$ и $(d\psi/dz)_{z=a} = (d\psi/dz)_{z=b}$ также самосопряженные. Другой тип граничного условия получится, если p имеет нуль в a или b . В этом случае P равно нулю в точке, если функции ψ и $\tilde{\psi}$ только ограничены. Это граничное условие опять самосопряженное. Конечно, эти же самые условия мы рассматривали в гл. 6. Для всех них функция Грина должна быть симметричной.

Можно обобщить выражения (7.5.13) — (7.5.15) на операторы, содержащие производные высшего порядка и более чем одно измерение. Рассмотрим сначала оператор

$$\mathcal{A}_n v = p \frac{d^n v}{dz^n}. \quad (7.5.16)$$

Любой одномерный оператор является, конечно, линейной комбинацией операторов типа \mathcal{A}_n . Сопряженный оператор равен

$$\tilde{\mathcal{A}}_n u = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}(pu). \quad (7.5.17)$$

Присоединенная билинейная форма равна

$$P(u, v) = pu \frac{d^{n-1}v}{dz^{n-1}} - \frac{d(pu)}{dz} \frac{d^{n-2}v}{dz^{n-2}} + \frac{d^2(pu)}{dz^2} \frac{d^{n-3}v}{dz^{n-3}} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(pu)}{dz^{n-1}} v. \quad (7.5.18)$$

Для нескольких измерений наиболее общий дифференциальный оператор имеет вид

$$\mathcal{A} = p(x_1, x_2, \dots) \frac{\partial^n}{\partial x_1^a \partial x_2^b \dots \partial x_s^k}, \quad a + b + \dots + k = n, \quad (7.5.19)$$

где x_1, x_2, \dots, x_s — координаты. Сопряженный оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ равен

$$\tilde{\mathcal{A}} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x_1^a \partial x_2^b \dots} [p(x_1, x_2, \dots) \dots]. \quad (7.5.20)$$

Присоединенная билинейная форма $P(u, v)$ записывается в виде

$$\begin{aligned} P(u, v) = & \mathbf{a}_1 \left[pu \frac{\partial^{n-1}v}{\partial x_1^{a-1} \partial x_2^b \dots \partial x_s^k} - \frac{\partial(pu)}{\partial x_1} \frac{\partial^{n-2}v}{\partial x_1^{a-2} \partial x_2^b \dots \partial x_s^k} + \right. \\ & \left. + \dots + (-1)^{a-1} \frac{\partial^{a-1}(pu)}{\partial x_1^{a-1}} \frac{\partial^{n-a}v}{\partial x_2^b \dots \partial x_s^k} \right] + \\ & + (-1)^a \mathbf{a}_2 \left[\frac{\partial^a(pu)}{\partial x_1^a} \frac{\partial^{n-a-1}v}{\partial x_2^{b-1} \dots \partial x_s^k} - \frac{\partial^{a+1}(pu)}{\partial x_1^a \partial x_2} \frac{\partial^{n-a-2}v}{\partial x_2^{b-2} \dots \partial x_s^k} + \right. \\ & \left. + \dots + (-1)^{b-1} \frac{\partial^{a+b-1}(pu)}{\partial x_1^a \partial x_2^{b-1}} \frac{\partial^{(n-a-b)}v}{\dots \partial x_s^k} \right] + \\ & + \dots + (-1)^{n-k} \mathbf{a}_3 \left[\frac{\partial^{n-s}(pu)}{\partial x_1^a \partial x_2^b \dots \partial x_s^{k-1}} \frac{\partial^{k-1}v}{\partial x_1^a \partial x_2^b \dots \partial x_s^{k-2}} - \right. \\ & \left. + \dots + (-1)^{k-1} \frac{\partial^{n-1}(pu)}{\partial x_1^a \partial x_2^b \dots \partial x_s^{k-1}} v \right], \quad (7.5.21) \end{aligned}$$

где \mathbf{a}_j — единичный вектор, соответствующий координате x_j .

В качестве простого примера рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}v = p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2r \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + t \frac{\partial v}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Тогда

$$\tilde{\mathcal{A}}u = \frac{\partial^2(pu)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(qu)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2(ru)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(tu)}{\partial x} - \frac{\partial(mu)}{\partial y}$$

и

$$\begin{aligned} P(u, v) = & \mathbf{a}_x \left[pu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial(pu)}{\partial x} v + 2ru \frac{\partial v}{\partial y} + tuv \right] + \\ & + \mathbf{a}_y \left[qu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial(qu)}{\partial y} v - 2 \frac{\partial(ru)}{\partial x} v + muv \right]. \end{aligned}$$

Ввиду симметричной зависимости члена с r от x и y , можно получить другое выражение для $P(u, v)$ [его можно получить из общей формулы (7.5.21), если написать другое выражение для P , положив $x_1 = y$ и $x_2 = x$, и осреднить его с последним выражением, в котором $x_1 = x$ и $x_2 = y$]:

$$\begin{aligned} P(u, v) = & \mathbf{a}_x \left[pu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial(pu)}{\partial x} v + ru \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial(ru)}{\partial y} v + tuv \right] + \\ & + \mathbf{a}_y \left[qu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial(qu)}{\partial y} v + ru \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial(ru)}{\partial x} v + muv \right]. \end{aligned}$$

Условия, при которых оператор \mathcal{A} будет самосопряженным, имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} - t = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial x} - m = 0.$$

Для совместности этих двух равенств надо также потребовать, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(t - \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(m - \frac{\partial q}{\partial y} \right).$$

Тогда $\mathbf{P}(u, v)$ значительно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u, v) = \mathbf{a}_x & \left[p \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \mathbf{a}_y \left[q \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + r \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned}$$

Сопряженные интегральные операторы. Определение сопряженного оператора, данное в (7.5.4), не очень подходит для интегрального оператора (7.5.1), и попытка воспользоваться этим определением без изменений не была бы плодотворной. Мы воспользуемся интегральным определением, которое во многих отношениях слабее, чем (7.5.4), но тем не менее оставляет большую часть наших результатов без изменения. Специальный выбор, который мы намерены сделать, устранит все члены с поверхностными интегралами, содержащие \mathbf{P} , из результата (7.5.8); условие взаимности (7.5.10) будет тем не менее иметь место. Для интегральных операторов мы определяем сопряженный оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ равенством

$$\int_a^b u \tilde{\mathcal{A}} v \, dx - \int_a^b v \tilde{\mathcal{A}} u \, dx = 0. \quad (7.5.22)$$

Это определение получается из равенства (7.5.4), взятого для одномерного случая, при помощи однократного интегрирования (7.5.4) от a до b :

$$\int_a^b [u \tilde{\mathcal{A}} v - v \tilde{\mathcal{A}} u] \, dx = [\mathbf{P}(u, v)]_{x=a}^{x=b}.$$

Мы видим, что (7.5.22) получается, если $[\mathbf{P}(u, v)]_{x=a}^{x=b}$ равно нулю. Напомним, что для дифференциальных операторов так будет, если граничные условия, которым удовлетворяют u и v , однородны и сопряжены одно другому в смысле формулы (7.5.12). Рассмотрим теперь следствие определения (7.5.22).

Для примера исследуем оператор

$$\mathcal{A}v = \int_a^b K(x, x_0)v(x_0) \, dx_0.$$

Тогда, если $\tilde{\mathcal{A}}$ определен формулой

$$\tilde{\mathcal{A}}u = \int_a^b \tilde{K}(x, x_0)u(x_0) \, dx_0,$$

то определяющее равенство (7.5.22) приобретает вид

$$\int_a^b dx \int_a^b [v(x)K(x, x_0)u(x_0) - u(x)\tilde{K}(x, x_0)v(x_0)] \, dx_0 = 0.$$

Если переставить переменные интегрирования в первом интеграле, то это равенство перепишется так:

$$\int_a^b dx \int_a^b \{v(x_0)u(x)[K(x_0, x) - \tilde{K}(x, x_0)]\} \, dx_0 = 0.$$

Так как оно должно иметь место для произвольных u и v , то мы определяем \tilde{K} следующим образом:

$$K(x_0, x) = \tilde{K}(x, x_0), \quad (7.5.23)$$

что напоминает формулу (7.5.10), где делается подобное утверждение для функции Грина. Как мы увидим в следующей главе, K очень часто является функцией Грина или тесно связана с ней, так что получающаяся здесь аналогия не слишком удивительна. В силу (7.5.23) теперь можно написать

$$\mathcal{A}v = \int_a^b K(x_0, x)v(x_0)dx_0.$$

Условие, при котором $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, т. е. оператор является самосопряженным, имеет вид

$$K(x_0, x) = K(x, x_0), \quad (7.5.24)$$

т. е. функция K должна быть симметричной относительно переменных x_0 и x .

Другой тип интегрального оператора получается, если взять неопределенный интеграл

$$\mathcal{A}v = \int_a^x K(x, x_0)v(x_0)dx_0.$$

Этот оператор можно привести к виду с постоянными пределами, если ввести единичную функцию, так что

$$\mathcal{A}v = \int_a^b u(x - x_0)K(x, x_0)v(x_0)dx_0.$$

Положим

$$M(x, x_0) = u(x - x_0)K(x, x_0).$$

Тогда сопряженный оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ включает функцию

$$\tilde{M}(x, x_0) = M(x_0, x) = u(x_0 - x)K(x_0, x).$$

Отсюда

$$\tilde{\mathcal{A}}\omega = \int_a^b u(x_0 - x)K(x_0, x)\omega(x_0)dx_0 = \int_a^b K(x_0, x)\omega(x_0)dx_0.$$

Для самосопряженности оператора \mathcal{A} должно быть $M(x, x_0) = M(x_0, x)$, или

$$u(x - x_0)K(x, x_0) = u(x_0 - x)K(x_0, x).$$

Это соотношение никогда не может удовлетворяться, так как $u(x - x_0)$ равно нулю всюду, где $u(x_0 - x)$ равно единице, и обратно. Поэтому \mathcal{A} для неопределенных интегралов не является самосопряженным.

Обобщение этих определений на случай более одного измерения не требует привлечения каких-либо новых принципов, и потому мы перенесем исследование этого случая в задачи в конце главы.

Обобщение на абстрактное векторное пространство. Как и при развитии теории собственных функций, полезно и поучительно распространить теперь наше исследование на представление результатов этой главы в абстрактной символике векторного пространства и векторных операторов. Эта символика была впервые рассмотрена в § 1.6 и широко применялась

в §§ 2.6 и 6.3. Там мы показали, что любой вектор F абстрактного пространства можно выразить либо через его компоненты по ортогональной системе собственных векторов e_n ,

$$F = \sum_n F_n e_n, \quad F_n = F^* \cdot e_n,$$

множество которых счетно, либо через его компоненты по системе единичных векторов $e(x)$, соответствующих δ -функциям,

$$F = \int F(x) e(x) dx, \quad F(x) = F^* \cdot e(x),$$

множество которых несчетно (отметим, что x здесь изображает совокупность координат, как, например, x, y, t , а интегрирование производится по области изменения этих переменных внутри границы). Векторы в абстрактном пространстве задаются одномерной системой компонент, F_n или $F(x)$.

Кроме того, мы имели дело с операторами \mathcal{A} , обобщениями в абстрактном векторном пространстве дифференциальных операторов, рассмотренных в первой части этого параграфа. Они задаются при помощи двумерной матрицы с компонентами A_{mn} или $A(x|x_0)$:

$$\mathcal{A} = \sum_{mn} e_m A_{mn} e_n^* = \int dx \int e(x) A(x|x_0) e^*(x_0) dx_0, \quad (7.5.25)$$

где можно было бы писать r, r_0 вместо x, x_0 и dV вместо dx , чтобы подчеркнуть, что сюда может быть включено более одного измерения. Если матрица A_{mn} диагональная ($A_{mn} = a_m \delta_{mn}$), то единичные векторы e_n являются для \mathcal{A} собственными векторами, удовлетворяющими уравнению $\mathcal{A} \cdot e_n = a_n e_n$; если A_{mn} — не диагональная матрица, то система e_n является системой собственных векторов для некоторого другого оператора, а не \mathcal{A} .

Оператору \mathcal{A} , действующему на вектор F , соответствует дифференциальный оператор \mathcal{A}_r , действующий на функцию $F(r)$:

$$\mathcal{A} \cdot F = \int [\mathcal{A}_r F(r)] e(r) dV = \int dV \int A(r|r_0) F(r_0) e(r) dV_0,$$

где \mathcal{A}_r — дифференциальный (или интегральный) оператор, рассмотренный в первой части этого параграфа. Вторая форма иллюстрирует тот факт, что любой оператор можно выразить в интегральном виде. Для дифференциальных операторов это легче всего показать при помощи дельта-функции и ее производных. Например, если $\mathcal{A}_x = g(x)(d/dx) + r(x)$, то матрица для \mathcal{A} , выраженная через x -ы, имеет вид

$$A(x|x_0) = -g(x) \delta'(x_0 - x) + r(x) \delta(x_0 - x),$$

так как тогда (см. стр. 775)

$$\mathcal{A}_x F(x) = \int A(x|x_0) F(x_0) dx_0 = g(x) \frac{d}{dx} F(x) + r(x) F(x). \quad (7.5.26)$$

Высшие производные можно выразить через высшие «производные» дельта-функции; нетрудно видеть, что все операторы, с которыми мы до сих пор имели дело в этом параграфе, можно выразить через эквивалентную функцию $A(x|x_0)$, включающую дельта-функцию и ее производные, функции от x и x_0 и, быть может, единичную функцию $u(x_0 - x)$ (см. стр. 778).

Для обобщения метода функций Грина нам надо сначала найти операторное обобщение теоремы Грина, затем найти обобщение дельта-функции, соответствующей единичному источнику в правой части неоднородного уравнения, и, наконец, найти искомое решение обобщенного операторного уравнения.

Мы уже обобщили теорему Грина формулой (7.5.22). Она в то же время определяет, что понимается под сопряженным оператором и что требуется от сопряженных краевых условий, а также служит основой для соотношения взаимности. Все эти вопросы надо теперь перевести на векторно-операторный язык.

Сопряженные, комплексно сопряженные и эрмитовы операторы. Формула (7.5.22) равносильна теореме Грина. Запишем эту формулу в несколько ином виде:

$$\int [\bar{u}(x) \mathcal{A}_x v(x) - v(x) \tilde{\mathcal{A}}_x \bar{u}(x)] dx = 0. \quad (7.5.27)$$

Она до некоторой степени подобна формуле, определяющей оператор, эрмитово сопряженный к данному [см. стр. 86, а также формулу (6.3.72)],

$$\mathbf{U}^* \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathbf{V} - (\mathfrak{A}^* \cdot \mathbf{U})^* \cdot \mathbf{V} = 0,$$

которая в компонентах вдоль векторов $\mathbf{e}(x)$, соответствующих δ -функциям, имеет вид

$$\int \{ \bar{u}(x) \mathcal{A}_x v(x) - v(x) \overline{\tilde{\mathcal{A}}_x^* u(x)} \} dx = 0,$$

или

$$\int \int dx \{ \bar{u}(x) A(x|x_0) v(x_0) - v(x) \overline{A^*(x|x_0)} \bar{u}(x_0) \} dx_0 = 0,$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — соответствующие компоненты векторов \mathbf{U} , \mathbf{V} . Так как компоненты $A^*(x|x_0)$ эрмитово сопряженного к \mathfrak{A} оператора комплексно сопряжены компонентам оператора, транспонированного к \mathfrak{A} (который получается заменой строк на столбцы), то последний интеграл автоматически равен нулю.

Однако формула (7.5.27) не точно такая же, так что мы отметили различие, употребив тильду ($\tilde{\mathcal{A}}$) вместо звездочки (\mathcal{A}^*). Чтобы выяснить характер этого различия, надо вернуться к определению сопряженного дифференциального оператора. Тогда становится очевидным, что если $A(x|x_0)$ — компоненты оператора \mathfrak{A} вдоль осей $\mathbf{e}(x)$, то компонентами $\tilde{\mathfrak{A}}$ служат $A(x_0|x)$, тогда как компонентами \mathfrak{A}^* являются $\overline{A}(x_0|x)$. В одном случае мы заменяем строки на столбцы (x на x_0), а в другом мы, кроме того, переходим к комплексно сопряженным величинам.

Чтобы показать, что переход к обычному сопряженному оператору соответствует перестановке x и x_0 в компонентах по $\mathbf{e}(x)$, можно рассмотреть формулу (7.5.27) для случая дифференциального оператора $gd/dx + r$. Здесь компоненты оказываются равными

$$A(x|x_0) = -g(x) \delta'(x_0 - x) + r(x) \delta(x_0 - x).$$

Простая перестановка x и x_0 дает

$$\tilde{A}(x|x_0) = A(x_0|x) = -g(x_0) \delta'(x - x_0) + r(x_0) \delta(x - x_0),$$

чemu соответствует дифференциальный оператор

$$\tilde{\mathcal{A}}_x F(x) = \int \tilde{A}(x|x_0) F(x_0) dx_0 = -\frac{d}{dx}(gF) + r(x) F(x);$$

то, что мы действительно получили сопряженный оператор, видно из формулы (7.5.14).

Теперь можно резюмировать наши соглашения относительно эрмитовой сопряженности, сопряженности и комплексной сопряженности. Компоненты

вектора \mathbf{F}^* , комплексно сопряженного к \mathbf{F} , комплексно сопряжены компонентам \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \sum_n F_n \mathbf{e}_n = \int F(x) \mathbf{e}(x) dx, \quad \mathbf{F}^* = \sum_n \mathbf{e}_n^* \bar{F}_n = \int \mathbf{e}^*(x) \bar{F}(x) dx \quad (7.5.28)$$

(можно также просто называть вектор \mathbf{F}^* сопряженным к \mathbf{F}). Компоненты оператора $\tilde{\mathcal{A}}$, сопряженного к \mathcal{A} , получаются в результате перестановки строк и столбцов (транспонирования); компоненты оператора $\bar{\mathcal{A}}$, комплексно сопряженного к \mathcal{A} , равны комплексно сопряженным к компонентам \mathcal{A} , и, наконец, эрмитово сопряженный оператор \mathcal{A}^* получается в результате перестановки строк и столбцов и перехода к комплексно сопряженным величинам:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{nm} \mathbf{e}_n A_{nm} \mathbf{e}_m^*, \quad \tilde{\mathcal{A}} = \sum_{nm} \mathbf{e}_n A_{mn} \mathbf{e}_m^*, \\ \bar{\mathcal{A}} &= \sum_{nm} \mathbf{e}_n \bar{A}_{nm} \mathbf{e}_m^*, \quad \mathcal{A}^* = \tilde{\mathcal{A}} = \sum_{nm} \mathbf{e}_n \bar{A}_{mn} \mathbf{e}_m^*, \\ \tilde{\mathcal{A}} &= \bar{\mathcal{A}}^*, \quad \bar{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}^*. \end{aligned} \quad (7.5.29)$$

Если \mathcal{A} эрмитов, то $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, однако $\tilde{\mathcal{A}} \neq \mathcal{A}$, за исключением случая, когда все элементы \mathcal{A} вещественны. Если \mathcal{A} вещественный, то $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, однако $\tilde{\mathcal{A}} \neq \mathcal{A}$, за исключением случая, когда \mathcal{A} эрмитов, и т. д.

Заметим, что свойство оператора быть эрмитовым инвариантно относительно поворота осей в векторном пространстве, тогда как свойство быть вещественным (или быть самосопряженным) не инвариантно. Например, матрица из компонент \mathcal{A} вдоль \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

эрмитова, но не вещественна и не самосопряжена. Эта матрица имеет собственный вектор $\mathbf{e}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} [\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2/(1-i)]$ с собственным значением 0, а также собственный вектор $\mathbf{e}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} [\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1/(1-i)]$ с собственным значением 2. Относительно этих новых осей матрица \mathcal{A} , конечно, диагональна,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

т. е. все еще эрмитова, но, кроме того, вещественна и самосопряжена.

Функция Грина и оператор Грина. Таким образом, аналогом неоднородного уравнения $\mathcal{A}\psi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$ является операторное уравнение $\mathcal{A}\cdot\mathbf{F} = -4\pi\mathbf{P}$, где \mathbf{F} и \mathbf{P} —абстрактные векторы, а \mathcal{A} —один из описанных нами операторов. Что является аналогом уравнения $\mathcal{A}_G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ для функции Грина? Мы видели раньше, что компоненты вдоль осей $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ оператора тождественного преобразования (идемфактора)

$$\mathfrak{J} = \int \mathbf{e}(\mathbf{r}) \mathbf{e}^*(\mathbf{r}) dV, \quad \mathfrak{J} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \quad \text{для любого } \mathbf{F} \quad (7.5.30)$$

как раз равны дельта-функции $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$, так что аналогом правой части уравнения для функции Грина могло бы быть $-4\pi\mathfrak{J}$.

Это сделало бы также функцию Грина скорее аналогичной абстрактному векторному *оператору*, а не абстрактному вектору, так как если правая часть уравнения является оператором, то такой же должна быть

и левая часть. Этот результат не удивителен, так как если аналогом плотности источника — функции ρ — является абстрактный вектор \mathbf{P} , то аналогом функции G должен быть оператор, преобразующий \mathbf{P} в решение \mathbf{F} . Отсюда аналогом неоднородного уравнения

$$\mathcal{A}_r G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

является

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{G} = -4\pi \mathfrak{J}, \quad (7.5.31)$$

или в компонентах вдоль $\mathbf{e}(\mathbf{r})$

$$\int A(\mathbf{r} | \mathbf{r}') G(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_0) dV' = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

что эквивалентно дифференциальному уравнению для G . Таким образом, обобщением функции Грина является *оператор Грина* \mathcal{G} .

Глядя на уравнение (7.5.31), мы сразу видим, что подходящей формой для оператора Грина служит

$$\mathcal{G} = -4\pi \mathcal{A}^{-1}. \quad (7.5.32)$$

Другими словами, функция Грина получается представлением в компонентах $\mathbf{e}(x)$ произведения -4π на оператор, обратный оператору \mathcal{A} , соответствующему однородному уравнению. Поэтому решение общего неоднородного уравнения $\mathcal{A} \cdot \mathbf{F} = -4\pi \mathbf{P}$ равно

$$\mathbf{F} = \mathcal{G} \cdot \mathbf{P} = -4\pi \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathbf{P}, \quad (7.5.33)$$

что является в этих общих понятиях очень простым и очевидным ответом. Умножение на функцию Грина и интегрирование равносильны умножению на обратный оператор; функция $\int G(x | x_0) \rho(x_0) dx_0$ дает компоненты вдоль осей $\mathbf{e}(x)$ вектора $-4\pi \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathbf{P}$.

Соотношение взаимности. Мы видели, что обобщение теоремы Грина приводит к условию

$$\int [\bar{u} \mathcal{A}_x v - v \mathcal{A}_x \bar{u}] dV = 0,$$

где u и v удовлетворяют «самосопряженным» краевым условиям на граничной поверхности. Оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ сопряжен к \mathcal{A} (если \mathcal{A} эрмитов, то $\tilde{\mathcal{A}}$ также комплексно сопряжен к \mathcal{A}). Его функцией Грина служит $\tilde{\mathcal{G}}$, где $\tilde{\mathcal{G}} \cdot \tilde{\mathcal{A}} = -4\pi \mathfrak{J}$. Однако если транспонировать равенство (7.5.31), то получается $\tilde{\mathcal{G}} \cdot \tilde{\mathcal{A}} = -4\pi \mathfrak{J}$; следовательно, $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$. Другими словами, оператор Грина для сопряженного оператора $\tilde{\mathcal{A}}$ сопряжен к оператору Грина \mathcal{G} :

$$\tilde{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}), \quad (7.5.34)$$

что является обобщением теоремы взаимности (7.5.10). В понятиях векторного пространства этот результат является до некоторой степени тавтологией. Если мы убеждены в том, что обобщением функции Грина является оператор, то (7.5.34) служит как раз определением сопряженности; с другой стороны, формула (7.5.34) может служить подтверждением того, что оператор \mathcal{G} на самом деле обладает достаточно хорошими свойствами.

Теперь мы видим, почему исследование в начале этого параграфа было неполным и не могло быть полным в тот момент. Мы должны были рассматривать понятие «сопряженности» для дифференциальных (или интегральных) операторов, для функций Грина и для граничных условий до того, как мы смогли увидеть, что (7.5.27) на самом деле может содержать все

существенное из граничных условий и из свойств дифференциальных операторов, чтобы дать возможность определить операторы Грина. И мы должны были исследовать поведение функций Грина до того, как мы могли понять их связь с операторами.

Разложение оператора Грина в эрмитовом случае. Иногда бывает полезно разлагать операторы и векторы по некоторым другим системам собственных векторов, кроме бесконечной несчетной системы $e(r)$. Так, если оператор \mathfrak{L} равняется $\mathfrak{L} - \lambda$, где λ — мультиликативная постоянная, то можно было бы соблазниться разлагать участвующие величины по собственным векторам e_n уравнения

$$\mathfrak{L} \cdot e_n = \lambda_n e_n, \quad e_n^* \cdot e_m = \delta_{nm},$$

где операторное уравнение включает в себя как граничные условия, так и дифференциальный оператор. Например, оператор тождественного преобразования \mathfrak{J} равен $\sum e_n e_n^*$, и можно было бы выразить оператор Грина через компоненты его матрицы по его же осям:

$$\mathfrak{G} = \sum_{m,n} e_m G_{mn} e_n^*. \quad (7.5.35)$$

Если \mathfrak{L} — эрмитов оператор (и если краевые условия эрмитовы), то все собственные значения λ_n вещественны и сопряженный оператор будет комплексно сопряженным к \mathfrak{L} . Функции ψ (функции преобразования), входящие в соотношение между e_n и $e(r)$,

$$e_n = \int \psi_n(r) e(r) dV, \quad e(r) = \sum_m \bar{\psi}_m(r) e_m, \quad (7.5.36)$$

комплексно сопряжены к функциям ψ для сопряженного оператора $\tilde{\mathfrak{L}}$. Если оператор \mathfrak{L} самосопряженный, то либо ψ — вещественные функции $r(x, y, z, t)$, либо же, если они комплексны, их комплексно сопряженные также входят в систему собственных функций, так что при желании (и если это позволяют краевые условия) можно было бы сделать все ψ вещественными (например, для угла φ можно пользоваться функциями $e^{im\varphi}$ с положительным или отрицательным m или же функциями $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$).

Чтобы решить неоднородное уравнение $(\mathfrak{L} - \lambda) \cdot F = -4\pi P$, надо сначала решить операторное уравнение

$$(\mathfrak{L} - \lambda) \cdot \mathfrak{G} = -4\pi \mathfrak{J}. \quad (7.5.37)$$

Действуя затем обеими частями этого уравнения на вектор P , соответствующий функции плотности, мы видим, что решением уравнения $(\mathfrak{L} - \lambda) \cdot F = -4\pi P$ будет $F = \mathfrak{G} \cdot P$.

Мы знаем, что \mathfrak{G} равно $-4\pi(\mathfrak{L} - \lambda)^{-1}$, но это формальное решение не очень полезно. Более плодотворным было бы получить разложение \mathfrak{G} по собственным векторам e_n . Подставляя (7.5.35) в уравнение (7.5.37), мы видим, что матричные компоненты \mathfrak{G} по собственным векторам e_n равны

$$G_{mn} = \frac{4\pi \delta_{mn}}{\lambda - \lambda_m}, \quad \mathfrak{G} = \sum_n \frac{4\pi}{\lambda - \lambda_n} e_n e_n^*. \quad (7.5.38)$$

Функция Грина равна матричной компоненте \mathfrak{G} по векторам $e(r)$:

$$G(r | r_0) = e^*(r) \cdot \mathfrak{G} \cdot e(r_0) = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n(r) \bar{\psi}_n(r_0)}{\lambda - \lambda_n}. \quad (7.5.39)$$

Сопряженной к G будет функция $G(r_0 | r)$, которая комплексно сопряжена к $G(r | r_0)$. Это, конечно, является следствием того, что если оператор \mathfrak{L}

эрмитов, то функция G также [см. формулу (7.5.29)]. Если оператор \mathfrak{L} к тому же самосопряженный, так что все его элементы в этом разложении вещественны, то функция G также самосопряженная и $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r})$. В этом случае или все ψ вещественны, или, если имеются комплексные ψ , их сопряженные также являются собственными функциями, так что сумма (7.5.39) симметрична относительно \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 .

Следовательно, вообще для эрмитового оператора функция Грина с точкой наблюдения в \mathbf{r} и источником в \mathbf{r}_0 комплексно сопряжена функции Грина с точкой наблюдения в \mathbf{r}_0 и источником в \mathbf{r} , тогда как для самосопряженного оператора (с самосопряженными краевыми условиями) источник и точку наблюдения можно переставить без изменения G . Это окончательное обобщение соотношения взаимности.

Неэрмитовы операторы; биортогональные функции. Иногда мы вынуждены рассматривать дифференциальные уравнения или краевые условия, которые не соответствуют эрмитовым операторным уравнениям. В этом случае оператор \mathfrak{L}^* отличается от оператора \mathfrak{L} и собственные векторы также должны отличаться. Мы определим обе системы обычными уравнениями

$$\mathfrak{L} \cdot \mathbf{e}_m = \lambda_m \mathbf{e}_m, \quad \mathfrak{L}^* \cdot \mathbf{f}_n = \mu_n \mathbf{f}_n, \quad (7.5.40)$$

где, конечно, \mathbf{e}_m и \mathbf{f}_n имеют сопряженными векторами \mathbf{e}_m^* и \mathbf{f}_n^* .

Собственные значения λ_n для \mathfrak{L} можно в принципе получить, если известен эффект \mathfrak{L} для некоторой стандартной системы взаимно ортогональных единичных векторов \mathbf{a}_n (которыми, конечно, могут быть $\mathbf{e}(x)$):

$$\mathfrak{L} = \sum_{m, n} \mathbf{a}_m L_{mn} \mathbf{a}_n^*, \quad \mathfrak{L}^* = \sum_{m, n} \mathbf{a}_m \bar{L}_{nm} \mathbf{a}_n^*, \quad (7.5.41)$$

согласно формуле (1.6.36). Как показано в § 1.6, уравнениям (7.5.40) отвечают системы уравнений

$$\sum_n L_{mn} (\mathbf{a}_n^* \cdot \mathbf{e}_v) = \lambda_v (\mathbf{a}_m^* \cdot \mathbf{e}_v), \quad \sum_n \bar{L}_{nm} (\mathbf{a}_n^* \cdot \mathbf{f}_v) = \mu_v (\mathbf{a}_m^* \cdot \mathbf{f}_v),$$

которые для получения собственных значений λ_v и μ_v надо решить, находя корни уравнений, полученных приравниванием нулю определителя из коэффициентов при $\mathbf{a}_n^* \cdot \mathbf{e}_v$ и $\mathbf{a}_n^* \cdot \mathbf{f}_v$:

$$|L_{mn} - \lambda_v \delta_{mn}| = 0, \quad |\bar{L}_{nm} - \mu_v \delta_{nm}| = 0. \quad (7.5.42)$$

Система корней λ_v тесно связана с системой корней μ_v , что станет очевидным, если взять сопряженное к первому из уравнений (7.5.40),

$$(\mathfrak{L} \cdot \mathbf{e}_v)^* = \mathbf{e}_v^* \cdot \mathfrak{L}^* = \bar{\lambda}_v \mathbf{e}_v^*,$$

что даст

$$\sum_m (\mathbf{e}_v^* \cdot \mathbf{a}_m) \bar{L}_{nm} = \bar{\lambda}_v (\mathbf{e}_v^* \cdot \mathbf{a}_n)$$

с вековым определителем

$$|\bar{L}_{nm} - \bar{\lambda}_v \delta_{nm}| = 0,$$

который совпадает со вторым определителем (7.5.42). Следовательно, система корней μ_v совпадает с системой корней $\bar{\lambda}_v$, и можно упорядочить индексы так, что $\mu_v = \bar{\lambda}_v$. Однако это не означает, что $\mathbf{e}_m = \mathbf{f}_m^*$ или $\mathbf{e}_n^* = \mathbf{f}_n$.

Если \mathfrak{L} не эрмитов, то система собственных векторов \mathbf{e}_n не является ортогональной, но векторы \mathbf{f}_n имеют ортогональную взаимосвязь с векторами \mathbf{e}_m ; действительно,

$$\mathbf{f}_n^* \cdot \mathfrak{L} \cdot \mathbf{e}_m = \lambda_m [\mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}_m] = [(\mathfrak{L}^* \cdot \mathbf{f}_n)^* \cdot \mathbf{e}_m] = \lambda_n [\mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}_m],$$

так что

$$(\lambda_m - \lambda_n)(\mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}_m) = 0.$$

Следовательно, скалярное произведение $\mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}_m$ равно нулю, за исключением случая, когда $m = n$. Поэтому разложение любого вектора \mathbf{F} имеет вид

$$\mathbf{F} = \sum F_n \mathbf{e}_n, \quad \text{где } F_n = \mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{F}. \quad (7.5.43)$$

Двойная система собственных векторов \mathbf{e}_m и \mathbf{f}_n называется *биортогональной системой* собственных векторов. Об их представлениях через векторы $\mathbf{e}(x)$

$$\psi_n(\mathbf{r}) = \mathbf{e}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_n, \quad \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r})$$

говорят, что они образуют биортогональную систему собственных функций.

Отсюда оператор тождественного преобразования \mathfrak{J} равен $\sum \mathbf{e}_n \mathbf{f}_n^*$, а разложение оператора Грина имеет вид

$$\mathfrak{G} = \sum_{m, n} \mathbf{e}_n G_{nm} \mathbf{f}_m^* = 4\pi \sum_n \frac{\mathbf{e}_n \mathbf{f}_n^*}{\lambda - \lambda_n},$$

и соответствующая функция Грина равна

$$G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}) \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0)}{\lambda - \lambda_n}. \quad (7.5.44)$$

Эта функция симметрична, только если $\psi_n = \bar{\psi}_n$ (как будет в некоторых случаях).

В § 11.1 [формулы (11.1.21) и далее] мы рассмотрим случай колеблющейся струны с однородными граничными условиями, зависящими от частоты (наклон графика ψ на границе зависит как от значения ψ , так и от ее скорости). Эти граничные условия не самосопряженные, и соответствующий оператор не эрмитов, так что надо применять биортогональные собственные функции. Мы решаем задачу для данных условий, а также для сопряженных граничных условий, комплексно сопряженных к (11.1.22). Оказывается, что в этом случае $\psi_n = \bar{\psi}_n$, так что ряд (11.2.25) соответствует формуле (7.5.44).

Задачи к главе 7

7.1. Круговой проводящий диск радиуса a с постоянным потенциалом V помещен целиком в бесконечный плоский проводник (совпадающий с плоскостью $z = 0$), на котором поддерживается нулевой потенциал. Показать, что функция Грина, соответствующая этой задаче, равна

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2} - [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2]^{-1/2}.$$

Показать, что потенциал в точке (x, y, z) , порожденный этой комбинацией проводников, равен

$$\psi(r, \vartheta) = \frac{zV}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a y dy (r^2 + y^2 - 2ry \sin \vartheta \cos \varphi)^{-3/2},$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и $\operatorname{tg} \vartheta = (1/z) \sqrt{x^2 + y^2}$. Найти плотность заряда на диске и на бесконечном проводнике в виде определенных интегралов. Найти ψ для r , больших по сравнению с a , и для r , малых по сравнению с a .