ГЛАВА 8

Интегральные уравнения

В предыдущих главах при описании распространения некоего поля ψ мы полагались главным образом на дифференциальные уравнения. Дополнительно задавались краевые условия, так как само дифференциальное уравнение описывает ψ лишь локально, связывая значения ψ в точках $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$. Дифференциальное уравнение позволяет, начав с какой-либо заданной точки $\mathbf{r}$, шаг за шагом строить различные возможные решения. Краевые условия призваны для того, чтобы можно было выбрать решение, соответствующее интересующим нас физическим условиям.

Поскольку граничные значения ψ играют столь важную роль, естественно попытаться так задать уравнение, определяющее ψ, чтобы оно сразу включало в себя краевые условия. Такое уравнение должно связать $\psi(\mathbf{r})$ не только со значениями ψ в точках, близких к $\mathbf{r}$, но и со значениями во всех точках области, включая граничные точки. Интегральные уравнения обладают именно таким свойством. Включая в себя краевые условия, такое уравнение в весьма компактной форме представляет всю физику задачи и оказывается, как мы увидим на многих примерах, удобнее, чем дифференциальное уравнение.

Это не единственная причина для изучения интегральных уравнений. Мы уже видели при рассмотрении диффузии и явлений переноса, что во многих случаях дифференциальные уравнения не могут служить средством описания таких явлений. Это имеет место в тех задачах, где поведение ψ в точке $\mathbf{r}$ зависит не только от значений ψ вблизи $\mathbf{r}$, но и от значений ψ в точках, удаленных от $\mathbf{r}$.

В первом параграфе этой главы мы рассмотрим некоторые из интегральных уравнений, встречающихся в физике, и опишем отдельные типы таких уравнений, обладающие различными свойствами и требующие различных способов решения. После обсуждения общих математических свойств этих уравнений, будут изложены способы их решения.

8. 1. Интегральные уравнения физики; их классификация

Рассмотрим сначала пример из теории переноса. Пусть некоторая частица, движущаяся в заданном направлении и обладающая определенной энергией, в результате соударения с другой частицей приобретает значение импульса $\mathbf{p}$, отличное по величине и направлению от первоначального значения $\mathbf{p}_0$. Обозначим через $P(\mathbf{p}\,|\,\mathbf{p}_0)\,d\mathbf{p}\,dt$ вероятность того, что частица, обладающая импульсом $\mathbf{p}_0$, за время dt, в результате соударений, приобретет значение импульса, заключенное между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}+d\mathbf{p}$. Если в окрестности точки $\mathbf{r}$ доля частиц, имеющих импульсы, заключенные между $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}_0+d\mathbf{p}_0$, равна $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0, t)\,d\mathbf{p}_0$, то вычисляя $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t+dt)$, мы должны учесть

приращение f, получающееся за счет соударений, т. е. величину

$$\left[\int P(\mathbf{p}\,|\,\mathbf{p}_0)\, f(\mathbf{r},\, \mathbf{p}_0,\, t)\, d\mathbf{p}_0\right] dt.$$

Мы сразу же замечаем, что значение $f(\mathbf{r},\, \mathbf{p},\, t)$ при фиксированном $\mathbf{p}$ определяется значениями $f(\mathbf{r},\, \mathbf{p}_0,\, t)$ при *всех* $\mathbf{p}_0$, совместимых с законами сохранения импульса и энергии. Для того чтобы получить полную картину, составим уравнение для f, учтя полное приращение f за время dt. Выражение, приведенное выше, дает число частиц, рассеянных в элемент фазового пространства, определяемый величинами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$. Некоторое число частиц покинет этот элемент из-за соударений и за счет поглощения. Пусть $P_T(\mathbf{p})$ — вероятность того, что частица покинет окрестность значения $\mathbf{p}$ за единицу времени. Если поглощения нет, то $P_T(\mathbf{p}) = \int P(\mathbf{p}_0\,|\,\mathbf{p})\, d\mathbf{p}_0$. Число частиц, покидающих эту окрестность за время dt, равно

$$P_T(\mathbf{p})\, f(r,\, \mathbf{p},\, t)\, dt.$$

Наконец, даже если нет соударений, f изменяется просто потому, что частицы движутся. Частица, находящаяся в точке $\mathbf{r}$, за dt секунд до этого занимала положение $\mathbf{r} - (\mathbf{p}/m)\, dt$. Итак,

$$f(\mathbf{r},\, \mathbf{p},\, t+dt) = f[\mathbf{r} - (\mathbf{p}/m)\, dt,\, \mathbf{p},\, t] - P_T(\mathbf{p})\, f(\mathbf{r},\, \mathbf{p},\, t)\, dt + \\ + \left[\int P(\mathbf{p}\,|\,\mathbf{p}_0)\, f(\mathbf{r},\, \mathbf{p}_0,\, t)\, d\mathbf{p}_0\right] dt.$$

Согласно этому уравнению, число частиц, находящихся в окрестности точки $\mathbf{r}$ в момент $t+dt$, равно числу частиц, достигших окрестности этой точки в результате движения, минус число частиц, поглощенных или рассеянных из интервала $(\mathbf{p},\, \mathbf{p}+d\mathbf{p})$, плюс число частиц, рассеянных в этот интервал в результате соударений.

Разложив первый член правой части по степеням dt, получаем (см. § 2.4 и 12.2) интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\left(\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla\right) f - P_T f + \int P(\mathbf{p}\,|\,\mathbf{p}_0)\, f(\mathbf{r},\, \mathbf{p}_0,\, t)\, d\mathbf{p}_0. \tag{8.1.1}$$

В стационарных условиях f не зависит от t, и мы приходим к уравнению

$$\left(\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla\right) f = -P_T f + \int P(\mathbf{p}\,|\,\mathbf{p}_0)\, f(\mathbf{r},\, \mathbf{p}_0)\, d\mathbf{p}_0. \tag{8.1.2}$$

Подчеркнем еще раз, что f при любом $\mathbf{p}$ связано со всей совокупностью значений f, а не только со значениями, отвечающими близким $\mathbf{p}$. В § 2.4 была установлена связь вероятностей P_T и P с эффективными сечениями и соответствующее уравнение посредством интегрирования из интегро-дифференциального было превращено в интегральное. Уравнения переноса будут еще рассмотрены в гл. 12.

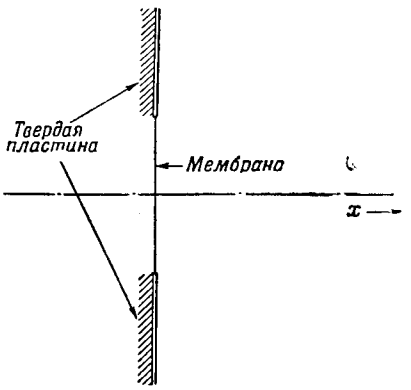

Рис. 8.1. Излучение мембраны, закрепленной в твердой пластине.

Пример из акустики. Не следует думать, что уравнения такого типа встречаются только в задачах переноса, где соударения являются естественной причиной скачкообразного изменения импульса $\mathbf{p}$. Можно взять пример хотя бы из акустики. Интегро-дифференциальные уравнения появляются, как мы увидим, тогда, когда имеются две взаимодействующие друг с другом системы с распределенными массами или с какими-либо другими характеристическими

параметрами. Рассмотрим в качестве примера колебания мембраны, натянутой на отверстии в твердой пластине (см. рис. 8.1). Колебания мембраны вызывают звуковые волны, которые в свою очередь оказывают на мембрану обратное воздействие, вызывая ее колебания, и т. д. Пусть смещения точек мембраны описываются функцией $\psi(y, z)$; соответствующая скорость в направлении оси x равна $\partial\psi/\partial t = -i\omega\psi$, если предположить простую гармоническую зависимость от времени. Согласно уравнению (7.2.10), в среде, примыкающей к мембране справа, существует потенциал скоростей

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int G_k(x, y, z \mid 0, y_0, z_0)\, v_n(y_0, z_0)\, dS_0,$$

где G_k — функция Грина, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial G_k}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Здесь $k = \omega/c$, c — скорость распространения звука, а v_n — нормальная составляющая скорости, т. е. составляющая по оси x в отрицательном направлении. Таким образом, $v_n = i\omega\psi$. Функция G_k может быть получена методом изображений (см. стр. 753):

$$G_k(x, y, z \mid x_0, y_0, z_0) = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'},$$

где

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$
$$R'^2 = (x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Звук, порожденный в области $x > 0$, вызывает появление давления, которое в свою очередь играет роль возмущающей силы в уравнении колебаний мембраны. Давление связано с потенциалом скоростей соотношением

$$p = \rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -i\omega\rho_0\varphi,$$

где ρ_0 — средняя плотность среды, в которой распространяется звук. Уравнение движения мембраны запишется в виде

$$\nabla^2\psi + \varkappa^2\psi = -\frac{p}{T},$$

где $\varkappa = \omega/V$, $V = \sqrt{T/\mu}$, T — натяжение, μ — поверхностная плотность мембраны. Подставив выражение для p, получим

$$\nabla^2\psi + \varkappa^2\psi = \frac{\omega^2\rho_0}{2\pi T}\int \frac{\exp\left[ik\sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\right]}{\sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}\,\psi(y_0, z_0)\, dS_0. \qquad (8.1.3)$$

Мы видим, что и в этом уравнении значение ψ в какой-либо точке мембраны связано посредством интеграла в правой части не только со значениями ψ в соседних точках, но и с ее значениями во всех точках мембраны Это уравнение — интегро-дифференциальное, но, если воспользоваться функцией Грина для мембраны, его можно свести к интегральному уравнению.

Приведенный пример ясно показывает, что интегральное уравнение появляется всякий раз, когда возбуждение в какой-либо точке среды может быть передано другим точкам через посредство некоторой среды, взаимодействующей с первой. При этом уравнение, описывающее колебания первой среды, будет содержать член, учитывающий распространение возбуждения во второй среде. Он будет зависеть от значений ψ во всех точках соприкосновения обеих сред; в приведенном примере таковым является член с интегралом в уравнении (8.1.3). Проблемы излучения волн, в которых нельзя пренебречь реакцией излучения на источник, естественным образом

приводят к интегральным уравнениям. Решение такого интегрального уравнения позволяет точно определить сопротивление излучения или, что является более общей задачей, импеданс излучения. Такого рода проблемы будут рассмотрены в гл. 11 и 13.

Пример из волновой механики. Последний пример мы заимствуем из квантовой механики. Уравнение Шредингера должно записываться в виде интегрального уравнения тогда, когда потенциальная энергия зависит от скоростей. Пусть

$$V(\mathbf{r},\ \hbar\nabla/i)$$

— потенциальная энергия, причем вместо оператора импульса уже подставлено $(\hbar/i)\nabla$. В дифференциальной форме уравнение Шредингера имеет вид

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\{E - V[\mathbf{r},\ (\hbar/i)\nabla]\}\psi = 0.$$

Это уравнение имеет конечный порядок только в том случае, когда V является многочленом от ∇. Для того чтобы получить эквивалентное интегральное уравнение, введем преобразование Фурье функции ψ:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\mathbf{p})\,e^{(i/\hbar)\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\,d\mathbf{p}.$$

Подставляя это выражение в уравнение Шредингера, умножая на $(2\pi\hbar)^{-3/2}e^{-(i/\hbar)\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ и интегрируя по $\mathbf{r}$, мы получаем

$$\frac{q^2}{2m}\varphi(\mathbf{q}) + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\mathbf{p})\,V(\mathbf{p}-\mathbf{q},\ \mathbf{p})\,d\mathbf{p} = E\varphi(\mathbf{q}), \tag{8.1.4}$$

$$V(\mathbf{p}-\mathbf{q},\ \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}/\hbar}\,V(\mathbf{r},\ \mathbf{p})\,dV.$$

Это интегральное уравнение, определяющее $\varphi(\mathbf{q})$, было приведено ранее в § 2.6. Смысл фигурирующего здесь интеграла легче всего понять, рассматривая задачу о рассеянии, вызываемом потенциалом V. Если плоская волна с амплитудой $\varphi(\mathbf{p})$ приходит в область, где существует потенциал, то она рассеивается. Иначе говоря, часть начальной волны изменяет направление, возможно, с потерей импульса. Интеграл в приведенном выше уравнении показывает, как меняется импульс $\mathbf{q}$ под влиянием совокупности плоских волн с разными импульсами, появляющейся при рассеянии на потенциале V. Здесь имеется аналогия с явлением переноса, ранее рассмотренным в этой главе, которая может быть использована для получения наглядного представления о некоторых квантовомеханических явлениях.

Мы рассмотрели некоторые задачи, требующие применения интегральных уравнений. Ранее мы указывали также, что даже те задачи, которые описываются дифференциальными уравнениями, могут быть сформулированы в виде интегральных уравнений. Приведем теперь несколько примеров этого рода.

Краевые условия и интегральные уравнения. Особенно хорошо поддаются формулировке в виде интегральных уравнений краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. В примере, приведенном ниже, дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка *в двумерной области* переформулировано в виде *одномерного* интегрального уравнения. Такое сведение двумерной задачи

к одномерной очень важно, конечно, для нахождения как точного, так и приближенного решения.

Рассмотрим задачу[1]), связанную с уравнением Гельмгольца. На отрицательной полуоси x поместим преграду (см. рис. 8.2). Плоская волна $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, движущаяся по направлению вектора $\mathbf{k}$, набегает на эту преграду. Полное поле ψ должно удовлетворять уравнению Гельмгольца $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$. Нас интересует воздействие преграды на волну в случае, когда решение ψ

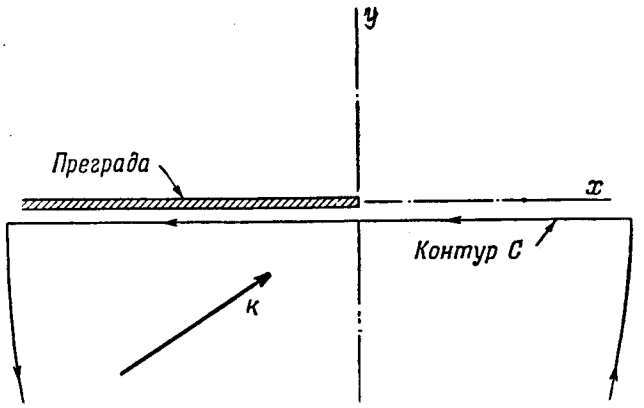

Рис. 8.2. Дифракция на полуплоскости $y=0$, $x<0$.
Указан контур интегрирования для интегрального представления.

удовлетворяет краевому условию $\partial\psi/\partial y = 0$ на преграде. На больших расстояниях от начала координат это решение должно удовлетворять еще следующим условиям. В нижней полуплоскости $y < 0$

$$\psi = 2\cos(k_y y)\, e^{ik_x x} + \psi^-, \tag{8.1.5}$$

где ψ^- представляет уходящую волну при $r \to \infty$, $y < 0$. В верхней полуплоскости $y > 0$ полагаем

$$\psi = \psi^+, \tag{8.1.6}$$

где ψ^+ представляет уходящую волну при $r \to \infty$, $y > 0$.

Именно из-за асимметрии условий на больших расстояниях, мы берем для ψ различные выражения при $y > 0$ (8.1.6) и при $y < 0$ (8.1.5). Необходимо, значит, проверить непрерывность ψ и $\partial\psi/\partial y$ на общей границе этих областей, т. е. в точках $y = 0$, $x > 0$. Согласно теории функций Грина, изложенной в гл. 7, $\psi(\mathbf{r})$ при $y \leqslant 0$ должна иметь вид

$$\psi(\mathbf{r}) = 2\cos(k_y y)\, e^{ik_x x} + \frac{1}{4\pi}\oint\left[G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)\frac{\partial\psi^-}{\partial n_0} - \psi\,\frac{\partial G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)}{\partial n_0}\right] dS_0.$$

Путь интегрирования указан на рис. 8.2. Так как G_k должна удовлетворять условиям излучения, то интеграл вдоль большой полуокружности обращается в нуль. Поскольку, кроме того, $\partial G_k(\mathbf{r}\,|\,x_0, y_0)/\partial y_0 = 0$ при $y_0 = 0$, интеграл вдоль оси x упрощается, и мы получаем

$$\psi_t^r(\mathbf{r}) = 2\cos(k_y y)\, e^{ik_x x} + \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty G_k(\mathbf{r}\,|\,x_0, 0)\left(\frac{\partial\psi^-}{\partial y_0}\right)_{y_0 0} dx_0, \quad y < 0, \tag{8.1.7}$$

$$G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = \pi i\,[H_0(kR) + H_0(kR')],$$

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad R' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}.$$

[1]) В нижеследующем примере в переводе исправлены неточности оригинала.— *Прим. ред.*

В области $y > 0$ при той же G_k получаем

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty G_k(\mathbf{r}\,|\,x_0, 0)\left(\frac{\partial\psi^+}{\partial y_0}\right)_{y_0=0} dx_0, \quad y > 0. \tag{8.1.8}$$

При таком выборе выражений для ψ условие $\partial\psi/\partial y = 0$ при $y = 0$, $x < 0$, очевидно, выполняется.

Теперь нужно ввести условия непрерывности. Значения производной $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{y=0^+}$ и $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{y=0^-}$, вычисленные из формул (8.1.7) и (8.1.8), совпадут, если взять $\left(\frac{\partial\psi^+}{\partial y_0}\right)_{y_0=0} = \left(\frac{\partial\psi^-}{\partial y_0}\right)_{y_0=0} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\right)_{y_0=0}$. Кроме того, должны совпадать при $y = 0$, $x > 0$ и значения $(\psi)_{y=0^+}$ и $(\psi)_{y=0^-}$. Это условие дает

$$2e^{ik_x x} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty G_k(x, 0\,|\,x_0, 0)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\right)_{y_0=0} dx_0, \quad x > 0,$$

или

$$2e^{ik_x x} = -i\int_0^\infty H_0^{(1)}[k\,|\,x - x_0\,|]\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\right)_{y_0=0} dx_0. \tag{8.1.9}$$

Мы получили для производной $(\partial\psi/\partial y_0)_{y_0=0}$ интегральное уравнение. Коль скоро $(\partial\psi/\partial y_0)_{y_0=0}$ найдена, мы подставляем ее в (8.1.7) и в (8.1.8) и находим ψ при $y < 0$ и $y > 0$.

Заметим, что можно было бы для этой задачи составить и другое интегральное уравнение, если за неизвестную функцию взять скачок $(\psi)_{y=0^+} - (\psi)_{y=0^-}$ при $x < 0$. При этом выражения для ψ при $y < 0$ и $y > 0$ надо было бы выбрать так, чтобы они удовлетворяли условиям непрерывности при $x > 0$ и затем подчинить их условию $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ при $x < 0$.

Полученное тем или иным способом одномерное интегральное уравнение включает в себя краевые условия. Задавая другие краевые условия, мы придем к другому интегральному уравнению.

Уравнения, определяющие собственные функции. Интегральное уравнение другого типа получается из уравнения Шредингера

$$\left(\nabla^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\right)\psi = 0,$$

которое мы запишем в виде

$$(\nabla^2 + k^2 - U)\,\psi = 0, \tag{8.1.10}$$

где

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E, \quad U = \frac{2m}{\hbar^2}V.$$

Переписав (8.1.10) в форме $(\nabla^2 + k^2)\,\psi = U\psi$, видим, что решением этого уравнения является

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)\,U(\mathbf{r}_0)\,\psi(\mathbf{r}_0)dV_0, \tag{8.1.11}$$

где выбор функции Грина G_k определяется краевыми условиями, которым должна удовлетворять ψ. Уравнение (8.1.11) представляет собой интегральное уравнение относительно функции ψ.

От уравнения (8.1.9) оно отличается тем, что в (8.1.11) ψ входит как под знаком интеграла, так и вне интеграла.

Для того чтобы более отчетливо представить себе смысл уравнения (8.1.11), рассмотрим одномерный пример. Обратимся к задаче Штурма — Лиувилля, о которой шла речь в § 6.3. Неизвестная функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dz}\left[p\frac{d\psi}{dz}\right]+[q(z)+\lambda r(z)]\psi=0. \tag{8.1.12}$$

Для того чтобы свести (8.1.12) к уравнению (8.1.11), введем функцию Грина, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d}{dz}\left[p\frac{dG(z\mid z_0)}{dz}\right]+qG(z\mid z_0)=-\delta(z-z_0). \tag{8.1.13}$$

Теперь мы должны задать какие-нибудь краевые условия для G и ψ. Для определенности будем считать заданными $\psi(0)$ и $\psi(l)$, т. е. подчиним ψ условиям Дирихле. Соответственно для G имеем $G(0\mid z_0)=G(l\mid z_0)=0$. Перенося в (8.1.12) $\lambda r\psi$ в правую часть, получаем

$$\psi(z)=\lambda\int_0^l G(z\mid z_0)\,r(z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0+\left[\psi(0)\,p(0)\,\frac{dG(z_0\mid z)}{dz_0}\right]_{z_0=0}-$$
$$-\left[\psi(l)\,p(l)\,\frac{dG(z_0\mid z)}{dz_0}\right]_{z_0=l}. \tag{8.1.14}$$

Это — интегральное уравнение относительно ψ. Если ψ должна удовлетворять однородным условиям Дирихле: $\psi(0)=0$, $\psi(l)=0$, то это интегральное уравнение принимает вид

$$\psi(z)=\lambda\int_0^l G(z\mid z_0)\,r(z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0. \tag{8.1.15}$$

Краевые условия фигурируют в уравнении (8.1.14), так сказать, в «явном» виде, и мы опять видим, что интегральное уравнение включает в себя все данные, относящиеся к задаче. Никаким дополнительным условиям подчинять ψ не нужно.

Интегральные уравнения некоторых собственных функций. Для иллюстрации уравнения (8.1.15) приведем интегральные уравнения, которым удовлетворяют классические ортогональные функции.

(а)
$$\frac{d^2\psi}{dz^2}+\lambda\psi=0,\quad \psi(0)=\psi(l)=0,$$
$$\psi(z)=\lambda\int_0^l G(z\mid z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0,$$
$$G(z\mid z_0)=\frac{1}{l}\begin{cases} z(l-z_0), & z<z_0;\\ z_0(l-z), & z>z_0.\end{cases}$$

Решения: $\sin(n\pi z/l)$, $\lambda=(n\pi/l)^2$, n — целое.

(б) $$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d\psi}{dz}\right]+\lambda\psi=0,\ \psi \text{ конечна при } z=\pm 1.$$

$$\psi(z)=\lambda\int_{-1}^{1} G(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\psi(z_0)\,dz_0,$$

$$G(z\,|\,z_0)=\frac{1}{2}\begin{cases}\ln\dfrac{1+z}{1-z_0}, & z<z_0,\\ \ln\dfrac{1+z_0}{1-z}, & z>z_0.\end{cases}$$

Решения: *полиномы Лежандра* $P_n(z)$, $\lambda=n(n+1)$, n — целое.

(в) $$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\psi}{dz}\right)+\left(\lambda-\frac{n^2}{z^2}\right)\psi=0,\ \psi \text{ конечна при } z=0,\infty.$$

$$\psi(z)=\lambda\int_{0}^{\infty} G(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,z_0\,dz_0,$$

$$G(z\,|\,z_0)=\frac{1}{2n}\begin{cases}\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n, & z<z_0,\\ \left(\dfrac{z_0}{z}\right)^n, & z>z_0.\end{cases}$$

Решения: *бесселевы функции* $J_n\left(\sqrt{\lambda}\,z\right)$.

(г) $$\frac{d^2\psi}{dz^2}+(\beta^2-\alpha^2z^2)\,\psi=0,$$

или

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}+(\lambda-\alpha-\alpha^2z^2)\,\psi=0;\ \lambda=\beta^2+\alpha^2;\ \psi(\infty),\ \psi(-\infty) \text{ конечны.}$$

$$\psi(z)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty} G(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0,$$

$$G(z\,|\,z_0)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\begin{cases} e^{\alpha z^2/2}\displaystyle\int_{-\infty}^{z} e^{-\alpha\xi^2}d\xi\, e^{\alpha z_0^2/2}\int_{z_0}^{\infty} e^{-\alpha\xi^2}d\xi, & z<z_0,\\ e^{\alpha z_0^2/2}\displaystyle\int_{-\infty}^{z_0} e^{-\alpha\xi^2}d\xi\, e^{\alpha z^2/2}\int_{z}^{\infty} e^{-\alpha\xi^2}d\xi, & z>z_0.\end{cases}$$

Решения: *функции Эрмита* $e^{-\alpha z^2/2}H_n\left(\sqrt{\alpha}\,z\right)$, $\lambda=2(n+1)\alpha$, n — целое.

(д) $$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d\psi}{dz}\right)+\left(-\beta^2+\frac{2\alpha}{z}\right)\psi=0;\ \psi(0),\ \psi(\infty) \text{ конечны.}$$

Параметр λ можно отождествить либо с 2α, либо с $\alpha^2-\beta^2$.

В первом случае

$$\psi(z)=\lambda\int_{0}^{\infty} G(z\,|\,z_0)\,z_0\psi(z_0)\,dz_0,\quad \lambda=2\alpha,$$

$$G(z\,|\,z_0)=\frac{e^{-\beta|z-z_0|}}{2\beta z z_0}.$$

Решения: $e^{-\beta z}L_n^1(2\beta z)$, $L_n(2\beta z)$ — *полиномы Лагерра*, $\alpha/\beta-1=n$, n — целое.

Во втором случае эквивалентное уравнение имеет вид

$$\text{(е)} \qquad \frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d\psi}{dz}\right)+\left(\lambda-\alpha^2+\frac{2\alpha}{z}\right)\psi=0, \qquad \lambda=\alpha^2-\beta^2.$$

$$\psi(z)=\lambda\int_0^\infty G(z\,|\,z_0)\,z_0^2\psi(z_0)\,dz_0,$$

$$G(z\,|\,z_0)=e^{-\alpha(z+z_0)}\begin{cases}\displaystyle\int_{z_0}^{\infty}\frac{e^{2\alpha\xi}}{\xi^2}\,d\xi, & z<z_0,\\ \displaystyle\int_{z}^{\infty}\frac{e^{2\alpha\xi}}{\xi^2}\,d\xi, & z>z_0.\end{cases}$$

Типы интегральных уравнений; уравнения Фредгольма. Перейдем теперь к классификации рассмотренных интегральных уравнений и к некоторым обобщениям. Возвращаясь к (8.1.14), видим, что это уравнение имеет вид

$$\psi(z)=\lambda\int_a^b K(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0+\varphi(z), \tag{8.1.16}$$

где в рассмотренном конкретном случае $K(z\,|\,z_0)=r(z_0)\,G(z\,|\,z_0)$, а $\varphi(z)$ — некоторая заданная функция; a и b — фиксированные точки, в которых ψ удовлетворяет краевым условиям. Интегральное уравнение относительно ψ вида (8.1.16) называется *неоднородным уравнением Фредгольма второго рода*. Функция $K(z\,|\,z_0)$ называется *ядром* этого интегрального уравнения. Ядро *симметрично*, если $K(z\,|\,z_0)=K(z_0\,|\,z)$. В (8.1.14) ядро несимметрично при $r(z_0)\neq 1$.

Отбрасывая $\varphi(z)$, превращаем (8.1.16) в *однородное уравнение Фредгольма второго рода*:

$$\psi(z)=\lambda\int_a^b K(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0. \tag{8.1.17}$$

Однородными уравнениями Фредгольма второго рода являются уравнение (8.1.15) и уравнения в примерах (а) — (д). В примерах (а), (б) и (г) ядра симметричны. В примерах (д) и (е), а также в уравнении (8.1.14) фигурируют так называемые *полярные ядра*, т. е. ядра вида

$$K(z\,|\,z_0)=G(z\,|\,z_0)\,r(z_0), \quad \text{где} \quad G(z\,|\,z_0)=G(z_0\,|\,z). \tag{8.1.18}$$

Во всех этих примерах ядра являются *определенными* в заданной области, т. е. при $0\leqslant z\leqslant l$ в примере (а), при $0\leqslant z<\infty$ в примере (в), и т. д. *Положительно определенное* ядро $K(z\,|\,z_0)$ характеризуется неравенством

$$\int_a^b dz_0\int_a^b dz\,[K(z\,|\,z_0)\,\overline{\psi}(z)\,\psi(z_0)]>0,$$

которое должно выполняться для любой функции ψ. В случае *отрицательно определенного* ядра этот интеграл всегда меньше нуля. В том и в другом случае ядро называется определенным. Если знак такого интеграла зависит от выбора ψ, то ядро называется *неопределенным*.

Уравнение (8.1.9) представляет собой пример *уравнения Фредгольма первого рода*, которое имеет общий вид

$$\varphi(z) = \int_a^b K(z \mid z_0)\, \psi(z_0)\, dz_0, \tag{8.1.19}$$

где ψ — искомая функция, а функция φ известна.

Уравнения Вольтерра. В уравнения Фредгольма (8.1.16), (8.1.17) и (8.1.19) входят определенные интегралы. Если сделать пределы этих интегралов переменными, то мы получим уравнения Вольтерра. Уравнению (8.1.16) соответствует *неоднородное уравнение Вольтерра второго рода*, имеющее вид

$$\psi(z) = \int_a^z K(z \mid z_0)\, \psi(z_0)\, dz_0 + \varphi(z). \tag{8.1.20}$$

В соответствующем однородном уравнении $\varphi = 0$. *Уравнение Вольтерра первого рода*, соответствующее уравнению (8.1.19), имеет вид

$$\varphi(z) = \int_a^z K(z \mid z_0)\, \psi(z_0)\, dz_0. \tag{8.1.21}$$

Уравнение Вольтерра можно, если угодно, рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, ядром которого служит

$$M(z \mid z_0) = \begin{cases} K(z \mid z_0), & z_0 < z, \\ 0, & z_0 > z. \end{cases} \tag{8.1.22}$$

Некоторые функции Грина, встретившиеся нам в предыдущей главе, обладали свойством (8.1.22). Стоит напомнить, что в задачах, в которых одним из параметров служило время, мы имели при $t < t_0$ равенство $G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = 0$; последнее является следствием принципа причинности, согласно которому никакое событие, происходящее в момент t_0, не может как бы то ни было влиять на события, происшедшие ранее t_0. Можно ожидать, что интегральное уравнение, для которого такая функция Грина G служит ядром, будет уравнением типа Вольтерра.

Чтобы показать, как появляется уравнение Вольтерра, рассмотрим движение простого гармонического осциллятора, описываемое уравнением

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + k^2\psi = 0.$$

Возьмем импульсную функцию $\delta(t - t_0)$ и зададим функцию Грина $G(t \mid t_0)$, положив $d^2G(t \mid t_0)/dt_0^2 = -\delta(t - t_0)$ при $t > t_0$ и $G(t \mid t_0) = 0$ при $t < t_0$. Умножая уравнение движения на G, а равенство $d^2G/dt_0^2 = -\delta(t - t_0)$ — на ψ, вычитая из первого получившегося равенства второе и интегрируя по t_0 от $t_0 = 0$ до $t_0 = t^+$ (обозначение t^+ указывает на то, что при интегрировании следует устремить t_0 к t с той стороны, где $t_0 > t$), получаем

$$\int_0^{t^+} \left(G(t \mid t_0) \frac{d^2\psi}{dt_0^2} - \frac{d^2G(t \mid t_0)}{dt_0^2}\, \psi \right) dt_0 + k^2 \int_0^{t^+} G(t \mid t_0)\, \psi(t_0)\, dt_0 = \psi(t),$$

или

$$\psi_0 \left[\frac{dG(t \mid t_0)}{dt_0} \right]_{t_0=0} - G(t \mid 0)\, v_0 + k^2 \int_0^{t^+} G(t \mid t_0)\, \psi(t_0)\, dt_0 = \psi(t), \tag{8.1.23}$$

где ψ_0 и v_0 — начальные значения смещения ψ и скорости $d\psi/dt$. Уравнение (8.1.23) представляет собой неоднородное уравнение Вольтерра второго рода. В нем учтены начальные условия, которым должна удовлетворять ψ.

Из этого примера видно, что уравнения Вольтерра должны появляться в тех задачах, в которых существует предпочтительное направление изменения независимого переменного; в только что рассмотренном примере это — направление возрастания времени. То же имеет место в явлениях переноса, когда рассматриваются соударения частиц с рассеивающими центрами, обладающими большой массой. При этом энергия рассеиваемых частиц не возрастает в результате столкновений. Следствием этого является известная деградация энергии, которая и определяет предпочтительное направление изменения энергетической переменной.

В качестве примера такого рода рассмотрим пучок рентгеновских лучей, проходящий через вещество в положительном направлении оси x. Будем считать, что пучок при рассеянии сохраняет это направление. Рассмотрим совокупность лучей с заданной длиной волны. Проходя через слой вещества толщины dx часть этих лучей поглощается, а часть изменяет длину волны из-за рассеяния. Одновременно эта совокупность обогащается за счет тех лучей, которые, обладая первоначально большей энергией (иначе говоря, имея меньшую длину волны λ, так как энергия обратно пропорциональна λ), теряют часть своей энергии из-за рассеяния. Итак, если $f(\lambda, x)\,d\lambda$ — доля лучей, длины волн которых заключены в промежутке от λ до $\lambda+d\lambda$, то

$$\frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial x} = -\mu f(\lambda, x) + \int_0^{\lambda} P(\lambda \mid \lambda_0) f(\lambda_0, x)\, d\lambda_0,$$

где μ — коэффициент поглощения, а $P(\lambda \mid \lambda_0)\,d\lambda$ — вероятность того, что луч с длиной волны λ_0, проходя слой единичной толщины, приобретает длину волны, заключенную между λ и $\lambda+d\lambda$. Мы получили интегро-дифференциальное уравнение. Его можно свести к интегральному уравнению, если положить

$$f(\lambda, x) = \int_0^{\infty} e^{-px} \psi(\lambda, p)\, dp;$$

при этом $\psi(\lambda, p)$ будет удовлетворять однородному уравнению Вольтерра второго рода

$$(\mu - p)\,\psi(\lambda, p) = \int_0^{\lambda} P(\lambda \mid \lambda_0)\, \psi(\lambda_0, p)\, d\lambda_0.$$

8.2. Общие свойства интегральных уравнений

При рассмотрении общих свойств интегральных уравнений полезно воспользоваться некоторыми результатами теории операторных уравнений в абстрактном векторном пространстве. Мы сейчас покажем, что ранее приведенное уравнение Фредгольма есть не что иное, как координатная запись операторного уравнения. Рассмотрим в векторном пространстве неоднородное уравнение

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e} + \mathbf{f}. \tag{8.2.1}$$

Так как функция Грина, постоянно фигурирующая в интегральных уравнениях, тесно связана с обратным оператором (см. стр. 816), то целесообразно записать (8.2.1) в виде

$$\mathbf{e} = \lambda \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{f}. \tag{8.2.2}$$