

Из этого примера видно, что уравнения Вольтерра должны появляться в тех задачах, в которых существует предпочтительное направление изменения независимого переменного; в только что рассмотренном примере это — направление возрастания времени. То же имеет место в явлениях переноса, когда рассматриваются соударения частиц с рассеивающими центрами, обладающими большой массой. При этом энергия рассеиваемых частиц не возрастает в результате столкновений. Следствием этого является известная деградация энергии, которая и определяет предпочтительное направление изменения энергетической переменной.

В качестве примера такого рода рассмотрим пучок рентгеновских лучей, проходящий через вещество в положительном направлении оси x . Будем считать, что пучок при рассеянии сохраняет это направление. Рассмотрим совокупность лучей с заданной длиной волны. Проходя через слой вещества толщины dx часть этих лучей поглощается, а часть изменяет длину волны из-за рассеяния. Одновременно эта совокупность обогащается за счет тех лучей, которые, обладая первоначально большей энергией (иначе говоря, имея меньшую длину волны λ , так как энергия обратно пропорциональна λ), теряют часть своей энергии из-за рассеяния. Итак, если $f(\lambda, x) d\lambda$ — доля лучей, длины волн которых заключены в промежутке от λ до $\lambda + d\lambda$, то

$$\frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial x} = -\mu f(\lambda, x) + \int_0^\lambda P(\lambda | \lambda_0) f(\lambda_0, x) d\lambda_0,$$

где μ — коэффициент поглощения, а $P(\lambda | \lambda_0) d\lambda$ — вероятность того, что луч с длиной волны λ_0 , проходя слой единичной толщины, приобретает длину волны, заключенную между λ и $\lambda + d\lambda$. Мы получили интегро-дифференциальное уравнение. Его можно свести к интегральному уравнению, если положить

$$f(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-px} \psi(\lambda, p) dp;$$

при этом $\psi(\lambda, p)$ будет удовлетворять однородному уравнению Вольтерра второго рода

$$(\mu - p) \psi(\lambda, p) = \int_0^\lambda P(\lambda | \lambda_0) \psi(\lambda_0, p) d\lambda_0.$$

8.2. Общие свойства интегральных уравнений

При рассмотрении общих свойств интегральных уравнений полезно воспользоваться некоторыми результатами теории операторных уравнений в абстрактном векторном пространстве. Мы сейчас покажем, что ранее приведенное уравнение Фредгольма есть не что иное, как координатная запись операторного уравнения. Рассмотрим в векторном пространстве неоднородное уравнение

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e} + \mathbf{f}. \quad (8.2.1)$$

Так как функция Грина, постоянно фигурирующая в интегральных уравнениях, тесно связана с обратным оператором (см. стр. 816), то целесообразно записать (8.2.1) в виде

$$\mathbf{e} = \lambda \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{f}. \quad (8.2.2)$$

Желая придать этому уравнению классическую форму, разложим все векторы по координатным ортам $e(z_0)$, соответствующим z_0 . Пусть

$$\begin{aligned} e &= \int e(z_0) \psi(z_0) dz_0, \\ g &= \int e(z_0) \varphi(z_0) dz_0, \\ \mathcal{U}^{-1} \cdot e(z_0) &= \int e(z_1) K(z_1 | z_0) dz_1, \\ \mathcal{U}^{-1} \cdot e &= \int e(z_0) dz_0 \int K(z_0 | z_1) \psi(z_1) dz_1. \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Вводя эти выражения в (8.2.2), мы получаем неоднородное уравнение Фредгольма второго рода

$$\psi(z_0) = \lambda \int K(z_0 | z_1) \psi(z_1) dz_1 + \varphi(z_0). \quad (8.2.4)$$

Пределы интегрирования включены в определение функции K .

Таким образом, интегральное уравнение часто эквивалентно «обращенному» дифференциальному уравнению. Вместо дифференциального оператора \mathcal{U} рассматривается интегральный оператор \mathcal{U}^{-1} . Уравнение Фредгольма первого рода

$$-\varphi(z_0) = \int K(z_0 | z_1) \psi(z_1) dz_1$$

соответствует операторному уравнению

$$-g = \mathcal{U}^{-1} \cdot e, \quad (8.2.5)$$

которое должно быть решено относительно e (или, в координатной трактовке, относительно ψ). Однородное уравнение Фредгольма второго рода

$$\psi(z_0) = \lambda \int K(z_0 | z_1) \psi(z_1) dz_1$$

соответствует уравнению

$$e = \lambda \mathcal{U}^{-1} \cdot e,$$

тогда как неоднородное уравнение (8.2.4) соответствует (8.2.2).

Ядро $K(x_0 | x_1)$, входящее в уравнение Фредгольма любого из трех видов, тесно связано с оператором \mathcal{U}^{-1} . Поэтому нам надлежит изучить свойства K и извлечь из них свойства оператора \mathcal{U}^{-1} . Однако не всякий оператор имеет обратный; если оператор \mathcal{U}^{-1} соответствует интегрированию с ядром K , то оператор \mathcal{U} , изображающий какую-то дифференциальную операцию, может и не существовать (например, когда $\mathcal{U}^{-1} \cdot f = 0$ при некотором $f \neq 0$, оператор \mathcal{U}^{-1} не может быть однозначно обращен). Полезно выяснить, какие типы ядер соответствуют операторам, имеющим обратные, является ли дифференциальный оператор \mathcal{U} самосопряженным и т. д.

Однородное уравнение Фредгольма второго рода (уравнение (8.2.4) при $\varphi = 0$) в том случае, когда для \mathcal{U}^{-1} существует обратный, эквивалентно уравнению $\mathcal{U}e = \lambda e$, определяющему собственные значения оператора \mathcal{U} , или дифференциальной форме этого уравнения; поэтому мы вправе ожидать, что существует последовательность допустимых значений $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ ($\lambda_n < \lambda_{n+1}$) параметра λ , которым соответствуют решения — собственные функции ψ_n . Что касается неоднородного уравнения, то естественно ожидать, что оно эквивалентно уравнению $\mathcal{U} \cdot e = \lambda e + f$, решения которого представимы с помощью функции Грина (см. гл. 7). Хотя мы и не собираемся, решая интегральные уравнения, предварительно обращать их в уравнения дифференциальные, тем не менее, изучая свойства ядер различных интегральных уравнений, следует помнить о связи между теми и другими, символически выражаемой записью \mathcal{U}^{-1} и \mathcal{U} .

Ядра интегральных уравнений. Возможность решить интегральное уравнение в значительной мере зависит от двух свойств его ядра: симметрии и свойства, состоящего в том, что существует оператор \mathfrak{A} , обратный по отношению к \mathfrak{A}^{-1} . Симметричное ядро соответствует самосопряженному оператору. Если \mathfrak{A} существует, то

$$\mathfrak{A} = \tilde{\mathfrak{A}}, \quad (8.2.6)$$

коль скоро $K(x_0 | x_1) = K(x_1 | x_0)$.

Ядро называется *определенным*, если интеграл

$$\int \bar{f}(x_0) dx_0 \int K(x_0 | x_1) f(x_1) dx_1$$

либо для всех функций f положителен, либо для всех f отрицателен (в том и в другом случае значение этого интеграла всегда действительно). Аналогичные операторные свойства соответственно для положительно определенного и отрицательно определенного операторов выражаются неравенствами

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{e}) &> 0, \\ (\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{e}) &< 0. \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

В обоих случаях существование оператора \mathfrak{A} , обратного по отношению к \mathfrak{A}^{-1} , обеспечено. (Заметим, что если \mathfrak{A}^{-1} — определенный оператор, то таков же и оператор \mathfrak{A} .) К сожалению не все ядра являются определенными; часто оказывается возможным найти функцию, соответствующую такому вектору e , для которого $(\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{e}) = 0$, а при этом оператор \mathfrak{A} оказывается не единственным. В некоторых случаях имеют место неравенства $(\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{e}) \geq 0$ или $(\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{e}) \leq 0$, причем нулевое значение достигается. Такие ядра и соответствующие операторы называются *полуопределенными* (это название может ввести в заблуждение, так как полуопределенное ядро немногим лучше любого другого неопределенного ядра).

Бывает, что интегральное уравнение первоначально задается в таком виде, что его ядро оказывается несимметричным и (или) неопределенным; поэтому полезно знать, можно ли преобразовать это уравнение так, чтобы новое уравнение имело симметричное определенное ядро.

Полярное ядро (см. 8.1.18) имеет вид

$$K(x | x_0) = r(x_0) G(x | x_0),$$

где G симметрично по x и x_0 . Такое ядро преобразуется в симметричное путем замены неизвестной функции $\psi(z) = \varphi(z)/\sqrt{r(z)}$. Например, подставляя $\psi = \varphi/\sqrt{r}$ в однородное уравнение второго рода

$$\psi(z) = \lambda \int G(z | z_0) r(z_0) \psi(z_0) dz_0,$$

приходим к уравнению

$$\varphi(z) = \lambda \int \sqrt{r(z)} G(z | z_0) \sqrt{r(z_0)} \varphi(z_0) dz_0,$$

в котором новое ядро $\sqrt{r(z)} G(z | z_0) \sqrt{r(z_0)}$ симметрично. Полезно указать операторный аналог уравнения с полярным ядром. Это — операторное уравнение

$$\mathfrak{A} \cdot e = \lambda \mathfrak{B} \cdot e, \quad (8.2.8)$$

в котором \mathfrak{A} — симметричный оператор. Проведем преобразование, аналогичное переходу от ψ к φ . Пусть

$$\mathbf{f} = \sqrt{\mathfrak{B}} \cdot e,$$

тогда

$$\mathbf{f} = \lambda (\sqrt{\mathfrak{B}} \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \sqrt{\mathfrak{B}}) \cdot \mathbf{f}. \quad (8.2.9)$$

В действительности полярное уравнение является весьма частным случаем уравнения (8.2.8). В самом деле, уравнению $\mathbf{e} = \lambda \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{B} \cdot \mathbf{e}$ соответствует интегральное уравнение

$$\psi(z) = \lambda \int M(z | z_0) \psi(z_0) dz_0,$$

где

$$M(z | z_0) = \int K(z | z_1) L(z_1 | z_0) dz_1$$

и

$$\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{e}(z) = \int K(z | z_0) \mathbf{e}(z_0) dz_0, \quad \mathfrak{B} \cdot \mathbf{e}(z) = \int L(z | z_0) \mathbf{e}(z_0) dz_0.$$

Полярное уравнение получается тогда, когда

$$L(z_1 | z_0) = \delta(z_1 - z_0) r(z_0),$$

где δ — функция Дирака. Вычисляя интеграл, выражающий M , получаем

$$M(z | z_0) = K(z | z_0) r(z_0).$$

Переход к определенным ядрам. Мы желаем, если это окажется возможным, преобразовать наше уравнение так, чтобы новое уравнение имело симметричное определенное ядро. Выбором знака ядра K можно добиться того, чтобы оно было положительно определенным. Считая K определенным ядром, мы неизбежно ограничиваем себя рассмотрением задач, в которых ядра действительны, а соответствующие операторы в абстрактном пространстве — эрмитовы. Кроме того, не должно существовать собственных векторов \mathbf{e} , для которых $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e} = 0$. Прежде всего полезно перечислить те операторы, которые тем или иным путем могут быть преобразованы в операторы указанного типа. Вообще говоря, преобразованные операторы будут лишь полуопределенными, так как если не исключено равенство $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e} = 0$ при некотором $\mathbf{e} \neq 0$, то этот вектор \mathbf{e} после действия преобразованного оператора даст также нуль.

Любой действительный эрмитов оператор превращается в определенный оператор посредством итерации. Пусть

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}.$$

Подействовав на это уравнение оператором \mathfrak{A} , т. е. итерируя, получаем

$$\mathfrak{A}^2 \cdot \mathbf{e} = \lambda^2 \mathbf{e}.$$

Оператор \mathfrak{A}^2 по меньшей мере полуопределенный, так как

$$\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{A}^2 \cdot \mathbf{e} = (\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e})^* \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}) \geq 0.$$

Оператору \mathfrak{A}^{-2} соответствует ядро

$$K_2(x | x_0) = \int K(x | x_1) K(x_1 | x_0) dx_1, \quad (8.2.10)$$

и, значит,

$$\psi(x) = \lambda^2 \int K_2(x | x_0) \psi(x_0) dx_0,$$

коль скоро

$$\psi(x) = \lambda \int K(x | x_0) \psi(x_0) dx_0.$$

В качестве первого следствия этой теоремы мы замечаем, что антиэрмитов оператор \mathfrak{A} , определяемый тем свойством, что $\mathfrak{A}^* = -\mathfrak{A}$, также может быть преобразован в определенный оператор. Антиэрмитов оператор соответствует антисимметричному ядру, для которого

$$K(x|x_0) = -K(x_0|x), \quad (8.2.11)$$

если K действительно (если же K — комплексное ядро, то при перестановке аргументов действительная часть K изменяет знак, а мнимая часть не изменяется). Для доказательства заметим, что антиэрмитов оператор \mathfrak{A} можно записать в виде

$$\mathfrak{A} = i\mathfrak{B},$$

где \mathfrak{B} — эрмитов оператор. Тогда из $\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e$ следует равенство

$$\mathfrak{B} \cdot e = -i\lambda e.$$

Подействовав на это уравнение оператором \mathfrak{B} , получаем

$$\mathfrak{B}^2 \cdot e = -\lambda^2 e, \quad (8.2.12)$$

так что \mathfrak{B}^2 — по крайней мере полуопределенный оператор.

Вторым следствием является то, что полярное интегральное уравнение может быть сведено к интегральному уравнению с действительным, симметричным и определенным ядром. Соответственно этому покажем, что если

$$\mathfrak{A} \cdot e = \lambda \mathfrak{B} \cdot e,$$

где \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — либо оба эрмитовы, либо оба антиэрмитовы и один из этих операторов определенный, то e удовлетворяет некоторому операторному уравнению, в которое входят только определенные операторы. Докажем это для того случая, когда \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — эрмитовы операторы, \mathfrak{B} — положительно определенный, \mathfrak{A} — неопределенный. Для положительно определенного оператора \mathfrak{B} существует обратный оператор \mathfrak{B}^{-1} . Поэтому

$$(\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}) \cdot e = \lambda e,$$

$$(\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}) \cdot e = \lambda^2 e,$$

то есть

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}) \cdot e = \lambda^2 \mathfrak{B} e.$$

Оператор $\mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}$ в левой части — по меньшей мере полуопределенный.

Для изложенных здесь преобразований характерно, что получающееся в результате ядро и соответствующий оператор не зависят от λ . Любой оператор может быть сведен к эрмитову, но этот последний в большинстве случаев будет зависеть от λ . Действительно, если

$$(\mathfrak{A} - \lambda) \cdot e = 0,$$

то, подействовав на обе части этого равенства оператором $\mathfrak{A}^* - \bar{\lambda}$, получаем

$$(\mathfrak{A}^* - \bar{\lambda})(\mathfrak{A} - \lambda) \cdot e = 0,$$

или

$$(\lambda \mathfrak{A}^* + \bar{\lambda} \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^* \mathfrak{A}) \cdot e = |\lambda|^2 e.$$

Ясно, что $\lambda \mathfrak{A}^* + \bar{\lambda} \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^* \mathfrak{A}$ — эрмитов и, по самому его построению, определенный оператор. Однако, по сравнению с более простым уравнением $\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e$, употребление последнего уравнения затруднительно, так как в нем сам оператор содержит λ и $\bar{\lambda}$. Поэтому в дальнейшем мы не будем пользоваться этим приемом. Ниже в этом параграфе будет изложен другой, практически более ценный метод.

Итак, если $\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e$, то в отдельных случаях для e можно построить аналогичное уравнение с оператором, по меньшей мере полуопределенным и не зависящим от собственного значения λ . Это возможно тогда, когда \mathfrak{A} — эрмитов или антиэрмитов оператор. Подобное же преобразование тогда применимо к уравнению вида $\mathfrak{A} \cdot e = \lambda \mathfrak{B} \cdot e$, когда операторы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — эрмитовы или антиэрмитовы и один из них определенный.

Свойства симметричного определенного ядра. Займемся изучением действительного положительно определенного симметричного ядра. Соответствующий оператор — эрмитов. Из § 6.3 мы можем извлечь следующие результаты. Однородное уравнение $\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e$ имеет ненулевые решения лишь при некоторых специальных значениях λ_m параметра λ , называемых *собственными значениями*. Соответствующие *собственные векторы* e_m образуют ортогональную систему векторов, быть может конечную, которую мы можем считать нормированной:

$$e_n^* \cdot e_m = \delta_{nm}. \quad (8.2.13)$$

Будем предполагать, что вырожденных собственных значений нет. Все собственные значения действительны и могут быть расположены в возрастающую последовательность. Среди них есть наименьшее собственное значение λ_0 (положительное, если \mathfrak{A} — положительно определенный оператор), следующее по величине λ_1 и т. д. Эти результаты могут быть обоснованы с помощью экстремального свойства собственных значений:

$$\lambda = \min \frac{e^* \cdot \mathfrak{A} \cdot e}{e^* \cdot e}. \quad (8.2.14)$$

Второе экстремальное свойство, если исходить из уравнения $e = \lambda \mathfrak{A}^{-1} \cdot e$, может быть сформулировано так:

$$\lambda = \min \frac{e^* \cdot e}{|e^* \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot e|}. \quad (8.2.15)$$

Неоднородная задача, соответствующая неоднородному уравнению Фредгольма второго рода, имеет решение при любом значении $\lambda \neq \lambda_m$. Решение может быть получено применением оператора, обратного по отношению к $\mathfrak{A} - \lambda$. Если

$$\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e + f,$$

то

$$e = (\mathfrak{A} - \lambda)^{-1} \cdot f = \mathfrak{G}_\lambda \cdot f, \quad (8.2.16)$$

где \mathfrak{G}_λ — эрмитов оператор, называемый оператором Грина [см.(7.5.35)].

Установим некоторые свойства оператора \mathfrak{G}_λ . Сначала выясним его связь с \mathfrak{A}^{-1} . Из (8.2.16) непосредственно следует, что

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{A}^{-1}$$

является оператором, соответствующим ядру K . Далее,

$$\mathfrak{G}_\lambda = (\mathfrak{A} - \lambda)^{-1} = \mathfrak{A}^{-1} (1 - \lambda \mathfrak{A}^{-1})^{-1},$$

или

$$\mathfrak{G}_\lambda = \sum_n \mathfrak{A}^{-(n+1)} \lambda^n \quad (8.2.17)$$

для тех λ , для которых этот ряд сходится. Из (8.2.17) вытекает следующая общая формула:

$$\left[\frac{1}{n!} \frac{\partial^n \mathfrak{G}_\lambda}{\partial \lambda^n} \right]_{\lambda=0} = \mathfrak{A}^{-(n+1)}$$

Оператор \mathfrak{G}_λ может быть также представлен с помощью собственных векторов оператора \mathfrak{A} :

$$\mathfrak{G}_\lambda = \sum_m \frac{\mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^*}{\lambda_m - \lambda}. \quad (8.2.18)$$

Отсюда при $\lambda = 0$ получаем разложение

$$\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{G}_0 = \sum_m \frac{\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_m^*}{\lambda_m}. \quad (8.2.19)$$

Для \mathfrak{A}^{-p} имеем

$$\mathfrak{A}^{-p} = \sum_m \frac{\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_m^*}{\lambda_m^p}. \quad (8.2.20)$$

Возвращаясь к формуле (8.2.18), видим, что собственные значения $\lambda = \lambda_m$ оператора \mathfrak{A} являются особыми точками \mathfrak{G} как функции от λ . Это — общее свойство, не зависящее от того, является ли \mathfrak{A} эрмитовым либо определенным или нет; в самом деле, если $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}_m = \lambda_m \mathbf{e}_m$, то

$$\mathfrak{G}_\lambda \cdot \mathbf{e}_m = (\mathfrak{A} - \lambda)^{-1} \cdot \mathbf{e}_m = (\lambda_m - \lambda)^{-1} \mathbf{e}_m,$$

и мы видим, что $\mathfrak{G}_\lambda \cdot \mathbf{e}_m \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \lambda_m$.

Характер соответствующих особенностей проще всего выяснить с помощью следа $|\mathfrak{G}_\lambda|$ (Spur) оператора \mathfrak{G}_λ (в главах 1 и 3 это выражение называлось также коэффициентом расширения; см. (6.1.3)). Согласно разложению (8.2.18),

$$|\mathfrak{G}_\lambda| = \sum_m \frac{1}{\lambda_m - \lambda}. \quad (8.2.21)$$

Мы видим, что $|\mathfrak{G}_\lambda|$ представляет собой мероморфную функцию переменного λ , имеющую простые полюсы в точках $\lambda = \lambda_m$, причем соответствующие вычеты равны -1 . Скалярная функция $|\mathfrak{G}_\lambda|$, согласно (8.2.17), выражается через $|\mathfrak{A}^{-p}|$ по формуле

$$|\mathfrak{G}_\lambda| = \sum_n \lambda^n |\mathfrak{A}^{-(n+1)}|, \quad (8.2.21')$$

где в силу (8.2.20)

$$|\mathfrak{A}^{-p}| = \sum_m \frac{1}{\lambda_m^p}. \quad (8.2.22)$$

Перефразируем теперь эти результаты применительно к теории интегральных уравнений. Однородное уравнение второго рода

$$\psi(z) = \lambda \int K(z | z_0) \psi(z_0) dz_0$$

с действительным, симметричным, положительно определенным ядром K имеет решения лишь при некоторых специальных значениях λ_m параметра λ . Этим λ_m соответствуют решения — собственные функции ψ_m . Последние образуют ортонормированную систему функций, быть может конечную, т. е.

$$\int \bar{\psi}_n(z) \psi_m(z) dz = \delta_{nm}. \quad (8.2.23)$$

Числа λ_m образуют возрастающую последовательность; наименьшее из них λ_0 положительно, если K — положительно определенное ядро. Экстремальное свойство чисел λ_m в соответствии с (8.2.15) записывается так:

$$\lambda = \min \left\{ \frac{\int \bar{\psi}(z) \psi(z) dz}{\int \bar{\psi}(z) K(z | z_0) \psi(z_0) dz dz_0} \right\}. \quad (8.2.24)$$

Ядра и функции Грина для неоднородных уравнений. Обратимся теперь к неоднородному уравнению

$$\phi(z) = \lambda \int K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0 + \chi(z), \quad (8.2.25)$$

которое мы собираемся решать с помощью функции Грина. Последнюю мы выбираем так, чтобы она соответствовала оператору \mathfrak{G}_λ из (8.2.16). В абстрактном векторном пространстве аналогом (8.2.25) служит уравнение

$$\mathbf{e} = \lambda \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{q}.$$

Решение для \mathbf{e} может быть получено следующим образом:

$$(1 - \lambda \mathfrak{A}^{-1}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{q},$$

или

$$(\mathfrak{A} - \lambda) \cdot \mathbf{e} = \mathfrak{A} \cdot \mathbf{q}.$$

Отсюда

$$\mathbf{e} = (\mathfrak{G}_\lambda \mathfrak{A}) \cdot \mathbf{q},$$

где

$$\mathfrak{G}_\lambda = (\mathfrak{A} - \lambda)^{-1}.$$

Неудобство этого решения состоит в том, что оно выражается через произведение двух операторов. Это неудобство легко обойти, записав

$$\mathbf{e} = [\mathfrak{G}_\lambda (\mathfrak{A} - \lambda)] \cdot \mathbf{q} + \lambda \mathfrak{G}_\lambda \cdot \mathbf{q};$$

тогда

$$\mathbf{e} = \mathbf{q} + \lambda \mathfrak{G}_\lambda \cdot \mathbf{q}. \quad (8.2.26)$$

Тем самым решение уравнения (8.2.25) выражено через \mathfrak{G}_λ ; в координатной записи имеем

$$\phi(z) = \chi(z) + \lambda \int G_\lambda(z|z_0) \chi(z_0) dz_0. \quad (8.2.27)$$

Входящую сюда функцию Грина в теории интегральных уравнений принято называть *резольвентой*.

Для того чтобы формулу (8.2.27) получить прямо, не обращаясь к операторным уравнениям, нужно получить интегральное уравнение для \mathfrak{G}_λ . Из уравнения (8.2.16), определяющего \mathfrak{G}_λ , следует, что

$$(\mathfrak{A} - \lambda) \mathfrak{G}_\lambda = \mathfrak{J},$$

а отсюда

$$\mathfrak{A}^{-1} (\mathfrak{A} - \lambda) \mathfrak{G}_\lambda = \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{G}_\lambda - \lambda \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{G}_\lambda$$

и

$$\mathfrak{G}_\lambda = \mathfrak{A}^{-1} + \lambda \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{G}_\lambda. \quad (8.2.28)$$

Уравнению (8.2.28) соответствует интегральное уравнение для G_λ

$$G_\lambda(z|z_0) = K(z|z_0) + \lambda \int K(z|z_1) G_\lambda(z_1|z_0) dz_1. \quad (8.2.29)$$

Из этого интегрального уравнения следует, что

$$G_0(z|z_0) = K(z|z_0).$$

Комбинируя уравнения (8.2.25) и (8.2.29), можно, воспользовавшись симметрией G_λ и K , получить выражение ϕ в виде (8.2.27). Следует подчеркнуть, что именно эти свойства симметрии позволяют изменять порядок интегрирования.

Для дальнейшего нам полезно получить содержащее G_λ интегральное уравнение, которому должно удовлетворять ядро K . Снова прибегая к операторам в векторном пространстве, замечаем, что

$$(\mathfrak{A} - \lambda) \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{J} - \mathfrak{A}^{-1}\lambda,$$

откуда

$$\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{G}_\lambda - \lambda \mathfrak{G}_\lambda \mathfrak{A}^{-1}.$$

Соответствующее уравнение имеет вид

$$K(z|z_0) = G_\lambda(z|z_0) - \lambda \int G_\lambda(z|z_1) K(z_1|z_0) dz_1. \quad (8.2.30)$$

Отличие этого уравнения от (8.2.29) только кажущееся. Поменяем местами z и z_0 в уравнении (8.2.30); при этом

$$K(z_0|z) = G_\lambda(z_0|z) - \lambda \int G_\lambda(z_0|z_1) K(z_1|z) dz_1.$$

Теперь, пользуясь свойствами симметрии K и G_λ , мы можем от (8.2.30) перейти к (8.2.29). Эти соотношения между K и G_λ дали основание Вольтерра назвать K и $-G_\lambda$ *взаимными функциями*.

Формулы разложения (8.2.18) и (8.2.19) для \mathfrak{G}_λ и \mathfrak{A}^{-1} могут быть перенесены на G_λ и K в такой форме (см. сказанное на стр. 839):

$$G_\lambda(z|z_0) = \sum_m \frac{\psi_m(z)\bar{\psi}_m(z_0)}{\lambda_m - \lambda}, \quad (8.2.31)$$

$$K(z|z_0) = \sum_m \frac{\psi_m(z)\psi_m(z_0)}{\lambda_m}. \quad (8.2.32)$$

Для того чтобы вывести формулы, аналогичные формулам (8.2.17), (8.2.20) и (8.2.22), нужно выяснить, что соответствует операторам \mathfrak{A}^{-p} . Выражению $\mathfrak{A}^{-p} \cdot e$ соответствует

$$\int K_p(z|z_0) \psi(z_0) dz_0,$$

где функция $K_p(z|z_0)$ подлежит определению. Будем исходить из выражения $\mathfrak{A}^{-1} \cdot e$, которому соответствует интеграл

$$\int K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0.$$

Заметив, что результат воздействия \mathfrak{A}^{-2} на e есть $\mathfrak{A}^{-1} \cdot (\mathfrak{A}^{-1} \cdot e)$ и, следовательно,

$$\int K_2(z|z_0) \psi(z_0) dz_0 = \int \int K(z|z_1) K(z_1|z_0) \psi(z_0) dz_0 dz_1,$$

получаем, что

$$K_2(z|z_0) = \int K(z|z_1) K(z_1|z_0) dz_1.$$

Далее, так как $\mathfrak{A}^{-3} \cdot e = \mathfrak{A}^{-1} \cdot (\mathfrak{A}^{-2} \cdot e)$, то подобным же образом получаем

$$K_3(z|z_0) = \int K(z|z_1) K_2(z_1|z_0) dz_1.$$

Ясно, что из общего соотношения $\mathfrak{A}^{-(p+q)} = \mathfrak{A}^{-p} \mathfrak{A}^{-q}$ вытекают равенства

$$K_{p+q}(z|z_0) = \int K_p(z|z_1) K_q(z_1|z_0) dz_1 = \int K_q(z|z_1) K_p(z_1|z_0) dz_1. \quad (8.2.33)$$

Теперь мы можем написать формулы, аналогичные (8.2.17), (8.2.20), (8.2.21) и (8.2.22). Аналогом первой будет служить разложение

$$G_\lambda(z|z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(z|z_0) \lambda^n, \quad (8.2.34)$$

аналогом второй —

$$K_p(z|z_0) = \sum_m \frac{\psi_m(z) \bar{\psi}_m(z_0)}{\lambda_m^p}. \quad (8.2.35)$$

Утверждения, относящиеся к \mathfrak{G}_λ и \mathfrak{A}^{-p} , в которых говорится о следах операторов, можно будет перенести на G_λ и K_p , если определить скаляр, соответствующий $|\mathfrak{G}_\lambda|$. Для этого положим $z = z_0$ в ядре, что соответствует взятию диагонального элемента матрицы, изображающей \mathfrak{G}_λ , и, вместо того чтобы суммировать диагональные элементы, возьмем интеграл по z . Следующие формулы будут тогда соответствовать (8.2.21) и (8.2.22):

$$\int G_\lambda(z|z) dz = \sum_m \frac{1}{\lambda_m - \lambda}, \quad (8.2.36)$$

$$\int K_p(z|z) dz = \sum_m \frac{1}{\lambda_m^p} = C_p, \quad (8.2.37)$$

а отсюда получаем

$$\int G_\lambda(z|z) dz = \sum_n C_{n+1} \lambda^n. \quad (8.2.38)$$

Полуопределенные и неопределенные ядра. Во многих случаях ядра являются неопределенными и соответствующие операторы — неэрмитовыми, а поэтому предыдущие рассуждения к ним не применимы. Иногда даже в результате итерации получается не определенный, а лишь полуопределенный оператор, так что и в этих случаях приведенные выше теоремы неприменимы.

Что можно сказать о неопределенных ядрах? Прежде всего, их собственные значения не обязательно действительны. В некоторых случаях может быть лишь конечное число собственных значений. Например, в случае уравнения Вольтерра собственных значений нет вовсе, так что однородное уравнение не имеет решений (см. стр. 851). В качестве примера рассмотрим следующее уравнение Фредгольма с весьма простым ядром:

$$\phi(z) = \lambda \int_0^1 (z - 2z_0) \psi(z_0) dz_0.$$

Ясно, что $\phi(z)$ должна быть линейной функцией

$$\phi(z) = \alpha z + \beta.$$

Постоянные α и β можно найти, подставив $\alpha z + \beta$ в интегральное уравнение:

$$\alpha z + \beta = \lambda \int_0^1 (z - 2z_0)(\alpha z_0 + \beta) dz_0,$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z . Мы получаем

$$\alpha = \lambda \left(\frac{1}{2} \alpha + \beta \right), \quad \beta = 2\lambda \left(-\frac{1}{3} \alpha - \frac{1}{2} \beta \right)$$

— систему однородных линейных уравнений относительно α и β . Ненулевое решение можно получить только при равном нулю определителе системы, т. е. когда

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda & -\lambda \\ \frac{2}{3}\lambda & 1 + \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Двум корням последнего уравнения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{15}), \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -\frac{1}{2}(3 + i\sqrt{15})$$

соответствуют решения

$$\phi_1 = z - \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda_1}, \quad \phi_2 = z - \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda_2}.$$

Итак, в этом примере имеется всего два комплексно сопряженных собственных значения и столько же решений заданного уравнения.

Число собственных значений и собственных функций может быть конечно, и в этом случае нельзя разложить произвольную функцию в ряд по собственным функциям; свойство полноты может быть сохранено лишь по отношению к какому-то специальному классу функций. Так, в только что рассмотренном примере по собственным функциям может быть разложена любая линейная функция от z . Важнее, однако, то, что собственных функций оказывается достаточно много для того, чтобы по ним можно было разложить ядро $K(z|z_0)$ и функцию Грина $G_\lambda(z|z_0)$. Таким образом сохраняется возможность решить методом собственных функций соответствующее неоднородное уравнение.

Необходимый для подобных случаев аппарат был рассмотрен в гл. 7. Задача о собственных значениях в абстрактном векторном пространстве ставится в форме уравнения

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}. \quad (8.2.39)$$

Поставим теперь эрмитовски сопряженную задачу о собственных значениях [см. (7.5.40)]:

$$\mathfrak{A}^* \cdot \mathbf{f} = \bar{\lambda} \mathbf{f}. \quad (8.2.40)$$

Решения уравнения (8.2.39) и решения уравнения (8.2.40) взаимно ортогональны, и поэтому мы можем положить, что

$$\mathbf{f}_m^* \cdot \mathbf{e}_n = \delta_{nm}. \quad (8.2.41)$$

С помощью этих соотношений можно вычислить коэффициенты разложения по \mathbf{e}_n тех векторов, которые допускают такое разложение [см. (7.5.43)]:

$$\mathbf{g} = \sum_n g_n \mathbf{e}_n, \quad g_n = (\mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{g}). \quad (8.2.42)$$

Справедливо следующее разложение оператора Грина $\mathfrak{G}_\lambda = (\mathfrak{A} - \lambda)^{-1}$:

$$\mathfrak{G}_\lambda = \sum_m \frac{\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{f}_m^*}{\lambda_m - \lambda}. \quad (8.2.43)$$

След оператора \mathfrak{A} выражается через e_m и f_m^* следующим образом:

$$|\mathfrak{A}| = \sum_m f_m^* \cdot \mathfrak{A} \cdot e_m. \quad (8.2.44)$$

Следы $|\mathfrak{A}^{-1}|$, $|\mathfrak{A}^{-p}|$, $|\mathfrak{G}_\lambda|$ и разложение $|\mathfrak{G}_\lambda|$ по следам $|\mathfrak{A}^{-p}|$ выражаются формулами (8.2.22), (8.2.21) и (8.2.21'). Если существует лишь конечное число собственных значений, то следы различных степеней оператора \mathfrak{A}^{-1} связаны некоторыми соотношениями. Если, скажем, имеется ровно q различных собственных значений, то эти последние выражаются через следы первых q степеней оператора \mathfrak{A}^{-1} . Отсюда следует, что след $|\mathfrak{A}^{-(q+1)}|$ может быть выражен через $|\mathfrak{A}^{-1}|$, $|\mathfrak{A}^{-2}|$, ..., $|\mathfrak{A}^{-q}|$.

Экстремальное свойство решений уравнений (8.2.39) и (8.2.40) состоит в том, что

$$\lambda = \text{экстремальное значение } \frac{\mathbf{f}^* \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}}{\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{e}}. \quad (8.2.45)$$

Варьируя \mathbf{f}^* в этом уравнении, мы находим [см. (6.3.74)], что условие $\delta\lambda = 0$ приводит к уравнению (8.2.39), а варьируя \mathbf{e} находим, что условие $\delta\lambda = 0$ приводит к (8.2.40). Равенство (8.2.45) аналогично (8.2.14). Аналогом (8.2.15) является равенство

$$\lambda = \text{экстремальное значение } \frac{\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{e}}{\mathbf{f}^* \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{e}}. \quad (8.2.46)$$

Особого внимания заслуживает случай антиэрмитова оператора (соответствующего антисимметричному действительному ядру), когда $\mathfrak{A}^* = -\mathfrak{A}$. В этом случае из уравнения

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}$$

следует, что

$$(\mathfrak{A}^* \mathfrak{A}) \cdot \mathbf{e} = -\lambda^2 \mathbf{e}.$$

$\mathfrak{A}^* \mathfrak{A}$ – определенный оператор, т. е. $(\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{A}^* \mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}) \geq 0$, а поэтому $-\lambda^2 \geq 0$, т. е. значения λ чисто мнимые. Далее, интересно отметить одну особенность сопряженной задачи о собственных значениях: в случае антиэрмитова оператора $\mathbf{e}_n = \mathbf{f}_n$. В самом деле, если

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n,$$

то

$$\mathfrak{A}^* \cdot \mathbf{e}_n = -\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}_n = -\lambda_n \mathbf{e}_n.$$

Обращаясь к соотношению ортогональности (8.2.41), мы видим, что векторы \mathbf{e}_n для антиэрмитова оператора ортогональны, так же как собственные векторы эрмитова оператора. Таким образом, при этом сохраняется формула разложения оператора Грина и, следовательно, остаются в силе формулы, выведенные для случая положительно определенного оператора.

Ядра, отличные от действительных определенных. Теперь посмотрим, как применяются формулы (8.2.39) – (8.2.46) к интегральным уравнениям. Ввиду большой сложности уравнений рассматриваемого типа некоторые выводы будут лишь продемонстрированы на примере интегрального уравнения с уже упоминавшимся ядром $z - 2z_0$.

Уравнение

$$\psi(z) = \lambda \int K(z | z_0) \psi(z_0) dz_0 \quad (8.2.47)$$

с действительным ядром $K(z|z_0)$, не являющимся положительно определенным, имеет ненулевые решения лишь при некоторых специальных значениях λ , которые мы обозначим λ_m . Этим λ_m соответствуют собственные функции ψ_m — решения уравнения (8.2.47). Числа λ_m не обязательно образуют бесконечную последовательность, и они не обязательно действительны. Система собственных функций может быть не полной, эти функции могут быть даже не ортогональны. Поэтому мы рассмотрим эрмитовски сопряженное уравнение [соответствующее уравнению (8.2.40)]

$$\varphi(z) = \bar{\lambda} \int K^*(z|z_0) \varphi(z_0) dz_0. \quad (8.2.48)$$

Как уже отмечалось выше, собственные значения сопряженной задачи комплексно сопряжены с собственными значениями задачи (8.2.47). Далее,

$$\int \bar{\varphi}_p \psi_q dz = \delta_{pq}, \quad (8.2.49)$$

где φ_p и ψ_q — собственные функции.

Собственные значения и собственные функции для ядра $z - 2z_0$ были указаны выше. Сопряженное уравнение имеет вид

$$\varphi(z) = \mu \int_0^1 (z_0 - 2z) \varphi(z_0) dz_0.$$

(Ядро K^* этого уравнения комплексно сопряжено ядру K , в котором переставлены z и z_0 .)

И здесь мы видим, что φ зависит от z линейно, т. е. $\varphi = az + b$. Отсюда получаем уравнения

$$-(a+2b)\mu = a, \quad \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{12}b \right)\mu = b,$$

и уравнение

$$\begin{vmatrix} \mu + 1 & 2\mu \\ \frac{1}{3}\mu & \frac{1}{12}\mu - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

определенное μ . Последнее совпадает с уравнением, служившим для нахождения λ . Положим

$$\mu_1 = \bar{\lambda}_1, \quad \mu_2 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_1;$$

тогда

$$\varphi_1 = z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\bar{\lambda}_1}, \quad \varphi_2 = z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\bar{\lambda}_2}.$$

Сопоставляя φ_1 и φ_2 с ψ_1 и ψ_2 , найденными выше, мы замечаем, что φ_1 и ψ_1 не являются комплексно сопряженными. Очень легко показать, что в согласии с (8.2.49)

$$\int_0^1 \bar{\varphi}_1 \psi_2 dz = 0.$$

Функции φ_i и ψ_i еще не нормированы так, как это предписывают соотношения (8.2.49). Для нормировки нужно вычислить интеграл

$$\int_0^1 \bar{\varphi}_1 \psi_1 dz = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\lambda_1^2}$$

и аналогичный интеграл для пары функций φ_2, ψ_2 .

Возвратимся к общим соображениям, касающимся функции Грина и однородного уравнения Фредгольма второго рода. И теперь решение неоднородного уравнения может быть получено с помощью функции Грина. Подобно (8.2.27),

$$\psi(z) = \chi(z) + \lambda \int G_\lambda(z|z_0) \chi(z_0) dz_0.$$

Снова функция Грина G_λ удовлетворяет интегральным уравнениям (8.2.28) и (8.2.30). Из (8.2.43) можно получить разложение $G_\lambda(z|z_0)$:

$$G_\lambda(z|z_0) = \sum_m \frac{\psi_m(z) \bar{\varphi}_m(z_0)}{\lambda_m - \lambda}, \quad (8.2.50)$$

где ψ_m и φ_m нормированы, разумеется, согласно (8.2.49). В рассмотренном нами примере

$$G_\lambda(z|z_0) = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\lambda_1^2} \right)^{-1} \frac{\psi_1(z) \bar{\varphi}_1(z_0)}{\lambda_1 - \lambda} + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\lambda_2^2} \right)^{-1} \frac{\psi_2(z) \bar{\varphi}_2(z_0)}{\lambda_2 - \lambda},$$

где нормирующие множители выписаны явно. Так как $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$ и $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, то G_λ при действительном λ принимает действительные значения. Однако мы замечаем, что $G_\lambda(z|z_0) \neq G_\lambda(z_0|z)$, т. е. нарушен принцип взаимности. Читатель без труда докажет, подставив в (8.2.27) ядро $z - 2z_0$ и найденную выше функцию Грина, что при любом выборе функции χ получается решение соответствующего неоднородного уравнения.

Интегральное уравнение Вольтерра. Интегральное уравнение Вольтерра [см. формулу (8.1.21) и следующие] представляет собой пример уравнения, ядро которого не имеет собственных значений. Это верно для любого уравнения Вольтерра с ограниченным ядром. Представим уравнение Вольтерра в виде уравнения Фредгольма

$$\psi(z) = \lambda \int_0^l M(z|z_0) \psi(z_0) dz_0$$

с ядром [см. (8.1.22)]

$$M(z|z_0) = \begin{cases} K(z|z_0), & z_0 < z, \\ 0, & z_0 > z. \end{cases}$$

Предположим, что ядро K ограничено. Отсутствие собственных значений будет доказано, если мы установим, что ряд

$$G_\lambda(z|z_0) = \sum_n M_{n+1}(z|z_0) \lambda^n,$$

где M_n есть n -я итерация M , сходится при всех значениях λ . Действительно, если бы существовало хоть одно собственное значение, то соответствующая конечная точка плоскости λ была бы особой для $G_\lambda(z|z_0)$ [см.

формулы (8.2.34) и (8.2.31)]. Необходимо оценить итерированные ядра. Сначала рассмотрим

$$M_2(z|z_0) = \int_0^l M(z|z_1) M(z_1|z_0) dz_1.$$

При $z > z_0$ разобьем промежуток интегрирования на отрезки от 0 до z_0 , от z_0 до z и от z до l . Интеграл вдоль первого отрезка обращается в нуль, потому что здесь $z_1 < z_0$ и, следовательно, $M(z_1|z_0) = 0$. Интеграл от z до l также равен нулю, так как при $z_1 > z$ обращается в нуль $M(z|z_1)$. Итак,

$$M_2(z|z_0) = \int_{z_0}^z K(z|z_1) K(z_1|z_0) dz_1, \quad z > z_0.$$

Рассуждая аналогично, убеждаемся в том, что $M_2(z|z_0) = 0$ при $z < z_0$ и, далее,

$$M_3(z|z_0) = \int_0^l M_2(z|z_1) M(z_1|z_0) dz_1,$$

$$M_3(z|z_0) = \begin{cases} \int_{z_0}^z M_2(z|z_1) K(z_1|z_0) dz_1, & z > z_0, \\ 0, & z < z_0. \end{cases}$$

Воспользуемся теперь тем, что M ограничено. Пусть $|K| \leq m$; тогда

$$\begin{aligned} |M| &\leq m, \\ |M_2| &\leq m^2 |z - z_0|, \\ |M_3| &\leq \frac{1}{2!} m^3 |z - z_0|^2, \\ &\dots \dots \dots \\ |M_n| &\leq \frac{1}{(n-1)!} m^n |z - z_0|^{n-1}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$G_\lambda(z|z_0) = \sum_{n=0} \lambda^n M_{n+1}(z|z_0) \leq m \sum_n \frac{\lambda^n m^n |z - z_0|^n}{n!} = m e^{\lambda z} |z - z_0|$$

и мы видим, что $G_\lambda(z|z_0)$ как функция переменного λ не имеет особенностей в конечных точках; тем самым доказано, что уравнение Вольтерра с ограниченным ядром не имеет собственных значений.

Сингулярные ядра. Характер особенностей ядра оказывает сильнейшее влияние на распределение собственных значений уравнения Фредгольма второго рода. Ядро называется *сингулярным*, если оно или (1) имеет разрывы, или (2) имеет особые точки внутри области интегрирования, или (3) область интегрирования не ограничена. Случай (3) сводится к случаю (1) посредством замены переменного. Например, если интегрировать нужно от нуля до бесконечности, то подстановка $\zeta = 1/(1+z)$ приводит к интегралу в конечных пределах, но ценой появления полоса в конечной точке плоскости ζ .

Интегральные уравнения, содержащие функцию Грина уравнения Гельмгольца или Лапласа, часто оказываются сингулярными, причем встреча-

ются особенности всех трех типов. Например, интегральное уравнение (8.1.9), к которому была сведена задача дифракции на полуплоскости, имеет ядро $H_0^{(\alpha)}(k|x-x_0|)$ с логарифмической особенностью при $x=x_0$. Кроме того, бесконечен один из пределов интегрирования. Ядра, перечисленные после уравнения (8.1.15), имеют разрывные производные.

Ядра с интегрируемым квадратом приводятся к ограниченным ядрам с помощью итерации. Так, если ядро $K(z|z_0)$ имеет конечное число разрывов, то уже $K_2(z|z_0)$ непрерывно. Проиллюстрируем это, положив

$$K(z|z_0) = \begin{cases} k(z|z_0) & \text{при } z < z_0, \\ h(z|z_0) & \text{при } z > z_0, \end{cases}$$

где функции $k(z|z_0)$ и $h(z|z_0)$ непрерывны, но могут иметь различные значения при $z=z_0$. Итерированное ядро задается формулой

$$K_2(z|z_0) = \int_a^b K(z|z_1) K(z_1|z_0) dz_1.$$

Для того чтобы вычислить K_2 , подставим в этот интеграл выражение K . При $z \geq z_0$

$$\begin{aligned} K_2(z|z_0) = \int_a^{z_0} h(z|z_1) k(z_1|z_0) dz_1 + \int_{z_0}^z h(z|z_1) h(z_1|z_0) dz_1 + \\ + \int_z^b k(z|z_1) h(z_1|z_0) dz_1, \end{aligned}$$

а при $z \leq z_0$

$$\begin{aligned} K_2(z|z_0) = \int_a^z h(z|z_1) k(z_1|z_0) dz_1 + \int_z^{z_0} k(z|z_1) k(z_1|z_0) dz_1 + \\ + \int_{z_0}^b k(z|z_1) h(z_1|z_0) dz_1. \end{aligned}$$

Функция $K_2(z|z_0)$ непрерывна, так как при $z=z_0$ приведенные выражения совпадают.

Сингулярное ядро вида¹⁾

$$K(z|z_0) = H(z|z_0)/|z-z_0|^\alpha, \quad |H(z|z_0)| \leq M, \quad (8.2.51)$$

может быть сведено к несингулярному посредством нескольких итераций, если $\alpha < 1$. Оценим итерированные ядра. Так как

$$K_2(z|z_0) = \int_a^b \frac{H(z|z_1) H(z_1|z_0)}{|z-z_1|^\alpha |z_1-z_0|^\alpha} dz_1,$$

то, очевидно, уже K_2 при $\alpha < 1/2$ ограничено; если $\alpha = 1/2$, то K_2 растет как $\ln(1/|z-z_0|)$ при $z \rightarrow z_0$, а потому следующая итерация K_3 будет ограничена; если, наконец, $1/2 < \alpha < 1$, то

$$\begin{aligned} |K_2(z|z_0)| &\leq M^2 \int_a^b \frac{dz_1}{|z-z_1|^\alpha |z_1-z_0|^\alpha} \leq \\ &\leq \frac{M^2}{|z-z_0|^{2\alpha-1}} \int_\gamma^b \frac{d\zeta}{|1-\zeta|^\alpha |\zeta|^\alpha} \leq \frac{M^2}{|z-z_0|^{2\alpha-1}} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\zeta}{|1-\zeta|^\alpha |\zeta|^\alpha}, \end{aligned}$$

¹⁾ В нижеследующем рассуждении в переводе исправлены неточности оригинала.—Прим. ред.

где $\beta = (b - z_0)/(z - z_0)$, $\gamma = (a - z_0)/(z - z_0)$. Последний интеграл легко выразить через бета-функцию, и мы получаем

$$|K_2(z|z_0)| \leq \frac{C_0 M^2}{|z - z_0|^{2\alpha - 1}},$$

где C_0 — значение интеграла, выписанного выше.

Как мы видели, K_2 ограничено при $2\alpha - 1 < 0$, т. е. при $\alpha < 1/2$. Если это неравенство не выполняется, то следует продолжить процесс итерации. Покажем, что при $\alpha < 1$ мы рано или поздно добьемся до ограниченного итерированного ядра. Доказательство основывается на неравенстве

$$|K_p(z|z_0)| \leq \int_a^b |K(z|z_1)| |K_{p-1}(z_1|z_0)| dz_1.$$

Отсюда получаем, что K_3 при $\alpha < 2/3$ ограничено, при $\alpha = 2/3$ имеет логарифмическую особенность, а при $2/3 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} |K_3(z|z_0)| &\leq \int_a^b |K(z|z_1)| |K_2(z_1|z_0)| dz_1 \leq C_0 M^3 \int_a^b \frac{dz_1}{|z - z_1|^\alpha |z_1 - z_0|^{2\alpha - 1}} \leq \\ &\leq \frac{C_0 M^3}{|z - z_0|^{3\alpha - 2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{|1 - \zeta|^\alpha |\zeta|^{2\alpha - 1}}, \end{aligned}$$

так что

$$|K_3(z|z_0)| \leq C_1 M^3 / |z - z_0|^{3\alpha - 2},$$

где C_1 — некоторая другая постоянная. Вообще при $(n-1)/n < \alpha < 1$

$$|K_n(z|z_0)| \leq C M^n / |z - z_0|^{n\alpha - (n-1)}, \quad (8.2.52)$$

а при $n\alpha - (n-1) < 0$, т. е. при

$$\alpha < (n-1)/n, \quad (8.2.53)$$

n -е итерированное ядро оказывается ограниченным. Значит, для заданного $\alpha < 1$ существует такой номер n , что ядро K_n ограничено.

Особенности, весьма близкие к только что рассмотренным, встречаются у ядер, связанных с функцией Грина уравнения Лапласа. Трехмерная функция Грина пропорциональна

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad (8.2.54)$$

двумерная — пропорциональна логарифму соответствующего расстояния на плоскости. Во втором случае мы только усилим особенность, если возьмем ядро

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Этот прием позволяет нам трактовать трех- и двумерный случаи аналогично.

Остановимся на случае трех измерений. Пусть

$$|K(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)| \leq M / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

Тогда

$$|K_2(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)| \leq M^2 \int \frac{dx_1 dy_1 dz_1}{V [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2][(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2]}.$$

Пользуясь неравенством

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \geq 3 [(x - x_1)^2 (y - y_1)^2 (z - z_1)^2]^{\frac{1}{3}},$$

получаем оценку, подобную найденной ранее,

$$\begin{aligned} |K_2(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)| &\leq \\ &\leq \frac{M^2}{3} \left[\int \frac{dx_1}{(x-x_1)^{1/3}(x_1-x_0)^{1/3}} \right] \left[\int \frac{dy_1}{(y-y_1)^{1/3}(y_1-y_0)^{1/3}} \right] \left[\int \frac{dz_1}{(z-z_1)^{1/3}(z_1-z_0)^{1/3}} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, K_2 ограничено. В двумерном случае, рассуждая аналогично, находим, что ограничено ядро K_3 .

Функция Грина уравнения Гельмгольца имеет в отличие от (8.2.54) существенную особенность при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \rightarrow \infty$ [см. интегральное уравнение (8.1.9)]. Такие ядра называются *существенно сингулярными*. Для них процесс итерации не приводит к ограниченным ядрам.

Основное различие, важное для нас, между существенно сингулярными и ограниченными ядрами проявляется в строении спектра собственных значений соответствующего однородного уравнения Фредгольма второго рода. Можно показать, что в случае ограниченного ядра множество собственных значений конечно или счетно. Существенно сингулярное ядро может иметь непрерывный спектр собственных значений, т. е. при любом λ из некоторого промежутка может существовать иенулевое решение ψ_λ .

Это различие можно истолковать следующим образом. Если некоторое ядро K_n интегрируемо в квадрате, то оно может быть разложено в ряд по собственным функциям, образующим счетную ортогональную систему, и такой ряд будет сходиться в среднем (см. стр. 687). Такое ядро, в частности, может быть представлено двойным рядом Фурье. Иначе обстоит дело в случае ядра с неинтегрируемым квадратом. Для представления функции с неинтегрируемым квадратом, вообще говоря, требуется интеграл Фурье со специальным контуром интегрирования (который должен обходить особые точки). Мы уже видели при рассмотрении функций Грина, что в разложениях функций Грина (уравнений Лапласа и Гельмгольца) по собственным функциям в неограниченной области фигурируют интегралы типа интеграла Фурье; это согласуется с тем, что такие функции Грина не интегрируемы в квадрате.

В заключение этого параграфа приведем пример интегрального уравнения с существенно сингулярным ядром, имеющим непрерывный спектр собственных значений:

$$\psi(z) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z-z_0|} \psi(z_0) dz_0. \quad (8.2.55)$$

Ядро имеет особую точку в бесконечности. Это уравнение сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + (2\lambda - 1)\psi = 0,$$

откуда следует, что

$$\psi_\lambda = A e^{\sqrt{1-2\lambda}z} + B e^{-\sqrt{1-2\lambda}z}.$$

Однако интеграл в (8.2.55)) существует только при $\operatorname{Re}[\sqrt{1-2\lambda}] < 1$. Все λ , удовлетворяющие этому ограничению, являются собственными значениями (8.2.55), а соответствующие ψ_λ — собственными функциями. Мы имеем непрерывный спектр собственных значений. Такого же типа случай (б) в примерах, следующих за уравнением (8.1.15).