8. 3. Решение уравнений Фредгольма первого рода

Мы ограничимся изучением только тех случаев, когда может быть получено точное решение. Приближенные методы будут рассмотрены в гл. 9. Следует подчеркнуть, что приближенные методы решения физических проблем наиболее удобно основывать на интегральных уравнениях. И так как мы не в состоянии точно решить подавляющее большинство интегральных уравнений, то приближенным методам будет отведено особое место и они будут подробно изложены в гл. 9.

Общий метод, который будет здесь изложен, аналогичен методам решения дифференциальных уравнений, изученным в гл. 5. Главное в этом методе — разложение искомой функции по полной системе функций. Это разложение имеет вид суммы или интеграла по этой системе с неизвестными коэффициентами. Подставляя это разложение в дифференциальное уравнение, получаем соотношения между искомыми коэффициентами. Иными словами, *дифференциальное уравнение оказывается преобразованным* в уравнение или систему уравнений, определяющее коэффициенты. Полное семейство функций, если это возможно, выбирается так, чтобы эти новые уравнения легко решались. Например, если разложением является степенной ряд $\psi = \sum a_n z^{n+s}$, то преобразованное уравнение оказывается разностным уравнением относительно коэффициентов a_n. Для некоторых, изученных в гл. 5 типов, это разностное уравнение содержит только два различных значения n и легко решается.

Решения уравнений Фредгольма в форме рядов. Мы применим теперь этот метод к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода, для которых он особенно хорошо приспособлен. Это интегральное уравнение [см. (8.1.19)] имеет вид

$$\varphi(z) = \int_a^b K(z \mid z_0)\, \psi(z_0)\, dz_0. \tag{8.3.1}$$

В соответствии со сказанным положим

$$\psi(z) = \sum_n a_n g_n(z)\, w(z), \tag{8.3.2}$$

где функции g_n образуют полную систему на интервале (a, b); $w(z)$ является весовой функцией, которую можно выбрать близкой к $\psi(z)$ и тем самым улучшить сходимость ряда (8.3.2). Тогда

$$\varphi(z) = \sum_n a_n \int_a^b K(z \mid z_0)\, g_n(z_0)\, w(z_0)\, dz_0 = \sum_n a_n h_n(z), \tag{8.3.3}$$

$$h_n(z) = \int_a^b K(z \mid z_0)\, g_n(z_0)\, w(z_0)\, dz_0,$$

где функции h_n известны.

Таким образом, решение интегрального уравнения сводится к нахождению коэффициентов a_n по известным φ и h_n. Это особенно просто делается в двух случаях. Если функции h_n пропорциональны степеням z, то (8.3.3) оказывается степенным рядом, так что неизвестные коэффициенты можно получить путем сравнения этого ряда с разложением φ по степеням z. Во втором случае, если функции h_n образуют ортогональное семейство:

$$\int_a^b \overline{h}_n(z)\, h_m(z)\, \rho(z)\, dz = N_n \delta_{nm},$$

то коэффициенты a_n можно определить при помощи квадратур

$$a_n = \frac{1}{N_n} \int_a^b \bar{h}_n(z)\, \varphi(z)\, \rho(z)\, dz.$$

Как мы увидим ниже, существует важный класс уравнений, для которого осуществляется один из этих двух специальных случаев. К сожалению, чаще функции h_n не являются ни степенями z, ни элементами ортогональной системы, и в этом случае необходимо преобразовать разложение φ по функциям полной системы в ряд по h_n. Точнее, пусть φ разложена в ряд по функциям χ_q, образующим полную систему

$$\varphi = \sum_q f_q \chi_q(z). \tag{8.3.4}$$

Тогда возникает необходимость выразить функции χ_q при помощи функций h_n:

$$\chi_q = \sum_n \alpha_{qn} h_n. \tag{8.3.5}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (8.3.4), получаем

$$\varphi = \sum_{q,n} f_q \alpha_{qn} h_n = \sum_n \left(\sum_q f_q \alpha_{qn}\right) h_n.$$

Сравнивая с (8.3.3), имеем

$$a_n = \sum_q f_q \alpha_{qn}. \tag{8.3.6}$$

Таким образом, для решения данного интегрального уравнения достаточно найти коэффициенты α_{qn} из системы (8.3.5).

Определение коэффициентов. Мы изучим три метода определения коэффициентов. Первый из них предполагает, что χ_q образуют произвольное множество функций, не связанных каким-либо частным способом с функциями h_n. Во втором методе функции χ_q строятся из h_n при помощи процесса ортогонализации, т. е. находятся линейные комбинации из функций h_n, образующие полное семейство и попарно ортогональные. Наконец, функция φ может быть непосредственно разложена в ряд по χ_q, коэффициенты которого вычисляются при помощи квадратур.

В первом методе мы разлагаем функцию h_n из уравнения (8.3.5) в ряд по функциям χ_q:

$$h_n = \sum_p h_{np} \chi_p.$$

Уравнение (8.3.5) при этом дает

$$\chi_q = \sum_{n,p} \alpha_{qn} h_{np} \chi_p,$$

а следовательно,

$$\sum_n \alpha_{qn} h_{np} = \delta_{qp}. \tag{8.3.7}$$

Теперь система уравнений (8.3.7) должна быть решена относительно α_{qn}.

Обозначим через H определитель, составленный из элементов h_{np}:

$$H=\begin{vmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & \cdots \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & \cdots \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}. \tag{8.3.8}$$

Пусть M_{np} — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу h_{np}. Так как

$$\sum_n M_{nq}h_{np}=H\delta_{qp},$$

то

$$\alpha_{qn}=\frac{M_{nq}}{H}. \tag{8.3.9}$$

Из полученного результата явствует, что этот метод может быть эффективным только в том случае, если каждая функция h_n является комбинацией, составленной из небольшого числа функций χ_p, так как тогда нетрудно вычислить определитель H и его миноры.

Ортогонализация. Процесс Шмидта упоминался в таблице, помещенной в конце гл. 6. Теперь мы его изучим подробнее. Ставится следующая задача. Дано полное семейство неортогональных функций h_n; построить новое семейство функций χ_q, являющихся линейными комбинациями h_n и образующих полное ортогональное семейство. Процесс Шмидта состоит в последовательном построении функций χ_q. В качестве функции χ_0 берется h_0. Функция χ_1 представляет собой линейную комбинацию h_0 и h_1, подобранную так, чтобы она была ортогональна χ_0; функция χ_2 представляет собой линейную комбинацию h_0, h_1, h_2, ортогональную χ_1 и χ_0.

Можно выписать рекуррентное соотношение, выражающее χ_q через h_q и χ_p, $p<q$. Из способа построения видно, что h_q должна быть линейной комбинацией функций χ_p при $p\leqslant q$. Используя условие ортогональности

$$\int_a^b \bar{\chi}_p\chi_q\rho\,dz=\delta_{pq}N_q, \quad N_q=\int_a^b |\chi_p|^2\rho\,dz,$$

получаем функцию h_q в виде суммы

$$h_q=\sum_{p=0}^{q}\frac{\int_a^b \bar{\chi}_p h_q\rho\,dz}{N_p}\chi_p,$$

где ρ — весовая функция. Разрешая относительно χ_q, находим

$$\chi_q=\frac{N_q}{\int_a^b \bar{\chi}_q h_q\rho\,dz}\left\{h_q-\sum_{p=0}^{q-1}\frac{\int_a^b \bar{\chi}_p h_q\rho\,dz}{N_p}\chi_p\right\}.$$

Теперь мы можем так нормировать функции χ_q, чтобы было

$$N_q=\int_a^b \bar{\chi}_q h_q\rho\,dz. \tag{8.3.10}$$

Тогда выражение для χ_q приводится к виду

$$\chi_q = h_q - \sum_{p=0}^{q-1} \frac{\int_a^b \bar{\chi}_p h_q \rho\, dz}{N_p} \chi_p, \tag{8.3.11}$$

и

$$N_q = \int_a^b |h_q|^2 \rho\, dz - \sum_{p=0}^{q-1} \frac{\left|\int_a^b \bar{\chi}_p h_q \rho\, dz\right|^2}{N_p}. \tag{8.3.12}$$

Более подробно:

$$\chi_0 = h_0, \quad N_0 = \int_a^b |h_0|^2 \rho\, dx,$$

$$\chi_1 = h_1 - \left(\int_a^b \bar{\chi}_0 h_1 \rho\, dz/N_0\right)\chi_0,$$

$$\chi_2 = h_2 - \left(\int_a^b \bar{\chi}_1 h_2 \rho\, dz/N_1\right)\chi_1 - \left(\int_a^b \bar{\chi}_0 h_2 \rho\, dz/N_0\right)\chi_0 \quad \text{и т. д.}$$

$$N_1 = \int_a^b |h_1|^2 \rho\, dz - \frac{\left|\int_a^b \bar{\chi}_0 h_1 \rho\, dz\right|^2}{N_0},$$

$$N_2 = \int_a^b |h_2|^2 \rho\, dz - \frac{\left|\int_a^b \bar{\chi}_1 h_2 \rho\, dz\right|^2}{N_1} - \frac{\left|\int_a^b \bar{\chi}_0 h_2 \rho\, dz\right|^2}{N_0} \quad \text{и т. д.}$$

В качестве примера произведем ортогонализацию семейства степеней z^n на промежутке $(-1, 1)$, $\rho = 1$. Этот процесс должен привести к полиномам Лежандра. Мы покажем, что это действительно так, вычислив функции χ_1 и χ_2, которые должны быть пропорциональны соответственно z и $3z^2 - 1$. Интегралы, входящие в выражение для χ_1, имеют значения

$$N_0 = 2, \quad \int_a^b \bar{\chi}_0 h_1 \rho\, dz = \int_{-1}^{1} z\, dz = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\chi_1 = z, \quad N_1 = \frac{2}{3}.$$

Интегралы, необходимые для определения χ_2, имеют значения

$$\int_a \bar{\chi}_1 h_2 \rho\, dz = \int_{-1}^{1} z^3\, dz = 0, \quad \int_a^b \bar{\chi}_0 h_2 \rho\, dz = \int_{-1}^{1} z^2\, dz = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\chi_2 = z^2 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = z^2 - \frac{1}{3},$$

а это выражение действительно пропорционально P_2. Нормирующий интеграл равен

$$N_2 = \frac{2}{5} - \frac{\frac{4}{9}}{2} = \frac{8}{45}.$$

Продолжая этот процесс, получаем другие полиномы Лежандра и их нормирующие интегралы. В таблице, помещенной в конце гл. 6, приведены другие ортогональные полиномы, получающиеся при использовании других промежутков интегрирования и других весовых функций. Например, полиномы Эрмита соответствуют промежутку интегрирования $(-\infty, \infty)$ и весовой функции e^{-z^2}, в то время как полиномы Лагерра L_n^a соответствуют промежутку интегрирования $(0, \infty)$ и весу $x^a e^{-x}$.

Однако коэффициенты α_{qn} уравнения (8.3.5) не получаются непосредственно из процесса Шмидта и потому мы в нашем рассмотрении не можем ограничиться этим процессом. Теперь мы должны получить явные выражения для α_{qn}. Из формулы (8.3.5) и из процесса получения функций χ имеем

$$\chi_q = \sum_{n=0}^{q} \alpha_{qn} h_n.$$

Так как функции χ ортогональны, то

$$\int_a^b \bar{\chi}_p \chi_q \rho \, dz = 0, \text{ если } p \neq q.$$

Условия ортогональности будут выполнены для всех p и q при $p < q$, если потребовать, чтобы

$$\int_a^b \bar{h}_p \chi_q \rho \, dz = 0, \quad p < q. \tag{8.3.13}$$

Теперь можно использовать условие (8.3.13) для определения α_{qn}, так как после подстановки выражения для χ_q в (8.3.13) получаем

$$\sum_{n=0}^{q} \alpha_{qn} d_{np} = 0, \quad p < q,$$

где

$$d_{np} = \int_a^b h_n \bar{h}_p \rho \, dz.$$

При $p = q$ эта сумма обращается в N_q. Коэффициенты α_{qn} можно выразить при помощи миноров элементов d_{np} в определителе, составленном из этих элементов.

Рассмотрим определители D_q:

$$\begin{aligned} D_0 &= d_{00}, \\ D_1 &= \begin{vmatrix} d_{00} & d_{01} \\ d_{10} & d_{11} \end{vmatrix}, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} \\ d_{20} & d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{8.3.14}$$

Коэффициент α_{qn} пропорционален алгебраическому дополнению M_{nq} элемента d_{nq} в D_q. Это следует из условия, которому удовлетворяют M_{nq}:

$$\sum_{n=0}^{q} M_{nq} d_{np} = \delta_{pq} D_q, \quad p \leqslant q.$$

Поскольку мы хотим, чтобы коэффициент при h_q в выражении для χ_q равнялся единице, следует положить $\alpha_{qn} = M_{nq}/M_{qq}$ и теперь разложение χ_q

запишется так:

$$\chi_q = \sum_{n=0}^{q} h_n \frac{M_{nq}}{M_{qq}}. \tag{8.3.15}$$

Этот ряд как раз и является другим представлением формулы Шмидта (8.3.11) и притом таким, которое дает явное выражение коэффициентов в разложении χ_q.

В качестве примера рассмотрим снова полиномы Лежандра, т. е. положим $\chi_q = P_q$, $h_n = z^n$, $\rho = 1$, а в качестве промежутка интегрирования возьмем $(-1, 1)$. Для определения P_2 нам необходимо рассмотреть определитель

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix}.$$

Теперь из (8.3.15) следует, что

$$P_2 \sim \frac{M_{02}}{M_{22}} + z\frac{M_{12}}{M_{22}} + z^2 = -\frac{1}{3} + z^2,$$

а это выражение действительно пропорционально P_2.

Нормирующие интегралы также можно выразить при помощи определителей D_q. Интеграл

$$N_q = \int_a^b \bar{\chi}_q \chi_q \rho\, dz = \sum_{n=0}^{q} \frac{M_{nq}}{M_{qq}} \int_a^b \bar{h}_n \chi_q \rho\, dz$$

в силу уравнения (8.3.13) оказывается равным

$$N_q = \int_a^b \bar{h}_q \chi_q \rho\, dz = \frac{1}{M_{qq}} \sum_{p=0}^{q} M_{pq} \int_a^b \bar{h}_q h_p \rho\, dz,$$

то есть

$$N_q = \frac{1}{M_{qq}} \sum_{p=0}^{q} M_{pq} d_{pq}.$$

Эта последняя сумма в точности равна значению определителя D_q, в то время как M_{qq} равняется D_{q-1}. Следовательно,

$$N_q = D_q / D_{q-1}. \tag{8.3.16}$$

В примере, разобранном выше,

$$D_2 = \frac{32}{135}, \quad D_1 = \frac{4}{3}, \quad N_2 = \frac{8}{45}.$$

Биортогональные ряды. Вернемся к нашей исходной формуле (8.3.3), где функция φ разложена в ряд по известным, но не ортогональным функциям h_n:

$$\varphi(z) = \sum a_n h_n(z).$$

Коэффициенты a_n могут быть вычислены, если найдено семейство функций w_n, удовлетворяющих условиям

$$\int w_n(z)\, h_m(z)\, dz = N_n \delta_{nm}. \tag{8.3.17}$$

Тогда a_n определяются при помощи квадратур

$$a_n = \frac{1}{N_n} \int w_n \varphi(z)\, dz. \tag{8.3.18}$$

В этой формуле мы не уточняем пределов интегрирования или, в более общем случае, пути интегрирования в плоскости комплексного переменного z. Необходимо только, чтобы область, в которой интегралы (8.3.18) имеют смысл, включала область определения интегрального уравнения.

Непосредственные попытки прямого определения функций $w_n(z)$ обычно не бывают удачными. Вместо этого мы рассмотрим метод, применение которого целесообразно тогда, когда разложения последовательных h_n начинаются со все более высоких степеней z (как, например, для функций Бесселя):

$$h_n(z) = \sum_{p=n}^{\infty} A_{pn} z^p, \quad A_{nn} = 1. \tag{8.3.19}$$

Коэффициент A_{nn} всегда можно положить равным единице, хотя исторически так делали не всегда. Следовательно, функция h_n регулярна в начале координат. Теперь мы покажем, что в этом случае функции w_n получаются из разложения

$$\frac{1}{t-z} = \sum_n w_n(t)\, h_n(z). \tag{8.3.20}$$

Для доказательства вычислим интеграл

$$\oint \frac{h_q(t)}{t-z}\, dt = \sum_n \left[\oint w_n(t)\, h_q(t)\, dt \right] h_n(z),$$

взятый по некоторому замкнутому контуру, охватывающему точку z и начало координат и лежащему в области аналитичности $h_n(z)$. Тогда, согласно интегральной формуле Коши, левая часть этого уравнения в точности равна $2\pi i h_q(z)$. Сравнивая с правой частью, убеждаемся, что равенство возможно только в том случае, когда

$$\oint w_n(t)\, h_q(t)\, dt = 2\pi i \delta_{nq} \tag{8.3.21}$$

Соотношение (8.3.21) не зависит от предположения о поведении h_n, выраженного равенством (8.3.19); оно является общим и применимо всегда, когда h_n аналитична в области, ограниченной контуром интегрирования. Это требование является ограничением только в том случае, когда h_n имеет существенную особенность в точке z. В таких случаях разложение φ в ряд по h_n должно исследоваться особо тщательно.

Определение функций w_n зависит от возможности осуществления разложения (8.3.20). Однако в том случае, когда выполняются условия (8.3.19), для определения w_n можно дать общий алгорифм. Возьмем q-ю производную по z от (8.3.20), а затем положим $z = 0$. Получим

$$\frac{q!}{t^{q+1}} = \sum_n w_n(t) \left\{ \frac{d^q}{dz^q} [h_n(z)] \right\}_{z=0}.$$

Используя условия (8.3.19), находим, что

$$\left\{ \frac{d^q}{dz^q} [h_n(z)] \right\}_{z=0} = \begin{cases} q!\, A_{qn}, & q \geqslant n, \\ 0 & q < n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{t^{q+1}} = \sum_{n=0}^{q} w_n(t) A_{qn}. \tag{8.3.22}$$

Эти равенства образуют систему рекуррентных соотношений, последовательно разрешая которые, получим функции $w_n(t)$. Это особенно удобно сделать, переписав уравнение (8.3.22) в следующем виде:

$$w_q = \frac{1}{t^{q+1}} - \sum_{n=0}^{q-1} w_n(t) A_{qn}.$$

Прежде всего положим $q=0$. Тогда

$$w_0(t) = 1/t.$$

Пусть $q=1$. Тогда

$$w_1(t) = \frac{1}{t^2} - A_{10} w_0 = \frac{1}{t^2} - \frac{A_{10}}{t}.$$

Ниже приведены первые четыре функции w_n, полученные таким способом:

$$\begin{aligned} &w_0 = \frac{1}{t}, \quad w_1 = \frac{1}{t^2} - \frac{A_{10}}{t}, \\ &w_2 = \frac{1}{t^3} - \frac{A_{21}}{t^2} + \frac{A_{21}A_{10} - A_{20}}{t}, \\ &w_3 = \frac{1}{t^4} - \frac{A_{32}}{t^3} + \frac{A_{32}A_{21} - A_{31}}{t^2} + \frac{-A_{30} + A_{31}A_{10} + A_{32}A_{20} - A_{32}A_{21}A_{10}}{t}. \end{aligned} \tag{8.3.23}$$

Отсюда можно вывести общую формулу.

Ясно, что функции w_n являются полиномами относительно $1/t$, и наибольшая степень $1/t$, фигурирующая в w_n, равна $n+1$.

Вернемся теперь к исходному вопросу о получении разложения произвольной функции φ в ряд по h_n. Теперь этот вопрос сводится к вычислению интеграла (8.3.18). Контур интегрирования выбран так, что он охватывает начало координат. Если мы запишем

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_{np}}{t^{p+1}}, \tag{8.3.24}$$

то равенство (8.3.18) преобразуется к виду

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint w_n(z) \varphi(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=0}^{n} b_{np} \oint \frac{\varphi(z)}{z^{p+1}}\, dz.$$

Из интегральной формулы Коши вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi(z)}{z^{p+1}}\, dz = \frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!},$$

где $\varphi^{(p)}(0)$ — значение p-й производной от φ по ее аргументу в начале координат. Следовательно,

$$a_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_{np}}{p!} \varphi^{(p)}(0). \tag{8.3.25}$$

Это и есть выражение, определяющее a_n. Ясно, что в случае, когда h_n удовлетворяют условию (8.3.19) (ряды начинаются с n-й степени z), вычисление a_n можно довести до конца, ни разу не прибегнув к бесконечным

процессам. Однако, если условие (8.3.19) не выполнено, процесс разыскания функций $w_n(t)$ уже не будет столь простым. В этом случае более эффективным оказывается метод ортогонализации, описанный выше. Фактически здесь можно провести некоторую аналогию с процессом Шмидта.

Мы закончим это рассмотрение примером. Предположим, что h_n являются функциями Бесселя $J_n(z)$. Тогда искомыми будут коэффициенты ряда

$$\varphi(z) = \sum a_n J_n(z).$$

Ряды такого типа называются *рядами Неймана*. Соответствующие биортогональные функции называются *полиномами Неймана* $O_n(t)$. Соотношения между J_n и O_n имеют вид

$$\frac{1}{t-z} = \sum_n \varepsilon_n O_n(t) J_n(z), \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \neq 0. \end{cases}$$

Функции O_n не совпадают в точности с функциями w_n, так как первый член в разложении J_n равен $z^n/2^n n!$, а не z^n и разложение (8.3.20) не содержит ε_n. Однако это различие не принципиальное, а касается, скорее, деталей. Уравнения (8.3.22) можно легко решить и в том случае, когда $A_{qq} \neq 1$. Полиномы Неймана определяются соотношениями

$$\varepsilon_n O_n(t) = \frac{2^n n!}{t^{n+1}} \left\{ 1 + \frac{t^2}{2(2n-2)} + \frac{t^4}{2\cdot 4\cdot(2n-2)(2n-4)} + \dots \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n/2} \left[\frac{n(n-m-1)!}{m!\,(t/2)^{n-2m+1}} \right], \quad n \neq 0. \tag{8.3.26}$$

Первые несколько полиномов таковы:

$$\begin{aligned} &O_0(t) = \frac{1}{t}, \quad O_1(t) = \frac{1}{t^2}, \quad O_2(t) = \frac{1}{t} + \frac{4}{t^3}, \\ &O_3(t) = \frac{3}{t^2} + \frac{24}{t^4}, \quad O_4(t) = \frac{1}{t} + \frac{16}{t^3} + \frac{192}{t^5}, \\ &O_5(t) = \frac{5}{t^2} + \frac{120}{t^4} + \frac{1920}{t^6}. \end{aligned} \tag{8.3.27}$$

Коэффициенты a_n могут быть определены согласно формуле (8.3.25):

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{s=0,1}{}' \frac{2^s n}{n+s} \binom{(n+s)/2}{s} \varphi^{(s)}(0), \quad && n \neq 0, \\ a_0 &= \varphi(0), && n = 0. \end{aligned} \tag{8.3.28}$$

Штрих над знаком суммирования означает здесь, что следует брать сумму только по четным или только по нечетным s, если n соответственно четное или нечетное; $\binom{a}{s}$ — биномиальные коэффициенты.

Интегральные уравнения первого рода и производящие функции. Теперь мы на нескольких примерах проиллюстрируем развитую выше общую теорию. Рассмотрим прежде всего случай $h_n = z^n$; это имеет место тогда, когда ядро интегрального уравнения служит одновременно производящей функцией для семейства ортогональных полиномов.

Согласно сказанному на стр. 729, производящую функцию для полиномов Эрмита $H_n(z_0)$ можно записать в виде

$$e^{-(z-z_0)^2} = \sum_n \frac{e^{-z_0^2} H_n(z_0)\, z^n}{n!}.$$

Это разложение можно применить для решения интегрального уравнения

$$\varphi(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-z_0)^2}\psi(z_0)\,dz_0. \tag{8.3.29}$$

Проблема такого типа может возникнуть в задачах о распространении тепла, когда искомым является первоначальное распределение источников, порождающее некоторое заданное распределение температуры. Положим в равенстве (8.3.29)

$$\psi(z_0)=\sum a_n H_n(z_0).$$

Используя разложение ядра и нормировку функций Эрмита (см. стр. 730)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 e^{-z^2}\,dz=2^n n!\sqrt{\pi},$$

сводим уравнение (8.3.29) к виду

$$\varphi(z)=\sqrt{\pi}\sum_n a_n 2^n z^n.$$

Следовательно,

$$a_n=\frac{\varphi^{(n)}(0)}{2^n n!\sqrt{\pi}},\ \text{где}\ \varphi^{(n)}(0)=\left[\frac{d^n\varphi}{dz^n}\right]_{z=0},$$

и решение ψ имеет вид

$$\psi(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_n \frac{\varphi^{(n)}(0)}{2^n n!}H_n(z). \tag{8.3.30}$$

Если решено некоторое интегральное уравнение первого рода с заданным ядром, то можно найти другие примеры разрешимых уравнений, применяя операторы по z, скажем, к обеим частям уравнения (8.3.29); (8.3.30) остается при этом решением. Ясно, что в рассматриваемом примере можно получить при помощи дифференцирования производящей функции новые ядра, разложимые в ряды по функциям Эрмита и в степенные ряды. Используя соотношения

$$H_n(z)=(-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2},$$

мы получаем

$$e^{-(z-z_0)^2}H_p(z-z_0)=(-1)^p\sum_{s=0}^{\infty}\frac{e^{-z_0^2}H_{p+s}(z_0)}{s!}z^s.$$

Следовательно, уравнение

$$\varphi(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-z_0)^2}H_p(z-z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0 \tag{8.3.31}$$

имеет решение

$$\psi(z)=\sum_{q=0}^{p-1}\alpha_q H_q(z)+\frac{(-1)^p}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(s)}(0)}{2^s s!}H_{p+s}(z). \tag{8.3.32}$$

Здесь коэффициенты α_q при $q\leqslant p-1$ произвольны, так как их нельзя определить из интегрального уравнения (8.3.31), поскольку H_q ортогонально ядру $e^{-(z-z_0)^2}H_p(z-z_0)$.

Наконец, можно взять линейную комбинацию нескольких ядер такого вида и получить новое ядро

$$K(z \mid z_0) = e^{-(z-z_0)^2} \sum_p a_p H_p(z - z_0). \tag{8.3.33}$$

Ясно, что каждое ядро, являющееся функцией от $(z - z_0)$, можно разложить в такой ряд. Значит, имея решения соответствующих интегральных уравнений первого рода, можно найти решение интегрального уравнения, ядром которого является произвольная функция от $(z - z_0)$. Дальше, в этой же главе, мы увидим, что к таким ядрам можно также применить метод, использующий интегралы Фурье.

Теперь мы перепишем (8.3.33) в виде ряда по степеням z:

$$e^{-(z-z_0)^2} \sum_{p=0}^{\infty} a_p H_p(z - z_0) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s!} \left[\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p e^{-z_0^2} H_{p+s}(z_0) \right].$$

Подставляя это разложение в интегральное уравнение, получаем

$$\varphi^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_0^2} H_{p+s}(z_0)\, \psi(z_0)\, dz_0.$$

Пусть

$$\psi(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{C_q H_q(z)}{2^q \sqrt{\pi}\, q!},$$

тогда

$$\varphi^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p C_{p+s} \tag{8.3.34}$$

для любого s. Уравнения (8.3.34) образуют систему, определяющую коэффициенты C_p. Выпишем несколько таких уравнений:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= C_0 - a_1 C_1 + a_2 C_2 - a_3 C_3 + a_4 C_4 - \ldots, \\
\varphi^{(1)}(0) &= C_1 - a_1 C_2 + a_2 C_3 - a_3 C_4 + \ldots, \\
\varphi^{(2)}(0) &= C_2 - a_1 C_3 + a_2 C_4 - \ldots,
\end{aligned}$$

где a_0 считаем равным единице.

Решение этой системы можно получить методом итераций. Здесь мы приведем только результаты. Решение является линейной комбинацией $\varphi^{(s)}(0)$:

$$C_p = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(p+s)}(0)\, T_s, \tag{8.3.35}$$

причем коэффициенты T_s имеют вид

$$T_s = \sum (-1)^{r_2 + r_4 + \ldots} \frac{(r_1 + r_2 + r_3 + \ldots)!}{(r_1)!\,(r_2)!\,(r_3)! \ldots} (a_1)^{r_1} (a_2)^{r_2} (a_3)^{r_3} \ldots,$$

где при суммировании должны быть учтены все такие комбинации r_i, что

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + \ldots = s. \tag{8.3.36}$$

Выпишем несколько первых T_s:

$$\begin{aligned}
&T_0 = 1, \quad T_1 = a_1, \quad T_2 = a_1^2 - a_2, \quad T_3 = a_1^3 - 2a_1 a_2 + a_3, \\
&T_4 = a_1^4 - 3a_1^2 a_2 + a_2^2 + 2a_3 a_1 - a_4, \\
&T_5 = a_1^5 - 4a_1^3 a_2 + 3a_1^2 a_3 + 3a_2^2 a_1 - 2a_3 a_2 - 2a_4 a_1 + a_5.
\end{aligned} \tag{8.3.37}$$

Аналогичным образом можно решать интегральные уравнения, ядрами которых служат производящие функции других ортогональных полиномов. Подробное решение мы приведем для полиномов Лагерра. Производящая функция имеет вид

$$\frac{J_a(2\sqrt{zz_0})}{(zz_0)^{a/2}} = e^{-z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{(a)}(z_0)}{[\Gamma(n+1+a)]^2}z^n,$$

причем нормировка такова:

$$\int_0^{\infty} e^{-z_0}z_0^a[L_n^{(a)}(z_0)]^2\,dz_0 = \frac{[\Gamma(n+a+1)]^3}{n!}.$$

Тогда решение уравнения

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty}\frac{J_a(2(\sqrt{zz_0})}{(zz_0)^{a/2}}\psi(z_0)\,dz_0, \quad 0\leqslant z\leqslant\infty, \tag{8.3.38}$$

имеет вид

$$\psi(z) = e^{-z}z^a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi^{(n)}(0)\,L_n^{(a)}(z)}{\Gamma(n+a+1)}, \quad \chi(z) = e^z\varphi(z). \tag{8.3.39}$$

Упомянем также о другом разложении, из которого можно получить разрешимое интегральное уравнение. Это разложение основано на более общей производящей функции для $L_n^{(a)}$ (см. стр. 728):

$$\left(\frac{z_0}{z}\right)^{a+1}e^{-z_0/z} = e^{-z_0}z_0^{a+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{(a)}(z_0)}{\Gamma(n+a+1)}(1-z)^n.$$

Если эта функция используется в качестве ядра, то решение соответствующего интегрального уравнения первого рода имеет вид

$$\psi = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[\Gamma(n+a+1)]^2}\varphi^{(n)}(1)\,L_n^{(a)}(z). \tag{8.3.40}$$

Применение полиномов Гегенбауера. Производящая функция для полиномов Лежандра или, в более общем случае, для полиномов Гегенбауера также порождает интегральные уравнения первого рода, которые можно решить. Рассмотрим, например, следующее ядро:

$$K(z\,|\,z_0) = \frac{1}{\sqrt{1-2zz_0+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}z^nP_n(z_0).$$

Тогда интегральное уравнение записывается так:

$$\varphi(z) = \int_{-1}^{1}\frac{\psi(z_0)}{\sqrt{1-2zz_0+z^2}}\,dz_0, \quad -1\leqslant z\leqslant 1. \tag{8.3.41}$$

Используя разложение K и полагая $\psi = \sum a_nP_n$, получаем

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2a_n}{2n+1}z^n,$$

где мы воспользовались равенством

$$\int_{-1}^{1} [P_n(z)]^2\, dz = \frac{2}{2n+1}.$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\left[\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\right] \quad \text{и} \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\frac{2n+1}{2}\left[\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\right].$$

Аналогичные результаты можно получить для системы полиномов Гегенбауера $T_n^{\nu}(z)$ с любым ν, для которых производящая функция имеет вид (см. таблицу в конце гл. 6)

$$(1-2zz_0+z^2)^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\infty} T_n^{\nu}(z_0)\, z^n \tag{8.3.42}$$

при нормировке

$$\int_{-1}^{1} (1-z^2)^{\nu}\,[T_n^{\nu}(z)]^2\, dz = \frac{2\Gamma(2\nu+n+1)}{(2\nu+2n+1)\,n!}. \tag{8.3.43}$$

Используя производящую функцию в качестве ядра и ограничиваясь промежутком изменения z от -1 до 1, получаем решение интегрального уравнения первого рода (8.3.41), в котором ядро $1/\sqrt{1-2zz_0+z^2}$ заменено ядром (8.3.42), в виде

$$\psi = \frac{2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(1-z^2)^{\nu}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\nu+2n+1}{\Gamma(2\nu+n+1)}\varphi^{(n)}(0)\, T_n^{\nu}(z). \tag{8.3.44}$$

Придавая ν соответствующие значения, можно получить важные частные случаи: при $\nu=0$ — полиномы Лежандра, при ν целом — присоединенные функции Лежандра. При $\nu=1/2$

$$\frac{1}{1-2zz_0+z^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} T_n^{1/2}(z_0)\, z^n.$$

Здесь $T_n^{1/2}$ — полиномы Чебышева. Условие нормировки имеет вид

$$\int_{-1}^{1} [T_n^{1/2}]^2 (1-z^2)^{1/2}\, dz = 1.$$

Решение интегрального уравнения

$$\varphi(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\psi(z_0)}{1-2zz_0+z^2}\, dz_0$$

дается формулой

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-z^2)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\, T_n^{1/2}(z). \tag{8.3.45}$$

Во всех рассмотренных выше случаях можно получить новые разрешимые интегральные уравнения дифференцированием или интегрированием обеих частей по z.

До сих пор мы рассматривали производящие функции, которым соответствовали ортогональные системы функций. Такое благоприятное положе-

ние не всегда имеет место. Представляется интересным найти подход к решению задачи и в более общем случае. Рассмотрим, например, интегральное уравнение, ядром которого служит производящая функция для функций Бесселя:

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} e^{iz\cos u}\psi(u)\,du, \quad 0 \leqslant z \leqslant \infty. \tag{8.3.46}$$

Интегральное уравнение такого вида возникает в задаче о распространении двумерных волн, амплитуда которых подчинена определенному условию на некоторой полуплоскости. Первый шаг при решении уравнения (8.3.46) состоит в разложении как ядра, так и функции $\psi(u)$ в ряды Фурье по $\cos(nu)$:

$$\psi = \sum a_n \cos nu, \quad e^{iz\cos u} = \sum \varepsilon_n J_n(z)\cos nu.$$

Тогда

$$\varphi(z) = \pi \sum_n a_n J_n(z). \tag{8.3.47}$$

Коэффициенты a_n можно непосредственно выразить через значения функции φ и ее производных при $z=0$, как это было сделано при получении формул (8.3.28).

Интегральные уравнения первого рода и функции Грина. Если оказывается, что ядром интегрального уравнения служит функция Грина, то решение получается легко. Это следует из того факта, что каждую функцию Грина можно разложить в ряд по собственным функциям [см. формулу (7.2.39)]. Для симметричной функции G_k

$$G_k(x\,|\,x_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\chi}_n(x_0)\chi_n(x)}{k_n^2 - k^2}, \tag{8.3.48}$$

где функции χ_n ортогональны и нормированы на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Решение уравнения

$$\varphi(x) = \int_a^b G(x\,|\,x_0)\psi(x_0)\,dx_0$$

теперь может быть легко получено. Рассмотрим разложение для функции ψ:

$$\psi(x) = \sum_n a_n \chi_n(x).$$

Тогда

$$\varphi(x) = 4\pi \sum \frac{a_n}{k_n^2 - k^2}\chi_n(x),$$

причем коэффициенты a_n вычисляются при помощи квадратур:

$$a_n = \frac{1}{4\pi}(k_n^2 - k^2)\int_a^b \bar{\chi}_n(x)\varphi(x)\,dx. \tag{8.3.49}$$

Аналогичный процесс можно осуществить для дву- и трехмерных функций Грина, если только выражение

$$G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\chi}_n(\mathbf{r}_0)\chi_n(\mathbf{r})}{k_n^2 - k^2}, \tag{8.3.50}$$

определяющее G_k, допускает разделение переменных. Функции, стоящие под знаком этой суммы, зависят от двух или от трех переменных. Тем не менее, предполагая, что переменные разделяются, мы можем записать каждую функцию χ_n в виде произведения функций от одной переменной. Более того, семейство всех этих функций от какой-либо переменной ортогонально (для каждой из переменных):

$$\chi_n(\mathbf{r}) = X_{n1}(x_1)\, X_{n2}(x_2)\, X_{n3}(x_3), \qquad \int \overline{X}_{n1} X_{m1}\, \rho(x_1)\, dx_1 = \delta_{nm}.$$

Если при этом фиксировать значение двух переменных, например x_2 и x_3, как для $\mathbf{r}$, так и для $\mathbf{r}_0$, то выражение (8.3.50) для G_k приводится к виду

$$K(x\,|\,x_0) = \sum_k \alpha_k \overline{X}_{k1}(x_0)\, X_{k1}(x). \tag{8.3.51}$$

Интегральное уравнение первого рода, ядром которого служит $K(x\,|\,x_0)$, легко решается. Решение имеет вид

$$\psi(x) = \rho(x) \sum_k \left[\frac{\int \overline{X}_{k1}(x_0)\, \varphi(x_0)\, \rho(x_0)\, dx_0}{\alpha_k} \right] X_{k1}(x). \tag{8.3.52}$$

Придавая переменным x_2 и x_3 различные значения и составляя линейные комбинации получаемых таким образом ядер, можно получить много ядер типа (8.3.51).

Поясним теперь эти замечания примером. Функция Грина двумерного уравнения Лапласа пропорциональна $\ln R$, где

$$R = \sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

Используя общую теорию разложения функций Грина, развитую в предыдущей главе (см. также гл. 10), находим, что в полярных координатах

$$\ln R = \ln r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos[n(\varphi - \varphi_0)], \qquad r > r_0. \tag{8.3.53}$$

Пусть теперь $r = r_0 = 1$. Тогда это разложение приводится к виду

$$\ln \sqrt{2[1 - \cos(\varphi - \varphi_0)]} = \ln \left| 2 \sin\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) \right| = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos[n(\varphi - \varphi_0)]$$

или

$$\ln \left| 2 \sin\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) \right| = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\cos(n\varphi)\cos(n\varphi_0) + \sin(n\varphi)\sin(n\varphi_0)]. \tag{8.3.54}$$

Интегральное уравнение первого рода с ядром

$$K(\varphi\,|\,\varphi_0) = \ln \left| 2 \sin\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) \right|,$$

где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, теперь легко решается.

Мы можем построить другое ядро с простым билинейным разложением типа (8.3.51) в виде суммы

$$\ln \left| 2 \sin\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) \right| + \ln \left| 2 \sin\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) \right| = \ln[2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)].$$

Тогда

$$\ln[2\,|\cos\varphi - \cos\varphi_0|\,] = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cos(n\varphi)\cos(n\varphi_0). \tag{8.3.55}$$

Следовательно, интегральное уравнение

$$\Psi(\varphi) = \int_0^{\pi} \ln[2|\cos\varphi - \cos\varphi_0|]\,\psi(\varphi_0)\,d\varphi_0 \tag{8.3.56}$$

имеет решение

$$\psi(\varphi) = a_0 - \frac{2}{\pi^2}\sum_n n\left[\int_0^{\pi} \Psi(\varphi_0)\cos(n\varphi_0)\,d\varphi_0\right]\cos(n\varphi), \tag{8.3.57}$$

где a_0 произвольно.

Дифференцируя только что приведенные ядра, можно получить другие полезные ядра. Дифференцирование $\ln|2\sin(\varphi-\varphi_0)/2|$ и $\ln[2|\cos\varphi - \cos\varphi_0|]$ соответственно дает

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right) = \sum_n [\sin(n\varphi)\cos(n\varphi_0) - \cos(n\varphi)\sin(n\varphi_0)],$$

$$\frac{1}{\cos\varphi_0 - \cos\varphi} = -\sum_n 2\,\frac{\sin(n\varphi)}{\sin\varphi}\cos(n\varphi_0).$$

Интегральное уравнение

$$\Phi(\varphi) = \int_0^{\pi} \frac{\psi(\varphi_0)}{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\,d\varphi_0,$$

ядром которого служит функция $1/(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$, можно преобразовать в другое уравнение, представляющее интерес для гидродинамики Пусть

$$\cos\varphi = x, \quad \Phi(\varphi) = \chi(x), \quad \frac{\psi(\varphi_0)}{\sin\varphi_0} = \Psi(x_0).$$

Тогда

$$\chi(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\Psi(x_0)}{x - x_0}\,dx_0. \tag{8.3.58}$$

Операции, при помощи которых из функции Грина $\ln R$ мы получили много различных ядер, очевидно, могут быть использованы и для других функций Грина. Пример, который мы выбрали, особенно прост. В самом деле, перечисленные выше разложения можно было получить прямым путем быстрее, чем используя предварительное знание разложения функции Грина, и в принципе такое непосредственное разложение всегда возможно. Однако в последующих главах (гл. 10 и следующие) будут указаны разложения для многих функций Грина в системах координат, допускающих разделение переменных, и таким образом будут автоматически выделены многие интегральные уравнения первого рода, разрешимые при помощи разложения по собственным функциям.

Интегральные преобразования и интегральные уравнения первого рода. В равенстве

$$\Psi(z) = \int K(z|z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0$$

функция $\Psi(z)$ часто называется (*интегральным*) *преобразованием* функции $\psi(z)$. Решение интегрального уравнения, выражающее ψ через Ψ, называется *обращением* этого преобразования. Преобразования, в которых соотношение между Ψ и ψ особенно просто, изучены весьма подробно. Здесь мы рассмотрим несколько примеров.

Наиболее изученным и наиболее важным является преобразование Фурье (см. § 4.7)

$$\Psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \psi(z)\, dz. \tag{8.3.59}$$

Его обращение имеет вид

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \Psi(k)\, dk, \tag{8.3.60}$$

и, таким образом, интегральное уравнение (8.3.59) с известной функцией Ψ и ядром $K(k \mid z) = e^{ikz}$ имеет своим решением (8.3.60). Мы отсылаем читателя к § 4.7, где излагаются условия, при которых такое обращение возможно.

Преобразование Фурье можно обобщить на широкий класс функций. Как было показано в гл. 6, преобразование Фурье вытекает из условия полноты для семейства собственных функций с непрерывным спектром собственных значений. Напомним прежде всего, как выражается условие ортогональности и нормировки для случая непрерывного спектра. Если k — собственное значение, то

$$\int \bar{\varphi}(k \mid x)\, \varphi(k_0 \mid x)\, dx = \delta(k - k_0), \tag{8.3.61}$$

где область интегрирования простирается до бесконечности хотя бы в одном направлении, а δ — дельта-функция Дирака. Произвольную функцию ψ можно разложить по функциям φ только при условии, что существует интеграл

$$\psi(x) = \int \Psi(k)\, \varphi(k \mid x)\, dk. \tag{8.3.62}$$

Для получения функции $\Psi(k_0)$ умножаем обе части этого равенства на $\bar{\varphi}(k_0 \mid x)$ и интегрируем по x:

$$\int \bar{\varphi}(k_0 \mid x)\, \psi(x)\, dx = \iint \Psi(k)\, \bar{\varphi}(k_0 \mid x)\, \varphi(k \mid x)\, dk\, dx.$$

Меняя порядок интегрирования (эту операцию следует обосновать в каждом частном случае) и используя уравнение (8.3.61), получаем

$$\int \bar{\varphi}(k_0 \mid x)\, \psi(x)\, dx = \int \Psi(k)\, \delta(k - k_0)\, dk.$$

Следовательно,

$$\Psi(k) = \int \bar{\varphi}(k \mid x)\, \psi(x)\, dx. \tag{8.3.63}$$

Мы видим, что если $\Psi(k)$ является *преобразованием* функции $\psi(x)$ при помощи функции $\bar{\varphi}$, то ψ является преобразованием функции Ψ при помощи функции φ. В случае преобразования Фурье, рассмотренного выше,

$$\bar{\varphi}(k \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx},$$

а интегральные соотношения Фурье (8.3.59) и (8.3.60) как раз являются частными случаями уравнений (8.3.63) и (8.3.62) соответственно.

Таким образом, ясно, что каждая функция двух переменных, которую можно нормировать в соответствии с уравнением (8.3.61), может быть использована для построения преобразования и его обращения. Иными

словами, для тех интегральных уравнений первого рода, ядрами которых служат указанные функции, решение дается формулой обращения.

Например, *преобразование Ганкеля* можно получить, используя свойства ортогональности функций Бесселя $J_m(kr)$ с произвольным m. В гл. 7 [см. также уравнение (6.3.62)] мы показали, что

$$\sqrt{kk_0}\int_0^\infty J_m(kr)\,J_m(k_0r)\,rdr=\delta(k-k_0).$$

Следовательно, в предыдущих рассуждениях можно положить

$$\varphi(k\,|\,x)=\sqrt{k}\,J_m(kr).$$

Следуя традиции, мы опускаем множитель $\sqrt{k}$ в преобразовании Ганкеля. Таким образом,

$$\Psi(k)=\int_0^\infty J_m(kr)\,\psi(r)\,r\,dr. \tag{8.3.64}$$

Его обращение определяется так:

$$\psi(r)=\int_0^\infty J_m(kr)\,\Psi(k)\,k\,dk. \tag{8.3.65}$$

Из уравнений (8.3.64) и (8.3.65) получаем

$$\psi(r)=\int_0^\infty k\,dk\int_0^\infty \rho\,[J_m(kr)\,J_m(k\rho)\,\psi(\rho)]\,d\rho.$$

Итак, решение интегрального уравнения (8.3.64) дается формулой (8.3.65).

При изучении некоторых интегральных уравнений важную роль играют различные преобразования, тесно связанные с преобразованием Фурье (см. также § 4.7). *Преобразование Лапласа*, которое мы применим в дальнейшем к интегральному уравнению Вольтерра, имеет вид

$$\Psi(p)=\int_0^\infty e^{-pz}\,\psi(z)\,dz. \tag{8.3.66}$$

Его обращение имеет вид

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pz}\,\Psi(p)\,dp. \tag{8.3.67}$$

Преобразование Меллина определяется формулой

$$\Psi(s)=\int_0^\infty z^{s-1}\,\psi(z)\,dz. \tag{8.3.68}$$

Его обращением является

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s}\,\Psi(s)\,ds. \tag{8.3.69}$$

Как выражение (8.3.67), так и выражение (8.3.69) можно рассматривать как решения интегральных уравнений первого рода (8.3.66) и (8.3.68) соответственно.

Наконец, упомянем еще о двух преобразованиях, получаемых в теории аналитических функций, которые, по существу, выводятся из интегральной формулы Коши. Их называют *преобразованиями Гильберта.* Из формулы (4.2.18) следует, что если

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(z_0)}{z_0-z}\,dz_0, \tag{8.3.70}$$

то

$$\psi(z)=-\frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(z_0)}{z_0-z}\,dz_0. \tag{8.3.71}$$

Знак $\mathscr{P}$ перед интегралом показывает, что интеграл берется в смысле главного значения. Если (8.3.70) рассматривать как интегральное уравнение с искомой функцией $\psi(z)$, то решение дается формулой (8.3.71).

Из (4.2.28) получаем аналогичную пару:

$$\begin{aligned}\Psi(\varphi)&=\frac{1}{2\pi}\mathscr{P}\int_0^{2\pi}\left[1+\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right)\right]\psi(\varphi_0)\,d\varphi_0,\\ \psi(\varphi)&=\frac{1}{2\pi}\mathscr{P}\int_0^{2\pi}\left[1-\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right)\right]\Psi(\varphi_0)\,d\varphi_0.\end{aligned} \tag{8.3.72}$$

Мы уже говорили об этом частном виде ядра в предыдущем пункте, посвященном функциям Грина [см. (8.3.57)], где решение было найдено с помощью рядов Фурье. Эта связь не вызывает особого удивления, так как формула (4.2.28) основана на соотношении (4.2.25), в которое входит функция Грина.

В этом пункте была подчеркнута связь между интегральными преобразованиями и интегральными уравнениями первого рода. Ниже в этой главе мы используем преобразования для приведения интегральных уравнений к видам, более удобным для решения.

Дифференциальные уравнения и интегральные уравнения первого рода. В предыдущих пунктах мы видели, как можно решать уравнения первого рода довольно разнообразных типов. Еще большее количество разрешимых уравнений можно построить, действуя на обе части уравнения каким-нибудь оператором, дифференциальным или интегральным (или и тем и другим). Например, предположим, что мы знаем решение ψ уравнения

$$\varphi(z)=\int K(z\mid z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0,$$

где K и φ — известные функции. Тогда мы можем найти решение уравнения

$$\chi(z)=\int \mathscr{L}_z[K(z\mid z_0)]\,\psi(z_0)\,dz_0 \tag{8.3.73}$$

в том случае, когда известно решение уравнения

$$\mathscr{L}_z[\varphi(z)]=\chi(z), \tag{8.3.74}$$

и выразить φ через χ. Обратно, если мы знаем решение уравнения с неизвестной χ, то мы можем решить уравнение с неизвестной φ. Таким образом, мы можем перейти от решения простого интегрального уравнения к решению более сложных интегральных уравнений в том случае, когда

мы можем решить уравнение, выражающее φ через χ. Если оператор, переводящий K в $\mathscr{L}(K)$, является дифференциальным оператором, то уравнение, которое следует решить, чтобы получить φ, является дифференциальным уравнением. Таким образом, если мы в состоянии решить дифференциальное уравнение, то мы можем решить и интегральное уравнение, и, наоборот, если мы в состоянии решить интегральное уравнение, то мы можем решить дифференциальное уравнение.

Пусть, например, $K(z \mid z_0) = e^{-zz_0}$, так что

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zz_0} \psi(z_0)\, dz_0.$$

Это как раз преобразование Лапласа; решение ψ дается формулой обращения (8.3.67). Значительно более общий класс ядер можно получить из ядер

$$\mathscr{K}(z \mid z_0) = \sum_n z_0^n g_n(z)\, e^{-zz_0}$$

или

$$\mathscr{K}(z \mid z_0) = \sum_n (-1)^n g_n(z) \frac{d^n}{dz^n}(e^{-zz_0}) = \mathscr{L}_z[K(z \mid z_0)],$$

где

$$\mathscr{L} = \sum_n (-1)^n g_n(z) \frac{d^n}{dz^n}. \tag{8.3.75}$$

В данном случае (8.3.74) является дифференциальным уравнением относительно φ, изученным довольно подробно в гл. 5:

$$\sum_n (-1)^n g_n(z) \frac{d^n\varphi}{dz^n} = \chi(z).$$

Решение этого дифференциального уравнения может оказаться нелегким. Для того чтобы воспользоваться более доступными методами, необходимо, чтобы сумма была конечной. Действительно, даже если дифференциальное уравнение имеет первый или второй порядок, разрешимость его маловероятна.

Другой пример получим с помощью полиномов Эрмита. Пусть $K(z \mid z_0) = e^{-(z-z_0)^2}$. Если

$$\mathscr{L} = \sum_n (-1)^n a_n \frac{d^n}{dz^n},$$

то

$$\mathscr{L}[K(z \mid z_0)] = \sum_n a_n e^{-(z-z_0)^2} H_n(z - z_0).$$

Это последнее соотношение весьма расширяет область выбора ядер для новых интегральных уравнений. Если a_n постоянны, то ядро $\mathscr{L}(K)$ является функцией общего вида от $(z - z_0)$, определенной на интервале $(-\infty, \infty)$. Если же a_n зависят от z, то ядро оказывается даже еще более общим. Соответствующее дифференциальное уравнение

$$\sum_n (-1)^n a_n \frac{d^n\varphi}{dz^n} = \chi(z)$$

решается особенно просто, если коэффициенты a_n постоянны; следовательно, здесь мы имеем способ решения любого интегрального уравнения первого

рода, ядром которого служит функция от $(z-z_0)$, определенная на интервале $(-\infty, \infty)$.

С интегральным уравнением может быть связано также другое дифференциальное уравнение. Его можно получить из равенства (8.3.73) совершенно аналогично тому, как были получены интегральные представления для дифференциальных уравнений (см. § 5.3). Предположим, что

$$\mathscr{L}_z K(z \mid z_0) = \mathscr{M}_{z_0} K(z \mid z_0),$$

где индекс указывает, на какую из переменных действует оператор. Например, если $\mathscr{L}$ задается равенством (8.3.75), то

$$\mathscr{M}_{z_0} = \sum_n (-1)^n z_0^n g_n\left(-\frac{d}{dz_0}\right).$$

(Другие примеры см. в § 5.3.) Введем теперь сопряженный оператор $\widetilde{\mathscr{M}}$, определяемый соотношением

$$u\mathscr{M}[v] - v\widetilde{\mathscr{M}}[u] = \frac{dP[u, v]}{dz}.$$

Применяя эти соотношения к уравнению (8.3.73), получаем

$$\chi(z) + P[K(z \mid a), \psi(a)] - P[K(z \mid b), \psi(b)] = \int_a^b K(z \mid z_0)\, \widetilde{\mathscr{M}}[\psi(z_0)]\, dz_0.$$

Согласно нашему предположению, это интегральное уравнение можно решить относительно $\widetilde{\mathscr{M}}[\psi]$, так что

$$\widetilde{\mathscr{M}}[\psi(z)] = r(z). \tag{8.3.76}$$

Может оказаться, что это дифференциальное уравнение решается проще, чем (8.3.74). Методы и примеры нахождения $\widetilde{\mathscr{M}}$ по $\mathscr{M}$, а также примеры операторов $\mathscr{L}$ приведены в § 5.3.

Оператор $\mathscr{L}$ не обязательно должен быть дифференциальным. Например, он может оказаться операцией взятия преобразования и тогда проблема (8.3.73) сводится к проблеме обращения этого преобразования. Однако этот сильный метод заслуживает сам по себе целого параграфа и мы вернемся к нему в § 8.5.

Проблема моментов. Момент n-го порядка M_n функции (или, как это обычно бывает в физике, распределения) ψ определяется следующим образом:

$$M_n = \int_a^b z_0^n \psi(z_0)\, \rho(z_0)\, dz_0, \tag{8.3.77}$$

где $\rho(x)$ — весовая функция. Во многих случаях, в частности при рассмотрении явлений переноса (см. § 2.4 и 12.2), возможно вычислить последовательность моментов M_n, и искомой является функция ψ.

Прежде чем изучать методы, применяемые здесь, заметим, что линейной заменой переменной можно изменить пределы интегрирования. В результате мы изменим область определения ψ и новые моменты будут линейно выражаться через конечное число исходных. Например, пусть

$$\zeta_0 = 2\pi \frac{z_0 - a}{b - a}.$$

Тогда

$$M_n = \frac{2\pi}{b-a} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(b-a)\zeta_0}{2\pi} + a\right]^n \psi\left(\frac{b-a}{2\pi}\zeta_0 + a\right) \rho\left(\frac{b-a}{2\pi}\zeta_0 + a\right) d\zeta_0.$$

Положим

$$\psi(z_0) = \chi(\zeta_0), \qquad \rho(z_0) = \omega(\zeta_0)$$

и

$$\mu_n = \int_0^{2\pi} \zeta_0^n \chi(\zeta_0)\,\omega(\zeta_0)\,d\zeta_0.$$

Тогда

$$\mu_n = \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^{n+1} \int_a^b (z_0 - a)^n \psi(z_0)\,\rho(z_0)\,dz_0$$

и, следовательно,

$$\mu_n = \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^{n+1} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (-a)^{n-s} M_s. \tag{8.3.78}$$

Отсюда ясно, что в силу линейности преобразования пределы интегрирования a и b в (8.3.77) можно изменить, не прибегая к каким-либо бесконечным процессам. Обычно рассматриваются пределы $(-\infty, \infty)$, $(0, \infty)$ и $(-1, 1)$.

Метод, пригодный для решения проблемы моментов, заключается в том, что устанавливается соотношение между моментами и коэффициентами разложения функции ψ по полиномам, ортогональным с весом ρ в промежутке (a, b).

Например, предположим, что интервалом интегрирования является $(-\infty, \infty)$, а весовой множитель равен $e^{-z_0^2}$. [Можно, конечно, выделить множитель $e^{-z_0^2}$ из функции $\psi(z_0)$ и определить новую неизвестную функцию φ соотношением $\psi(z_0) = e^{-z_0^2}\varphi(z_0)$.] Соответствующими ортогональными полиномами будут $H_n(z_0)$. Разложим теперь $\psi(z_0)$ следующим образом:

$$\psi(z_0) = \sum a_n H_n(z_0), \quad a_n = \frac{1}{n!\,2^n\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z_0)\,H_n(z_0)\,e^{-z_0^2}\,dz_0.$$

Так как H_n — полиномы, то интеграл, входящий в выражение для a_n, можно непосредственно выразить через M_n. Например, $H_0(z_0) = 1$, так что

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z_0)\,e^{-z_0^2}\,dz_0 = \frac{M_0}{\sqrt{\pi}}.$$

В общем случае

$$H_n = (2x)^n - \binom{n}{2}\frac{2!}{1!}(2x)^{n-2} + \binom{n}{4}\frac{4!}{2!}(2x)^{n-4} + \ldots =$$
$$= \sum_k \frac{(-1)^k\,n!}{(k!)\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k},$$

где при четном n последним членом разложения является постоянная, а при нечетном — член с первой степенью x. Тогда

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_k \frac{(-1)^k}{(k!)\,(n-2k)!}\frac{M_{n-2k}}{2^{2k}}. \tag{8.3.79}$$

При помощи (8.3.79) легко найти функцию ψ.

Существует и другой подход к проблеме моментов, в принципе более общий, но не всегда более эффективный практически. Можно показать, что эта проблема эквивалентна интегральному уравнению первого рода. Вернемся,

например, к разобранному выше случаю. Умножая обе части уравнения (8.3.77) на $e^{-z^2}(2z)^n/n!$, получаем

$$\frac{(2z)^n}{n!}e^{-z^2}M_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2zz_0)^n}{n!} e^{-(z^2+z_0^2)}\psi(z_0)\,dz_0.$$

Суммируя теперь в обеих частях по n, имеем

$$e^{-z^2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^n}{n!}M_n\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-z_0)^2}\psi(z_0)\,dz_0. \tag{8.3.80}$$

Предполагая, что ряд в левой части сходится, мы видим, что проблема моментов свелась к интегральному уравнению первого рода. Конечно, это уравнение можно решить, разложив ψ по полиномам Эрмита. Однако существуют приближенные методы решения интегральных уравнений (см. гл. 9), которые часто могут оказаться более практичными, чем использование соотношения (8.3.79).

Подобным же образом можно поступать и в случаях других промежутков интегрирования. Интервалу $(0, \infty)$ соответствуют весовая функция e^{-z_0} и полиномы Лагерра. Промежутку $(-1, 1)$ и $\rho = 1$ соответствуют полиномы Лежандра. Если $\rho = \sqrt{1-z_0^2}$, то соответствующими полиномами являются полиномы Чебышева. Весьма важно заметить, что разложение ψ по ортогональным полиномам зависит от весовой функции ρ. Действительно, характер сходимости для различных весовых функций может быть совершенно различен. Однако, как указывалось выше, выделяя множитель из $\psi(z_0)$ и рассматривая оставшийся множитель как неизвестную функцию, можно произвольным образом менять вес. Обозначим вес через $\omega(z)$, так что

$$M_n = \int_a^b z_0^n \rho(z_0)\,\omega(z_0)\,\varphi(z_0)\,dz_0, \quad \text{где} \quad \psi = \omega\varphi.$$

Наиболее подходящей (т. е. обеспечивающей наиболее быструю сходимость) будет такая весовая функция ω, которая возможно более близка к неизвестной функции ψ. Очевидно, если она в точности равна ψ, то в разложении φ по полиномам будет только один член, а именно $\varphi = 1$. Весьма выгодно использовать любую доступную информацию, чтобы построить наилучшее возможное приближение к ψ, и затем взять это приближение в качестве ω.

Резюме. Мы исследовали те решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода, которые получаются при помощи разложения неизвестной функции в ряд по функциям какой-либо полной системы. Наиболее общие ядра, для которых могут быть получены точные решения, характеризуются разложением вида

$$K(z\,|\,z_0) = \sum_n a_n\psi_n(z)\,\varphi_n(z_0),$$

где как ψ_n, так и φ_n образуют полные и ортогональные семейства. Ортогональность, вообще говоря, не существенна, но на практике весьма удобна. Однако же обсуждались и методы, применяемые в случае, когда одно из этих семейств не является ортогональным.

Следует подчеркнуть, что уравнения Вольтерра первого рода могут быть решены некоторыми из описанных в этом разделе методов, хотя, вообще говоря, операции оказываются более трудными и требуют привлече-

ния всего аппарата метода Шмидта или биортогональных рядов. К счастью, многие ядра уравнений Вольтерра имеют специальную форму $v(z-z_0)$, что позволяет развить для них более эффективные методы; этот случай довольно подробно будет рассмотрен в § 8.5.

8.4. Решение интегральных уравнений второго рода

Методы, применяемые для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода, также можно классифицировать в соответствии с типом разложения ядра. Эта классификация, конечно, весьма похожа на ту, которая была дана в § 8.3, но оперировать с уравнениями второго рода приходится совсем иначе. Вследствие этого целесообразно подойти к классификации иным путем, отличным от того, которому мы следовали в § 8.3, хотя, как мы увидим, будут изучаться те же типы ядер, что и раньше. Как и в предыдущем параграфе, мы будем заниматься здесь методами точного решения; приближенным методам будет полностью посвящена гл. 9. Один из методов решения при помощи рядов, называемый методом Фредгольма, весьма важен для изучения теории возмущений и поэтому мы откладываем его изложение также до следующей главы.

Уравнение, подлежащее изучению, имеет вид

$$\psi(z)=\lambda\int_a^b K(z\mid z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0,\quad a\leqslant z\leqslant b. \tag{8.4.1}$$

Эта задача имеет решения только для некоторых специальных значений λ. Мы будем их обозначать через λ_n, а соответствующие им решения — через ψ_n. Если ядро K симметрично и несингулярно, то собственные значения вещественны, а спектр собственных значений дискретен. Если ядро симметрично, но сингулярно, то часть спектра может быть непрерывной, если же ядро не симметрично, то собственные значения не обязательно вещественны.

Мы можем разложить $K(z\mid z_0)$ в ряд по функциям $h_n(z)$, образующим полное семейство; тогда коэффициентами будут функции $g_n(z_0)$ от z_0:

$$K(z\mid z_0)=\sum_n h_n(z)\,g_n(z_0), \tag{8.4.2}$$

и

$$\psi(z)=\lambda\sum_n h_n(z)\int_a^b g_n(z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0.$$

Это наводит нас на мысль, что решение можно искать в виде

$$\psi(z)=\sum_n A_n h_n(z). \tag{8.4.3}$$

(Следует подчеркнуть, что в дальнейших рассуждениях будет предполагаться, что это разложение сходится.) Значит,

$$\begin{aligned} A_n&=\lambda\int_a^b g_n(z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0 \quad \text{для всех } n,\\ A_n&=\lambda\sum_p A_p\int_a^b g_n(z_0)\,h_p(z_0)\,dz_0. \end{aligned} \tag{8.4.4}$$