

ния всего аппарата метода Шмидта или биортогональных рядов. К счастью, многие ядра уравнений Вольтерра имеют специальную форму  $v(z - z_0)$ , что позволяет развить для них более эффективные методы; этот случай довольно подробно будет рассмотрен в § 8.5.

## 8.4. Решение интегральных уравнений второго рода

Методы, применяемые для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода, также можно классифицировать в соответствии с типом разложения ядра. Эта классификация, конечно, весьма похожа на ту, которая была дана в § 8.3, но оперировать с уравнениями второго рода приходится совсем иначе. Вследствие этого целесообразно подойти к классификации иным путем, отличным от того, которому мы следовали в § 8.3, хотя, как мы увидим, будут изучаться те же типы ядер, что и раньше. Как и в предыдущем параграфе, мы будем заниматься здесь методами точного решения; приближенным методам будет полностью посвящена гл. 9. Один из методов решения при помощи рядов, называемый методом Фредгольма, весьма важен для изучения теории возмущений и поэтому мы откладываем его изложение также до следующей главы.

Уравнение, подлежащее изучению, имеет вид

$$\psi(z) = \lambda \int_a^b K(z | z_0) \psi(z_0) dz_0, \quad a \leq z \leq b. \quad (8.4.1)$$

Эта задача имеет решения только для некоторых специальных значений  $\lambda$ . Мы будем их обозначать через  $\lambda_n$ , а соответствующие им решения — через  $\phi_n$ . Если ядро  $K$  симметрично и несингулярно, то собственные значения вещественны, а спектр собственных значений дискретен. Если ядро симметрично, но сингулярно, то часть спектра может быть непрерывной, если же ядро не симметрично, то собственные значения не обязательно вещественны.

Мы можем разложить  $K(z | z_0)$  в ряд по функциям  $h_n(z)$ , образующим полное семейство; тогда коэффициентами будут функции  $g_n(z_0)$  от  $z_0$ :

$$K(z | z_0) = \sum_n h_n(z) g_n(z_0), \quad (8.4.2)$$

и

$$\psi(z) = \lambda \sum_n h_n(z) \int_a^b g_n(z_0) \psi(z_0) dz_0.$$

Это наводит нас на мысль, что решение можно искать в виде

$$\psi(z) = \sum_n A_n h_n(z). \quad (8.4.3)$$

(Следует подчеркнуть, что в дальнейших рассуждениях будет предполагаться, что это разложение сходится.) Значит,

$$\begin{aligned} A_n &= \lambda \int_a^b g_n(z_0) \psi(z_0) dz_0 \quad \text{для всех } n, \\ A_n &= \lambda \sum_p A_p \int_a^b g_n(z_0) h_p(z_0) dz_0. \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

Обозначив

$$\int_a^b g_n(z_0) h_p(z_0) dz_0 = \alpha_{pn},$$

получаем

$$A_n = \lambda \sum_p A_p \alpha_{pn},$$

или

$$\sum_p A_p (\lambda \alpha_{pn} - \delta_{pn}) = 0. \quad (8.4.5)$$

Это — система линейных однородных уравнений с неизвестными  $A_p$ . Ненулевые решения  $A_p$  существуют только тогда, когда равен нулю определитель, составленный из коэффициентов,

$$\begin{vmatrix} \lambda \alpha_{00} - 1 & \lambda \alpha_{10} & \lambda \alpha_{20} & \lambda \alpha_{30} & \dots \\ \lambda \alpha_{01} & \lambda \alpha_{11} - 1 & \lambda \alpha_{21} & \lambda \alpha_{31} & \dots \\ \lambda \alpha_{02} & \lambda \alpha_{12} & \lambda \alpha_{22} - 1 & \lambda \alpha_{32} & \dots \\ \lambda \alpha_{03} & \lambda \alpha_{13} & \lambda \alpha_{23} & \lambda \alpha_{33} - 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

или в сокращенной записи

$$|\lambda \alpha_{pn} - \delta_{pn}| = 0. \quad (8.4.6)$$

Все возможные решения  $\lambda_n$  этого уравнения, записанного с помощью определителя, можно найти, а затем из уравнения (8.4.5) находим соответствующие значения  $A_p$  и с помощью формулы (8.4.3) определяем  $\Phi$ . Для того чтобы установить связь с задачей интегрирования дифференциального уравнения, заметим, что (8.4.5) представляет собой последовательность рекуррентных соотношений для определения  $A_p$ , очень похожих на соотношения, получающиеся при подстановке степенного ряда (или иного ряда по функциям полной системы) в дифференциальное уравнение.

Для разыскания «наилучшего» типа разложения ядра  $K$  не существует «столбовой дороги», не существует всегда пригодного правила, указывающего, какое из разложений в наибольшей степени упрощает решение. В самом деле, обычно для каждого типа ядер возможно несколько разложений и часто приходится испытывать каждое из них для того, чтобы найти наиболее удобное в данном, конкретном случае. В соответствии со сказанным наша классификация методов решения будет связана скорее с типами разложений, чем с ядрами, связана с природой коэффициентов  $\alpha_{pn}$ , получающихся для данного  $K$  после выбора множеств  $g_n$  и  $h_p$ . Часто для данного  $K$  можно применить разложения различных классов, хотя, обычно, одно из разложений представляется наиболее подходящим. Сейчас мы дадим обзор наиболее употребительных классов разложений  $K$ , приводя примеры тех типов ядер, для которых эти разложения оказываются подходящими, а также остановимся на некоторых деталях решения уравнений.

**Разложения первого класса.** Наша классификация будет зависеть от свойств матрицы  $\alpha_{pn}$ , т. е. от того, как связаны функции  $g_n$  и  $h_p$ . Например, первым назовем тот класс, для которого  $\alpha_{pn}$  — диагональная матрица, т. е.  $\alpha_{pn} = \alpha_n \delta_{pn}$ . Это означает, что каждая функция  $g_n$  орто-

гональна всем функциям  $h_p$ , за исключением  $h_n$ . В этом случае

$$\lambda_n = \frac{1}{\alpha_n}, \quad (8.4.7)$$

причем

$$\psi_n = h_n.$$

Проверить это решение можно непосредственной подстановкой в интегральное уравнение (8.4.1).

Ядра, являющиеся функциями Грина, дают примеры разложений *диагонального типа*. В предыдущем параграфе мы получили из разложения для  $\ln R$  выражение (8.3.54)

$$\begin{aligned} K(\varphi | \varphi_0) &= \ln |2 \sin\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right)| = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\cos(n\varphi) \cos(n\varphi_0) + \sin(n\varphi) \sin(n\varphi_0)]. \end{aligned}$$

При  $0 < \varphi < 2\pi$  собственными функциями соответствующих интегральных уравнений являются  $\cos(n\varphi)$  и  $\sin(n\varphi)$ ; обе они соответствуют собственному значению  $\lambda_n = -n/\pi$ .

Второй пример получаем, объединяя  $\ln |2 \sin(\varphi - \varphi_0)/2|$  и  $\ln |2 \sin(\varphi + \varphi_0)/2|$  так, чтобы иметь (8.3.55)

$$K(\varphi | \varphi_0) = \ln [2 |\cos \varphi - \cos \varphi_0|] = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cos(n\varphi) \cos(n\varphi_0).$$

При  $0 < \varphi < \pi$  соответствующее интегральное уравнение имеет собственные функции  $\cos(n\varphi)$  и собственные значения  $\lambda_n = -n/\pi$ .

Дифференцируя только что выписанное  $K(\varphi | \varphi_0)$  [см. (8.3.55)], мы получаем пример, иллюстрирующий существенную разницу между уравнениями первого и второго рода:

$$\frac{1}{\cos \varphi - \cos \varphi_0} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \cos(n\varphi_0).$$

Заметим, что хотя функции  $\sin(n\varphi)$  и  $\cos(n\varphi)$  образуют полные семейства, они не являются попарно ортогональными в промежутке  $0 < \varphi < \pi$ . При решении уравнения первого рода (см. § 8.3) это обстоятельство не порождало трудностей, так как свободный член не был связан никаким явным соотношением с функцией  $\psi$ ; напротив, для уравнения второго рода дело обстоит совершенно иначе.

**Разложения второго класса.** Разложениями второго класса мы будем считать такие, для которых

$$\alpha_{pn} = 0, \text{ если } p < n \quad (\text{тип } a),$$

или

$$\alpha_{pn} = 0, \text{ если } p > n \quad (\text{тип } b). \quad (8.4.8)$$

Такие разложения мы будем называть *полудиагональными*. Функцию  $g_n$  можно следующим образом разложить в ряд по функциям  $h_p$ , которые

полагаем ортогональными и нормированными:

$$\begin{aligned} g_n(z) &= \sum_{p=n}^{\infty} \alpha_{pn} h_p(z) \quad (\text{тип } a), \\ g_n(z) &= \sum_{p=0}^n \alpha_{pn} h_p(z) \quad (\text{тип } b). \end{aligned} \quad (8.4.9)$$

Рекуррентное соотношение, связывающее коэффициенты  $A_p$  в случае  $a$ , имеет вид

$$A_n = \lambda \sum_{p=n}^{\infty} A_p \alpha_{pn}.$$

Это соотношение включает как частный случай (если для заданного  $n$  отличны от нуля только два  $\alpha_{pn}$ ) двучленные рекуррентные соотношения, имеющие столь важное значение в случае дифференциальных уравнений. Уравнение, определяющее  $\lambda_n$ , выглядит в случае  $a$  весьма просто:

$$\left| \begin{array}{ccccc} \lambda x_{00} - 1 & \lambda x_{10} & \lambda x_{20} & \lambda x_{30} & \dots \\ 0 & \lambda x_{11} - 1 & \lambda x_{21} & \lambda x_{31} & \dots \\ 0 & 0 & \lambda x_{22} - 1 & \lambda x_{32} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda x_{33} - 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right| = 0.$$

Разложение этого определителя имеет вид  $(\lambda x_{00} - 1)(\lambda x_{11} - 1)\dots$ , так что собственными значениями служат  $\lambda_n = 1/x_{nn}$ . Соответствующие собственные функции представляют собой линейные комбинации функций  $h_p$ ,  $p \leq n$ . Таким образом, как это следует из рекуррентных соотношений для  $A_p$ ,

$$\psi_0 = h_0, \quad \psi_1 = h_1 + \frac{\lambda_1 \alpha_{10}}{1 - \lambda_1 \alpha_{00}} h_0 \text{ и т. д.}$$

Поучительно рассмотреть частный случай типа  $a$ , когда  $\alpha_{pn}$  отличны от нуля только при  $p=n$  и  $p=n+1$ . Тогда рекуррентное соотношение приобретает вид

$$A_n(\lambda x_{nn} - 1) + A_{n+1}\lambda x_{n+1,n} = 0.$$

Это — двучленная рекуррентная формула, и она легко решается:

$$A_p = A_0 \prod_{j=0}^{p-1} (-1)^{j+1} \frac{\lambda x_{j,j} - 1}{\lambda x_{j+1,j}}.$$

Мы видим, что выбор  $[\lambda = \lambda_n = 1/x_{nn}]$  влечет за собой равенства  $A_p = 0$  при  $p > n$ ; другими словами, ряд для  $\psi_n$  по функциям  $h_p$  обрывается при  $p=n$ . Почему же *не каждое*  $\lambda$  может быть использовано при подсчете  $A_p$  и, следовательно, не существует непрерывного спектра  $\lambda$ ? Единственным ограничивающим условием является сходимость ряда для  $\psi$ . Возможны только те значения  $\lambda$ , для которых ряд для  $\psi$  сходится. Положение здесь вполне аналогично тому, которое имеет место в теории дифференциальных уравнений. Например, решая дифференциальное уравнение Эрмита при помощи степенных рядов, мы получаем двучленную рекуррентную формулу. Сходящиеся степенные ряды нельзя получить без отбора

специальных значений, соответствующих специальным значениям  $\lambda$  в исследуемом случае (ср. стр. 713). В случае интегральных уравнений важно понять, что, помимо решений, соответствующих  $\lambda_n = 1/\alpha_{nn}$ , могут также существовать решения, для которых спектр  $\lambda$  непрерывен.

Рассмотрим теперь тип *b*. Рекуррентное соотношение и уравнение, определяющее  $\lambda_n$ , имеют вид

$$A_n = \lambda \sum_{p=0}^n A_p \alpha_{pn},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda \alpha_{00} - 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda \alpha_{01} & \lambda \alpha_{11} - 1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda \alpha_{02} & \lambda \alpha_{12} & \lambda \alpha_{22} - 1 & 0 & \dots \\ \lambda \alpha_{03} & \lambda \alpha_{13} & \lambda \alpha_{23} & \lambda \alpha_{33} - 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0.$$

Как и для типа *a*, собственные значения равны  $\lambda_n = 1/\alpha_{nn}$ . Соответствующие собственные функции не являются конечными линейными комбинациями функций  $h_p$ , как это было в случае *a*. Например, уравнения, определяющие коэффициенты разложения для  $\phi_0$ , имеют вид

$$A_n (1 - \lambda_0 \alpha_{nn}) = \lambda_0 \sum_{p=0}^{n-1} A_p \alpha_{pn}.$$

Следовательно,

$$A_1 = \frac{\lambda_0 A_0 \alpha_{01}}{1 - \lambda_0 \alpha_{11}}, \quad A_2 = \frac{\lambda_0 A_1 \alpha_{12} + \lambda_0 A_0 \alpha_{02}}{1 - \lambda_0 \alpha_{22}},$$

или

$$A_2 = \frac{\lambda_0 A_0}{1 - \lambda_0 \alpha_{22}} \left[ \frac{\alpha_{01}}{1 - \lambda_0 \alpha_{11}} + \alpha_{02} \right]$$

и т. д. Все сказанное для типа *a* относительно осторожности, необходимой при рассмотрении спектра  $\lambda$ , применимо также и здесь.

Примеры ядер полудиагонального типа дают производящие функции. Рассмотрим

$$K(z | z_0) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2zz_0 + z_0^2}} = \sum_n P_n(z) z_0^n.$$

Независимая переменная меняется от  $-1$  до  $+1$ . После подстановки в интегральное уравнение  $\phi = \sum A_p P_p(z)$  получаем

$$A_n = \lambda \sum_p A_p \int_{-1}^1 z_0^n P_p(z_0) dz_0. \quad (8.4.10)$$

Если  $p > n$ , то интеграл обращается в нуль. Следовательно,  $K$  является полудиагональным ядром типа *b*. Для собственных значений имеем

$$\lambda_n = 1 / \int_{-1}^1 z_0^n P_n(z_0) dz_0.$$

Для того чтобы вычислить этот интеграл, заметим, что  $z_0^n$  можно выразить в виде линейной комбинации  $P_p$ ,  $p \leq n$ , и что при интегрировании этой линейной комбинации «выжить» может только тот член, который содержит  $P_n$ .

Следовательно, в представлении  $z_0^n$  при помощи  $P_p$  следует рассматривать только член, содержащий  $P_n$ . Так как

$$P_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} [z^n + \dots],$$

то

$$z^n = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} [P_n + \dots].$$

После интегрирования получаем

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)!}{2^{n+1}(n!)^2} = \frac{2^n \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{15}{4}, \dots.$$

Коэффициенты  $A_n$  для каждого частного значения  $\lambda$  можно получить непосредственно из рекуррентных соотношений (8.4.10). Меняя в вышеприведенных рассуждениях ролями  $z$  и  $P_n$ , можно получить полу бесконечное ядро типа  $a$ . Это ядро имеет вид

$$K(z|z_0) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z_0 z + z^2}} = \sum_n P_n(z_0) z^n.$$

Тогда для

$$\psi = \lambda \int_{-1}^1 K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0$$

получаем

$$\psi = \lambda \sum_n z^n \int_{-1}^1 P_n \psi dz_0.$$

Если положить

$$\psi = \sum_n A_n z^n,$$

то

$$A_n = \lambda \sum_p A_p \int_{-1}^1 P_n z^p dz.$$

Так как  $\int_{-1}^1 P_n z^p dz = 0$  при  $p < n$ , то мы можем написать

$$A_n = \lambda \sum_{p=n}^{\infty} A_p \alpha_{pn}, \quad \alpha_{pn} = \int_{-1}^1 P_n z^p dz = \frac{1}{2} [1 + (-1)^{p+n}] \frac{p!}{2^n(p-n)!} \frac{\Gamma\left(\frac{p-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+n+3}{2}\right)}.$$

Собственные значения определяются равенствами  $\lambda_n = 1/\alpha_{nn}$  и совпадают с собственными значениями предыдущей задачи. Однако в этом случае соб-

ственные функции определяются легче:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 1, \\ \psi_1 &= z, \\ \psi_2 &= z^2 + \frac{\alpha_{20}/\alpha_{22}}{1-(\alpha_{00}/\alpha_{22})} \quad \text{и т. д.,}\end{aligned}$$

где значения  $\alpha_{pn}$  приведены выше.

**Разложения третьего класса.** Обратимся теперь к третьему классу разложений, которые мы назовем *конечными*. Эти разложения определяются условием

$$\alpha_{pn} = 0, \quad \text{когда } p \text{ или } n \text{ больше, чем } r. \quad (8.4.11)$$

В этом случае в уравнении (8.4.6), определяющем  $\lambda_n$ , определитель имеет конечный порядок  $r$  ( $r$  строк и  $r$  столбцов). Раскрывая этот определитель, получаем полином степени  $r$ . Таким образом, наше уравнение имеет  $r$  корней, которые могут быть определены обычными методами. Очевидно, как диагональные, так и полудиагональные ядра могут быть конечными.

В простейшем примере из этого класса  $K(z|z_0)$  представляется в виде произведения

$$K(z|z_0) = h(z) g(z_0).$$

Интегральное уравнение имеет вид

$$\psi(z) = \lambda h(z) \int g(z_0) \psi(z_0) dz_0.$$

Так как этот интеграл равен постоянной, то сразу видно, что  $\psi(z) = h(z)$ . Следовательно,

$$\lambda = 1 / \int g(z_0) h(z_0) dz_0.$$

Этот результат можно получить также непосредственно из уравнения (8.4.6), так как в этом случае только элемент  $\alpha_{00}$  не равен нулю. Согласно уравнению (8.4.6), имеем

$$\lambda \alpha_{00} - 1 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{\alpha_{00}}$$

в соответствии с результатом, полученным из интегрального уравнения.

Решения можно получить в явном виде также и в случае, когда в разложении  $K$  фигурируют только два члена. Мы приводим эти результаты для справок. Уравнение, определяющее  $\lambda$ ,

$$\begin{vmatrix} (\lambda \alpha_{00} - 1) & \lambda \alpha_{10} \\ \lambda \alpha_{01} & (\lambda \alpha_{11} - 1) \end{vmatrix} = 0$$

имеет два решения

$$\lambda_{\pm} = \frac{(\alpha_{00} + \alpha_{11}) \pm \sqrt{(\alpha_{00} - \alpha_{11})^2 + 4\alpha_{10}\alpha_{01}}}{2(\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{01})}, \quad (8.4.12)$$

где  $\lambda_+$  соответствует знак плюс перед квадратным корнем. Соответствующие собственные функции таковы:

$$\begin{aligned}\psi_+ &= h_0 + h_1 \frac{1 - \lambda_+ \alpha_{00}}{\lambda_+ \alpha_{10}}, \\ \psi_- &= h_0 + h_1 \frac{1 - \lambda_- \alpha_{00}}{\lambda_- \alpha_{10}}.\end{aligned} \quad (8.4.13)$$

Другие случаи. Наконец, может случиться, что выбор  $h_n$  был сделан столь неудачно, что привел к разложению ядра  $K$ , не относящемуся ни к одному из рассмотренных выше классов, т. е. разложение получилось не диагональное, не полудиагональное и не конечное. Тогда, вообще говоря, невозможно получить точное выражение для собственного значения  $\lambda_n$  и следует прибегнуть к приближенным или численным методам. Эти методы будут изучены в гл. 9. Однако существует один случай, заслуживающий рассмотрения, когда уравнение для  $\lambda_n$  достаточно просто. Именно, предположим, что

$$\alpha_{pn} = 0, \text{ когда } p \neq n-1, n, n+1. \quad (8.4.14)$$

Другими словами, разложение  $g_n$  по функциям  $h_n$  состоит только из трех членов. Предполагая, что функции  $h_n$  ортогональны и нормированы, получаем это разложение в виде

$$g_n = \alpha_{n-1,n} h_{n-1} + \alpha_{n,n} h_n + \alpha_{n+1,n} h_{n+1}.$$

Уравнение, определяющее  $\lambda_n$ , имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{00} - 1 & \lambda\alpha_{10} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda\alpha_{01} & \lambda\alpha_{11} - 1 & \lambda\alpha_{21} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \lambda\alpha_{12} & \lambda\alpha_{22} - 1 & \lambda\alpha_{32} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda\alpha_{23} & \lambda\alpha_{33} - 1 & \lambda\alpha_{43} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Рекуррентное соотношение, связывающее неизвестные коэффициенты  $A_p$  в разложении функции  $\psi$ , согласно (8.4.5), имеет вид

$$\lambda\alpha_{n-1,n} A_{n-1} + (\lambda\alpha_{n,n} - 1) A_n + \lambda\alpha_{n+1,n} A_{n+1} = 0. \quad (8.4.15)$$

Это — трехчленная рекуррентная формула. Мы изучали решение таких разностных уравнений в гл. 5 на стр. 532, где подобная проблема возникла при решении дифференциального уравнения Матье.

Сначала введем новые неизвестные

$$G_n = A_n / A_{n-1}, \quad G_0 = \infty.$$

Тогда

$$\lambda\alpha_{n-1,n} + (\lambda\alpha_{n,n} - 1) G_n + \lambda\alpha_{n+1,n} G_{n+1} = 0.$$

Для упрощения обозначений положим

$$\alpha_{n,n}/\alpha_{n-1,n} = -p_n, \quad \alpha_{n+1,n}/\alpha_{n-1,n} = -q_n,$$

$$1/\lambda = \mu, \quad 1/\alpha_{n-1,n} = -r_n.$$

Теперь (8.4.15) можно переписать в виде

$$-1 + (p_n - \mu r_n) G_n + q_n G_n G_{n+1} = 0. \quad (8.4.16)$$

Выражая из этого уравнения  $G_n$  через  $G_{n+1}$ , получаем

$$G_n = \frac{1}{p_n - \mu r_n + q_n G_{n+1}}.$$

Подставляя в это выражение аналогичное выражение для  $G_{n+1}$ , находим

$$G_n = \frac{1}{p_n - \mu r_n + \frac{q_n}{p_{n+1} - \mu r_{n+1} + q_{n+1} G_{n+2}}}.$$

Продолжая этот процесс, получаем  $G_n$  в виде непрерывной дроби:

$$G_n = \cfrac{1}{p_n - \mu r_n + \cfrac{q_n}{p_{n+1} - \mu r_{n+1} + \cfrac{q_{n+1}}{p_{n+2} - \mu r_{n+2} + \cfrac{q_{n+2}}{p_{n+3} - \mu r_{n+3} + \dots}}}}$$

Для  $G_1$  имеем

$$G_1 = \cfrac{1}{p_1 - \mu r_1 + \cfrac{q_1}{p_2 - \mu r_2 + \cfrac{q_2}{p_3 - \mu r_3 + \dots}}} \quad (8.4.17)$$

Мы можем также разрешить (8.4.16) относительно  $G_{n+1}$ :

$$G_{n+1} = -\frac{p_n - \mu r_n}{q_n} + \frac{1}{q_n G_n}.$$

Отсюда получаем конечную непрерывную дробь:

$$G_{n+1} = -\frac{p_n - \mu r_n}{q_n} + \frac{1}{-q_n \left\{ \frac{-(p_{n-1} - \mu r_{n-1})}{q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-1} \left[ \frac{-(\dots)}{q_{n-2}} + \dots - \frac{q_1(p_0 - r_0)}{q_0} \right]} \right\}}. \quad (8.4.18)$$

При  $n=0$  (8.4.18) дает

$$G_1 = -\frac{p_0 - \mu r_0}{q_0}.$$

Приравнивая это выражение выражению (8.4.17), получаем уравнение для определения  $\mu = 1/\lambda$ :

$$-\frac{p_0 - \mu r_0}{q_0} = \cfrac{1}{p_1 - \mu r_1 + \cfrac{q_1}{p_2 - \mu r_2 + \cfrac{q_2}{p_3 - \mu r_3 + \dots}}}. \quad (8.4.19)$$

Численные методы, которые следует применять для решения этого уравнения, описаны в гл. 5 на стр. 532, и нет необходимости вновь говорить о них. Во всех случаях, когда разложение ядра имеет вид (8.4.14), все сводится к решению уравнения (8.4.19). Как только  $\mu$  определено, соответствующие  $G_{n+1}$  можно найти из (8.4.18) и, следовательно, при помощи соотношений  $G_n = A_n/A_{n-1}$  можно вычислить  $A_n$ .

**Неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода.** Решение неоднородного уравнения второго рода рассматривалось в § 8.2. Будет поучительно вновь вывести прямым путем результат, полученный там. Это уравнение имеет вид

$$\psi = \lambda \int_a^b K(z | z_0) \psi(z_0) dz_0 + \chi(z). \quad (8.4.20)$$

Пусть

$$\psi = \sum_n A_n \psi_n,$$

где

$$\phi_n = \lambda_n \int_a^b K(z|z_0) \psi_n(z_0) dz_0.$$

Кроме того, можно разложить  $K$  в ряд по биортогональным собственным функциям:

$$K(z|z_0) = \sum_n \frac{\psi_n(z) \varphi_n(z_0)}{\lambda_n},$$

где

$$\int_a^b \phi_n \varphi_m dz = \delta_{nm}.$$

Тогда, подставляя полученное выражение в (8.4.20), получаем

$$\sum_n A_n \psi_n = \lambda \sum_{n,p} \frac{\psi_n A_p}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n \psi_p dz_0 + \chi = \sum_n \frac{\lambda A_n}{\lambda_n} \psi_n + \chi,$$

или

$$\sum_n A_n \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_n} \right) \psi_n = \chi.$$

Следовательно,

$$A_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \int_a^b \chi \varphi_n dz$$

и

$$\psi = \sum_n \psi_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \int_a^b \chi \varphi_n dz. \quad (8.4.21)$$

Конечно, записывая решение в форме (8.4.21), мы предполагаем, что нам известно достаточно много  $\psi_n$ . В случае когда этих решений мы не знаем, иногда оказывается удобным переписать интегральное уравнение (8.4.20) в виде интегрального уравнения первого рода. Затем можно применить методы § 8.3. Уравнение (8.4.20) можно записать так:

$$\chi(z) = \int_a^b [\delta(z - z_0) - \lambda K(z|z_0)] \psi(z_0) dz_0, \quad (8.4.22)$$

где  $\delta(z - z_0)$  — дельта-функция Дирака. Это — уравнение первого рода с ядром  $\delta(z - z_0) - \lambda K(z|z_0)$ . Из формулы (8.4.21) следует, что те значения  $\lambda$ , при которых  $\psi$ , рассматриваемая как функция от  $\lambda$ , имеет полюсы, являются собственными значениями  $\lambda_n$ .

## 8. 5. Преобразование Фурье и интегральные уравнения

В § 5.3 был рассмотрен метод преобразования одного дифференциального уравнения в другое, которое иногда оказывается более простым. Вместо того чтобы пытаться непосредственно решать заданное дифференциальное уравнение, мы изучали уравнение для соответствующего преобразования Фурье или Лапласа, Меллина или Эйлера. В случае когда одно