где

$$\psi_n = \lambda_n \int_a^b K(z \mid z_0)\, \psi_n(z_0)\, dz_0.$$

Кроме того, можно разложить K в ряд по биортогональным собственным функциям:

$$K(z \mid z_0) = \sum_n \frac{\psi_n(z)\, \varphi_n(z_0)}{\lambda_n},$$

где

$$\int_a^b \psi_n \varphi_m\, dz = \delta_{nm}.$$

Тогда, подставляя полученное выражение в (8.4.20), получаем

$$\sum_n A_n \psi_n = \lambda \sum_{n,\, p} \frac{\psi_n A_p}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n \psi_p\, dz_0 + \chi = \sum_n \frac{\lambda A_n}{\lambda_n} \psi_n + \chi,$$

или

$$\sum_n A_n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \psi_n = \chi.$$

Следовательно,

$$A_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \int_a^b \chi \varphi_n\, dz$$

и

$$\psi = \sum_n \psi_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \int_a^b \chi \varphi_n\, dz. \tag{8.4.21}$$

Конечно, записывая решение в форме (8.4.21), мы предполагаем, что нам известно достаточно много ψ_n. В случае когда этих решений мы не знаем, иногда оказывается удобным переписать интегральное уравнение (8.4.20) в виде интегрального уравнения первого рода. Затем можно применить методы § 8.3. Уравнение (8.4.20) можно записать так:

$$\chi(z) = \int_a^b [\delta(z - z_0) - \lambda K(z \mid z_0)]\, \psi(z_0)\, dz_0, \tag{8.4.22}$$

где $\delta(z - z_0)$ — дельта-функция Дирака. Это — уравнение первого рода с ядром $\delta(z - z_0) - \lambda K(z \mid z_0)$. Из формулы (8.4.21) явствует, что те значения λ, при которых ψ, рассматриваемая как функция от λ, имеет полюсы, являются собственными значениями λ_n.

8. 5. Преобразование Фурье и интегральные уравнения

В § 5.3 был рассмотрен метод преобразования одного дифференциального уравнения в другое, которое иногда оказывается более простым. Вместо того чтобы пытаться непосредственно решать заданное дифференциальное уравнение, мы изучали уравнение для соответствующего преобразования Фурье или Лапласа, Меллина или Эйлера. В случае когда одно

из этих уравнений для преобразования оказывалось проще первоначального, мы получали интегральное представление решения исходного уравнения, и этот способ, как мы видели, был весьма эффективным.

Иногда такой же метод может облегчить работу по решению интегральных уравнений. Мы находим интегральное уравнение, которому удовлетворяет преобразование исходной искомой функции; если оно оказывается более простым, чем первоначальное уравнение, то мы можем получить интегральное представление для исходной неизвестной функции.

Конечно, этот процесс является частным случаем развитых в § 8.3 методов разложения неизвестных функций по полной системе собственных функций. Если спектр собственных значений непрерывен в некоторой области, то такое разложение является интегралом, распространенным по этой области собственных значений, т. е. является интегральным представлением, а не разложением в ряд. Например, коэффициент в разложении $\psi(x)$ по собственным функциям $\sqrt{1/2\pi}\, e^{ikx}$, причем областью непрерывности служит $-\infty < k < \infty$, как раз и является преобразованием Фурье функции ψ.

Этот метод особенно хорош, когда интегральное уравнение после интегрального преобразования сводится прямо к алгебраическому уравнению, что имеет место, когда преобразованное ядро оказывается диагональным. Несколько примеров лучше проиллюстрируют вопрос, чем дальнейшее общее рассмотрение. Заметим сразу же, что мы не будем слишком заботиться о тонкостях (таких, как вопрос о существовании данного преобразования!). Мы вернемся к ним, после того как поясним на примерах общие черты метода.

Преобразование Фурье и ядра вида $v(x-x_0)$. Прежде всего отметим, что область изменения независимой переменной в преобразовании Фурье есть весь промежуток от $-\infty$ до $+\infty$, а поэтому наше внимание сначала будет сосредоточено на уравнениях вида

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} w(x \mid x_0)\, \psi(x_0)\, dx_0 \tag{8.5.1}$$

[уравнение Фредгольма второго рода на промежутке $(-\infty < x < \infty)$]. Возьмем теперь преобразования Фурье от обеих частей уравнения. Предполагая, что эти преобразования существуют (в дальнейшем мы будем более осторожны; настоящее рассмотрение упрощено, с тем чтобы не затемнять центральную идею деталями), мы находим

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \lambda \mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} w(x \mid x_0)\, \psi(x_0)\, dx_0\right].$$

Чтобы найти преобразование Фурье

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} w(x \mid x_0)\, \psi(x_0)\, dx_0\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} w(x \mid x_0)\, \psi(x_0)\, dx_0,$$

мы выразим $\psi(x_0)$ через $\Psi(k_0)$ при помощи формулы обращения

$$\psi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_0x_0} \Psi(k_0)\, dk_0.$$

Затем запишем

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} w(x \mid x_0)\, \psi(x_0)\, dx_0\right] = \int_{-\infty}^{\infty} W(k \mid k_0)\, \Psi(k_0)\, dk_0,$$

где

$$W(k \mid k_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_0x_0} w(x \mid x_0) e^{ikx} dx. \tag{8.5.2}$$

Преобразованное интегральное уравнение имеет вид

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} W(k \mid k_0) \Psi(k_0) dk_0. \tag{8.5.3}$$

Применение преобразования имеет смысл, если новое ядро проще старого. Часто случается, что довольно сложная функция может быть представлена в виде интеграла Фурье от функции сравнительно простого вида.

Из уравнения (8.5.3) явствует, что если $W(k \mid k_0)$ имеет вид

$$W(k \mid k_0) = \sqrt{2\pi}\, V(k)\, \delta(k - k_0), \tag{8.5.4}$$

где δ — дельта-функция Дирака, то преобразованное интегральное уравнение решается немедленно. В этом случае уравнение (8.5.3) переходит в уравнение

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \sqrt{2\pi}\, \lambda V(k) \Psi(k).$$

Это уже простое алгебраическое уравнение относительно $\Psi(k)$:

$$\Psi(k) = \frac{\Phi(k)}{1 - \sqrt{2\pi}\, \lambda V(k)} \tag{8.5.5}$$

Применяя теперь формулу обращения Фурье, можно получить $\psi(x)$.

Требование, чтобы преобразованное ядро было диагональным (т. е. было пропорциональным дельта-функции от $k - k_0$), накладывает определенные ограничения на вид исходного ядра $w(x \mid x_0)$. Если мы научимся распознавать ядра, подчиняющиеся этим ограничениям, то мы будем в состоянии распознавать те интегральные уравнения, которые стоит подвергать преобразованию Фурье. Выражение (8.5.2) для преобразованного ядра является двойным преобразованием Фурье по обеим координатам x и x_0; его обращением служит

$$w(x \mid x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} W(k \mid k_0) e^{ik_0x_0} dk\, dk_0.$$

Подставляя частное выражение (8.5.4) в это уравнение, получаем

$$w(x \mid x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(k) e^{-ikx} dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_0x_0} \delta(k - k_0) dk_0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(k) e^{ik(x_0 - x)} dk = v(x - x_0), \tag{8.5.6}$$

где

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(k) e^{-ikx} dk$$

— преобразование Фурье функции V. Следовательно, *уравнение Фредгольма второго рода* (где переменная меняется от $-\infty$ до ∞) *может быть упрощено при помощи преобразования Фурье, если его ядро является функцией от разности* $(x - x_0)$.

Преобразование Ганкеля. Если переменные меняются в промежутке от 0 до ∞, то мы можем испробовать преобразование Ганкеля [см. формулу (6.3.62)]:

$$\mathscr{H}(f) = F(k) = \int_0^\infty f(x) J_0(kx)\, x\, dx. \tag{8.5.7}$$

Формула обращения для него имеет вид

$$f(x) = \int_0^\infty F(k) J_0(kx)\, k\, dk = \mathscr{H}(F). \tag{8.5.8}$$

Если применить преобразование Ганкеля к уравнению

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lambda \int_0^\infty w(x \mid x_0)\, \psi(x_0)\, x_0\, dx_0, \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

то

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \lambda \mathscr{H}\left[\int_0^\infty w(x \mid x_0)\, \psi(x_0)\, x_0\, dx_0\right],$$

или

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \lambda \int_0^\infty W(k \mid k_0)\, \Psi(k_0)\, k_0\, dk_0,$$

где

$$W(k \mid k_0) = \int_0^\infty x\, dx \int_0^\infty [J_0(kx)\, w(x \mid x_0)\, J_0(k_0 x_0)]\, x_0\, dx_0. \tag{8.5.9}$$

Обращением этого двойного преобразования Ганкеля будет

$$w(x \mid x_0) = \int_0^\infty k\, dk \int_0^\infty k_0 J_0(kx)\, W(k \mid k_0)\, J_0(k_0 x_0)\, dk_0.$$

Как и раньше, для того чтобы это преобразование было полезным для нас, преобразованное ядро W должно быть диагональным:

$$W(k \mid k_0) = (1/k)\, V(k)\, \delta(k - k_0).$$

Отсюда следует соотношение, которому должно подчиняться первоначальное ядро w:

$$w(x \mid x_0) = \int_0^\infty J_0(kx)\, V(k)\, J_0(kx_0)\, k\, dk. \tag{8.5.10}$$

Это ограничение не может быть выражено в такой же простой форме, как его аналог для преобразования Фурье, и, таким образом, труднее охарактеризовать те ядра, которые подчиняются этому ограничению.

Приведем два примера таких ядер:

(а) $$V(k) = e^{-p^2k^2}, \quad w(x \mid x_0) = \frac{1}{2p^2} e^{-(x^2+x_0^2)/4p^2} I_0\left(\frac{xx_0}{2p^2}\right),$$

где I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента;

(б) $$V(k) = e^{-ak}, \quad w(x \mid x_0) = (1/\pi\sqrt{xx_0})\, Q_{-1/2}[(x^2 + x_0^2 + a^2)/2xx_0],$$

де Q_n — второе решение уравнения Лежандра [см. формулу (5.3.29)].

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что ядро $w(x\ x_0)$, удовлетворяющее уравнению (8.5.10), симметрично, т. е.

$$w(x\,|\,x_0) = w(x_0\,|\,x).$$

Чтобы получить более определенную информацию, разложим $J_0(kx)$ в формуле (8.5.10) в степенной ряд:

$$w(x\,|\,x_0) = \sum_m \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\int_0^\infty k^{2m+1}V(k)\,J_0(kx_0)\,dk.$$

Пусть $V(k)$ — преобразование Ганкеля от $v(x)$, т. е.

$$v(x_0) = \int_0^\infty kV(k)\,J_0(kx_0)\,dk.$$

Мы можем выразить интеграл более общего вида через $v(x)$, заметив, что

$$\left[\frac{d^2}{dx_0^2} + \frac{1}{x_0}\frac{d}{dx_0}\right]v = \int_0^\infty k^3V(k)\,J_0(kx_0)\,dk.$$

Следов тельно,

$$\left[\frac{d^2}{dx_0^2} + \frac{1}{x_0}\frac{d}{dx_0}\right]^m v = \int_0^\infty k^{2m+1}V(k)\,J_0(kx_0)\,dk$$

и

$$w(x\,|\,x_0) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\left[\frac{d^2}{dx_0^2} + \frac{1}{x_0}\frac{d}{dx_0}\right]^m v(x_0). \qquad (8.5.11)$$

Итак, убедиться в том, что преобразование Ганкеля заданного ядра является диагональным, можно, проверив, что w симметрично по x и x_0 и что коэффициенты в разложении w по степеням x имеют форму (8.5.11).

Ядро $v(x-x_0)$ в бесконечной области. Преобразование Фурье (8.5.5) решения уравнения Фредгольма второго рода (8.5.1) с ядром $w(x\,|\,x_0) = v(x-x_0)$ можно также получить более прямым путем при помощи теоремы о свертке [см. (4.8.25)]:

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^\infty v(x-x_0)\,\psi(x_0)\,dx_0\right] = \sqrt{2\pi}\,V(k)\,\Psi(k).$$

Преобразование Фурье уравнения (8.5.1) в силу этой теоремы имеет вид

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \sqrt{2\pi}\lambda V(k)\,\Psi(k). \qquad (8.5.12)$$

Разрешая (8.5.12) относительно $\Psi(k)$, получаем выражение (8.5.5). Такой подход возможен только в том случае, если существует область плоскости комплексного переменного k, в которой равенство (8.5.12) выполняется.

В § 4.8 мы видели, что интегралы, являющиеся преобразованиями Фурье, во многих случаях не сходятся во всей плоскости комплексного переменного k. В большинстве случаев интеграл дает представление преобразования только в полосе плоскости k, ограниченной сверху или снизу или и сверху и снизу прямыми, параллельными действительной оси. Внутри этой полосы преобразование всюду аналитично; наличие особенностей определяет верхнюю и нижнюю границы полосы. Следовательно, когда мы имеем дело с урав-

нением, в которое входят преобразования Фурье нескольких функций, мы должны заботиться о том, чтобы их полосы аналитичности имели общую часть.

В § 4.8 мы видели также, что преобразование Фурье функции $\varphi(x)$ можно обобщить, введя две функции, аналитичные в двух различных полосах плоскости k. Например, если интеграл $\int\limits_0^\infty \varphi(x)\, e^{-\tau x}\, dx$ сходится только при $\tau \geqslant \tau_0'$, а интеграл $\int\limits_{-\infty}^0 \varphi(x)\, e^{-\tau x}\, dx$ — только при $\tau \leqslant \tau_1'$, то мы видели, что φ можно выразить следующим образом [см. уравнение (4.8.19)]:

$$\varphi(x) = \frac{1i}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int\limits_{-\infty+i\tau_0'}^{\infty+i\tau_0'} \Phi_+(k)\, e^{-ikx}\, dk + \int\limits_{-\infty+i\tau_1'}^{\infty+i\tau_1'} \Phi_-(k)\, e^{-ikx}\, dk \right\}, \quad (8.5.13)$$

где Φ_+ аналитична всюду в полосе $\operatorname{Im} k > \tau_0'$, а Φ_- аналитична всюду в полосе $\operatorname{Im} k < \tau_1'$. В этом случае желательно, чтобы полоса, в которой аналитично преобразование V, имела бы общую часть (перекрывалась) с полосой, в которой аналитична функция Φ_+, а также с полосой, в которой аналитична функция Φ_-.

Подобным же образом преобразование Фурье неизвестной функции ψ может появиться в обобщенном виде, т. е. в виде двух функций, одна из которых Ψ_+ аналитична всюду в полосе $\operatorname{Im} k > \tau_0''$, а другая Ψ_- — аналитична при $\operatorname{Im} k < \tau_1''$. Пусть преобразование $V(k)$, как и в предыдущем параграфе, аналитично всюду в полосе

$$\tau_1''' < \operatorname{Im} k < \tau_0''', \quad (8.5.14)$$

причем

$$\tau_1''' < \tau_1' \text{ и } \tau_1'', \quad \tau_0''' > \tau_0' \text{ и } \tau_0''.$$

При этих условиях формулу обращения (8.5.13) можно применить ко всему интегральному уравнению, и мы получаем

$$\int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \Psi_+(k)\, e^{-ikx}\, dk + \int\limits_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} \Psi_-(k)\, e^{-ikx}\, dk =$$

$$= \int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \Phi_+(k)\, e^{-ikx}\, dk + \int\limits_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} \Phi_-(k)\, e^{-ikx}\, dk +$$

$$+ \int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \Psi_+(k)\, [\sqrt{2\pi}\lambda V(k)]\, e^{-ikx}\, dk + \int\limits_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} \Psi_-(k)\, [\sqrt{2\pi}\lambda V(k)]\, e^{-ikx}\, dk,$$

или

$$\int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} [(1-\sqrt{2\pi}\lambda V)\, \Psi_+ - \Phi_+]\, e^{-ikx}\, dk +$$

$$+ \int\limits_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} [(1-\sqrt{2\pi}\lambda V)\, \Psi_- - \Phi_-]\, e^{-ikx}\, dk = 0. \quad (8.5.15)$$

Здесь τ_0 больше чем $\max(\tau_0', \tau_0'')$, но меньше чем τ_0''', а τ_1 меньше чем $\min(\tau_1', \tau_1'')$, но больше чем τ_1'''. Тогда условие теоремы, сформулированной на стр. 439, выполнено и мы можем заключить, что

$$[(1-\sqrt{2\pi}\lambda V)\, \Psi_+ - \Phi_+] + [(1-\sqrt{2\pi}\lambda V)\, \Psi_- - \Phi_-] = 0.$$

В силу этой же теоремы не только сумма двух подинтегральных функций должна быть равна нулю, но, кроме того, каждое слагаемое в отдельности должно быть аналитично во всей полосе $\tau_0 \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant \tau_1$. Таким образом, подинтегральная функция

$$(1-\sqrt{2\pi}\lambda V)\,\Psi_+ - \Phi_+$$

должна быть равна некоторой функции $S_+(k)$, аналитичной в полосе $\tau_0 \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant \tau_1$ и настолько быстро стремящейся к нулю, когда $|\operatorname{Re} k| \to \infty$, что интегралы в (8.5.15) сходятся. Тогда, для того чтобы сумма двух подинтегральных функций равнялась нулю, необходимо

$$[(1-\sqrt{2\pi}\,\lambda V)\,\Psi_- - \Phi_-] = S_-(k) = -S_+(k).$$

Следовательно, уравнению (8.5.15) эквивалентна пара уравнений

$$\Psi_+(k) = \frac{\Phi_+(k)+S_+(k)}{1-\sqrt{2\pi}\,\lambda V(k)}, \quad \Psi_-(k) = \frac{\Phi_-(k)+S_-(k)}{1-\sqrt{2\pi}\,\lambda V(k)}, \tag{8.5.16}$$

где $S_+ = -S_-$ — функция, аналитичная всюду в полосе $\tau_0 \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant \tau_1$. Эти уравнения сводятся к уравнению (8.5.5), если τ_0' и τ_1' можно положить равными нулю, так что $\Phi_+ = \Phi_-$ (в этом случае S_+ должна равняться S_- и поэтому обе должны обращаться в нуль). Подставляя в формулу обращения (8.5.13) выражения (8.5.16) для $\Psi_+(k)$ и $\Psi_-(k)$, получаем решение в виде

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \frac{\Phi_+ e^{-ikx}}{1-\sqrt{2\pi}\,\lambda V}\,dk + \int\limits_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} \frac{\Phi_- e^{-ikx}}{1-\sqrt{2\pi}\,\lambda V}\,dk + \right.$$
$$\left. + \oint \frac{S_+ e^{-ikx}}{1-\sqrt{2\pi}\,\lambda V}\,dk\right\}. \tag{8.5.17}$$

Первые два интеграла соответствуют установившемуся решению (частное решение) неоднородного дифференциального уравнения, а последний интеграл, взятый по замкнутому контуру, лежащему внутри полосы аналитичности функций V и S_+, соответствует «переходному» решению, которое существует и в случае, когда $\varphi = 0$.

Однородное уравнение. Изучим прежде всего «переходное» решение однородного уравнения

$$\psi(x) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x-x_0)\,\psi(x_0)\,dx_0. \tag{8.5.18}$$

Согласно (8.5.17), решением этого уравнения служит

$$\psi_c(x) = \oint \frac{S_+(k)\,e^{-ikx}}{1-\sqrt{2\pi}\,\lambda V(k)}\,dk, \tag{8.5.19}$$

где $V(k)$ — преобразование Фурье функции $v(z)$, а замкнутый путь интегрирования лежит внутри полосы аналитичности $V(k)$, $\tau_1''' < \operatorname{Im} k < \tau_0'''$, причем S_+ аналитична всюду внутри этой полосы. Таким образом, интеграл (8.5.19) равен нулю, если только функция $[1-\sqrt{2\pi}\lambda V(k)]$ не имеет нулей или точек разветвления внутри указанной полосы.

Такое поведение не является неожиданным, так как из § 8.2 известно, что ненулевые решения однородного уравнения появляются только при некоторых определенных значениях λ, называемых собственными значениями. В настоящем случае дело обстоит таким образом, что собственные значения λ заполняют некоторые непрерывные полосы; это происходит потому, что промежуток интегрирования бесконечен и, следовательно, уравнение

является сингулярным [см. уравнение (8.2.55)]. Допустимыми будут все значения λ, при которых функция $(1-\sqrt{2\pi}\lambda V)$ имеет внутри полосы аналитичности один или более нулей. Для большинства значений λ, при которых существуют ненулевые решения, нули функции $(1-\sqrt{2\pi}\lambda V)$ являются простыми, функция стремится к нулю линейно вместе с $k-k_r$, так что особенности подинтегральной функции в выражении (8.5.19) обычно оказываются простыми полюсами. Предположим, что внутри данной полосы лежат полюсы $k_0, k_1, \ldots, k_r, \ldots, k_n$ (каждый из них является функцией от λ), и пусть вычет множителя $S_+/(1-\sqrt{2\pi}\lambda V)$ в точке k_r равен $A_r/2\pi i$; тогда

$$\psi_c(x)=\sum_{r=0}^{n} A_r e^{-ik_r x}. \tag{8.5.20}$$

(Может оказаться, что некоторые отдельные значения λ являются нулями $1-\sqrt{2\pi}\lambda V$ высшего порядка, и в этом случае в выражении для ψ появятся члены вида $B_s x^{t-1} e^{-ik_s x}$.) При этом постоянные A_r произвольны, так как до сих пор S_+ является произвольной аналитической функцией от k. Значения A_r могут быть определены, если заданы начальные или граничные условия, совершенно так же, как в случае дифференциального уравнения. В некоторых случаях приходится выбирать известное число отношений коэффициентов таким образом, чтобы выражение (8.5.20) было решением первоначального интегрального уравнения; это легко сделать, подставляя (8.5.20) в (8.5.18).

Может оказаться поучительным проверить, что $A_r e^{-ik_r x}$ является решением однородного уравнения (8.5.18). Непосредственной подстановкой получаем, учитывая, что $V(k)$ является преобразованием Фурье функции $v(z)$,

$$A_r e^{-ik_r x}=\lambda A_r \int_{-\infty}^{\infty} v(x-x_0)\, e^{ik_r x_0}\, dx_0 =$$

$$=\lambda A_r \int_{-\infty}^{\infty} v(y)\, e^{-ik_r(x-y)}\, dy = A_r \sqrt{2\pi}\lambda V(k_r)\, e^{-ik_r x}.$$

Поэтому $A_r e^{-ik_r x}$ будет решением (8.5.18), если

$$1-\sqrt{2\pi}\lambda V(k_r)=0. \tag{8.5.21}$$

Последнее уравнение, очевидно, удовлетворяется, так как k_r с самого начала было определено как корень этого уравнения.

Пример. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\psi(x)=Ae^{\alpha|x|}+\lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x_0|}\psi(x_0)\, dx_0. \tag{8.5.22}$$

Начнем с решения соответствующего однородного уравнения

$$\chi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x_0|}\chi(x_0)\, dx_0 \tag{8.5.23}$$

[это решение дается равенством (8.5.20)]. Нам необходимо найти нули разности $1-\lambda\sqrt{2\pi}V$, где V — преобразование Фурье функции $e^{-|x|}$. Имеем

$$V(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{ikx}\, dx, \quad \text{или} \quad V(k)=\frac{\sqrt{2/\pi}}{1+k^2}.$$

Таким образом, $V(k)$ аналитична в полосе $|\operatorname{Im} k| < 1$. Следовательно,

$$1 - \sqrt{2\pi}\lambda V = [k^2 - (2\lambda - 1)]/(1 + k^2).$$

Эта функция имеет простые нули при $k = \pm k_0$, где $k_0 = \sqrt{2\lambda - 1}$. Значит, решениями однородного уравнения являются функции

$$\chi = e^{\pm ik_0 x}, \tag{8.5.24}$$

если только точки $\pm k_0$ лежат внутри полосы регулярности V, $|\operatorname{Im} k_0| < 1$, а это соответствует условию $(\operatorname{Im}\lambda)^2 < 2\operatorname{Re}\lambda$. Эти решения можно проверить непосредственно подстановкой в первоначальное интегральное уравнение для χ или сведением этого уравнения к дифференциальному уравнению посредством двукратного дифференцирования обеих частей, что дает

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + k_0^2\chi = 0.$$

Теперь мы рассмотрим решение неоднородного уравнения, представленное в формуле (8.5.17) двумя первыми членами. С этой целью потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$\Phi_+ = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{\alpha x} e^{ikx}\, dx = -\frac{A}{\sqrt{2\pi}\,(\alpha + ik)}, \quad \operatorname{Im} k > \alpha,$$

$$\Phi_- = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha x} e^{ikx}\, dx = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\,(ik - \alpha)}, \quad \operatorname{Im} k < -\alpha.$$

Решение (8.5.17) имеет смысл только при $\alpha < 1$. Тогда

$$\psi(x) = \frac{A}{2\pi i}\left\{ -\int_{-\infty+i\tau_0''}^{\infty+i\tau_0''} \frac{(1+k^2)\, e^{-ikx}}{(k^2 - k_0^2)(k - i\alpha)}\, dk + \int_{-\infty+i\tau_1''}^{\infty+i\tau_1''} \frac{(1+k^2)\, e^{-ikx}}{(k^2 - k_0^2)(k + i\alpha)}\, dk \right\}, \tag{8.5.25}$$

причем к этому выражению мы можем добавить любое решение однородного уравнения, т. е. любую линейную комбинацию двух решений, задаваемых формулой (8.5.24). Пределы интегрирования удовлетворяют условиям $\tau_0'' < 1$, $\tau_1'' > -1$, как это показано на рис. 8.3. Рассмотрим два случая: $x > 0$ и $x < 0$. В первом случае мы можем добавить к контуру каждого из интегралов по полуокружности, расположенной в нижней полуплоскости, и получить таким образом замкнутый контур. Затем эти интегралы вычисляются при помощи интегральной формулы Коши. Второй интеграл обращается в нуль, так как все особенности подинтегральной функции находятся вне контура. Первый член вычисляется легко, и мы получаем

$$\psi_+ = A\left\{ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + k_0^2} e^{\alpha x} + \frac{(k_0^2 + 1)\, e^{-ik_0 x}}{2k_0\,(k_0 - i\alpha)} + \frac{(k_0^2 + 1)\, e^{ik_0 x}}{2k_0\,(k_0 + i\alpha)} \right\} =$$

$$= A\left\{ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + k_0^2} e^{\alpha x} + \frac{k_0^2 + 1}{k_0\sqrt{\alpha^2 + k_0^2}} \cos\left[k_0 x - \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{k_0}\right)\right]\right\}, \quad x > 0.$$

При $x < 0$ полуокружность лежит в верхней полуплоскости, так что отличен от нуля только второй интеграл:

$$\psi_- = A\left\{ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + k_0^2} e^{-\alpha x} + \frac{k_0^2 + 1}{k_0\sqrt{\alpha^2 + k_0^2}} \cos\left[k_0 x + \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{k_0}\right)\right]\right\}, \quad x < 0.$$

Комбинируя эти два выражения, мы получаем

$$\psi = A\left\{\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+k_0^2}e^{\alpha|x|}+\frac{k_0^2+1}{k_0\sqrt{\alpha^2+k_0^2}}\cos\left[k_0|x|-\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{k_0}\right)\right]\right\}. \quad (8.5.26)$$

Ясно, что функция ψ непрерывна и равна A при $x=0$; однако ее первая производная разрывна. Этот скачок при $x=0$ нельзя изменить, добавляя решение однородного уравнения, так как такое решение может

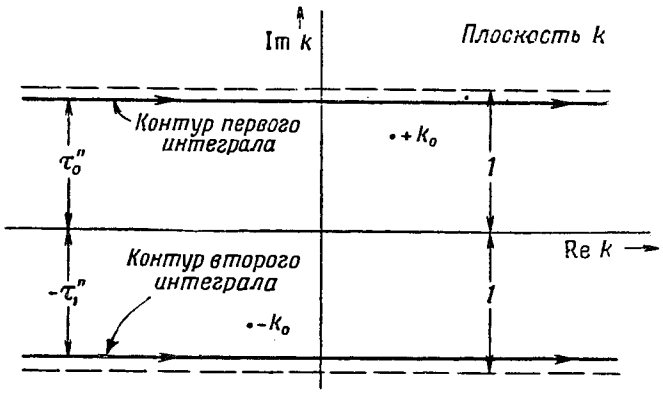

Рис. 8.3. Контуры интегрирования для формулы (8.5.25).

изменить только значение ψ при $x=0$. Заметим, что к интегралам, входящим в выражение (8.5.25) и образующим частное решение, всегда можно добавить «переходную» функцию χ так, чтобы значение $\psi(0)$ сделалось равным A.

Проведенный выше анализ применим, если только $V(k)$ аналитична в полосе, содержащей вещественную ось плоскости k. Единственной трудностью, которая может здесь встретиться, является вычисление интегралов, входящих в обращение преобразований Φ_+, Φ_-, V.

Точки ветвления. Не представляет больших трудностей распространить эти результаты на случай, когда $V(k)$ имеет точки ветвления внутри полосы, содержащей вещественную ось плоскости k. Однако здесь существенно наличие полосы, в которой аналитичны $V(k)$ и Φ_+, и аналогичной полосы для $V(k)$ и Φ_-. Если эти условия выполнены, то необходимо только ввести разрезы и убедиться, что в процессе вычисления мы не интегрируем по контурам, пересекающим линии разреза. Это может породить известные трудности при выражении $\psi(x)$ через Ψ_+ и Ψ_-, так как вычислять интегралы в формуле обращения при помощи интегральной формулы Коши теперь уже невозможно. Появляются интегралы вдоль линии разреза, которые в одних случаях легко выражаются через элементарные функции, а в других — нет.

В связи с этим важно вспомнить, что преобразование Фурье содержит информацию об асимптотическом поведении функции $\psi(x)$. На основании результатов, изложенных на странице 437, мы знаем, что

$$\psi_+(k)\simeq\frac{\psi_+(0)}{\sqrt{2\pi}(-ik)}, \quad \sigma\to\infty, \quad \psi_+(0)\neq 0, \quad k=\sigma+i\tau,$$

или

$$-i\sqrt{2\pi}k\Psi_+(k)\simeq\psi_+(0).$$

В рассмотренном выше примере

$$\Psi_+(k)\simeq-(A/ik\sqrt{2\pi}), \quad \sigma\to\infty.$$

Следовательно, $\psi(0)=A$, что согласуется с результатом, полученным из формулы (8.5.26) для полного решения.

Ядро $v(x+x_0)$ в неограниченной области. Здесь также можно применить теорему о свертке. Мы вновь можем представить $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ при помощи формулы обращения (8.5.13). Представление интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x+x_0)\,\psi(x_0)\,dx_0$$

получается заменой переменной интегрирования x_0 на $-\xi_0$, а затем применением теоремы о свертке. Мы находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x+x_0)\,\psi(x_0)\,dx_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0}\Psi_-(-k)\,[\sqrt{2\pi}\,V(k)]\,e^{-ikx}\,dk+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1}\Psi_+(-k)\,[\sqrt{2\pi}\,V(k)]\,e^{-ikx}\,dk.$$

Здесь предполагается, что функция $\Psi_-(-k)$, так же как $\Phi_+(k)$ и $\Psi_+(k)$, аналитична при $\operatorname{Im}k\geqslant\tau_0$. Соответственно, функции $\Psi_+(-k)$, $\Phi_-(k)$ и $\Psi_-(k)$ предполагаются аналитическими при $\operatorname{Im}k\leqslant\tau_1$. Заметим, что если $\Phi_+(k)$ аналитична при $\operatorname{Im}k\geqslant\tau_0'$, то $\Phi_+(-k)$ аналитична при $\operatorname{Im}k\leqslant-\tau_0'$. Таким образом, уравнение, соответствующее уравнению, следующему за (8.5.15), имеет вид

$$\{\Psi_+(k)-\sqrt{2\pi}\lambda V(k)\;\Psi_-(-k)-\Phi_+(k)\}+$$
$$+\{\Psi_-(k)-\sqrt{2\pi}\lambda V\;(k)\,\Psi_+(-k)-\Phi_-(k)\}=0.$$

Члены, заключенные в скобки, аналитичны в некоторой полосе, параллельной вещественной оси, как и в (8.5.15). Опуская члены S_+ и S_-, фигурирующие в уравнениях (8.5.16) и порождающие, как мы убедимся ниже, решения однородного уравнения, получаем частные решения неоднородного уравнения. Следовательно,

$$\Psi_+(k)-\sqrt{2\pi}\lambda V(k)\,\Psi_-(-k)=\Phi_+(k),$$

$$\Psi_-(k)-\sqrt{2\pi}\lambda V(k)\,\Psi_+(-k)=\Phi_-(k).$$

Заменим во втором из этих равенств k на $-k$. Это можно сделать только при условии, что функции $\Phi_-(-k)$ и $V(-k)$ аналитичны в области, где аналитичны как $\Phi_+(k)$, так и $V(k)$. Теперь второе уравнение записывается так:

$$\Psi_-(-k)-\sqrt{2\pi}\lambda V(-k)\,\Psi_+(k)=\Phi_-(-k).$$

Разрешая полученную пару уравнений относительно $\Psi_+(k)$, находим

$$\Psi_+(k)=\frac{\Phi_+(k)+\sqrt{2\pi}\lambda V(k)\,\Phi_-(-k)}{1-2\pi\lambda^2V(k)\,V(-k)}\,. \tag{8.5.27}$$

Аналогично

$$\Psi_-(k)=\frac{\Phi_-(k)+\sqrt{2\pi}\lambda V(k)\,\Phi_+(-k)}{1-2\pi\lambda^2V(k)\,V(-k)}\,. \tag{8.5.28}$$

Формула (8.5.17), полученная для ядра $v(x-x_0)$, заменяется теперь формулой

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0}\left[\frac{\Phi_+(k)+\sqrt{2\pi}\lambda V(k)\Phi_-(-k)}{1-2\pi\lambda^2V(k)V(-k)}\right]e^{-ikx}\,dk+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1}\left[\frac{\Phi_-(k)+\sqrt{2\pi}\lambda V(k)\Phi_+(-k)}{1-2\pi\lambda^2V(k)V(-k)}\right]e^{-ikx}\,dk. \qquad (8.5.29)$$

В первом интеграле подинтегральная функция аналитична при $\operatorname{Im}k\geqslant\tau_0$, во втором — при $\operatorname{Im}k\leqslant\tau_1$.

Решение *однородного уравнения* получаем из (8.5.29), заменяя Φ_+ на S_+, Φ_- на S_- и учитывая, что $S_-=-S_+$. Таким образом,

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\oint\left[\frac{S_+(k)-\sqrt{2\pi}\lambda V(k)S_+(-k)}{1-2\pi\lambda^2V(k)V(-k)}\right]e^{-ikx}\,dk,$$

где контур интегрирования расположен внутри области, в которой $V(k)$ и $V(-k)$ аналитичны. Выполнив во втором члене замену переменной интегрирования, мы можем записать ψ в виде

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\oint S_+(k)\left[\frac{1+\sqrt{2\pi}\lambda V(-k)e^{2ikx}}{1-2\pi\lambda^2V(k)V(-k)}\right]e^{-ikx}\,dk. \qquad (8.5.30)$$

Так как обе функции S_+ и $1+\sqrt{2\pi}\lambda V(-k)$ аналитичны в области, ограниченной этим контуром, то решение однородного уравнения может быть представлено в виде ряда

$$\psi=\sum_{r,s}A_{rs}x^{s-1}e^{-ik_rx}, \qquad (8.5.31)$$

где предполагается, что

$$\frac{1}{1-2\pi\lambda^2V(k)V(-k)}=\frac{b_s}{(k-k_r)^s}+\frac{b_{s-1}}{(k-k_r)^{s-1}}+\ldots.$$

Коэффициенты A_{rs} должны быть определены из начальных или граничных условий, но вместе с тем должны выполняться некоторые соотношения между ними, так как выражение (8.5.31) должно удовлетворять исходному интегральному уравнению.

Пример. В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение

$$\psi(x)=Ae^{\alpha|x|}+\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-|x+x_0|}\psi(x_0)\,dx_0.$$

Из результатов, полученных при изучении интегрального уравнения (8.5.22), имеем

$$V(k)=\sqrt{(2/\pi)}/(1+k^2),\quad |\operatorname{Im}k|<1,$$

$$\Phi_+=-A/\sqrt{2\pi}(\alpha+ik),\quad \operatorname{Im}k>\alpha,$$

$$\Phi_-=A/\sqrt{2\pi}(ik-\alpha),\quad \operatorname{Im}k<-\alpha.$$

Рассмотрим прежде всего решение однородного уравнения. Для этого исследуем корни уравнения $1-2\pi\lambda^2V(k)V(-k)=0$, которые даются формулами

$$k=\pm k_0,\quad k_0=\sqrt{2\lambda-1},$$

$$k=\pm ik_1,\quad k_1=\sqrt{2\lambda+1}.$$

На основании (8.5.31) мы можем записать решение однородного уравнения в виде

$$\psi = a_1 e^{-ik_0 x} + a_2 e^{ik_0 x} + b_1 e^{-k_1 x} + b_2 e^{-k_1 x}.$$

Для того чтобы получить соотношения между коэффициентами этого выражения, его необходимо подставить в данное интегральное уравнение. Получаем

$$\psi(x) = \lambda\sqrt{2\pi}\,[a_1 V(k_0)\, e^{ik_0 x} + a_2 V(-k_0)\, e^{-ik_0 x} + b_1 V(-ik_1)\, e^{k_1 x} + b_2 V(ik_1)\, e^{-k_1 x}].$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, получаем две независимые системы уравнений:

$$a_1 - \lambda\sqrt{2\pi} V(-k_0)\, a_2 = 0, \quad \lambda\sqrt{2\pi} V(k_0)\, a_1 - a_2 = 0$$

и

$$b_1 - \lambda\sqrt{2\pi} V(ik_1)\, b_2 = 0, \quad \lambda\sqrt{2\pi} V(-ik_1)\, b_1 - b_2 = 0.$$

Условие существования ненулевых решений — обращение в нуль определителя системы — приводит к уравнению, уже использованному выше для определения k_0 и k_1, и поэтому удовлетворяется автоматически.

Теперь можно найти отношение коэффициентов. Для решений, соответствующих k_0, оно равно

$$\frac{a_2}{a_1} = \lambda\sqrt{2\pi} V(k_0) = 1.$$

Следовательно, $\psi = \cos k_0 x$ является решением однородного уравнения. Аналогично, $\operatorname{ch} k_1 x$ является вторым независимым решением.

Обращаясь теперь к неоднородному уравнению (8.5.29), мы видим, что процесс вычисления интегралов, вполне аналогичный использованному в примере (8.5.22), с применением интегральной формулы Коши не встречает существенных затруднений.

Применения преобразования Лапласа. Из предыдущего изложения можно заключить, что преобразование Лапласа наиболее выгодно применять к интегральным уравнениям, к ядрам которых приложима теорема о свертке для преобразования Лапласа:

$$\mathscr{L}\left[\int_0^x v(x - x_0)\, f(x_0)\, dx_0\right] = V(p)\, F(p),$$

где $V(p)$ и $F(p)$ — преобразования Лапласа функций $v(x)$ и $f(x)$ соответственно. Это наводит на мысль о том, что нам следует рассмотреть интегральное уравнение Вольтерра

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x v(x - x_0)\, f(x_0)\, dx_0, \quad x > 0. \tag{8.5.32}$$

Примеры уравнений Вольтерра, возникающих при решении задач о колебаниях и о поглощении энергии рентгеновских лучей в веществе, мы обсудили на страницах 837, 838.

Здесь мы рассмотрим общий случай. Возьмем преобразование Лапласа от обеих частей уравнения (8.5.32). Допустим, что преобразование функции φ аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \tau_0$ и что область аналитичности преобразования v содержит полосу, параллельную мнимой оси плоскости p

и принадлежащую полуплоскости $\operatorname{Re} p > \tau_0$. В этой полосе

$$F(p) = \Phi(p) + V(p) F(p).$$

Решая относительно $F(p)$, имеем

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - V(p)}. \tag{8.5.33}$$

Следовательно, частное решение уравнения (8.5.32) получается обращением преобразования Лапласа [формула (4.8.32)]

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\tau_0}^{i\infty+\tau_0} \frac{\Phi(p)}{1 - V(p)} e^{px} dp, \quad \operatorname{Re} x > 0. \tag{8.5.34}$$

Однородное уравнение Вольтерра не имеет ненулевых решений, и, таким образом, формула (8.5.34) дает единственное решение уравнения (8.5.32).

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра, получающееся из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + k^2\psi = 0$$

с начальными условиями: $\psi = \psi_0$, $d\psi/dt = v_0$ при $t = 0$. Эквивалентное интегральное уравнение дается формулой (8.1.23):

$$\psi(t) = \psi_0 \left[\frac{\partial G(t \mid t_0)}{\partial t_0} \right]_{t_0=0} - v_0 G(t \mid 0) + k^2 \int\limits_0^{t+} G(t \mid t_0) \psi(t_0)\, dt_0.$$

Функция Грина G определяется из условий

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(t - t_0) \text{ при } t \geqslant \ldots \qquad t \mid t_0) = 0 \text{ при } t < t_0.$$

Отсюда

$$G(t \mid t_0) = (t_0 - t)\, u(t - t_0),$$

где $u(t)$ — единичная функция (см. стр. 778). Подставляя это выражение для G в интегральное уравнение, получаем

$$\psi(t) = \psi_0 + v_0 t + k^2 \int\limits_0^{t+} (t_0 - t)\psi(t_0)\, d t_0, \quad t > 0.$$

Это уравнение имеет теперь вид, как раз пригодный для применения вышеуказанного приема:

$$\varphi(t) = \psi_0 + v_0 t, \quad \Phi(p) = (\psi_0/p) + (v_0/p^2),$$
$$v(t - t_0) = k^2(t_0 - t), \quad V(p) = -k^2/p^2, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Подставляя в решение (8.5.34), получаем

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\tau_0}^{i\infty+\tau_0} \frac{v_0 + p\psi_0}{p^2 + k^2} e^{px} dp, \quad \tau_0 > 0.$$

Этот интеграл мы можем вычислить, добавляя бесконечную полуокружность, как это указано на рис. 8.4, и затем применяя интегральную формулу Коши. Конечно, мы получим уже знакомый результат

$$\psi = \psi_0 \cos kt + (v_0/k) \sin kt.$$

Интегральное уравнение Вольтерра с пределами (x, ∞). Преобразование Лапласа можно применить также к интегральным уравнениям следующего вида:

$$\psi(x) = \varphi(x) + \int_x^\infty v(x - x_0)\,\psi(x_0)\,dx_0, \tag{8.5.35}$$

возникающим в связи с задачами переноса, причем x может обозначать энергию после столкновения, а x_0 — энергию до столкновения (см. § 2.4 и 12.2). Для столкновений с неподвижными системами, не имеющими внутренних степеней свободы, $x_0 \geqslant x$; это означает, что столкновения всегда приводят к уменьшению энергии падающей частицы.

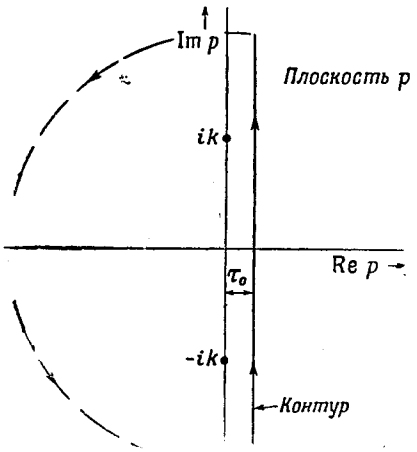

Рис. 8.4. Контур интегрирования для обращения преобразования Лапласа.

Для того чтобы решить уравнение (8.5.35), применяя преобразование Лапласа, необходимо вывести теорему о свертке для выражений вида

$$\int_x^\infty v(x - x_0)\,\psi(x_0)\,dx_0.$$

Мы начнем с теоремы о свертке для преобразования Фурье:

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g(x - x_0)\,\varphi(x_0)\,dx_0\right\} = \sqrt{2\pi}\,G_f(k)\,\Phi_f(k).$$

Пусть $g(x) = v_-(x)$, т. е. $g(x)$ равна $v(x)$ при $x < 0$ и равна нулю при $x > 0$; подобным же образом пусть $\varphi(x) = \psi_+(x)$, т. е. $\varphi(x)$ равна $\psi(x)$ при $x > 0$ и равна нулю при $x < 0$. Тогда приведенное выше уравнение переписывается так:

$$\mathscr{F}\left\{\int_x^\infty v(x - x_0)\,\psi(x_0)\,dx_0\right\} = \sqrt{2\pi}\,[V_-(k)]_f\,[\Psi_+(k)]_f.$$

Для того чтобы перейти от преобразования Фурье к преобразованию Лапласа, вспомним, что $F_l(p) = \sqrt{2\pi}\,[F_+(ip)]_f$. Следовательно,

$$\mathscr{L}\left\{\int_x^\infty v(x - x_0)\,\psi(x_0)\,dx_0\right\} = \sqrt{2\pi}\,[V_-(ip)]_f\,[\Psi_+(p)]_l.$$

Мы можем выразить $[\sqrt{2\pi}V_-(ip)]_f$ через преобразование Лапласа:

$$[\sqrt{2\pi}V_-(ip)]_f = \int_{-\infty}^{0} v(x)\,e^{-px}\,dx, \quad [\sqrt{2\pi}V_-(ip)]_f = \int_0^\infty v(-x)\,e^{px}\,dx.$$

Поэтому, положив $v(-x) = w(x)$, мы получаем

$$[\sqrt{2\pi}\,V_-(ip)]_f = W_l(-p).$$

Окончательно

$$\mathscr{L}\left\{\int_x^\infty v(x-x_0)\,\psi(x_0)\,dx_0\right\}=W_l(-p)\,\Psi_l(p). \tag{8.5.36}$$

Теперь мы можем вернуться к интегральному уравнению (8.5.35). Взяв преобразование Лапласа от обеих частей (начиная с этого момента мы не пишем индекс l, так как мы будем иметь дело только с преобразованием Лапласа), получим

$$\begin{aligned}\Psi(p)&=\Phi(p)+W(-p)\,\Psi(p),\\ \Psi(p)&=\Phi(p)/[1-W(-p)].\end{aligned} \tag{8.5.37}$$

Наконец, выражение

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\tau_0}^{i\infty+\tau_0}\frac{\Phi(p)}{1-W(-p)}\,e^{px}\,dp \tag{8.5.38}$$

является частным решением интегрального уравнения (8.5.35). Следует подчеркнуть, что для того, чтобы решение (8.5.37) или (8.5.38) имело смысл, необходимо, чтобы области аналитичности $W(-p)$ и $\Phi(p)$ перекрывались. Как упоминалось выше, если это установлено только для некоторой определенной области изменения параметров, от которых зависят Φ или W, то иногда оказывается возможным расширить эту область при помощи аналитического продолжения.

В качестве примера, иллюстрирующего этот случай, пусть $\varphi(x)=C$, $v(x)=Ae^{\alpha x}$, A и α вещественны и положительны, так что (8.5.35) сводится к уравнению

$$\psi(x)=C+A\int_x^\infty e^{\alpha(x-x_0)}\,\psi(x_0)\,dx_0.$$

Применим теперь преобразование Лапласа (хотя мы должны отметить, прежде чем погрузимся в этот анализ, что для этого частного вида функции $v(x)$ интегральное уравнение можно свести к дифференциальному уравнению первого порядка, которое легко решается). Фигурирующие в формуле (8.5.38) функции $\Phi(p)$ и $W(-p)$ имеют вид

$$\Phi(p)=C/p,\quad \operatorname{Re}p>0,$$

$$W(-p)=\int_0^\infty e^{px}v(-x)\,dx=A\int_0^\infty e^{(p-\alpha)x}\,dx=A/(\alpha-p),\quad \operatorname{Re}p<\alpha.$$

Заметим, что $W(-p)$ и $\Phi(p)$ имеют общую полосу аналитичности только в случае $\alpha>0$. Равенство (8.5.38) дает

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\tau_0}^{i\infty+\tau_0}\frac{C(p-\alpha)}{p\,[p-(\alpha-A)]}\,e^{px}\,dp,$$

где $0<\tau_0<\alpha$. Мы вновь замыкаем этот контур, добавляя полуокружность, лежащую в левой полуплоскости плоскости p, как показано на рис. 8.4. Тогда интеграл, определяющий ψ, можно вычислить по интегральной формуле Коши, причем простые полюсы имеются при $p=0$ и $p=\alpha-A$ (последний появляется при $\tau_0>\alpha-A$). Этот произвол, связанный с вычетом в точке $\alpha-A$, которую по желанию можно включать или нет, соответствует произволу при выборе переходной функции, т. е. решения однородного

уравнения, которое в случае включения пропорционально разности двух частных решений линейного неоднородного уравнения. Мы получаем

$$\psi(x) = \frac{C\alpha}{\alpha - A} - \frac{C_1 A}{\alpha - A} e^{(\alpha - A)x}.$$

Первый член является частным решением, которое представляет «установившийся процесс», порожденный «источником», соответствующим члену C, если $\alpha < A$. Второй член, пропорциональный $e^{(\alpha - A)x}$, описывает «переходный процесс» и является решением однородного уравнения.

Преобразование Меллина. Мы начнем этот пункт с того, что напомним определение и формулу обращения, приведенные в гл. 4 и задаче 4.48. Преобразование Меллина функции $f(x)$ определяется так:

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx.$$

Если интеграл не существует, то часто оказывается возможным ввести обобщенные («полуплоскостные») преобразования, аналогичные обобщенным преобразованиям, введенным в теории преобразования Фурье:

$$F_-(s) = \int_0^1 f(x)\, x^{s-1}\, dx, \quad F_+(s) = \int_1^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx. \tag{8.5.39}$$

Функция F_- существует при $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, в то время как F_+ существует при $\operatorname{Re} s < \sigma_1$. В том случае, когда $F(s)$ не существует, $\sigma_0 > \sigma_1$; если же $F(s)$ существует, то имеет место противоположное неравенство.

В соответствии с этим формула обращения может быть записана так:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\left\{ \int_{-i\infty+\sigma_0'}^{i\infty+\sigma_0'} \frac{F_-(s)}{x^s}\, ds + \int_{-i\infty+\sigma_1'}^{i\infty+\sigma_1'} \frac{F_+(s)}{x^s}\, ds \right\}, \tag{8.5.40}$$

где $\sigma_0' > \sigma_0$ и $\sigma_1' < \sigma_1$. Теорема о свертке имеет вид

$$\mathscr{M}\left\{ \int_0^\infty \psi(x_0)\, v\left(\frac{x}{x_0}\right) \frac{dx_0}{x_0} \right\} = V(s)\, \Psi(s). \tag{8.5.41}$$

Эта формула наводит на мысль о том, что преобразование Меллина особенно выгодно применять при решении интегральных уравнений следующего типа:

$$\psi(x) = \varphi(x) + \int_0^\infty v\left(\frac{x}{x_0}\right) \psi(x_0) \frac{dx_0}{x_0}. \tag{8.5.42}$$

Анализ, при помощи которого находится решение этого уравнения, до такой степени подобен тому, который был дан для случая преобразования Фурье [см. решение (8.5.17)], что здесь мы можем дать только его результаты:

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\left\{ \int_{-i\infty+\sigma_0'}^{i\infty+\sigma_0'} \frac{\Phi_-}{1-V} \frac{ds}{x^s} + \int_{-i\infty+\sigma_1'}^{i\infty+\sigma_1'} \frac{\Phi_+}{1-V} \frac{ds}{x^s} + \oint \frac{S}{1-V} \frac{ds}{x^s} \right\}, \tag{8.5.43}$$

где контурный интеграл берется по пути, лежащему внутри области $\sigma_0' < \operatorname{Re} p < \sigma_1'$, внутри которой функция S должна быть аналитической. Решение χ соответствующего однородного уравнения выражается именно этим кон-

турным интегралом. Если нули $1-V$ лежат в точках s_r и если эти нули имеют кратность t, то

$$\chi = \sum B_{rt} (\ln x)^{t-1} x^{-s_r}, \tag{8.5.44}$$

где B_{rt} — произвольные постоянные.

В примере на применение преобразования Меллина положим

$$\varphi(x) = Ae^{-\alpha x}, \quad v(x/x_0) = Ce^{-x/x_0};$$

интегральное уравнение (8.5.42) принимает вид

$$\psi(x) = Ae^{-\alpha x} + C \int_0^\infty e^{-x/x_0} \psi(x_0) \frac{dx_0}{x_0}.$$

Преобразования Меллина соответствующих функций равны

$$\Phi(s) = A[\Gamma(s)/\alpha^s], \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$V(s) = C\Gamma(s), \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Нет нужды разбивать Φ на Φ_+ и Φ_-, так как области регулярности Φ и Γ совпадают.

Рассмотрим сначала решения однородного уравнения. Согласно правилу, выражаемому формулой (8.5.44), мы находим, что

$$\chi = \sum_r B_r x^{-s_r}, \tag{8.5.45}$$

где s_r — корни уравнения

$$\Gamma(s_r) = 1/C.$$

Нули выражения $\Gamma(s) - 1/C$ простые; существует бесконечное множество решений.

Неоднородное уравнение имеет частным решением

$$\psi(x) = \frac{A}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma_0'}^{i\infty+\sigma_0'} \frac{\Gamma(s)}{1-C\Gamma(s)} \frac{ds}{(\alpha x)^s}, \quad \sigma_0' > 0.$$

Этот интеграл можно вычислить при помощи интегральной формулы Коши. При $\alpha x > 1$ контур интегрирования замыкается полуокружностью, лежащей в правой полуплоскости. В этом случае единственная особенность подинтегральной функции лежит в точке s_0, в которой $1 - C\Gamma(s_0) = 0$. Тогда

$$\psi = \frac{A}{C(\alpha x)^{s_0} \psi_1(s_0)}, \quad \alpha x > 1, \tag{8.5.46}$$

где $\psi_1(s_0)$ — логарифмическая производная гамма-функции в точке s_0. При $\alpha x < 1$ особенностью оказывается каждый отрицательный корень выражения $1 - C\Gamma(s)$, так что

$$\psi = -\frac{A}{C} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha x)^{s_r} \psi_1(s_r)}, \quad \alpha x < 1. \tag{8.5.47}$$

[Заметим, что эти выражения для ψ не являются решениями однородного уравнения.] Ряд для ψ в области $\alpha x < 1$ сходится весьма быстро, так как корни s_r образуют последовательность отрицательных чисел, абсолютные величины которых возрастают вместе с r.

Метод Винера—Хопфа. Можно расширить класс интегральных уравнений, которые решаются при помощи преобразования Фурье, так, чтобы включить в него следующий тип:

$$\psi(x) = \lambda \int_0^\infty v(x - x_0)\,\psi(x_0)\,dx_0, \tag{8.5.48}$$

так же как и соответствующие неоднородные уравнения первого и второго рода. Важно отметить, что записанное выше уравнение, по предположению, имеет силу для *всех* вещественных значений x, как положительных, так и отрицательных. Для того чтобы этот факт был яснее виден из записи этого уравнения, введем функции ψ_+ и ψ_-, определенные обычным образом:

$$\psi_+(x) = \psi(x) \text{ при } x > 0, \quad \psi_+(x) = 0 \text{ при } x < 0,$$

$$\psi_-(x) = \psi(x) \text{ при } x < 0, \quad \psi_-(x) = 0 \text{ при } x > 0.$$

Тогда уравнение (8.5.48) перепишется так:

$$\psi_+(x) + \psi_-(x) = \lambda \int_0^\infty v(x - x_0)\,\psi_+(x_0)\,dx_0 = \lambda \int_{-\infty}^\infty v(x - x_0)\,\psi_+(x_0)\,dx_0. \tag{8.5.49}$$

Другими словами, как ψ_-, так и ψ_+ можно выразить через ψ_+:

$$\begin{aligned} \psi_-(x) &= \lambda \int_0^\infty v(x - x_0)\,\psi_+(x_0)\,dx_0, \quad x < 0, \\ \psi_+(x) &= \lambda \int_0^\infty v(x - x_0)\,\psi_+(x_0)\,dx_0, \quad x > 0. \end{aligned} \tag{8.5.50}$$

Такие интегральные уравнения, называемые уравнениями *типа Винера—Хопфа*, возникают всякий раз, когда мы имеем дело с граничными задачами, где границы являются полубесконечными, а не бесконечными; последним соответствуют интегральные уравнения, рассмотренные ранее в этом параграфе. Один пример нам дает задача о дифракции волн на полуплоскости, другие примеры будут рассмотрены в гл. 11 и 12.

При изложении метода Винера—Хопфа мы сосредоточим внимание сначала на применяемых здесь формальных операциях и условиях, при которых эти операции законны, а в заключение проиллюстрируем этот метод примерами. Мы сделаем это без подробных, строгих доказательств; многие элементы этих доказательств были изложены в гл. 4. Те дополнения, которые потребуются, будут по мере надобности доказываться в ходе решения проблемы.

Как и при обсуждении ранее изученных в этом параграфе задач, мы предполагаем, что функция $V(k)$, являющаяся преобразованием Фурье функции $v(x)$, регулярна в области

$$-\tau_1 < \operatorname{Im} k < \tau_0,$$

что аналогично условию (8.5.14). Это требование соответствует асимптотическому поведению $v(x)$:

$$v(x) \simeq e^{-\tau_1 x}, \; x \to \infty, \qquad v(x) \simeq e^{\tau_0 x}, \; x \to -\infty.$$

Мы рассматриваем решения уравнения (8.5.48), которые ведут себя подобно $e^{\mu x}$ при $x \to \infty$ (где $\mu < -\tau_1$). Условие в скобках необходимо для сходимости интеграла, входящего в интегральное уравнение. Мы можем опреде-

лить асимптотическую зависимость для ψ_- непосредственно из уравнения (8.5.50):

$$\psi_- \simeq \lambda \int_0^\infty e^{\tau_0(x-x_0)}\psi_+(x_0)\,dx_0 = \lambda e^{\tau_0 x}\int_0^\infty e^{-\tau_0 x_0}\psi_+(x_0)\,dx_0, \qquad x \to -\infty .$$

Следовательно, необходимо, чтобы $\mu < \tau_0$ и чтобы ψ_- вела себя при $x \to -\infty$ как $e^{\tau_0 x}$. Полосой регулярности для Ψ_+ будет полуплоскость $\operatorname{Im} k > \mu$, а для Ψ_- такой полосой будет $\operatorname{Im} k < \tau_0$. Эти полосы показаны на рис. 8.5, на котором можно видеть, что существует полоса $\mu < \operatorname{Im} k < \tau_0$, где все интересующие нас преобразования, V, Ψ_+, Ψ_-, регулярны. Этот результат, как мы увидим, является основным в методе Винера — Хопфа.

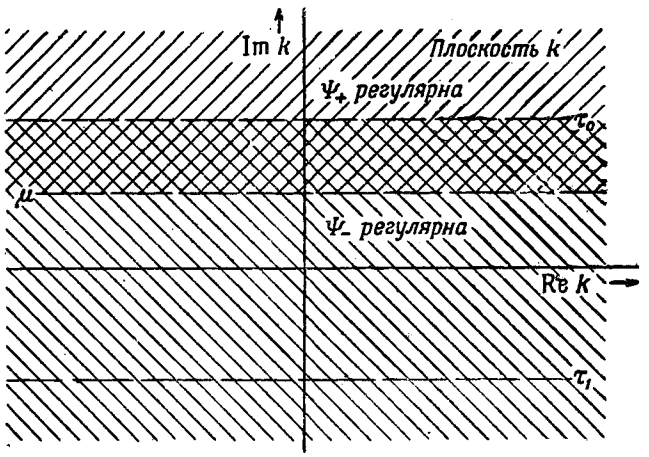

Рис. 8.5. Области регулярности функций Ψ_+ и Ψ_- в плоскости k.

Теперь можно, применяя теорему о свертке, составить преобразование выражения (8.5.49)

$$\Psi_+ + \Psi_- = \sqrt{2\pi}\lambda V \Psi_+,$$

или

$$\Psi_+(1 - \sqrt{2\pi}\lambda V) + \Psi_- = 0. \tag{8.5.51}$$

Для того чтобы определить из этого уравнения как Ψ_+, так и Ψ_-, нужны дополнительные сведения об этом уравнении. Эти сведения можно получить, *разлагая на множители* функцию $1 - \sqrt{2\pi}\lambda V$. Это выражение регулярно в полосе $-\tau_1 < \operatorname{Im} k < \tau_0$. Попытаемся разложить это выражение на множители Υ_+ и $1/\Upsilon_-$ так, чтобы иметь

$$1 - \sqrt{2\pi}\lambda V = \Upsilon_+(k)/\Upsilon_-(k). \tag{8.5.52}$$

Эти множители должны быть регулярными и отличными от нуля соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} k > \mu$ и $\operatorname{Im} k < \tau_0$. Обычно дополнительно требуют, чтобы Υ_+ и Υ_- имели алгебраический рост, а не экспоненциальный. Возможность такого разложения на множители была показана Винером и Хопфом в их оригинальной работе.

В каждой данной задаче это разложение на множители должно быть явно осуществлено. Допуская, что равенство (8.5.52) имеет место, мы можем переписать уравнение (8.5.51) для Ψ_+ и Ψ_- следующим образом:

$$\Psi_+\Upsilon_+ = -\Psi_-\Upsilon_-. \tag{8.5.53}$$

Левая часть этого уравнения регулярна в области $\operatorname{Im} k > \mu$, в то время как правая часть регулярна при $\operatorname{Im} k < \tau_0$. Так как они имеют общую область регулярности $\tau_0 > \operatorname{Im} k > \mu$, в которой они равны, то мы можем утверждать, что $-\Psi_- \Upsilon_-$ является аналитическим продолжением $\Psi_+ \Upsilon_+$ в нижнюю полуплоскость. Следовательно, функция $\Psi_+ \Upsilon_+$ регулярна во всей комплексной плоскости и потому является целой функцией, которую мы и обозначим через $P(k)$.

Приведенного рассуждения совместно с уравнением (8.5.52), очевидно, еще недостаточно для того, чтобы найти вид $\Psi_+ \Upsilon_+$; необходимо еще учесть поведение этой функции при больших k. Заметим, что функция Υ_+ уже выбрана так, что имеет алгебраический рост, т. е. при больших k она ведет себя как полином. Поведение Ψ_+ при больших k определяется поведением $\psi_+(x)$ при $x \to 0^+$. Условие интегрируемости $\psi_+(x)$ в начале координат, необходимое для существования Ψ_+, приводит к асимптотической зависимости

$$\psi_+(k) \simeq 0, \quad |k| \to \infty.$$

Итак, мы видим, что $P(k)$ представляет собой полином степени, меньшей чем порядок роста Υ_+ (так как P/Υ_+ стремится к нулю при больших $|k|$). Этим определяется вид $P(k)$; неопределенные постоянные можно найти подстановкой в исходное уравнение (8.5.48).

Теперь уравнение (8.5.53) можно решить относительно Ψ_+ и Ψ_-:

$$\psi_+ = \frac{P(k)}{\Upsilon_+(k)}, \quad \Psi_- = -\frac{P(k)}{\Upsilon_-(k)}. \tag{8.5.54}$$

Формула обращения имеет вид

$$\psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{P(k)}{\Upsilon_+(k)} e^{-ikx} dk, \quad \mu < \tau < \tau_0. \tag{8.5.55}$$

Если известна функция ψ_+, то ψ_- можно определить подстановкой в (8.5.50) или более прямым путем:

$$\psi_-(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{P(k)}{\Upsilon_-(k)} e^{-ikx} dk, \quad \mu < \tau < \tau_0. \tag{8.5.56}$$

Этим завершается решение интегрального уравнения Винера — Хопфа (8.5.48). Проиллюстрируем теперь эти рассуждения несколькими примерами.

Примеры применения метода. Весьма простой пример доставляет интегральное уравнение

$$\psi(x) = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-|x-x_0|} \psi(x_0)\, dx_0.$$

Преобразование функции $e^{-|x|}$ — функция $V(k)$ — равно

$$V(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+k^2)}, \quad \tau_0 = \tau_1 = 1.$$

Выражение, которое должно быть представлено в виде произведения Υ_+ и $1/\Upsilon_-$, согласно равенству (8.5.52), имеет вид

$$1 - \sqrt{2\pi}\lambda V = \frac{k^2 - (2\lambda - 1)}{k^2 + 1} = \frac{\Upsilon_+}{\Upsilon_-}.$$

Разложение на множители можно осуществить, заметив, что

$$1 - \sqrt{2\pi}\lambda V = \frac{k^2 - (2\lambda - 1)}{k + i} \frac{1}{k - i}.$$

Следовательно,

$$\Upsilon_+ = \frac{k^2-(2\lambda-1)}{k+i}, \quad \Upsilon_- = k-i.$$

Первая из этих функций Υ_+, очевидно, регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im} k > \mu$, где μ меньше чем $\tau_0 = 1$, в то время как Υ_- регулярна и не обращается в нуль при $\operatorname{Im} k < \tau_0$, если только $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и $(\operatorname{Im}\lambda)^2 < 2\operatorname{Re}\lambda$. Следовательно,

$$P(k) = \frac{\Psi_+(k)\,[k^2-(2\lambda-1)]}{k+i} = -(k-i)\,\Psi_-(k).$$

Функция $P(k)$ определяется из того условия, что она должна быть регулярной во всей конечной плоскости комплексного переменного k, в то время как $\Psi_+(k) \to 0$ при $|k| \to \infty$. Из этого условия следует, что в данном примере $P(k)$ должна равняться постоянной C. Она не может расти так быстро, как k, ибо из этого предположения вытекало бы, что $\Psi_+(k) \to 1$. Она не может убывать быстрее чем постоянная, так как отсюда вытекало бы существование особенности (полюса или точки разветвления) в конечной части комплексной плоскости. Теперь мы можем найти Ψ_+ и Ψ_-:

$$\Psi_+ = \frac{C(k+i)}{k^2-(2\lambda-1)}, \qquad \Psi_- = -\frac{C}{k-i}$$

и

$$\psi_+ = C \int\limits_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{k+i}{k^2-(2\lambda-1)}\, e^{-ikx}\, dx.$$

Так как в этом выражении $x > 0$, то мы можем замкнуть контур интегрирования полуокружностью, лежащей в нижней полуплоскости. Применяя интегральную формулу Коши, получаем

$$\psi_+ = -\frac{C}{4\pi i}\left\{\frac{\sqrt{2\lambda-1}+i}{\sqrt{2\lambda-1}}\, e^{-i\sqrt{2\lambda-1}\,x} + \frac{\sqrt{2\lambda-1}-i}{\sqrt{2\lambda-1}}\, e^{i\sqrt{2\lambda-1}\,x}\right\} =$$

$$= D\left\{\cos\left(\sqrt{2\lambda-1}\,x\right) + \frac{\sin\left(\sqrt{2\lambda-1}\,x\right)}{\sqrt{2\lambda-1}}\right\}, \qquad x > 0, \tag{8.5.57}$$

где D — новая постоянная. Таким же способом находим

$$\psi_- = De^x, \quad x < 0. \tag{8.5.58}$$

Конечно, для решения этого уравнения не было необходимости применять метод Винера — Хопфа. Исходя непосредственно из интегрального уравнения, легко убедиться, что при $x > 0$ функция $\psi = \psi_+$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\psi'' + (2\lambda-1)\,\psi = 0, \quad x > 0.$$

При $x < 0$ функция $\psi = \psi_-$ задается так:

$$\psi_- = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-|x-x_0|}\,\psi_+(x_0)\,dx_0, \quad \text{или} \quad \psi_- = \lambda e^x \int\limits_0^\infty e^{-x_0}\,\psi_+(x_0)\,dx_0.$$

Это выражение, очевидно, той же формы, что и (8.5.58). Решение, которое дается равенствами (8.5.57) и (8.5.58), является непрерывным и имеет непрерывную производную при $x = 0$.

Наше разложение на множители не является столь непостижимым, как это может показаться. Прежде всего оно не обязательно единственно, так как условия, налагаемые на $P = \Psi_+\Upsilon_+ = -\Psi_-\Upsilon_-$ и на асимптотический

вид Ψ, не являются вполне жесткими. Тем не менее оказывается, что соотношения между P, Υ_+, Υ_-, Ψ_+ и Ψ_- таковы, что окончательное решение определяется однозначно, независимо от выбора, сделанного вначале. Во многих случаях разложение на множители оказывается *единственным*. Это имеет место в только что приведенном примере. Например, мы могли бы попытаться разложить так:

$$\Upsilon_+ = \frac{[k^2-(2\lambda-1)](k-\beta)}{k+i}, \qquad \Upsilon_- = (k-i)(k-\beta).$$

Если Υ_+ не должна обращаться в нуль в области $\operatorname{Im} k > \mu\,(\mu < 1)$, то следует положить $\operatorname{Im}\beta < \mu\,(\mu < 1)$; но в этом случае $\Upsilon_- = 0$ в точке $k = \beta$, где, по предположению, не должно быть нулей функции Υ_-. Либо мы могли бы испробовать

$$\Upsilon_+ = \frac{k^2-2\lambda+1}{(k+i)(k-\beta)}, \qquad \Upsilon_- = \frac{k-i}{k-\beta},$$

но тогда появился бы полюс в той области плоскости k, где его не должно быть. Следовательно, единственная комбинация, для которой нули и полюсы функции Υ_+ остаются ниже прямой $\operatorname{Im} k = 1$, а нули и полюсы Υ_- выше $\operatorname{Im} k = 1$, — это та, которую мы выбрали, если только мы хотим ограничиться функциями, стремящимися к бесконечности при $|k| \to \infty$ как конечная степень k.

В качестве второго примера мы обратимся к задаче, рассмотренной Хейнсом:

$$\psi(x) = \lambda \int_0^\infty \frac{\psi(x_0)\,dx_0}{\operatorname{ch}[(x-x_0)/2]}.$$

Преобразование Фурье от $\operatorname{sech}[(x-x_0)/2]$ можно легко получить при помощи контурного интегрирования.

Функция, подлежащая разложению на множители, такова:

$$1-\sqrt{2\pi}\,\lambda V = 1-\frac{\lambda\pi}{\operatorname{ch}\pi k} = \frac{\operatorname{ch}\pi k-\lambda\pi}{\operatorname{ch}\pi k}.$$

Пусть $\cos\pi\alpha = \lambda\pi$, где $|\alpha| < 1/2$. Тогда

$$\operatorname{ch}\pi k - \cos\pi\alpha = 2\sin\frac{\pi(\alpha+ik)}{2}\sin\frac{\pi(\alpha-ik)}{2}.$$

Эти множители можно в свою очередь выразить непосредственно через их нули, представляя их в виде бесконечных произведений [формула (4.3.8)], или эквивалентным образом при помощи гамма-функции, используя соотношение [формула (4.5.33)]

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Следовательно,

$$\sin\left[\pi\left(\frac{\alpha+ik}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}ik\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}ik\right)}$$

и подобным же образом

$$\sin\left[\pi\left(\frac{\alpha-ik}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}ik\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}ik\right)}.$$

Значит,

$$\operatorname{ch}\pi k=\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-ik\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+ik\right)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$1-\sqrt{2\pi}\,\lambda V=\frac{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}-ik\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+ik\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+ik}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-ik}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha+ik}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha-ik}{2}\right)}.$$

Исходя из этого, мы можем с некоторой степенью произвола написать

$$\Upsilon_+=\frac{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}-ik\right)(\alpha+ik)\,e^{\chi(k)}}{\Gamma\left(\frac{\alpha-ik}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha+ik}{2}\right)},$$

$$\Upsilon_-=\frac{\Gamma\left(1+\frac{\alpha+ik}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha-ik}{2}\right)e^{\chi(k)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+ik\right)}.$$

Функция $\chi(k)$ определяется из условия, чтобы Υ_+, Υ_- имели алгебраический рост при больших значениях k. Для исследования их поведения при больших k применим формулу Стирлинга:

$$\ln\Gamma(z)\simeq\left[z-\frac{1}{2}\right]\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi,\quad z\to\infty.$$

Тогда

$$\ln\Upsilon_+\simeq\chi-ik\ln 2+\ln(ik)+\ldots,\quad |k|\to\infty.$$

Для того чтобы функция Υ_+ вела себя при больших $|k|$ подобно полиному мы должны выбрать $\chi=ik\ln 2$, и в этом случае будем иметь

$$\Upsilon_+\simeq ik,\quad |k|\to\infty.$$

Конечно, это соотношение имеет место только там, где Υ_+ регулярна.

Теперь мы можем определить $P(k)$. Так как $\Psi_+\simeq 0$, $|k|\to\infty$, то из регулярности $P(k)=-\Psi_-\Upsilon_-=\Psi_+\Upsilon_+$ следует, что $P(k)$ является постоянной, которую мы обозначим через C. Таким образом, определяется функция Ψ_+:

$$\Psi_+=\frac{C}{\Upsilon_+}=\frac{C}{\Upsilon_-}\frac{\operatorname{ch}\pi k}{\operatorname{ch}\pi k-\cos\pi\alpha}.$$

В данной задаче оказывается более полезным именно это представление. Функция $\psi_+(x)$ равна

$$\psi_+(x)=\frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau}e^{-ikx}\frac{\operatorname{ch}\pi k}{\operatorname{ch}\pi k-\cos\pi\alpha}\frac{dk}{\Upsilon_-}.$$

При $x>0$ мы можем замкнуть контур в нижней полуплоскости, где Υ_- регулярна. Тогда полюсы подинтегральной функции лежат только в точках, где разность $\operatorname{ch}\pi k-\cos\pi\alpha$ обращается в нуль, т. е. при $-ik=-2n\pm\alpha$, $n=0, 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$\psi_+(x)=C'\frac{\operatorname{ctg}\pi\alpha}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{e^{-(2n+\alpha)x}}{\Upsilon_-[-(2n+\alpha)i]}-\frac{e^{-(2n-\alpha)x}}{\Upsilon_-[-(2n-\alpha)i]}\right\},$$

где C' — новая постоянная. Подставляя выражение для Υ_-, получаем

$$\psi_+ = C' \frac{\operatorname{ctg} \pi\alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+2n\right)}{\Gamma(1+\alpha+n)} \frac{(2e^x)^{-(2n+\alpha)}}{n!} - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha+2n\right)}{\Gamma(1-\alpha+n)} \frac{(2e^x)^{-(2n-\alpha)}}{n!} \right\}.$$

Это выражение можно свести к линейной комбинации гипергеометрических функций от e^{2x}; для этого надо использовать формулу удвоения гамма-функции

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

Отсюда

$$\psi_+ = C'' \frac{\operatorname{ctg} \pi\alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha+n\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\alpha+n\right)}{\Gamma(1+\alpha+n)} \frac{e^{-(2n+\alpha)x}}{n!} - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha+n\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\alpha+n\right)}{\Gamma(1-\alpha+n)} \frac{e^{-(2n-\alpha)x}}{n!} \right\},$$

где C'' — еще одна новая постоянная. Сравнивая полученные ряды с гипергеометрическим рядом, получаем

$$\psi_+ = C'' \frac{\operatorname{ctg} \pi\alpha}{\pi} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\alpha\right)}{\Gamma(1+\alpha)} e^{-\alpha x} F\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\alpha \,\middle|\, 1+\alpha \,\middle|\, e^{-2x}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\alpha\right)}{\Gamma(1-\alpha)} e^{\alpha x} F\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\alpha \,\middle|\, 1-\alpha \,\middle|\, e^{-2x}\right) \right\}.$$

Это выражение можно в свою очередь преобразовать при помощи вторых решений дифференциального уравнения Лежандра $Q_{\alpha-\frac{1}{2}}$, $Q_{-\alpha-\frac{1}{2}}$. Мы имеем

$$Q_{\alpha-\frac{1}{2}}(e^x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\,\Gamma(1+\alpha)} e^{-x\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} F\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\alpha \,\middle|\, 1+\alpha \,\middle|\, e^{-2x}\right).$$

Применяя формулу удвоения для гамма-функции, получаем

$$\psi_+ = C''' \frac{\operatorname{tg} \pi\alpha}{\pi} e^{\frac{1}{2}x} \left[Q_{\alpha-\frac{1}{2}}(e^x) - Q_{-\alpha-\frac{1}{2}}(e^x)\right]. \tag{8.5.59}$$

Наконец, из соотношения между функциями Лежандра первого и второго рода

$$P_\beta = \frac{\operatorname{ctg} \pi\beta}{\pi} \left[Q_\beta - Q_{-\beta-1}\right]$$

имеем

$$\psi_+ = -C''' e^{\frac{1}{2}x} P_{\alpha-\frac{1}{2}}(e^x), \quad x > 0. \tag{8.5.60}$$

Таким образом, мы можем выразить решение этого интегрального уравнения для $x > 0$ через гипергеометрические функции или функции Лежандра,

а этого, учитывая формулы аналитического продолжения (см. таблицы в конце гл. 5), достаточно для представления ϕ при всех значениях x.

Задача Милна. Предыдущие примеры показывают, что разложение на множители выражения $1-\sqrt{2\pi}\lambda V$ является единственным шагом в процессе Винера — Хопфа, при проведении которого можно натолкнуться на существенные трудности. В приведенных выше примерах это разложение было получено путем догадки и последующей проверки. Мы займемся сейчас задачей, в которой преобразование Фурье ядра имеет точку ветвления, делающую разложение на множители по догадке почти невозможным. Теперь мы увидим, как можно преодолеть эту трудность вполне общим, но зато достаточно громоздким приемом. Эта задача — задача Милна — возникает в связи с прохождением излучения (или любого другого множества частиц с независимыми скоростями, таких, например, как медленные нейтроны) через неабсорбирующую однородную среду, в которой излучение изотропно рассеивается (см. § 2.4). Эта среда берется полубесконечной по протяжению и мы рассмотрим случай, когда функция распределения f [см. уравнение (8.1.2)] не зависит от x, y, так же как и от величины импульса $|\mathbf{p}|$.

В этих предположениях уравнение (8.1.2) принимает вид

$$v\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}=-P_T f+P_T\int f(z,\theta_0)\frac{d\Omega_0}{4\pi},$$

где θ — угол между направлением движения частицы и осью z. Мы можем осуществить интегрирование по азимутальному углу φ_0. Кроме того, удобно ввести переменные

$$\zeta=(z/vP_T),\quad \mu=\cos\theta.$$

Заметим, что $P_T=N\sigma$, где N — число атомов в единице объема, а σ — полное эффективное сечение рассеяния. Тогда это уравнение приводится к виду [см. уравнение (2.4.16)]

$$\mu\frac{\partial f(\zeta,\mu)}{\partial\zeta}=-f(\zeta,\mu)+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(\zeta,\mu_0)\,d\mu_0. \tag{8.5.61}$$

Для того чтобы превратить это уравнение в интегральное, рассмотрим его как уравнение первого порядка по ζ и соответствующим образом проинтегрируем. Получим

$$f(\zeta,\mu)=Ae^{-\zeta/\mu}+\frac{1}{2\mu}\int_a^{\zeta}e^{-(\zeta-\zeta_0)/\mu}\,d\zeta_0\int_{-1}^{1}f(\zeta_0,\mu_0)\,d\mu_0.$$

Постоянная интегрирования во втором члене и постоянный коэффициент A определяются из граничных условий. Рассмотрим две области изменения углов: $0<\mu<1$ и $-1<\mu<0$ (первая — для частиц, движущихся вправо, вторая — для частиц, у которых проекции скорости на ось z отрицательны). Обозначим соответствующие f через f_a и f_b, т. е. положим

$$f_b=0,\quad f_a=f\quad\text{при}\quad 0<\mu<1,$$
$$f_b=f,\quad f_a=0\quad\text{при}\quad -1<\mu<0.$$

Тогда граничные условия примут вид:

$$\left.\begin{aligned}f_a&=I_0(\mu)\ \text{при}\ \zeta=0,\\ f_b&=0\quad\ \ \text{при}\ \zeta=\infty,\end{aligned}\right\}\quad f_a,\ f_b>0\ \text{для всех конечных}\ \zeta. \tag{8.5.62}$$

Здесь I_0 — функция распределения для падающего пучка частиц.

Эти граничные условия удовлетворяются следующими выражениями [см. (2.4.19)]:

$$f_a = I_0 e^{-\zeta/\mu} + \frac{1}{2\mu} \int_0^{\zeta} e^{-(\zeta-\zeta_0)/\mu} d\zeta_0 \int_{-1}^{1} f(\zeta_0, \mu_0)\, d\mu_0,$$

$$f_b = \frac{1}{2|\mu|} \int_{\zeta}^{\infty} e^{(\zeta-\zeta_0)/|\mu|} d\zeta_0 \int_{-1}^{1} f(\zeta_0, \mu_0)\, d\mu_0. \tag{8.5.63}$$

Для того чтобы свести их к одному интегральному уравнению, полезно заменить зависимую переменную f:

$$\rho(\zeta) = \int_{-1}^{1} f(\zeta, \mu)\, d\mu = \int_{-1}^{1} (f_a + f_b)\, d\mu. \tag{8.5.64}$$

Подставляя f_a и f_b из (8.5.63) в (8.5.64), получаем

$$\rho(\zeta) = \int_0^1 I_0(\mu)\, e^{-\zeta/\mu} d\mu + \int_0^1 \frac{d\mu}{2\mu} \int_0^{\infty} e^{-|\zeta-\zeta_0|/\mu} \rho(\zeta_0)\, d\zeta_0.$$

Меняя порядок интегрирования, находим [см. (2.4.20)]

$$\rho(\zeta) = \int_0^1 I_0(\mu)\, e^{-\zeta/\mu} d\mu + \int_0^{\infty} v(\zeta-\zeta_0)\, \rho(\zeta_0)\, d\zeta_0, \tag{8.5.65}$$

$$v(\zeta-\zeta_0) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-|\zeta-\zeta_0|/\mu} \frac{d\mu}{\mu}.$$

Мы узнаем в (8.5.65) неоднородное уравнение типа Винера — Хопфа. Опуская в этом уравнении член, связанный с источником, мы получаем однородное уравнение, которое называется уравнением Милна:

$$\rho(\zeta) = \int_0^{\infty} v(\zeta-\zeta_0)\, \rho(\zeta_0)\, d\zeta_0. \tag{8.5.66}$$

Сравнительно простое изменение в процессе Винера — Хопфа, которое нужно произвести для случая неоднородных уравнений, мы обсудим ниже. Решения уравнения (8.5.66) дают асимптотический (при большом ζ) вид решений неоднородного уравнения.

После определения ρ полное распределение можно найти, интегрируя выражение (8.5.63). Особенно интересным является распределение выходящего излучения у нижней поверхности при $\zeta = 0$. Здесь

$$f_b(0) = \frac{1}{2|\mu|} \int_0^{\infty} e^{-\zeta/|\mu|} \rho(\zeta)\, d\zeta \quad \text{или} \quad f_b(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2|\mu|} R_+\left(\frac{i}{|\mu|}\right),$$

где $R_+(k)$ — преобразование Фурье функции $\rho_+(\zeta)$. Этот результат особенно интересен, так как он показывает, что для нахождения распределения выходящего излучения на поверхности вещества нет необходимости обращать преобразование Фурье решения уравнения (8.5.66).

Теперь мы возвратимся к уравнению (8.5.66) и рассмотрим его решение методом Винера — Хопфа. Преобразование от v равно

$$V(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{arc\,tg} k}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(2ik)} \ln\left(\frac{1+ik}{1-ik}\right).$$

Следовательно, функция Υ, которую надо представить в виде Υ_+/Υ_-, имеет вид

$$\Upsilon = 1 - \sqrt{2\pi}\lambda V = \frac{k - \operatorname{arc\,tg} k}{k}. \tag{8.5.67}$$

Υ аналитична в полосе $|\operatorname{Im} k| < 1$; однако при $k = \pm i$ она имеет точки ветвления, из-за которых уже невозможно применить простой метод двух предшествующих примеров.

Общий метод разложения на множители. Метод, который мы изучим, основан на теореме о том, что каждая функция $f(k)$, аналитическая в полосе $|\operatorname{Im} k| < \alpha$, является *суммой* двух функций, одна из которых аналитична при $\operatorname{Im} k > -\alpha$, а вторая — при $\operatorname{Im} k < \alpha$. Легко убедиться, что это — частный случай теоремы о разложении в ряд Лорана [равенство (4.3.4) и рассуждения, следующие за ним]. Процесс, используемый здесь, заключается в применении интегральной формулы Коши, причем контуром интегрирования служит граница области аналитичности $f(k)$; как и при выводе ряда Лорана, этой границей является граница полосы, которая представляет собой частный случай кругового кольца, когда центр кольца расположен на бесконечности. Интеграл Коши разбивается на два интеграла: один, по внешней окружности, берется в положительном направлении, другой, по внутренней, — в отрицательном направлении (для полосы эти окружности обращаются в прямые, ограничивающие полосу). Функция, представленная интегралом вдоль внешней окружности, аналитична внутри внешней окружности, т. е. внутри кольца, а также во внутреннем круге, а функция, представленная интегралом по внутренней окружности, аналитична вне внутренней окружности. Переходя к случаю полосы и помещая центр кольца в точку $k = -i\infty$, мы получаем

$$q(k) = q_-(k) - q_+(k),$$

где

$$\left.\begin{aligned} q_-(k) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+\beta i}^{\infty+\beta i} \frac{q(\eta)}{\eta - k}\,d\eta \\ q_+(k) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty-\beta i}^{\infty-\beta i} \frac{q(\eta)}{\eta - k}\,d\eta \end{aligned}\right\}, \quad \beta < \alpha. \tag{8.5.68}$$

Слагаемое q_- аналитично при $\operatorname{Im} k < \beta$, а q_+ аналитично при $\operatorname{Im} k > -\beta$, где $\beta < \alpha$; α определяется границей полосы аналитичности преобразования V ядра уравнения.

Теперь мы можем использовать равенства (8.5.68) для того, чтобы выполнить разложение на множители $\Upsilon = \Upsilon_+/\Upsilon_-$ согласно равенству (8.5.52). Эта задача эквивалентна задаче о представлении $\ln \Upsilon$ в виде $\ln \Upsilon_+ - \ln \Upsilon_-$, которая может быть решена при помощи равенства (8.5.68), если только $\ln \Upsilon$ не имеет особенностей в данной полосе. Так как функция Υ аналитична в этой полосе, то трудности могут возникнуть только в точках, где Υ обращается в нуль; мы обозначим эти точки k_r. Кроме того, для обеспечения сходимости интегралов, фигурирующих в (8.5.68), мы должны потребовать, чтобы $q(\eta) \to 0$, когда $|\eta| \to \infty$ и η остается внутри данной полосы. Если $q(k)$ должно равняться логарифму Υ, то для выполнения последнего требования Υ должно стремиться к единице при $|k| \to \infty$.

Функция q не может в точности равняться логарифму Υ, так как мы должны ввести под знак логарифма сомножители, которые «компенсируют» нули Υ, лежащие внутри области аналитичности V, т. е. при $|\operatorname{Im} k| < \alpha$; затем мы должны заставить все выражение, стоящее под знаком логарифма,

стремиться к единице при $|k| \to \infty$. Как уже было сказано, нулями Υ, лежащими внутри области аналитичности, являются точки k_r $(r = 1, 2, \ldots, N)$. Поэтому отношение $\Upsilon/\Pi(k - k_r)$ не имеет нулей внутри данной полосы [некоторые из нулей могут иметь кратность, большую единицы, и в этом случае множитель $(k - k_r)$ должен фигурировать в произведении Π в соответствующей степени]. Однако это отношение не стремится к единице при $|k| \to \infty$, и поэтому мы должны умножить его на некоторый полином от k (не имеющий нулей в этой полосе). Если, например, $[\Upsilon/\Pi(k - k_r)] \simeq \simeq k^{-M}/C$, когда $|k| \to \infty$, то мы можем умножить это выражение на $C(k^2 + \alpha^2)^{M/2}$ и положить

$$q = \ln [C\Upsilon(k)(k^2 + \alpha^2)^{M/2} / \prod_r (k - k_r)]. \tag{8.5.69}$$

Соображения, по которым мы выбрали множитель $(k^2 + \alpha^2)^{M/2}$, довольно очевидны. Этот множитель не должен иметь нулей внутри области аналитичности Υ $(|\operatorname{Im} k| < \alpha)$, и поэтому мы выбираем его так, чтобы нули были расположены на границе полосы. Кроме того, нам удобно, чтобы нули располагались парами, один на верхней, другой на нижней границе полосы, с тем чтобы q_+ имела все нули на одной из границ, а q_- — на другой. Постоянная C выбирается как раз так, чтобы величина в скобках стремилась к единице при $|k| \to \infty$.

Записав $q = -q_+ + q_-$ и выполнив вычисления по формулам (8.5.68), получим

$$\Upsilon = \prod [(k - k_r)/C(k^2 + \alpha^2)^{M/2}]\, e^{(q_- - q_+)}.$$

Теперь разложение Υ очевидно:

$$\Upsilon_+ = [\prod (k - k_r)\, e^{-q_+}/C(k + i\alpha)^{M/2}], \quad \Upsilon_- = (k - i\alpha)^{M/2} e^{-q_-}. \tag{8.5.70}$$

Таким образом, искомое разложение на множители формально получено, и этот общий процесс всегда применим при решении методом Винера — Хопфа (если мы можем найти q_+ и q_-!).

Задача Милна; продолжение. В задаче Милна Υ задается равенством (8.5.67) в виде $1 - \operatorname{arc\,tg} k/k$. Эта функция имеет в точке $k = 0$ единственный нуль второго порядка. Следовательно,

$$q = \ln \left[\frac{k^2 + 1}{k^2}\left(1 - \frac{\operatorname{arc\,tg} k}{k}\right)\right], \quad \alpha = 1,$$

откуда

$$q_+ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty - \beta i}^{\infty - \beta i} \ln \left[\frac{\eta^2 + 1}{\eta^2}\left(1 - \frac{\operatorname{arc\,tg} \eta}{\eta}\right)\right] \frac{d\eta}{\eta - k}, \quad \beta < 1; \tag{8.5.71}$$

в выражение для q_- входят те же подинтегральные функции, но пределами интегрирования служат $\infty + \beta i$, $-\infty + \beta i$. В качестве заключительного шага мы должны определить $P(k) = \Psi_+ \Upsilon_+ = -\Psi_- \Upsilon_-$, где, согласно (8.5.70),

$$\Upsilon_+ = k^2 e^{-q_+}/(k + i), \quad \Upsilon_- = (k - i)\, e^{-q_-}. \tag{8.5.72}$$

Из сходимости интегралов, выражающих q_+ и q_-, следует, что обе эти функции ограничены при больших k, каждая в своей области регулярности. Следовательно, e^{-q_+} стремится к постоянной и, значит, $\Upsilon_+ \simeq k$. Далее, так как $\Psi_+(k) \simeq 0$, а P — целая функция, то P должна равняться постоянной; эту постоянную обозначим, например, через A. Итак, преобразование

Фурье функции ρ_+ имеет вид

$$R_+ = \frac{A}{\Upsilon_+} = \frac{A(k+i)}{k^2} e^{q_+(k)}, \tag{8.5.73}$$

где q_+ задается равенством (8.5.71).

Для получения углового распределения теперь необходимо [согласно (8.5.67)] найти $R_+(i/|\mu|)$. Здесь основной трудностью является вычисление интеграла для q_+. Мы можем свести его к виду, удобному для численного интегрирования. С этой целью положим $\beta = 0$ и будем интегрировать вдоль действительной оси η (при $k \neq 0$). Тогда при $k \neq 0$ получаем

$$q_+(k) = \frac{k}{\pi i} \int_0^\infty \ln\left[\frac{\eta^2+1}{\eta^2}\left(1 - \frac{\operatorname{arc\,tg}\eta}{\eta}\right)\right] \frac{d\eta}{\eta^2 - k^2}. \tag{8.5.74}$$

Для нахождения асимптотического вида $\rho(\zeta)$ необходимо иметь разложение R_+ в степенной ряд по k. Вычислим $q_+(0)$ и затем высшие члены из выражения (8.5.74). Интеграл (8.5.71) при $k = 0$ можно вычислить, рассматривая контур, состоящий из действительной оси, часть которой заменена малой полуокружностью с центром в точке $\eta = 0$, лежащей ниже этой точки. Сумма интегралов по частям вещественной оси равна нулю в силу нечетности подинтегральной функции. Интегрирование по окружности дает

$$\frac{1}{2} \ln\left[\frac{\eta^2+1}{\eta^2}\left(1 - \frac{\operatorname{arc\,tg}\eta}{\eta}\right)\right], \quad \eta = 0,$$

т. е. $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}$, так что

$$q_+(0) = -\ln\sqrt{3}.$$

Чтобы найти следующий член, мы используем выражение (8.5.74), которое, прибавляя равный нулю интеграл, записываем в виде

$$q_+(k) = \frac{k}{\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln\left[\frac{3(\eta^2+1)}{\eta^2}\left(1 - \frac{\operatorname{arc\,tg}\eta}{\eta}\right)\right]}{\eta^2 - k^2} d\eta.$$

Здесь подинтегральная функция регулярна при $k = 0$, $\eta = 0$. Следовательно,

$$q'_+(0) = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln\left[\frac{3(\eta^2+1)}{\eta^2}\left(1 - \frac{\operatorname{arc\,tg}\eta}{\eta}\right)\right]}{\eta^2} d\eta. \tag{8.5.75}$$

Возвращаясь к R_+, получаем

$$R_+ \simeq \frac{A}{\sqrt{3}} \frac{(k+i)}{k^2} [1 + kq'_+(0)] \simeq \frac{Ai}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1 + iq'_+(0)}{ik}\right], \quad k \to 0,$$

откуда

$$\rho_+(\zeta) \simeq \text{const} \cdot [1 + iq'_+(0) + \zeta], \quad \zeta \to 0.$$

Постоянная $1 + iq'_+(0)$ может быть вычислена интегрированием в равенстве (8.5.75) по частям. Мы получим $1 + iq'_+(0) \approx 0{,}7104\ldots$. Это уравнение и его решение будут изучены более подробно в § 12.2.

Неоднородное уравнение Винера — Хопфа. Уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lambda \int^\infty v(x - x_0)\, \psi(x_0)\, dx_0 \tag{8.5.76}$$

можно решить тем же методом, который применялся в случае однородного уравнения. Так же находим преобразование Фурье

$$\Psi_+ + \Psi_- = \Phi_+ + \Phi_- + \sqrt{2\pi}\,\lambda V \Psi_+. \tag{8.5.77}$$

Разлагая на множители $1 - \sqrt{2\pi}\,\lambda V = \Upsilon_+/\Upsilon_-$, мы можем переписать это равенство так:

$$\Psi_+\Upsilon_+ + \Upsilon_-(\Psi_- - \Phi_-) - \Upsilon_-\Phi_+ = 0. \tag{8.5.78}$$

Первые два члена имеют требуемый вид, причем они аналитичны в общей части двух полуплоскостей. Третий член не имеет нужного вида и поэтому должен быть представлен в виде суммы двух слагаемых, одно из которых аналитично в верхней полуплоскости, другое — в нижней. Для этого необходимо, очевидно, чтобы существовала полоса, в которой регулярны и Υ_- и Φ_+. Если это так, то мы можем применить разложение, даваемое равенством (8.5.68), где теперь $q = \Upsilon_-\Phi_+$. Поэтому мы пишем

$$\Upsilon_-\Phi_+ = q_- - q_+.$$

Переписывая (8.5.78), получаем

$$\Psi_+\Upsilon_+ + q_+ = q_- + \Upsilon_-(\Phi_- - \Psi_-) \equiv P. \tag{8.5.79}$$

Левая часть уравнения аналитична в верхней полуплоскости, а правая — в нижней. Существует полоса регулярности, общая для них, так что, как и в случае однородного уравнения, правая часть является аналитическим продолжением левой части в нижнюю полуплоскость. Определенная таким образом функция P регулярна в любой конечной части плоскости и потому является целой функцией. Как и в случае однородного уравнения, характер функции P определяется асимптотическим поведением одного из определяющих ее выражений. После того, как P определена, имеем

$$\Psi_+ = \frac{P - q_+}{\Upsilon_+}, \tag{8.5.80}$$

и это выражение можно внести в формулу обращения для получения $\psi_+(x)$.

Если интегральное уравнение является уравнением первого, а не второго рода, т. е. если

$$0 = \varphi(x) + \lambda \int_0^\infty v(x - x_0)\,\psi(x_0)\,dx_0,$$

то решение можно выразить в виде (8.5.79) и (8.5.80), полагая

$$-\lambda\sqrt{2\pi}\,V = \frac{\Upsilon_+}{\Upsilon_-}.$$

На этом мы закончим общее изучение интегральных уравнений. Многие из методов, которых мы здесь коснулись, будут применены в последующих главах. Читая эту главу, можно было заметить, что теория интегральных уравнений развита далеко не с той полнотой, как теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Не существует правил, столь же простых, как правила для нахождения особых точек, которые давали бы нам возможность классифицировать ядра интегральных уравнений и легко распознавать, какое из представлений для неизвестной функции в виде интегралов или рядов быстро приводит к решению. Это положение отчасти обусловлено тем, что интегральные уравнения, вообще говоря, представляют более сложные физические и математические явления. Только в редких случаях интегральное уравнение оказывается эквивалентным дифференциальному уравнению второго порядка. Чаще они соответствуют дифференциальным уравнениям бесконечного порядка.

Тем не менее существуют случаи, для которых мы можем получить решение прямым путем. Например, для ядер вида $v(x-x_0)$ применимо преобразование Фурье. Однако для многих случаев еще не найден подходящий алгорифм для получения общего решения. Несмотря на это, сведение задач к интегральным уравнениям оказывается полезным, потому что, как мы увидим в следующей главе, интегральные уравнения служат основой для развития многих приближенных методов решения уравнений физики.

Основные свойства интегральных уравнений и их решений

Типы уравнений. В уравнениях Фредгольма фигурируют интегралы с фиксированными пределами; в уравнениях Вольтерра — интегралы, у которых один из пределов переменный; в уравнения первого рода неизвестная функция ψ входит только под знаком интеграла; в уравнениях второго рода ψ имеется также и вне интеграла.

Уравнение Фредгольма первого рода:

$$\varphi(z)=\int_a^b K(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0, \quad \varphi \text{ и } K \text{ известны.}$$

Уравнение Фредгольма второго рода:

$$\psi(z)=\varphi(z)+\lambda\int_a^b K(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0, \quad \varphi \text{ и } K \text{ известны.}$$

При $\varphi=0$ это уравнение становится однородным.

Уравнение Вольтерра первого рода:

$$\varphi(z)=\int_a^z K(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0, \quad \varphi \text{ и } K \text{ известны.}$$

Уравнение Вольтерра второго рода:

$$\psi(z)=\varphi(z)+\int_a^z K(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0, \quad \varphi \text{ и } K \text{ известны.}$$

Соответствующее однородное уравнение, возникающее при $\varphi=0$, не имеет ненулевых решений. Функция $K(z\,|\,z_0)$ называется *ядром* уравнения.

Типы ядер. *Симметрическое* ядро удовлетворяет равенству $K(z\,|\,z_0)=K(z_0\,|\,z)$. *Полярное* ядро имеет вид $r(z_0)\,G(z\,|\,z_0)$, где функция G симметрична. Уравнение Фредгольма с симметрическим ядром *самосопряженное*, уравнение Вольтерра с симметрическим ядром не является самосопряженным. Ядро является *определенным*, если

$$\int f(z)\,dz\int K(z\,|\,z_0)\,f(z_0)\,dz_0>0 \quad \text{(положительно определенное)}$$

или

$$\int f(z)\,dz\int K(z\,|\,z_0)\,f(z_0)\,dz_0<0 \quad \text{(отрицательно определенное)}$$

для любой функции f, конечной в промежутке интегрирования, соответствующем уравнению с ядром K.