Таблица наиболее употребительных векторных и аффинорных соотношений

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zC_z;\qquad \mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{i}\,(A_yB_z-A_zB_y)+$$
$$+\mathbf{j}\,(A_zB_x-A_xB_z)+\mathbf{k}\,(A_xB_y-A_yB_x),$$
$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B}-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C},$$
$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A},$$
$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}),$$
$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})]\,\mathbf{C}-[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\,\mathbf{D}=$$
$$=[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})]\,\mathbf{B}-[\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})]\,\mathbf{A},$$
$$\nabla u=\operatorname{grad}u,\qquad \nabla\cdot\mathbf{F}=\operatorname{div}\mathbf{F},\qquad \nabla\times\mathbf{F}=\operatorname{rot}\mathbf{F},$$
$$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u,\qquad \nabla\cdot(u\mathbf{A})=(\nabla u)\cdot\mathbf{A}+u\nabla\cdot\mathbf{A},$$
$$\nabla\times(u\mathbf{A})=(\nabla u)\times\mathbf{A}+u\nabla\times\mathbf{A},$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}),$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0,\qquad \nabla\times(\nabla u)=0,\qquad \nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2u,$$
$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-\nabla^2\mathbf{F},$$
$$\iiint(\nabla\cdot\mathbf{F})\,dv=\iint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A};\qquad \iiint(\nabla\times\mathbf{F})\,dv=-\iint\mathbf{F}\times d\mathbf{A},$$
$$\iiint(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)\,dv=\iint\varphi(\nabla\psi)\cdot d\mathbf{A}-\iiint\varphi\nabla^2\psi\,dv,$$

где тройные интегралы берутся по всему объему, ограниченному замкнутой поверхностью A, а двойные интегралы — по этой поверхности A (вектор $d\mathbf{A}$ направлен *наружу*).

$$\iint(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A}=\oint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

где двойной интеграл берется по площади, ограниченной замкнутой кривой C, а одномерный интеграл — по кривой C против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего с конца вектора $d\mathbf{A}$.

Векторное поле $\mathbf{F}(x, y, z)$ может быть представлено при помощи скалярного потенциала ψ и векторного потенциала $\mathbf{A}$

$$\mathbf{F}=\operatorname{grad}\psi+\operatorname{rot}\mathbf{A},\quad \operatorname{div}\mathbf{A}=0.$$

Если поле $\mathbf{F}$ обращается в нуль на бесконечности, то выражения ψ и $\mathbf{A}$ через $\mathbf{F}$ имеют вид

$$\psi=-\iiint\frac{\operatorname{div}\mathbf{F}(x',y',z')}{4\pi R}\,dx'\,dy'\,dz',\quad \mathbf{A}=\iiint\frac{\operatorname{rot}\mathbf{F}(x',y',z')}{4\pi R}\,dx'\,dy'\,dz',$$

где $R^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$.

$$\mathfrak{A}=\mathbf{i}\mathbf{A}_x+\mathbf{j}\mathbf{A}_y+\mathbf{k}\mathbf{A}_z,\qquad \mathfrak{A}^*=\mathbf{i}\mathbf{A}_x^*+\mathbf{j}\mathbf{A}_y^*+\mathbf{k}\mathbf{A}_z^*=\mathbf{A}_x\mathbf{i}+\mathbf{A}_y\mathbf{j}+\mathbf{A}_z\mathbf{k},$$
$$|\mathfrak{A}|=\mathbf{i}\cdot\mathbf{A}_x+\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}_y+\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_z,\qquad \langle\mathfrak{A}\rangle=\mathbf{i}\times\mathbf{A}_x+\mathbf{j}\times\mathbf{A}_y+\mathbf{k}\times\mathbf{A}_z,$$
$$\mathfrak{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}_x^*B_x+\mathbf{A}_y^*B_y+\mathbf{A}_z^*B_z=\mathbf{i}\,(\mathbf{A}_x\cdot\mathbf{B})+\mathbf{j}\,(\mathbf{A}_y\cdot\mathbf{B})+\mathbf{k}\,(\mathbf{A}_z\cdot\mathbf{B})=$$
$$=\frac{1}{2}(\mathbf{A}_x+\mathbf{A}_x^*)\,B_x+\frac{1}{2}(\mathbf{A}_y+\mathbf{A}_y^*)\,B_y+\frac{1}{2}(\mathbf{A}_z+\mathbf{A}_z^*)\,B_z-\frac{1}{2}\langle\mathfrak{A}\rangle\times\mathbf{B},$$
$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=\mathbf{A}_x^*\mathbf{B}_x+\mathbf{A}_y^*\mathbf{B}_y+\mathbf{A}_z^*\mathbf{B}_z,$$
$$\mathfrak{A}:\mathfrak{B}=\mathbf{A}_x^*\cdot\mathbf{B}_x+\mathbf{A}_y^*\cdot\mathbf{B}_y+\mathbf{A}_z^*\cdot\mathbf{B}_z=|\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}|,$$

$$\nabla\mathbf{F}=\mathbf{i}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z},\qquad \mathbf{F}\nabla=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}\mathbf{k}=(\nabla\mathbf{F})^*,$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\cdot(\nabla\mathbf{B})+\mathbf{B}\cdot(\nabla\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}),$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\mathbf{B})+\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}),$$

$$\nabla\cdot\mathfrak{A}=(\partial\mathbf{A}_x/\partial x)+(\partial\mathbf{A}_y/\partial y)+(\partial\mathbf{A}_z/\partial z)=\mathbf{i}\operatorname{div}(\mathbf{A}_x^*)+\mathbf{j}\operatorname{div}(\mathbf{A}_y^*)+\mathbf{k}\operatorname{div}(\mathbf{A}_z^*),$$

$$\nabla\cdot(\nabla\mathbf{F})=\nabla^2\mathbf{F},\qquad \nabla\cdot(\mathbf{F}\nabla)=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})=\nabla^2\mathbf{F}+\nabla\times\nabla\times\mathbf{F},$$

$$\nabla\cdot(\mathfrak{A}\cdot\mathbf{B})=(\nabla\cdot\mathfrak{A})\cdot\mathbf{B}+|\mathfrak{A}\cdot(\nabla\mathbf{B})|.$$

Таблица свойств криволинейных координат

Для ортогональных криволинейных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 с единичными векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, линейным элементом $ds^2=\sum_n h_n^2(d\xi_n)^2$ и коэффициентами Ламе h_n, где

$$h_n^2=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\xi_n}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi_n}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi_n}\right)^2\right]=\left[\left(\frac{\partial\xi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi_n}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi_n}{\partial z}\right)^2\right]^{-1},$$

дифференциальные операторы принимают следующий вид:

$$\operatorname{grad}\psi=\nabla\psi=\sum_n\mathbf{a}_n\frac{1}{h_n}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_n},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_n\frac{\partial}{\partial\xi_n}\left(h_1h_2h_3\frac{A_n}{h_n}\right),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{l,m,n}h_l\mathbf{a}_l\left[\frac{\partial}{\partial\xi_m}(h_nA_n)-\frac{\partial}{\partial\xi_n}(h_mA_m)\right],$$

$$l,\ m,\ n=1,\ 2,\ 3 \text{ или } 2,\ 3,\ 1 \text{ или } 3,\ 1,\ 2,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi=\nabla^2\psi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_n\frac{\partial}{\partial\xi_n}\left[\frac{h_1h_2h_3}{h_n^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_n}\right],$$

$$\nabla\mathbf{A}=(\nabla\mathbf{A})_s+(\nabla\mathbf{A})_a,\qquad (\nabla\mathbf{A})_a=\frac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{A})\times\mathfrak{J},$$

$$(\nabla\mathbf{A})_s=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{A}+\mathbf{A}\nabla)=\sum_m\left[\frac{\partial}{\partial\xi_m}\frac{A_m}{h_m}+\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}(\ln h_m)\right]\mathbf{a}_m\mathbf{a}_m+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m<n}\left[\frac{h_m}{h_n}\frac{\partial}{\partial\xi_n}\frac{A_m}{h_m}+\frac{h_n}{h_m}\frac{\partial}{\partial\xi_m}\frac{A_n}{h_n}\right](\mathbf{a}_m\mathbf{a}_n+\mathbf{a}_n\mathbf{a}_m),$$

а элемент объема равен $h_1h_2h_3\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3=dV$.

Для цилиндрических координат

$$\xi_1=r,\quad \xi_2=\varphi,\quad \xi_3=z$$

имеем $h_1=1$, $h_2=r$, $h_3=1$, $dV=r\,dr\,d\varphi\,dz$.

$$\operatorname{grad}\psi=\mathbf{a}_r\frac{\partial\psi}{\partial r}+\mathbf{a}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\mathbf{a}_z\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\mathbf{a}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\mathbf{a}_\varphi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+\mathbf{a}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rA_\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right),$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$