$$\nabla\mathbf{F}=\mathbf{i}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z},\qquad \mathbf{F}\nabla=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}\mathbf{k}=(\nabla\mathbf{F})^*,$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\cdot(\nabla\mathbf{B})+\mathbf{B}\cdot(\nabla\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}),$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\mathbf{B})+\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}),$$

$$\nabla\cdot\mathfrak{A}=(\partial\mathbf{A}_x/\partial x)+(\partial\mathbf{A}_y/\partial y)+(\partial\mathbf{A}_z/\partial z)=\mathbf{i}\operatorname{div}(\mathbf{A}_x^*)+\mathbf{j}\operatorname{div}(\mathbf{A}_y^*)+\mathbf{k}\operatorname{div}(\mathbf{A}_z^*),$$

$$\nabla\cdot(\nabla\mathbf{F})=\nabla^2\mathbf{F},\qquad \nabla\cdot(\mathbf{F}\nabla)=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})=\nabla^2\mathbf{F}+\nabla\times\nabla\times\mathbf{F},$$

$$\nabla\cdot(\mathfrak{A}\cdot\mathbf{B})=(\nabla\cdot\mathfrak{A})\cdot\mathbf{B}+|\mathfrak{A}\cdot(\nabla\mathbf{B})|.$$

Таблица свойств криволинейных координат

Для ортогональных криволинейных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 с единичными векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, линейным элементом $ds^2=\sum_n h_n^2(d\xi_n)^2$ и коэффициентами Ламе h_n, где

$$h_n^2=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\xi_n}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi_n}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi_n}\right)^2\right]=\left[\left(\frac{\partial\xi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi_n}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi_n}{\partial z}\right)^2\right]^{-1},$$

дифференциальные операторы принимают следующий вид:

$$\operatorname{grad}\psi=\nabla\psi=\sum_n\mathbf{a}_n\frac{1}{h_n}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_n},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_n\frac{\partial}{\partial\xi_n}\left(h_1h_2h_3\frac{A_n}{h_n}\right),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{l,m,n}h_l\mathbf{a}_l\left[\frac{\partial}{\partial\xi_m}(h_nA_n)-\frac{\partial}{\partial\xi_n}(h_mA_m)\right],$$

$$l,\ m,\ n=1,\ 2,\ 3 \text{ или } 2,\ 3,\ 1 \text{ или } 3,\ 1,\ 2,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi=\nabla^2\psi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_n\frac{\partial}{\partial\xi_n}\left[\frac{h_1h_2h_3}{h_n^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_n}\right],$$

$$\nabla\mathbf{A}=(\nabla\mathbf{A})_s+(\nabla\mathbf{A})_a,\qquad (\nabla\mathbf{A})_a=\frac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{A})\times\mathfrak{J},$$

$$(\nabla\mathbf{A})_s=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{A}+\mathbf{A}\nabla)=\sum_m\left[\frac{\partial}{\partial\xi_m}\frac{A_m}{h_m}+\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}(\ln h_m)\right]\mathbf{a}_m\mathbf{a}_m+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m<n}\left[\frac{h_m}{h_n}\frac{\partial}{\partial\xi_n}\frac{A_m}{h_m}+\frac{h_n}{h_m}\frac{\partial}{\partial\xi_m}\frac{A_n}{h_n}\right](\mathbf{a}_m\mathbf{a}_n+\mathbf{a}_n\mathbf{a}_m),$$

а элемент объема равен $h_1h_2h_3\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3=dV$.

Для цилиндрических координат

$$\xi_1=r,\quad \xi_2=\varphi,\quad \xi_3=z$$

имеем $h_1=1$, $h_2=r$, $h_3=1$, $dV=r\,dr\,d\varphi\,dz$.

$$\operatorname{grad}\psi=\mathbf{a}_r\frac{\partial\psi}{\partial r}+\mathbf{a}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\mathbf{a}_z\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\mathbf{a}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\mathbf{a}_\varphi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+\mathbf{a}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rA_\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right),$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{a}_r\left[\nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right] + \mathbf{a}_\varphi\left[\nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right] + \mathbf{a}_z\nabla^2 A_z,$$

$$\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{A} + \mathbf{A}\nabla) = \mathbf{a}_r\frac{\partial A_r}{\partial r}\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\varphi\left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{A_r}{r}\right]\mathbf{a}_\varphi + \mathbf{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\mathbf{a}_z +$$

$$+\frac{1}{2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A_\varphi}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right](\mathbf{a}_r\mathbf{a}_\varphi + \mathbf{a}_\varphi\mathbf{a}_r) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial A_r}{\partial z}\right](\mathbf{a}_r\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_z\mathbf{a}_r) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}\right](\mathbf{a}_\varphi\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_z\mathbf{a}_\varphi).$$

Для сферических координат $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \vartheta$, $\xi_3 = \varphi$ имеем $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\vartheta$, $dV = r^2\,dr\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$.

$$\operatorname{grad}\psi = \mathbf{a}_r\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\mathbf{a}_\vartheta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}_r}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right] + \frac{\mathbf{a}_\vartheta}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] +$$

$$+\frac{\mathbf{a}_\varphi}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right].$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2},$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{a}_r\left[\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right] +$$

$$+\mathbf{a}_\vartheta\left[\nabla^2 A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} - \frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right] +$$

$$+\mathbf{a}_\varphi\left[\nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right],$$

$$\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{A} + \mathbf{A}\nabla) = \mathbf{a}_r\frac{\partial A_r}{\partial r}\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\vartheta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{A_r}{r}\right]\mathbf{a}_\vartheta +$$

$$+\mathbf{a}_\varphi\left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{A_r}{r} + \frac{A_\vartheta}{r}\operatorname{ctg}\vartheta\right]\mathbf{a}_\varphi +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A_\vartheta}{r}\right)\right](\mathbf{a}_r\mathbf{a}_\vartheta + \mathbf{a}_\vartheta\mathbf{a}_r) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A_\varphi}{r}\right)\right](\mathbf{a}_r\mathbf{a}_\varphi + \mathbf{a}_\varphi\mathbf{a}_r) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi} + \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{A_\varphi}{\sin\vartheta}\right)\right](\mathbf{a}_\vartheta\mathbf{a}_\varphi + \mathbf{a}_\varphi\mathbf{a}_\vartheta).$$

ЛИТЕРАТУРА

В предисловии уже упоминалось, что эта литература не претендует на полноту. Включены только те книги и статьи, которые, по мнению авторов, содержат полезные дополнения к данному тексту.

Общие справки по материалу этой главы:

Вебстер А. Г. и Сеге Г., Дифференциальные уравнения математической физики, ч. 1—2, ГТТИ, М.—Л., 1933—1934.

Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, Гостехиздат, М., 1951.

Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, М., 1954.

Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, М., 1950.
Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ГТТИ, Л.—М., 1937.
Jeffreys H. J., Jeffreys B. S., Methods of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1946.
Joos G., Lehrbuch der theoretischen Physik, Lpz., 1956.
Margenau H., Murphy G. M., The Mathematics of Physics and Chemistry, New York, 1943.
Murnaghan F. D., Introduction to Applied Mathematics, New York, 1948.
Slater J. C., Frank N. H., Introduction to Theoretical Physics, New York, 1933.

Дополнительный материал по векторному и тензорному анализу:

Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд. АН СССР, М., 1951.
Фрезер Р., Дункан В. и Коллар А., Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, Изд. иностр. лит., М., 1950.
Шилов Г. Е., Лекции по векторному анализу, Гостехиздат, М., 1954.
Craid H. V., Vector and Tensor Analysis, New York, 1943.
Gibbs J. W., Vector Analysis, ed. by E. B. Wilson, New York, 1901.
Phillips H. B., Vector Analysis, New York, 1933.
Rutherford D. E., Vector Methods Applied to Differential Geometry, etc., Edinburgh, 1944.
Weatherburn C. E., Elementary and Advanced Vector Analysis, 2 vols., London 1928.

Книги по теории упругости:

Ляв А., Математическая теория упругости, М.—Л., 1935.
Тимошенко С. П., Теория упругости, ОНТИ, М., 1937.
Brillouin L., Les tenseurs en méchanique et en élastique, Paris, 1938.
Sokolnikoff I. S., Mathematical Theory of Elasticity, New York, 1946.

Работы, содержащие полезные сведения по различным аспектам теории абстрактного векторного пространства:

Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, М., 1950.
Ван-дер Варден Б., Метод теории групп в квантовой механике, ГТИ Украины, Харьков, 1938.
Дирак П., Основы квантовой механики, Глав. ред. тех.-теор. лит-ры, Л.—М., 1937.
Кондон Е. и Шортли Г., Теория атомных спектров, Изд. иностр. лит., М., 1949.
Шифф Л., Квантовая механика, Изд. иностр. лит. М., 1957.
Laporte O., Uhlenbeck G. E., Application of Spinor Analysis to Maxwell and Dirac Equations, Phys. Rew., 37, 1380 (1931).
Von Neumann J., Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1932.
Rojansky V. B., Introductory Quantum Mechanics, New York, 1938.
Stone M. H., Linear Transformations in Hilbert Space, American Mathematical Society, New York, 1932.

Книги, содержащие разделы, посвященные специальной теории относительности:

Бергман П., Введение в теорию относительности, Изд. иностр. лит., М., 1947.
Голдстейн Г., Классическая механика, Гостехиздат, М., 1957.
Ландау Л., Лифшиц Е., Теория поля, ГТТИ, М., 1948.
Эддингтон А., Математическая теория относительности, Гос. научно-техн. изд. Украины, Харьков—Киев, 1933.
Corben H. C., Stehle P., Classical Mechanics, Chaps. 17 and 18, New York, 1950.
Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, New York, 1934.