уравнение Шредингера

$$(\mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1)\,\mathbf{e} = i\hbar\,(\partial\mathbf{e}/\partial t)$$

принимает вид

$$\mathfrak{H}_1(t)\,\mathbf{f} = i\hbar\,(\partial\mathbf{f}/\partial t),$$

где

$$\mathfrak{H}_1(t) = \exp(i\mathfrak{H}_0 t/\hbar)\,\mathfrak{H}_1 \exp(-i\mathfrak{H}_0 t/\hbar).$$

Показать, что

$$\mathbf{f} = \mathfrak{U}\mathbf{f}_0,$$

где

$$\mathfrak{U} = 1 + (1/i\hbar)\int_{-\infty}^{t} \mathfrak{H}_1(t')\,dt' + (1/i\hbar)^2 \int_{-\infty}^{t} \mathfrak{H}_1(t')\,dt' \int_{-\infty}^{t'} \mathfrak{H}_1(t'')\,dt'' + \ldots,$$

а $\mathbf{f}_0$ не зависит от времени. Связать $\mathbf{f}_0$ с решениями уравнения

$$\mathfrak{H}_0\mathbf{e}_0 = i\hbar\,(\partial\mathbf{e}_0/\partial t).$$

2.10. Разложить решение $\mathbf{e}$ волнового уравнения Дирака следующим образом:

$$\mathbf{e} = \mathbf{f} + \mathbf{g}; \quad \mathbf{f} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\alpha}_0)\,\mathbf{e}; \quad \mathbf{g} = \frac{1}{2}(1 - \boldsymbol{\alpha}_0)\,\mathbf{e}.$$

Показать, что

$$\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{g} = 0$$

и что

$$(E + eV + mc^2)\,\mathbf{f} = c\,[\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)]\mathbf{g},$$
$$(E + eV + mc^2)\,\mathbf{g} = -c\,[\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)]\,\mathbf{f}.$$

Показать для состояний с положительной энергией при малых $e\mathbf{A}$ и eV сравнительно с mc^2, что $\mathbf{g}^*\cdot\mathbf{g} \ll \mathbf{f}^*\cdot\mathbf{f}$.

2.11. Определить совокупность четырех состояний $\mathbf{e}_i$, которые удовлетворяют уравнению Дирака для неподвижной частицы

$$(\boldsymbol{\alpha}_0 mc^2)\,\mathbf{e}_i = E_0\mathbf{e}_i.$$

Показать, что четыре решения уравнений Дирака для частицы с импульсом $\mathbf{p}$ имеют вид

$$[c\,(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}) + \boldsymbol{\alpha}_0\,(mc^2 + |E|)]\mathbf{e}_i,$$

где

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4.$$

Стандартные формы некоторых уравнений с частными производными теоретической физики

Номера уравнений

Уравнение Лапласа $\nabla^2\psi = 0$. (1.1.4), (2.3.6)

Векторная форма $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$; $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$.

Уравнение Пуассона $\nabla^2\psi = -4\pi\rho$. (1.1.5), (2.1.2) (2.5.2)

Векторная форма $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 4\pi\mathbf{J}$; $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$. (2.5.7)

Уравнение Гельмгольца $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0.$ (2.1.10)

Векторная форма $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} - k^2\mathbf{A} = 0;\ \operatorname{div}\mathbf{A} = 0.$

Волновое уравнение $\Box^2\psi = \nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$ (2.1.9), (2.2.2)

Векторная форма $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathrm{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0;$

$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0.$ (2.2.3),(2.5.15)

Уравнение диффузии $\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}.$ (2.4.4)

Векторная форма $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = 0;$

$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0.$ (2.3.19)

Уравнение Клейна — Гордона $\Box^2\psi = \mu^2\psi.$ (2.1.27)

Векторная форма $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu^2\mathbf{A} = 0;$

$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ (Уравнение Прока). (2.5.37)

Уравнения Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0;\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho;\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{c}4\pi\mathbf{J};$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t};\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H};\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}. \qquad (2.5.11)$$

Уравнения для электромагнитных потенциалов

$$\Box^2\varphi = -4\pi\rho/\varepsilon,\ \Box^2\mathbf{A} = -4\pi\mu\mathbf{J}/c,$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A},\ \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad (2.5.15)$$

(относительно видов этих уравнений при других калибровках см. стр. 201 и 315).

Уравнение упругих волн (изотропная среда)

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{S}}{\partial t^2} = \nabla\cdot[\lambda\mathfrak{J}\operatorname{div}\mathrm{s} + \mu(\nabla\mathrm{s}) + \mu(\mathrm{s}\nabla)] = (\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathrm{s} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathrm{s}. \qquad (2.2.1)$$

Уравнение вязкой жидкости

$$\rho\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial t} = \rho\mathrm{v}\cdot(\nabla\mathrm{v}) = \nabla\cdot[-(p + \gamma\operatorname{div}\mathrm{v})\mathfrak{J} + \eta(\nabla\mathrm{v}) + \eta(\mathrm{v}\nabla)], \qquad (2.3.14)$$

$$\rho\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\left[p - \left(\frac{4}{3}\eta + \lambda\right)\operatorname{div}\mathrm{v} + \frac{1}{2}\rho v^2\right] - \eta\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathrm{v} + \rho\mathrm{v}\times\operatorname{rot}\mathrm{v},$$

где $\lambda = \frac{2}{3}\eta - \gamma.$

Уравнение Шредингера для одной частицы с массой m при потенциале V

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},\ |\psi|^2 \text{ — плотность вероятности.} \qquad (2.6.38)$$

Уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле

$$\alpha_0 mc\Psi = \boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\operatorname{grad}\Psi + \frac{e}{c}\mathbf{A}\Psi\right) + \left(\frac{\hbar}{ic}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - e\varphi\Psi\right) = 0; \qquad (2.6.57)$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{4}\mathrm{e}_n\psi_n,\ \Psi^*\cdot\Psi \text{ — плотность вероятности.}$$

ЛИТЕРАТУРА

Сочинения общего характера, затрагивающие материал этой главы:

Вебстер А. и Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. 1—2, ГТТИ, М., 1933—1934.
Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, Изд. иностр. лит., М., 1950.
Ландау Л., Лифшиц Е., Теория поля, ГТТИ, М., 1948.
Микусинский Я., Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций (1 вып.), Изд. иностр. лит., М., 1958.
Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, М., 1950.
Рэлей Дж., Теория звука, Гостехиздат, М., 1955.
Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, М., 1954.
Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, ОНТИ, М., 1937.
Joos G., Lehrbuch der theoretischen Physik, Leipzig, 1956.
Lindsay R. B., Margenau H., Foundations of Physics, New York, 1936.
Margenau H., Murphy G. M., Mathematics of Physics and Chemistry, New York, 1943.
Slater I. C., Frank N. H., Introduction to Theoretical Physics, New York, 1933.
Schaeffer C., Einführung in die theoretische Physik, 3 v. Berlin, 1937.

Дополнительная литература, представляющая интерес в связи с учением о колебаниях и звуке:

Coulson C. A., Waves, a Mathematical Account of the Common Types of Wave Motion, Edinburgh, 1941.
Lamb H., The Dynamical Theory of Sound, London, 1925.
Morse P. M., Vibration and Sound, New York, 1948.

Книги по теории упругости и упругим колебаниям:

Ляв А., Математическая теория упругости, ГТТИ, М., 1935.
Тимошенко С., Теория упругости, ГТТИ, М., 1934.
Brillouin L., Les tenseurs en méchanique et en elastique, Paris, 1938.
Sokolnikoff I. S., Mathematical Theory of Elasticity, New York, 1946.

Дополнительная литература по гидродинамике и движению волн сжатия:

Зауэр Р., Введение в газовую динамику, ГТТИ, М., 1947.
Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1, Гостехиздат, М., 1955.
Ламб Г., Гидродинамика, ГТТИ, М., 1947.
Ландау Л. Д. и Лифшиц Е., Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.
Chapman S., Cowling T. G., Mathematical Theory of Non-uniform Gases, Cambridge, New York, 1939 [1]).
Hadamard G. S., Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique, Paris, 1903.
Milne-Thomson L. M., Theoretical Hydrodynamics, London, 1938.

Книги по диффузии, тепловому потоку и теории переноса:

Лоренц Г. А., Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, ГТТИ, М., 1953.
Chandrasekhar S., Radiative Transfer, Oxford, New York, 1950.
Chapman S., Cowling T. G., Mathematical Theory of Non-uniform Gases, Cambridge, New York, 1939 [1]).
Fowler R. H., Statistical Mechanics, Cambridge, New York, 1936.
Hopf E., Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge, New York, 1934.

Книги по теории электромагнетизма, в особенности по основным понятиям теории:

Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, ГТТИ, М., 1948.
Тамм И. Е., Основы теории электричества, Гостехиздат, М., 1954.
Abraham M., Becker R., Classical Theory of Electricity and Magnetism, Glasgow, 1932.

[1]) Готовится к печати русское издание.— *Прим. ред.*

Van Vleck I. H., Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities, Oxford, New York, 1932.

Изложение основных принципов квантовой механики с различных точек зрения:

Ван-дер-Варден Б., Метод теории групп в квантовой механике, Харьков, 1938.
Де Брольи Л., Магнитный электрон, Госуд. научно-техн. изд. Украины, Харьков, 1936.
Дирак П., Основы квантовой механики, ГТТИ, М., 1932.
Зоммерфельд А., Волновая механика, Гостехиздат, Л.—М., 1933.
Зоммерфельд А., Строение атома и спектры, т. 2, ГИТЛЛ, М., 1956.
Кондон Е., Шортли Г., Теория атомных спектров, Изд. иностр. лит., М., 1949.
Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Квантовая механика, ч. 1, ГТТИ, М.—Л., 1948.
Шифф Л., Квантовая механика, Изд. иностр., лит., М., 1957.
Bohm D., Quantum Theory, New York, 1951[1]).
Jordan P., Anschauliche Quantentheorie, Berlin, 1936.
Kemble E. C., Fundamental Principles of Quantum Mechanics, New York, 1937.
Kramers H. A., Grundlagen der Quantentheorie, Leipzig, 1938.
J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1932.

[1]) Готовится к печати русское издание.