велла и с уравнениями упругих колебаний для частного случая поперечной волны, движущейся вдоль оси z при смещениях, направленных вдоль оси y, показать, что в результате получится пара связанных друг с другом волновых уравнений. Они будут соответствовать двум возможным электрическим волнам сдвига, одна из которых распространяется со скоростью, несколько меньшей, чем скорость чистых волн сдвига (при равных нулю σ), а другая со скоростью, несколько большей скорости света в рассматриваемой среде. Вычислить плотность импульса и аффинор напряжения-энергии для плоских волн сдвига, движущихся вдоль оси z (при $\mathbf{E}$, направленном вдоль оси y). В каком отношении находятся энергии, несомые медленными волнами, соответственно электрического и упругого полей? Тот же вопрос, относящийся к быстрой волне.

Сводка результатов главы 3

Плотность функции Лагранжа L есть функция переменных поля ψ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ и их производных $\psi_{is}=\partial\psi_i/\partial\xi_s$ (ξ_1, ξ_2, ξ_3 — пространственные координаты, $\xi_4=t$). Иногда L зависит также от ξ явно (например, через посредство потенциалов или плотностей заряда и тока). Полный *лагранжев интеграл*

$$\mathscr{L}=\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_4}^{b_4} L d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \tag{3.1.1}$$

является инвариантом. Требование, состоящее в том, чтобы $\mathscr{L}$ принимал максимальное или минимальное значение, то есть чтобы первая вариация интеграла $\mathscr{L}$ обращалась в нуль, приводит к *уравнениям Лагранжа — Эйлера*

$$\sum_{s=1}^{4}\frac{\partial}{\partial\xi_s}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{is}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\psi_i}=0, \tag{3.4.1}$$

служащих для отыскания ψ_i. Если L — квадратичная функция от ψ_{i4}, то *плотность канонического импульса*

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\psi_{i4}}$$

представляет собой линейную функцию от ψ_{i4}. Если L — линейная функция от ψ_{i4}, то p_i и функция Гамильтона от ψ_{i4} не зависят. Большинство других важных физических свойств поля описывается *тензором напряжения-энергии* $\mathfrak{W}$, компоненты которого равны

$$W_{ms}=\sum_{i=1}^{n}\psi_{im}\frac{\partial L}{\partial\psi_{is}}-\delta_{ms}L.$$

Например, его 4,4-компонента

$$W_{44}=H=\sum_{i=1}^{n}p_i\psi_{i4}-L$$

представляет собой плотность энергии. Если p_i зависит от ψ_{i4}, то из W_{44} можно исключить ψ_{i4} и получить *плотность функции Гамильтона* H — функцию от p_i, ψ_i и их пространственных производных. В этом

случае уравнения движения могут быть также записаны в *канонической форме*

$$\dot{\psi}_i = \psi_{i4} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = \frac{\partial p_i}{\partial t} = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_s}\left(\frac{\partial H}{\partial \psi_{is}}\right) - \frac{\partial H}{\partial \psi_i}. \tag{3.4.2}$$

Такие уравнения применимы только тогда, когда L содержит квадратичную функцию производных ψ_{i4}. Если же L зависит от ψ_{i4} линейно, то H не зависит от p (см. стр. 300). Вектор S интенсивности поля и вектор **P** импульса поля определяются формулами

$$\mathrm{S} = \sum_{s=1}^{3} W_{4s}\mathbf{a}_s = \sum_{i=1}^{n} \psi_{i4}\left[\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \psi_{is}}\mathbf{a}_s\right], \tag{3.4.4}$$

$$\mathbf{P} = \sum_{s=1}^{3} \mathbf{a}_s W_{s4} = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad}\psi_i)\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{i4}}\right). \tag{3.4.5}$$

Остальные компоненты $\mathfrak{W}$ определяют так называемый *аффинор напряжений* $\mathfrak{U} = \sum_{r,s=1}^{3} \mathbf{a}_r W_{rs}\mathbf{a}_s$. Компоненты тензора $\mathfrak{W}$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{s=1}^{4} \frac{\partial W_{ms}}{\partial \xi_s} = -\frac{\partial L}{\partial \xi_m}, \tag{3.4.3}$$

где $\partial L/\partial \xi_m$ — производная по параметру ξ_m, входящему в L *явно* (через посредство потенциалов, токов и т. п.). Если L не зависит от ξ явно, то $\partial L/\partial \xi = 0$. В этом случае последние соотношения можно представить в виде

$$\nabla\cdot\mathrm{S} + (\partial H/\partial t) = 0, \quad (\mathfrak{U}\cdot\nabla) + (\partial\mathbf{P}/\partial t) = 0.$$

Плотность *момента количества движения поля* относительно начала координат равна

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \psi_{i4}}(\mathbf{r}\times\operatorname{grad}\psi_i).$$

Гибкая струна или мембрана

Переменная поля ψ есть поперечное смещение.

Параметрами ξ_s служат x и t для струны, x, y и t — для мембраны.

Плотность функции Лагранжа $L = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - c^2\operatorname{grad}^2\psi\right]$, $c^2 = \frac{T_0}{\rho}$.

Уравнение Лагранжа — Эйлера $c^2\nabla^2\psi - (\partial^2\psi/\partial t^2) = 0$ (скалярное волновое уравнение).

Плотность канонического импульса $p = \rho(\partial\psi/\partial t)$.

Плотность функции Гамильтона $H = (1/2\rho)p^2 + \frac{1}{2}T_0\operatorname{grad}^2\psi$.

Интенсивность поля $\mathrm{S} = -T_0(\partial\psi/\partial t)\operatorname{grad}\psi$.

Импульс поля $\mathbf{P} = \rho(\partial\psi/\partial t)\operatorname{grad}\psi = -(1/c^2)\mathrm{S}$.

Сжимаемая невязкая жидкость

Переменная поля ψ есть потенциал скоростей; скорость поля $= \operatorname{grad}\psi$; избыточное давление $= -\rho(\partial\psi/\partial t)$.

Параметрами ξ_s служат x, y, z и t.

Плотность функции Лагранжа

$$L = -\frac{1}{2}\rho\left[(\operatorname{grad}\psi)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right], \quad c^2 = \frac{p_0\gamma}{\rho}.$$

Уравнение Лагранжа — Эйлера $\nabla^2\psi - (1/c^2)(\partial^2\psi/\partial t^2) = 0$ (скалярное волновое уравнение).

Плотность канонического импульса $p = (\rho/c^2)\dot{\psi} = -$(избыточное давление)$/c^2$.

Плотность функции Гамильтона $H = 1/2(1/\rho c^2)p^2 + 1/2\rho(\operatorname{grad}\psi)^2$.

Интенсивность поля $\mathbf{S} = -\rho(\partial\psi/\partial t)\operatorname{grad}\psi =$ (избыточное давление) $\times$ $\times$ (скорость жидкости).

Импульс поля $\mathbf{P} = (\rho/c^2)(\partial\psi/\partial t)\operatorname{grad}\psi = -(1/c^2)\mathbf{S}$.

Уравнение диффузии

Переменными поля являются температура[1]) или концентрация ψ и «сопряженная» ей величина ψ^*.

Параметрами ξ_s служат x, y, z и t. Плотность функции Лагранжа

$$L = -(\operatorname{grad}\psi)\cdot(\operatorname{grad}\psi^*) - \frac{1}{2}a^2\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right).$$

Уравнение Лагранжа — Эйлера (для ψ) $\nabla^2\psi = a^2(\partial\psi/\partial t)$ (уравнение диффузии).

Плотности канонических импульсов $p = -\frac{1}{2}a^2\psi^*$; $p^* = \frac{1}{2}a^2\psi$.

Плотность энергии $U = W_{44} = (\operatorname{grad}\psi)\cdot(\operatorname{grad}\psi^*)$.

Интенсивность поля $\mathbf{S} = -\psi^*(\operatorname{grad}\psi) - (\operatorname{grad}\psi^*)\psi$.

Импульс поля $\mathbf{P} = \frac{1}{2}a^2[(\operatorname{grad}\psi^*)\psi = \psi^*(\operatorname{grad}\psi)]$.

Уравнение Шредингера.

Переменными поля являются волновая функция ψ и ее сопряженная ψ^* Произведение $\psi\psi^*$ есть плотность вероятности наличия частицы.

Параметрами ξ_s служат x, y, z и t.

Плотность функции Лагранжа

$$L = -\frac{\hbar^2}{2m}(\operatorname{grad}\psi^*)\cdot(\operatorname{grad}\psi) - \frac{\hbar}{2i}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right) - \psi^* V\psi.$$

$V(x, y, z)$ — потенциальная энергия частицы.

Уравнение Лагранжа — Эйлера (для ψ)

$$-(\hbar^2/2m)\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar(\partial\psi/\partial t) \quad \text{(уравнение Шредингера).}$$

Плотности канонических импульсов $p = -(\hbar/2i)\psi^*$; $p^* = (\hbar/2i)\psi$.

Плотность энергии $U = W_{44} = (\hbar^2/2m)(\operatorname{grad}\psi^*)\cdot(\operatorname{grad}\psi) + \psi^* V\psi$.

Интенсивность поля $\mathbf{S} = -(\hbar^2/2m)[(\partial\psi^*/\partial t)\operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}\psi^*(\partial\psi/\partial t)]$.

Импульс поля $\mathbf{P} = -(\hbar/2i)[\psi^*(\operatorname{grad}\psi) - (\operatorname{grad}\psi^*)\psi]$.

Плотность тока $\mathbf{J} = (e\hbar/2im)[\psi^*(\operatorname{grad}\psi) - (\operatorname{grad}\psi^*)\psi]$, где e — заряд частицы, m — масса частицы.

Уравнение Клейна — Гордона

Переменными поля являются волновая функция ψ и ее сопряженная ψ^*.

Плотность заряда частицы равна $(\hbar e/2imc^2)[(\partial\psi^*/\partial t)\psi - \psi^*(\partial\psi/\partial t)]$, где m — масса частицы.

Параметрами ξ_s служат x, y, z и t.

---

[1]) В случае уравнения теплопроводности. — *Прим. перев.*

Плотность функции Лагранжа (в случае отсутствия поля)

$$L = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[(\operatorname{grad}\psi^*)\cdot(\operatorname{grad}\psi) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi^*\psi\right].$$

Уравнение Лагранжа — Эйлера для ψ: $\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi$ (уравнение Клейна — Гордона).

Плотности канонических импульсов

$$p = \frac{\hbar^2}{2mc^2}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right), \quad p^* = \frac{\hbar^2}{2mc^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right).$$

Плотность функции Гамильтона

$$H = (2mc^2/\hbar^2)\,p^*p + (\hbar^2/2m)\,(\operatorname{grad}\psi^*)\cdot(\operatorname{grad}\psi) + (mc^2/2)\psi^*\psi.$$

Интенсивность поля $\mathbf{S} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}(\operatorname{grad}\psi) + (\operatorname{grad}\psi^*)\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]$.

Импульс поля $\mathbf{P} = -(1/c^2)\,\mathbf{S}$.

Плотность тока $\mathbf{J} = (e\hbar/2im)\,[\psi^*(\operatorname{grad}\psi) - (\operatorname{grad}\psi^*)\,\psi]$, где e — заряд частицы.

Уравнение упругих колебаний

Переменными поля ψ_n служат компоненты вектора смещения $\mathbf{s}$.

Параметрами ξ_s являются координаты x, y, z и t.

Плотность функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{s}}^2 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{S}:\mathfrak{T},$$

где

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{s} + \mathbf{s}\nabla),$$

γ — аффинор деформации, $\mathfrak{T} = \lambda\,|\mathfrak{S}|\,\mathfrak{J} + 2\mu\mathfrak{S}$ — аффинор напряжений для изотропного твердого тела. Уравнение Лагранжа — Эйлера

$$\rho\,(\partial^2\mathbf{s}/\partial t^2) = (\lambda + \mu)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{s}) + \mu\nabla^2\mathbf{s}.$$

Плотность канонического импульса $\mathbf{p} = \rho\,(\partial\mathbf{s}/\partial t)$.

Плотность функции Гамильтона $H = W_{44} = (1/2\rho)\,p^2 + \frac{1}{2}\,|\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{S}|$.

Интенсивность поля $\mathbf{S} = -(\partial\mathbf{s}/\partial t)\cdot\mathfrak{T}$.

Импульс поля $\mathbf{P} = \rho\,(\nabla\mathbf{s})\cdot(\partial\mathbf{s}/\partial t)$.

Для неизотропного твердого тела аффинор напряжений выражается в виде $\mathfrak{T} = \mathfrak{J}:\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{J}$ — тетрадик с элементами g_{mnrs}; последние подчинены общим условиям симметрии $g_{mnrs} = g_{nmrs} = g_{mnsr} = g_{rsmn}$, а в остальном произвольны.

Уравнение Лагранжа — Эйлера для этого случая

$$\rho\left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\right) = \nabla\cdot(\mathfrak{J}:\nabla\mathbf{s}),$$

то есть

$$\rho\ddot{s}_n = \sum_{mrs} g_{nmrs}\frac{\partial^2 s_s}{\partial x_m \partial x_r}.$$

Плотность функции Гамильтона

$$H = W_{44} = (1/2\rho)\,p^2 + (\nabla\mathbf{s}):\mathfrak{J}:(\nabla\mathbf{s}), \quad \mathbf{p} = \rho\,(\partial\mathbf{s}/\partial t).$$

Выражения $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ и т. д. в этом случае получаются подстановкой нового $\mathfrak{T}$ в формулы, определяющие $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ и т. д., приведенные выше (для изотропного случая).

Уравнения электромагнитного поля.

Переменными поля служат компоненты векторного потенциала $\mathbf{A}$ и скалярный потенциал φ. Для простоты выберем такую калибровку потенциалов, при которой $\varphi=0$, так что $\operatorname{rot}\mathbf{A}=\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, $\partial\mathbf{A}/\partial t=-c\mathbf{E}=-c\mathbf{D}/\varepsilon$ и $\operatorname{div}(\partial\mathbf{A}/\partial t)=-4\pi\rho c/\varepsilon$, где ρ — плотность свободных зарядов. Параметрами являются x, y, z и t.

Плотность функции Лагранжа $L=\frac{\varepsilon}{8\pi c^2}\left|\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right|^2-\frac{1}{8\pi\mu}|\operatorname{rot}\mathbf{A}|^2+\frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}$,

где $\mathbf{J}$ — плотность тока.

Уравнение Лагранжа — Эйлера $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{A})+(\mu\varepsilon/c^2)(\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2)=(4\pi\mu/c)\,\mathbf{J}$.

Плотность канонического импульса $\mathbf{p}=-(\mathbf{D}/4\pi c)$.

Плотность функции Гамильтона

$$H=W_{44}=(2\pi c^2/\varepsilon)\,p^2+(1/8\pi\mu)\,|\operatorname{rot}\mathbf{A}|^2-(1/c)\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}.$$

Интенсивность поля $\mathbf{S}=(c/4\pi)(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$.

Импульс поля $\mathbf{P}=-(\varepsilon/4\pi)(\nabla\mathbf{A})\cdot(\partial\mathbf{A}/\partial t)$.

Уравнение Дирака

Переменные поля — ψ_n^* и ψ_n ($n=1, 2, 3, 4$). Плотность вероятности наличия электрона равна $\psi_1^*\psi_1+\psi_2^*\psi_2+\psi_3^*\psi_3+\psi_4^*\psi_4=\Psi^*\Psi$. Параметрами являются x, y, z, t. Волновые функции — $\Psi=\sum\mathbf{e}_n\psi_n$ и $\Psi^*=\sum\psi_n^*\mathbf{e}_n^*$, где $\mathbf{e}_n$ — единичные векторы в спиновом пространстве. Операторы $\boldsymbol{\alpha}_x$, $\boldsymbol{\alpha}_y$, $\boldsymbol{\alpha}_z$, $\boldsymbol{\alpha}_0$ воздействуют на векторы $\mathbf{e}_n$ согласно уравнениям (2.6.53). Плотность функции Лагранжа

$$L=\frac{\hbar c}{2i}[(\operatorname{grad}\Psi^*)\cdot\boldsymbol{\alpha}\Psi-\Psi^*\boldsymbol{\alpha}\cdot\operatorname{grad}\Psi)]+\frac{\hbar}{2i}\left[\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\Psi-\right.$$

$$\left.-\Psi^*\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\right]-e\Psi^*(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A})\,\Psi+ec\Psi^*\varphi\Psi-mc^2\Psi^*\boldsymbol{\alpha}_0\Psi,$$

где $\mathbf{A}$ и φ — электромагнитные потенциалы, m — масса частицы.

Уравнения Лагранжа — Эйлера

$$\boldsymbol{\alpha}_0 mc\Psi+\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\operatorname{grad}\Psi+\frac{e}{c}\mathbf{A}\Psi\right)+\left(\frac{\hbar}{ic}\frac{\partial\Psi}{\partial t}-e\varphi\Psi\right)=0,$$

$$mc\Psi^*\boldsymbol{\alpha}_0+\left(-\frac{\hbar}{i}\operatorname{grad}\Psi^*+\frac{e}{c}\mathbf{A}\Psi^*\right)\cdot\boldsymbol{\alpha}-\left(\frac{\hbar}{ic}\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}+e\varphi\Psi^*\right)=0.$$

Плотность канонического импульса $\mathbf{p}=-(\hbar/2i)\,\Psi^*$, $\mathbf{p}^*=(\hbar/2i)\,\Psi$.

Плотность функции Гамильтона $H=\frac{\hbar c}{2i}[\Psi^*\boldsymbol{\alpha}\cdot(\operatorname{grad}\Psi)-(\operatorname{grad}\Psi^*)\cdot\boldsymbol{\alpha}\Psi]+$ $+e\Psi^*\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A}\Psi-ec\Psi^*\varphi\Psi+mc^2\Psi^*\boldsymbol{\alpha}_0\Psi$.

Интенсивность поля $\mathbf{S}=(\hbar c/2i)[(\partial\Psi^*/\partial t)\,\boldsymbol{\alpha}\Psi-\Psi^*\boldsymbol{\alpha}(\partial\Psi/\partial t)]$.

Импульс поля $\mathbf{P}=(\hbar/2i)[(\operatorname{grad}\Psi^*)\,\Psi-\Psi^*(\operatorname{grad}\Psi)]$.

Плотность тока $\mathbf{J}=ce\Psi^*\boldsymbol{\alpha}\Psi$, где e — заряд частицы.

ЛИТЕРАТУРА

Лишь немногие книги сколько-нибудь подробно излагают основное содержание этой главы, но по отдельным вопросам можно указать различные источники. Общие вопросы вариационного исчисления изложены в следующих книгах:

Блисс Д., Лекции по вариационному исчислению, Изд. иностр. лит., М., 1950.
Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, ГТТИ, М., 1951.
Рэлей, Теория звука, Гостехиздат, М., 1955.

Литература по теории преобразований, применяющихся в динамике, включая принцип Гамильтона:

Голдстейн Г., Классическая механика, ГТТИ, М., 1957.
Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, ОНТИ, М., 1937.
Born M., Mechanics of the Atom, London, 1927.
Corben H. C., Stehle P., Classical Mechanics, Chaps. 10—15, New York, 1950.
Lanczos C., The Variational Principles of Dynamics, Toronto, 1949.
Webster A. G., Dynamics, Chaps. 4 and 9, New York, 1922.

Литература, посвященная приложениям принципа Гамильтона к физическим полям:

Венцель Г., Введение в квантовую теорию волновых полей, ГТТИ, М., 1947.
Гайтлер В., Квантовая теория излучения, ГТТИ, М.—Л., 1940.
Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Теория поля, ГТТИ, М., 1948.
Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Квантовая механика, ч. 1, ГТТИ, М.—Л., 1948.
Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, Изд. иностр. лит., М., 1947.
Шифф Л., Квантовая механика, Изд. иностр. лит., М., 1957.
Fermi E., Quantum Theory of Radiation, Rev. Modern. Phys., 4, 87 (1932).
Weyl H., Theory of Groups and Quantum Mechanics, London, 1931, Chap. 2.