

где $b = (2a/\pi)(\beta + \operatorname{sh} \beta)$. Для случая $b = a$ (при этом $\beta = 0,7493$) вычислить (с двумя значащими цифрами) образы в плоскости w точек $z = -a, -a/2, -a/2 - ia, -a/2 + ia$.

4.47. Показать, что если

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx/l} \quad (-l \leq x \leq l),$$

то

$$A_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-inx/l} dx.$$

Внося эти выражения A_n в ряд, представляющий функцию $f(x)$, и переходя должным образом к пределу при $l \rightarrow \infty$, вывести интеграл Фурье.

4.48. Обобщенные преобразования Меллина определяются равенствами

$$F_-(s) = \int_0^1 f(x) x^{s-1} dx, \quad F_+(s) = \int_1^\infty f(x) x^{s-1} dx.$$

Показать, что F_- аналитична в некоторой полуплоскости вида $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, а F_+ — в некоторой полуплоскости вида $\operatorname{Re} s < \sigma_1$. Показать, что если существует преобразование Меллина в обычном смысле, то $\sigma_0 < \sigma_1$. Показать, что для $\sigma > \sigma_0$ и $\tau < \sigma_1$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_-(s) \frac{ds}{x^s} + \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} F_+(s) \frac{ds}{x^s} \right).$$

4.49. Найти преобразования Фурье F_+ и F_- функции $\cos ax$ при комплексном a и определить их области аналитичности.

4.50. Найти преобразования Фурье F_+ и F_- функции $x^n e^{-x}$ и определить их области аналитичности.

4.51. Посредством формулы суммирования Пуассона показать, что

$$\vartheta_3(u, e^{-\alpha^2/2}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(2/\alpha^2)(u+m\pi)^2}$$

(функция ϑ_3 определена на стр. 407).

Основные свойства функций комплексного переменного

Функция $f = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$ называется *аналитической* в области R плоскости z , если она удовлетворяет одному из следующих трех эквивалентных условий:

а. Производная df/dz в любой точке $z = a$ области R существует и не зависит от направления dz ; эта производная непрерывна в области R .

б. $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$, $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$, причем все эти производные непрерывны в R .

в. $\oint_C f(z) dz = 0$ для любого замкнутого контура C , который можно стянуть в точку внутри области R .

Если хоть одно из этих условий выполнено (следовательно, выполнены и остальные), то производные всех порядков функции f по z существуют и аналитичны в области R .

Далее, для любого замкнутого контура, заключенного внутри односвязной области R , в которой f аналитична,

$$\oint \frac{f(z) dz}{z-a} = 2\pi i f(a), \quad \oint \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a),$$

когда a лежит внутри контура; если точка a находится вне контура, то эти интегралы обращаются в нуль (см. § 4.3).

Точки, в которых $f(z)$ не аналитична, называются *особыми точками* этой функции (см. стр. 339, 359). Особая точка $z=a$ есть *простой полюс*, когда

$$f(z) \underset{z \rightarrow a}{\sim} \frac{g(z)}{z-a},$$

где $g(z)$ — аналитическая функция при $z=a$ и $g(a) \neq 0$. Вообще, если

$$f(z) \underset{z \rightarrow a}{\sim} \frac{g(z)}{(z-a)^n}, \quad (z \rightarrow a),$$

где n — целое положительное число, $g(z)$ — аналитическая функция при $z=a$ и $g(a) \neq 0$, то $z=a$ является *полюсом порядка n* . Если при $z \rightarrow a$ функция $f(z)$ не имеет определенного предела, ни конечного, ни бесконечного, то $z=a$ — *существенно особая точка* функции $f(z)$.

С другой стороны, если особая точка $z=a$ функции $f(z)$ такова, что $f(a + \varepsilon e^{i\varphi})$ при возрастании φ на 2π , изменяясь непрерывно, приобретает значение, отличное от исходного, то $z=a$ называется *точкой ветвления* функции $f(z)$ (выбирается так, что $a + \varepsilon e^{i\varphi}$ для всех φ находится в области аналитичности функций f). Так, например, точка a является точкой ветвления функций $f = (z-a)^\nu g(z)$ и $f = \ln(z-a) g(z)$, где ν — нецелое число (положительное или отрицательное), а $g(z)$ — аналитическая функция в точке a . Полюсы и существенно особые точки представляют собой *изолированные* особые точки; точки же ветвления (никогда не существующие в одиночку) являются *неизолированными* особыми точками, так как любая ветвь f оказывается неаналитической вдоль некоторой линии, оканчивающейся в точке ветвления.

Если точка $w=0$ является особой для $f(1/w)$, то говорят, что $f(z)$ имеет особенность в бесконечно удаленной точке.

По характеру и расположению своих особых точек функции могут быть классифицированы следующим образом:

1. Если $f(z)$ вовсе не имеет особых точек, то $f(z)$ — *постоянная*.
2. Если $f(z)$ имеет единственную особую точку — полюс n -го порядка в бесконечности, то $f(z)$ — многочлен n -й степени относительно z .
3. Если $f(z)$ имеет единственную особую точку в бесконечности, то $f(z)$ называется *целой функцией* (целыми функциями являются, в частности, многочлены).
4. Если $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме полюсов (тогда их может быть лишь конечное число), то $f(z)$ представляет собой *отношение двух многочленов* от z . Функция, не имеющая в заданной области особых точек, отличных от полюсов, называется *мероморфной* в этой области. Таким образом, *рациональная* функция мероморфна во всей плоскости z .
5. Если в конечных точках плоскости $f(z)$ не имеет других особенностей, кроме полюсов (тогда как бесконечно удаленная точка может быть

существенно особой), то $f(z)$ называется *мероморфной функцией* переменного z (в частности, рациональные функции являются мероморфными).

6. Функции, имеющие точки ветвления, являются многозначными (все ранее перечисленные функции однозначны).

Мероморфная функция может быть разложена в ряд элементарных дробей, каждый член которого соответствует некоторому полюсу функции в конечной точке плоскости. В частности, если все ее полюсы $z = a_n$ в конечной части плоскости простые, причем точка $z = 0$ не является полюсом, то [см. (4.3.6); дополнительные условия см. на стр. 363]

$$f(z) = f(0) + \sum_n \left(\frac{b_n}{z - a_n} + \frac{b_n}{a_n} \right),$$

где b_n — вычет функции относительно полюса a_n .

Целая функция может быть представлена в виде произведения множителей, соответствующих всевозможным нулям функции (в конечных точках). Так, если все нули $z = a_1, a_2, \dots$ функции f простые (т. е. $1/f$ имеет лишь простые полюсы) и ни одно a_n не равно нулю, то

$$f(z) = f(0) e^{[f'(0)/f(0)]z} \prod_n \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{z/a_n}$$

[см. (4.3.8); дополнительные условия см. на стр. 364].

Алгорифм Эйлера для вычисления сумм рядов. Пусть задан ряд

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

и пусть другой ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n b_n z^n$$

получается из первого введением множителей C_n в коэффициенты. Тогда

$$f(z) = C_0 g(z) - (\delta C_0) z g'(z) + (\delta^2 C_0) \frac{z^2}{2!} g''(z) - \dots,$$

где

$$\delta C_0 = C_0 - C_1, \quad \delta^2 C_0 = C_0 - 2C_1 + C_2,$$

$$\delta^3 C_0 = C_0 - 3C_1 + 3C_2 - C_3, \dots .$$

В частности, если $g(z) = 1/(1+z) = \sum (-1)^n z^n$, то

$$f(z) = \sum (-1)^n a_n z^n = \frac{1}{1+z} [a_0 + (\delta a_0) \zeta + (\delta^2 a_0) \zeta^2 + \dots],$$

где $\zeta = z/(1+z)$. В том случае, когда C_n или a_n представляют собой многочлены относительно n степени N , все разности δ^k порядка $k > N$ обращаются в нуль и $f(z)$ выражается через известную функцию сравнения $g(z)$ в конечном виде.

Представление интегралов посредством асимптотических рядов. Часто удается представить функцию $\phi(z)$ в виде интеграла

$$\phi(z) = \int_C e^{z\phi(t)} dt,$$

где C – некоторый контур (замкнутый или уходящий в бесконечность) в плоскости t . Для вычисления $\psi(z)$ при $\operatorname{Re} z \gg 1$ мы деформируем C (в допустимых пределах) так, чтобы $\operatorname{Re} f$ всюду принимала возможно меньшие значения. Тогда наибольшее значение $\operatorname{Re} f$ на контуре будет достигаться в седловой точке $t = t_0$ для $\operatorname{Re} f$, где $df/dt = 0$. В окрестности $t = t_0$ будем иметь

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 f''(t_0) + \frac{1}{6}(t - t_0)^3 f'''(t_0) + \dots,$$

и в этой окрестности контур следует направить по линии, вдоль которой $\operatorname{Im} f$ постоянна и равна $\operatorname{Im} f(t_0)$. Из двух возможных линий выбираем ту, вдоль которой $\operatorname{Re} f(t)$ имеет максимум (а не минимум) при $t = t_0$. При интегрировании по такому пути часть интеграла, соответствующая участку контура, близкому к точке $t = t_0$, будет доминировать, и для больших значений $\operatorname{Re} z$ получаем асимптотический ряд

$$\psi(z) \simeq \frac{e^{zf(t_0) - \frac{1}{2}\pi i}}{\sqrt{\frac{1}{2}zf''(t_0)}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{z^n},$$

где

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{12[f''(t_0)]^3} \{5[f''''(t_0)]^2 - 3f''(t_0)f^{IV}(t_0)\}, \dots$$

[по поводу дальнейших деталей см. формулы (4.6.14)–(4.6.19)].

Преобразование Фурье. Если функция $f(z)$ такова, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 dz$ имеет конечное значение, то функция

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ikz} dz$$

называется *преобразованием Фурье* функции $f(z)$; при этом

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikz} dk, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 dz.$$

Далее, если в окрестности точки $z = 0$ функция $f_+(z)$ задается равенствами

$$f_+(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!}, & z > 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

то поведение F при больших k описывается функцией

$$F_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{k}\right)^n f^{(n-1)}(0).$$

Если $F(k)$ и $G(k)$ – преобразования Фурье функций $f(z)$ и $g(z)$, то преобразованием Фурье функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(z-y) dy$$

является произведение $F(k)G(k)$ (теорема о свертке). В то же время преобразованием Фурье произведения $f(z)g(z)$ служит функция

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(l)G(k-l)dl.$$

Имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\bar{G}(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\bar{g}(z)dz.$$

Если $F(k)$ — преобразование Фурье функции $f(z)$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2m\pi}{\alpha}\right)$$

(формула суммирования Пуассона).

В случае когда интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 dz$ бесконечен, но при некотором τ_0

конечен интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 e^{-2z\tau_0} dz$ и преобразованием Фурье функции $f(z)e^{-z\tau_0}$ является $G(k)$, преобразованием Фурье функции $f(z)$ служит функция $F(k) = G(k - i\tau_0)$, причем

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F(k) e^{-ikz} dk$$

[другие условия сходимости см. в связи с формулой (4.8.19)].

Функция $f(z)$	Ее преобразование Фурье $F(k)$
$\lambda f(z)$	$\lambda F(k)$
$f(az)$	$(1/a)F(k/a)$
$izf(z)$	$\frac{d}{dk}F(k)$
$\frac{d}{dz}f(z)$	$-ikF(k)$
$e^{izk_0}f(z)$	$F(k + k_0)$
$f(z + z_0)$	$e^{-ikz_0}F(k)$
1	$\delta(k)$
$(z - iz_0)^{-1}$ ($\operatorname{Re} z_0 > 0$)	$i\sqrt{2\pi}e^{-ikz_0}$ ($\operatorname{Re} k > 0$)
$[(z - iz_0)(z + iz_1)]^{-1}$ ($\operatorname{Re} z_0 > 0, \operatorname{Re} z_1 > 0$)	$\frac{\sqrt{2\pi}}{z_0 + z_1} \begin{cases} e^{-z_0 k} & (\operatorname{Re} k > 0), \\ e^{z_1 k} & (\operatorname{Re} k < 0) \end{cases}$
$\operatorname{sech}(k_0 z)$	$(1/k_0)\sqrt{\pi/2} \operatorname{sech}(\pi k/2k_0)$
$\operatorname{th}(k_0 z)$	$(i/k_0)\sqrt{\pi/2} \operatorname{cosech}(\pi k/2k_0)$
$z^{-\alpha-1}e^{iz}$	$i\sqrt{2\pi}e^{\pi i\alpha/2}k^{\alpha/2}J_{\alpha}(2\sqrt{k})$
$e^{-z^2/2}$	$e^{-k^2/2}$
$\sqrt{z}J_{-1/4}\left(\frac{1}{2}z^2\right)$	$\sqrt{k}J_{-1/4}\left(\frac{1}{2}k^2\right)$

Преобразование Лапласа. Если функция $f(x)$ равна нулю при $x < 0$ и интеграл $\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-2\tau x} dx$ конечен при $\tau > \tau_0$, то функция

$$F_l(p) = \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx$$

называется *преобразованием Лапласа* функции $f(x)$; при этом

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} F_l(p) e^{px} dp \quad (\tau > \tau_0, x > 0).$$

Теорема о свертке гласит, что

$$\int_0^x f(y) h(x-y) dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} F_l(p) H_l(p) e^{px} dp.$$

Дальнейшие сведения о преобразовании Лапласа см. в конце гл. 11.

Преобразование Меллина. Если функция $f(x)$ задана в интервале $0 \leq x < \infty$ и интеграл $\int_0^\infty |f(x)|^2 x^{2\sigma-1} dx$ конечен при $\sigma > \sigma_0$, то

$$F_m(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx$$

называется *преобразованием Меллина* функции $f(x)$; при этом

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_m(s) \frac{ds}{x^s} \quad (\sigma > \sigma_0, x > 0).$$

Теорема о свертке может быть выражена так:

$$\int_0^\infty v(y) w\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} V_m(s) W_m(s) \frac{ds}{x^s}$$

или

$$\int_0^\infty v(x) w(x) x^{s-1} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} V_m(\rho) W_m(s-\rho) d\rho.$$

Функция $f(x)$	Ее преобразование Меллина $F_m(s)$
$\lambda f(x)$	$\lambda F_m(s)$
$f(ax)$	$a^{-s} F_m(s)$
$x^\alpha f(x)$	$F_m(s+\alpha)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$-(s-1) F_m(s-1)$
$f(x) \ln x$	$\frac{d}{ds} F_m(s)$

Функция $f(x)$	Ее преобразование Меллина $F_m(s)$
e^{-x}	$\Gamma(s)$
$F(a, b c -x)$	$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}$
$(1+x)^{-a}$	$\Gamma(s)\Gamma(a-s)/\Gamma(a)$
$(1/x) \ln(1+x)$	$\pi/(1-s) \sin \pi s$
$\operatorname{Ar th} x$	$(\pi/2s) \operatorname{tg}(\pi s/2)$
$(1+x)^{-m} P_{m-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$	$[\Gamma(s)/\Gamma(1-s)][\Gamma(m-s)/\Gamma(m)]^2$
$F(a c -x)$	$\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(c)/\Gamma(a)\Gamma(c-s)$
$J_v(x)$	$2^{s-1}\Gamma\left(\frac{v+s}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{v-s}{2}+1\right)$
$x J_v(x)$	$2^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+v+1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{v-s}{2}+1\right)$
$\sin x$	$\Gamma(s)\sin(\pi s/2)$
$\cos x$	$\Gamma(s)\cos(\pi s/2)$
$N_v(x)$	$-\frac{2^{v-1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{s+v}{2}\right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{s-v}{2}\right) \cos\left[\frac{1}{2}\pi(s-v)\right]$

Функции J_v, j_v, F, P_m и N_v , встречающиеся в этой таблице, определены в конце гл. 5, 10 и 11.

Часто встречающиеся специальные функции

См. также в конце гл. 5, 6, 10, 11 и 12.

Гамма-функция (см. стр. 396).

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0), \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (\gamma = 0,577215 \dots).$$

$$\phi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{d}{dz} \Gamma(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{z+n} \right),$$

$$\phi(z+1) = \frac{1}{z} + \phi(z).$$