

где $\sigma + \tau = -iM\eta^2/h^2k$ и $k^2 = 2ME/h^2 = (Mv/h)^2$. Показать, что при $m = 0$, $\sigma = -\frac{1}{2}$ и $N = \Gamma(1 - i\eta^2/hv)e^{\pi\eta^2/2hv}$ решение имеет асимптотический вид

$$\phi \simeq \exp[ikz - i(\eta^2/hv) \ln k(r-z)] + \\ + \frac{\eta^2 \exp[i(\eta^2/hv) \ln(1-z/r) - 2i\delta]}{Mv^2(r-z)} \exp \left[ikr + \left(\frac{i\eta^2}{hv} \right) \ln(kr) \right],$$

где $\Gamma(1 - i\eta^2/hv) = |\Gamma| e^{i\delta}$. Исследовать физическое значение этого результата и получить закон рассеяния Резерфорда.

5.41. При помощи способа, аналогичного указанному в тексте для $Je_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu)$, вывести разложения в ряды для «радиальной» функции Маттье

$$Je_{2m+1}(h, \operatorname{ch} \mu) = \sqrt{\frac{1}{2}\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} J_{2n+1}(h \operatorname{csh} \mu) = \\ = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}}{B_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left[J_n \left(\frac{1}{2}he^{-\mu} \right) J_{n+1} \left(\frac{1}{2}he^{\mu} \right) - \right. \\ \left. - J_{n+1} \left(\frac{1}{2}he^{-\mu} \right) J_n \left(\frac{1}{2}he^{\mu} \right) \right],$$

где B_{2n+1} — коэффициенты ряда Фурье для «угловой» функции $Se_{2m+1}(h, \cos \theta)$, определенной на стр. 531.

5.42. При помощи преобразования Лапласа показать, что если

$$u(s) = \int_0^\infty e^{-st} K(t) dt \quad \text{и} \quad v(s) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t) dt, \quad \text{то} \quad f(x) = \int_0^x K(x-t) \varphi(t) dt,$$

где $u(s)v(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$. Отсюда доказать, что

$$n \int_0^x J_m(x-t) J_n(t) \frac{dt}{t} = J_{m+n}(x).$$

Таблица разделяющих координат для трех измерений

Система координат определяется соотношениями между прямоугольными координатами x, y, z и криволинейными координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 или при помощи коэффициентов Ламе $h_n = \sqrt{(\partial x / \partial \xi_n)^2 + (\partial y / \partial \xi_n)^2 + (\partial z / \partial \xi_n)^2}$ и т. д., обладающих свойством (см. стр. 34)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_n h_n^2 d\xi_n^2.$$

Выражения для оператора Лапласа, градиента, вихря и т. д. через эти h приведены в табл. на стр. 116. Стандартное уравнение с частными производными $\nabla^2 \psi + k_1^2 \psi = 0$ приобретает вид

$$\sum_m \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_m^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \right] + k_1^2 \psi = 0,$$

где $k_1^2 = 0$ для уравнения Лапласа, $k_1^2 = \text{const}$ для волнового уравнения и $k_1^2 = \epsilon_1 - V(\xi)$ для уравнения Шредингера для одной частицы в потенциальном поле V .

Для разделения величины $h_1 h_2 h_3 / h_n^2$ должна разлагаться на множители следующим образом:

$$h_1 h_2 h_3 / h_n^2 = g_1(\xi_2, \xi_3) f_1(\xi_1) \quad \text{и т. д.}$$

Определитель Штеккеля равен

$$S = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(\xi_1) & \Phi_{12}(\xi_1) & \Phi_{13}(\xi_1) \\ \Phi_{21}(\xi_2) & \Phi_{22}(\xi_2) & \Phi_{23}(\xi_2) \\ \Phi_{31}(\xi_3) & \Phi_{32}(\xi_3) & \Phi_{33}(\xi_3) \end{vmatrix} = \frac{h_1 h_2 h_3}{f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) f_3(\xi_3)}.$$

Алгебраическое дополнение S элемента $\Phi_{m1}(\xi_m)$ связано с коэффициентами Ламе соотношением

$$M_m = \partial S / \partial \Phi_{m1} = S / h_m^2,$$

где

$$M_1(\xi_2, \xi_3) = \Phi_{22} \Phi_{33} - \Phi_{23} \Phi_{32}, \quad M_2(\xi_1, \xi_3) = \Phi_{13} \Phi_{32} - \Phi_{12} \Phi_{33},$$

$$M_3(\xi_1, \xi_2) = \Phi_{12} \Phi_{23} - \Phi_{22} \Phi_{13}.$$

Отсюда

$$\sum_m \frac{\Phi_{mn}(\xi_m)}{h_m^2} = \frac{1}{S} \sum_m \Phi_{mn} M_m = \delta_{n1},$$

а также

$$g_1(\xi_2, \xi_3) = \frac{h_1 h_2 h_3}{f_1 h_1^2} = \frac{M_1 S f_1 f_2 f_3}{f_1} = M_1(\xi_2, \xi_3) f_2(\xi_2) f_3(\xi_3) \quad \text{и т. д.}$$

Поэтому стандартное уравнение с частными производными приобретает вид

$$\sum_m \frac{M_m}{S} \left[\frac{1}{f_m} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(f_m \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \right) \right] + k_1^2 \psi = 0,$$

а тремя разделямыми уравнениями для волнового уравнения ($k_1^2 = \text{const}$) служат $[\psi = X_1(\xi_1) X_2(\xi_2) X_3(\xi_3)]$,

$$\frac{1}{f_m(\xi_m)} \frac{d}{d\xi_m} \left[f_m(\xi_m) \frac{dX_m}{d\xi_m} \right] + \sum_n \Phi_{mn}(\xi_m) k_n^2 X_m = 0,$$

где k_2^2 и k_3^2 — константы разделения. Уравнение с частными производными получается при помощи умножения уравнения при $m=1$ на $(M_1/S) X_2 X_3$, и т. д. для $m=2$ и $m=3$ с последующим суммированием по m .

Для разделимости уравнения Шредингера потенциал V должен иметь вид

$$V = \sum_m \frac{v_m(\xi_m)}{h_m^2} = \sum_m \frac{M_m}{S} v_m(\xi_m),$$

где v_m зависит только от ξ_m . Разделямыми уравнениями в этом случае являются

$$\frac{1}{f_m} \frac{d}{d\xi_m} \left(f_m \frac{dX_m}{d\xi_m} \right) + \left(\sum_n \Phi_{mn} \epsilon_n - v_m \right) X_m = 0,$$

где ϵ_2 и ϵ_3 — константы разделения.

В следующей таблице приведен список коэффициентов Ламе h_m , связанных с ними функций f_m и определителей Штеккеля для 11 различных разделяющих трехмерных координат для волнового уравнения. Особые точки трех разделенных уравнений в их каноническом виде также даются. В отдельных случаях, когда применяются различные шкалы координат, приводятся различные выражения. Указан также общий вид потенциальной функции V , для которой уравнение Шредингера разделяется.

I. Прямоугольные координаты

$$x = \xi_1, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3, \quad h_1 = h_2 = h_3 = 1, \quad f_1 = f_2 = f_3 = 1,$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Иррегулярная особая точка на бесконечности во всех трех уравнениях.
Общий вид $V = u(x) + v(y) + w(z)$.

II. Круговые цилиндрические координаты (вращения)

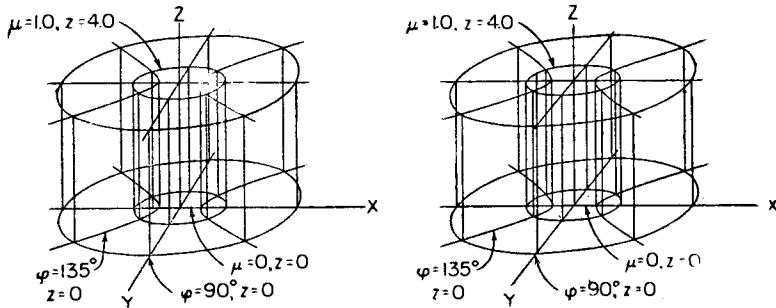


Рис. 5.15.

$$x = \xi_1 \xi_2, \quad y = \xi_1 \sqrt{1 - \xi_2^2}, \quad z = \xi_3, \quad h_1 = h_3 = 1, \quad h_2 = \xi_1 / \sqrt{1 - \xi_2^2},$$

$$f_1 = \xi_1, \quad f_2 = \sqrt{1 - \xi_2^2}, \quad f_3 = 1, \quad \xi_1 = r, \quad \xi_2 = \cos \varphi, \quad \xi_3 = z,$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -(1/\xi_1^2) & -1 \\ 0 & 1/(1 - \xi_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1 - \xi_2^2}.$$

Уравнение для ξ_1 : регулярная особая точка в 0, иррегулярная особая точка на ∞ .

Уравнение для ξ_2 : регулярные особые точки в $-1, +1, \infty$.

Уравнение для ξ_3 : иррегулярная особая точка на ∞ .

Общий вид $V = u(r) + (1/r^2)v(\varphi) + w(z)$.

III. Эллиптические цилиндрические координаты

$$x = \xi_1 \xi_2, \quad y = \sqrt{(\xi_1^2 - d^2)(1 - \xi_2^2)}, \quad z = \xi_3,$$

$$h_1 = \sqrt{(\xi_1^2 - d^2 \xi_2^2)(\xi_1^2 - d^2)}, \quad h_2 = \sqrt{(\xi_1^2 - d^2 \xi_2^2)/(1 - \xi_2^2)}, \quad h_3 = 1,$$

$$f_1 = \sqrt{\xi_1^2 - d^2}, \quad f_2 = \sqrt{1 - \xi_2^2}, \quad f_3 = 1,$$

$$\xi_1 = d \operatorname{ch} \mu = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad \xi_3 = z, \quad \xi_2 = \cos \varphi = (1/2d)(r_1 - r_2) \text{ (см. стр. 523)}$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -1/(\xi_1^2 - d^2) & -1 \\ d^2 & 1/(1 - \xi_2^2) & -d^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\xi_1^2 - d^2 \xi_2^2}{(\xi_1^2 - d^2)(1 - \xi_2^2)}.$$

Уравнение для ξ_1 имеет регулярные особые точки в $-d$, $+d$, иррегулярную особую точку в ∞ .

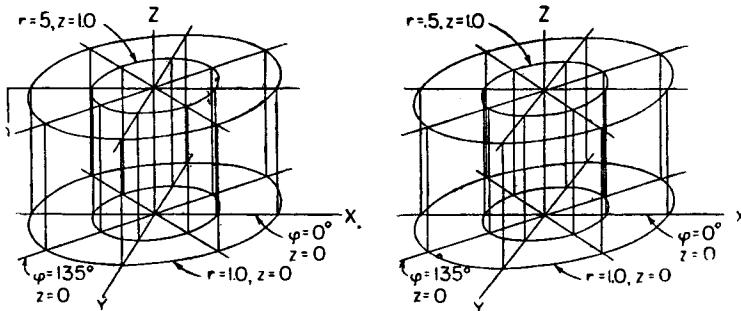


Рис. 5.16.

Уравнение для ξ_2 имеет регулярные особые точки в -1 , $+1$, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_3 имеет иррегулярную особую точку в ∞ .
Общий вид $V = [u(r_1 + r_2) + v(r_1 - r_2)]/r_1 r_2 + w(z)$.

IV. Параболические цилиндрические координаты

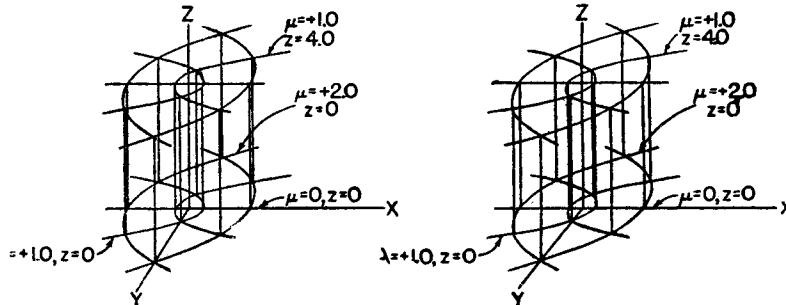


Рис. 5.17.

$$x = \frac{1}{2}(\xi_1^2 - \xi_2^2), \quad y = \xi_1 \xi_2, \quad z = \xi_3, \quad h_1 = h_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad h_3 = 1,$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = 1,$$

$$S = \begin{vmatrix} 0 & \xi_1^2 & -1 \\ 0 & \xi_2^2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

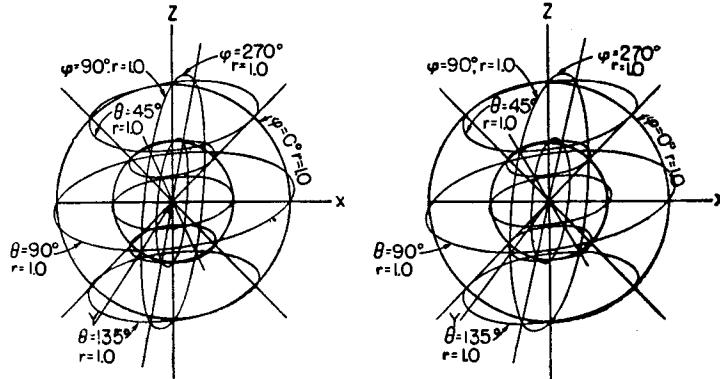
Уравнения для ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 имеют иррегулярную особую точку в ∞ .

Общий вид $V = [u(\xi_1) + v(\xi_2)]/\sqrt{x^2 + y^2} + w(z)$.

V. Сферические координаты (вращения)

$$x = \xi_1 \xi_3 \sqrt{1 - \xi_2^2}, \quad y = \xi_1 \sqrt{(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}, \quad z = \xi_1 \xi_2,$$

$$\begin{aligned} h_1 &= 1, \quad h_2 = \xi_1 / \sqrt{1 - \xi_2^2}, \quad h_3 = \xi_1 \sqrt{(1 - \xi_2^2) / (1 - \xi_3^2)}, \\ f_1 &= \xi_1^2, \quad f_2 = 1 - \xi_2^2, \quad f_3 = \sqrt{1 - \xi_3^2}, \\ \xi_1 &= r, \quad \xi_2 = \cos \theta, \quad \xi_3 = \cos \varphi. \end{aligned}$$



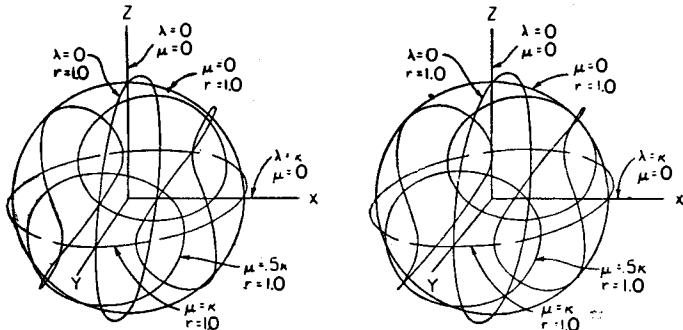
Р и с. 5.18.

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1/\xi_1^2 & 0 \\ 0 & 1/(\xi_2^2 - 1) & 1/(\xi_2^2 - 1)^2 \\ 0 & 0 & 1/(\xi_3^2 - 1) \end{vmatrix} = \frac{1}{(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}.$$

Уравнение для ξ_1 имеет регулярную особую точку в 0, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнения для ξ_2 , ξ_3 имеют регулярные особые точки в -1 , $+1$, ∞ .
Общий вид $V = u(r) + (1/r^2)v(\theta) + (1/r^2 \sin^2 \theta)w(\varphi)$.

VI. Конические координаты



Р и с. 5.19.

$$\begin{aligned} x &= (\xi_1/\alpha) \sqrt{(\alpha^2 - \xi_2^2)(\alpha^2 + \xi_3^2)}, \quad y = (\xi_1/\beta) \sqrt{(\beta^2 + \xi_2^2)(\beta^2 - \xi_3^2)}, \\ z &= \xi_1 \xi_2 \xi_3 / \alpha \beta, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \\ h_1 &= 1, \quad h_2 = \xi_1 \sqrt{\frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{(\alpha^2 - \xi_2^2)(\beta^2 + \xi_3^2)}}, \quad h_3 = \xi_1 \sqrt{\frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{(\alpha^2 + \xi_2^2)(\beta^2 - \xi_3^2)}}, \\ f_1 &= \xi_1^2, \quad f_2 = \sqrt{(\alpha^2 - \xi_2^2)(\beta^2 + \xi_3^2)}, \quad f_3 = \sqrt{(\alpha^2 + \xi_2^2)(\beta^2 - \xi_3^2)}, \\ \xi_1 &= r, \quad \xi_2 = \alpha \operatorname{cn}(\lambda, \alpha), \quad \xi_3 = \beta \operatorname{cn}(\mu, \beta), \end{aligned}$$

cn — одна из эллиптических функций, так что

$$x = r \operatorname{dn}(\lambda, a) \operatorname{sn}(\mu, \beta), \quad y = r \operatorname{sn}(\lambda, a) \operatorname{dn}(\mu, \beta), \quad z = r \operatorname{cn}(\lambda, a) \operatorname{cn}(\mu, \beta),$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\xi_1^2} & \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2) \xi_1^2} \\ 0 & \frac{1}{\xi_2^2 - \alpha^2} & \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2) (\xi_2^2 + \beta^2)} \\ 0 & \frac{1}{\xi_3^2 + \alpha^2} & \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2) (\xi_3^2 - \beta^2)} \end{vmatrix} = \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{(\alpha^2 - \xi_2^2)(\beta^2 + \xi_2^2)(\alpha^2 + \xi_3^2)(\beta^2 - \xi_3^2)}.$$

Уравнение для ξ_1 имеет регулярную особую точку в 0, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_2 имеет регулярные особые точки в $\pm a$, $\pm i\beta$, ∞ .

Уравнение для ξ_3 имеет регулярные особые точки в $\pm ia$, $\pm \beta$, ∞ .

Общий вид $V = u(r) + [v(\xi_2) + w(\xi_3)]/(\xi_2^2 + \xi_3^2)$.

VII. Параболические координаты (вращения)

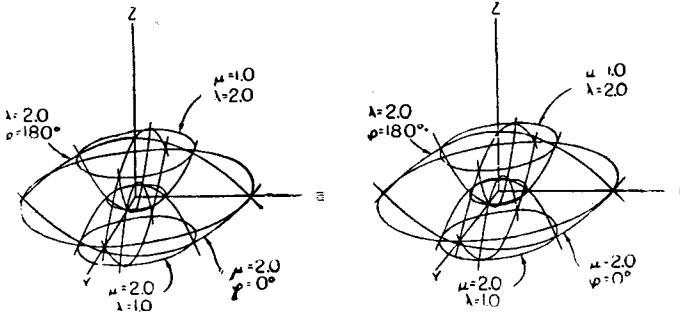


Рис. 5.20.

$$x = \xi_1 \xi_2 \xi_3, \quad y = \xi_1 \xi_3 \sqrt{1 - \xi_3^2}, \quad z = \frac{1}{2} (\xi_1^2 - \xi_3^2),$$

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad h_3 = \xi_1 \xi_2 / \sqrt{1 - \xi_3^2},$$

$$f_1 = \xi_1, \quad f_2 = \xi_2, \quad f_3 = \sqrt{1 - \xi_3^2},$$

$$\xi_1 = \lambda, \quad \xi_2 = \mu, \quad \xi_3 = \cos \varphi.$$

Если $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то $\xi_1^2 = r + z$ и $\xi_2^2 = r - z$.

$$S = \begin{vmatrix} \xi_1^2 & 1 & 1/\xi_1^2 \\ \xi_2^2 & -1 & 1/\xi_2^2 \\ 0 & 0 & 1/(\xi_3^2 - 1) \end{vmatrix} = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{1 - \xi_3^2}.$$

Уравнения для ξ_1 , ξ_2 имеют регулярную особую точку в 0, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_3 имеет регулярные особые точки в -1 , $+1$, ∞ .

Общий вид $V = \frac{u(\xi_1) + v(\xi_2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{w(\xi_3)}{x^2 + y^2}$.

VIII. Вытянутые сфероидальные координаты (вращения)

$$x = \xi_3 \sqrt{(\xi_1^2 - d^2)(1 - \xi_3^2)}, \quad y = \sqrt{(\xi_1^2 - d^2)(1 - \xi_3^2)(1 - \xi_2^2)}, \quad z = \xi_1 \xi_2,$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{\xi_1^2 - d^2 \xi_3^2}{\xi_1^2 - d^2}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{\xi_1^2 - d^2 \xi_3^2}{1 - \xi_3^2}}, \quad h_3 = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - d^2)(1 - \xi_3^2)}{(1 - \xi_3^2)}},$$

$$f_1 = \xi_1^2 - d^2, \quad f_2 = 1 - \xi_2^2, \quad f_3 = \sqrt{1 - \xi_3^2},$$

$$\xi_1 = d \operatorname{ch} \mu = \frac{1}{2} (r_1 + r_2), \quad \xi_2 = \cos \theta = (1/2d) (r_1 - r_2), \quad \xi_3 = \cos \varphi,$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\xi_1^2 - d^2} & \frac{d^2}{(\xi_1^2 - d^2)^2} \\ d^2 & \frac{1}{\xi_2^2 - 1} & \frac{1}{(\xi_2^2 - 1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\xi_3^2 - 1)} \end{vmatrix} = \frac{(\xi_1^2 - d^2 \xi_3^2)}{(\xi_1^2 - d^2)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)},$$

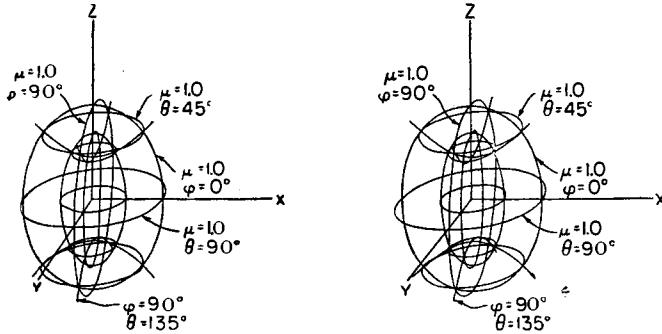


Рис. 5.21.

Уравнение для ξ_1 имеет регулярные особые точки в $-d$, $+d$, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_2 имеет регулярные особые точки в -1 и $+1$, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_3 имеет регулярные особые точки в -1 , $+1$, ∞ .

Общий вид $V = \frac{u(r_1 + r_2) + v(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} + \frac{w(\varphi)}{\operatorname{sh} \mu \sin \theta}$.

IX. Сплющенные сфериодальные координаты (вращения)

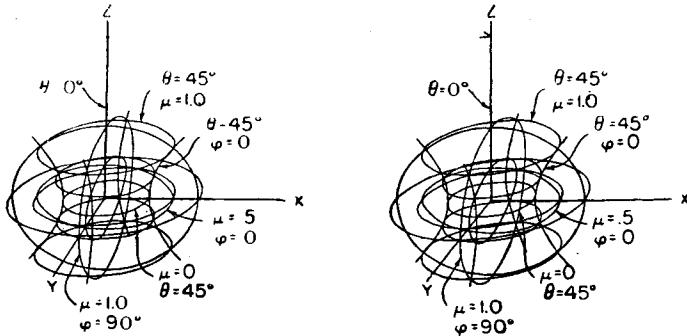


Рис. 5.22.

$$x = \xi_3 \sqrt{(\xi_1^2 + d^2)(1 - \xi_2^2)}, \quad y = \sqrt{(\xi_1^2 + d^2)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}, \quad z = \xi_1 \xi_2,$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{\xi_1^2 + d^2 \xi_2^2}{\xi_1^2 + d^2}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{\xi_1^2 + d^2 \xi_2^2}{1 - \xi_2^2}}, \quad h_3 = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 + d^2)(1 - \xi_2^2)}{(1 - \xi_3^2)}},$$

$$f_1 = \xi_1^2 + d^2, \quad f_2 = 1 - \xi_2^2, \quad f_3 = \sqrt{1 - \xi_3^2},$$

$$\xi_1 = d \operatorname{sh} \mu, \quad \xi_2 = \cos \theta, \quad \xi_3 = \cos \varphi,$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\xi_1^2 + d^2} & \frac{-d^2}{(\xi_1^2 + d^2)^2} \\ -d^2 & \frac{1}{\xi_2^2 - 1} & \frac{1}{(\xi_2^2 - 1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\xi_3^2 - 1)} \end{vmatrix} = \frac{(\xi_1^2 + d^2 \xi_2^2)}{(\xi_1^2 + d^2)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}.$$

Уравнение для ξ_1 имеет регулярные особые точки в $-id$, $+id$, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_2 имеет регулярные особые точки в -1 , $+1$, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_3 имеет регулярные особые точки в -1 , $+1$, ∞ .

Общий вид $V = \frac{u(\xi_1) + v(\xi_2)}{\xi_1^2 + d^2 \xi_2^2} + \frac{w(\xi_3)}{(\xi_1^2 + d^2)(1 - \xi_2^2)}$.

X. Эллипсоидальные координаты

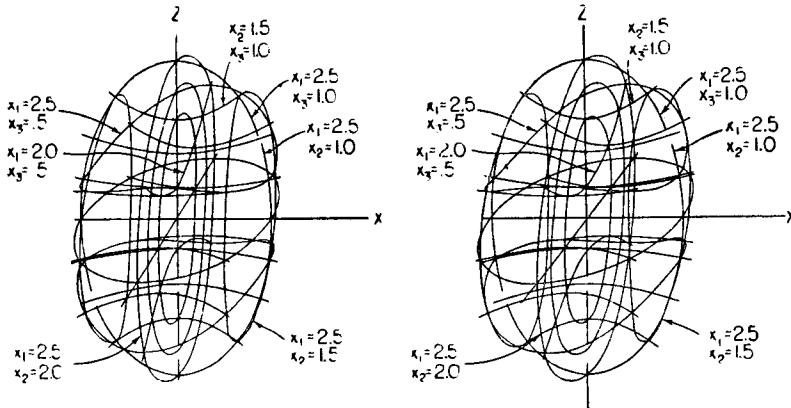


Рис. 5.23. $\xi_n = b x_n$, $a = 2b$.

$$x = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_2^2 - a^2)(\xi_3^2 - a^2)}{a^2(a^2 - b^2)}}, \quad y = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - b^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_3^2 - b^2)}{b^2(b^2 - a^2)}}, \quad z = \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3}{ab},$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_3^2)}{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{(\xi_2^2 - \xi_1^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)}{(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)}},$$

$$h_3 = \sqrt{\frac{(\xi_3^2 - \xi_1^2)(\xi_3^2 - \xi_2^2)}{(\xi_3^2 - a^2)(\xi_3^2 - b^2)}},$$

$$f_1 = \sqrt{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)}, \quad f_2 = \sqrt{(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)},$$

$$f_3 = \sqrt{(\xi_3^2 - a^2)(\xi_3^2 - b^2)}, \quad \xi_1^2 > a^2 > \xi_2^2 > b^2 > \xi_3^2 > 0,$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{(\xi_1^2 - a^2)} & \frac{1}{(\xi_1^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \\ 1 & \frac{1}{(\xi_2^2 - a^2)} & \frac{1}{(\xi_2^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \\ 1 & \frac{1}{(\xi_3^2 - a^2)} & \frac{1}{(\xi_3^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \end{vmatrix}.$$

Уравнения для ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 имеют регулярные особые точки в $-a$, $-b$, $+b$, $+a$, ∞ . Общий вид $V = \frac{(\xi_2^2 - \xi_3^2)u(\xi_1) + (\xi_1^2 - \xi_3^2)v(\xi_2) + (\xi_1^2 - \xi_2^2)w(\xi_3)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_3^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)}$.

$$\xi_1 = a \frac{dn(\lambda, k)}{cn(\lambda, k)}, \quad \xi_2 = a \operatorname{dn}(\mu, k'), \quad \xi_3 = b \operatorname{sn}(\nu, k),$$

$$b = ka, \quad \sqrt{a^2 - b^2} = k'a = d,$$

$$x = d \frac{\operatorname{sn}(\lambda, k) \operatorname{sn}(\mu, k') \operatorname{dn}(\nu, k)}{\operatorname{cn}(\lambda, k)}, \quad y = d \frac{\operatorname{cn}(\mu, k') \operatorname{en}(\nu, k)}{\operatorname{cn}(\lambda, k)},$$

$$z = a \frac{\operatorname{dn}(\lambda, k) \operatorname{dn}(\mu, k') \operatorname{sn}(\nu, k)}{\operatorname{cn}(\lambda, k)}.$$

XI. Параболоидальные координаты

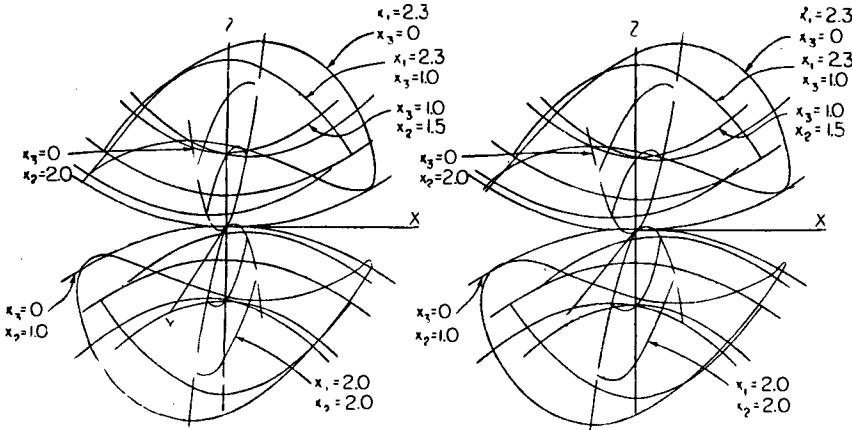


Рис. 5.24.

$$x = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_2^2 - a^2)(\xi_3^2 - a^2)}{a^2 - b^2}}, \quad y = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - b^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_3^2 - b^2)}{b^2 - a^2}},$$

$$z = \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - a^2 - b^2),$$

$$h_1 = \xi_1 \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_3^2)}{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)}}, \quad h_2 = \xi_2 \sqrt{\frac{(\xi_2^2 - \xi_1^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)}{(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)}},$$

$$h_3 = \xi_3 \sqrt{\frac{(\xi_3^2 - \xi_1^2)(\xi_3^2 - \xi_2^2)}{(\xi_3^2 - a^2)(\xi_3^2 - b^2)}},$$

$$f_1 = (1/\xi_1) \sqrt{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)}, \quad f_2 = (1/\xi_2) \sqrt{(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)},$$

$$f_3 = (1/\xi_3) \sqrt{(\xi_3^2 - a^2)(\xi_3^2 - b^2)},$$

$$S = \begin{vmatrix} \xi_1^2 & \frac{\xi_1^2}{(\xi_1^2 - a^2)} & \frac{\xi_1^2}{(\xi_1^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \\ \xi_2^2 & \frac{\xi_2^2}{(\xi_2^2 - a^2)} & \frac{\xi_2^2}{(\xi_2^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \\ \xi_3^2 & \frac{\xi_3^2}{(\xi_3^2 - a^2)} & \frac{\xi_3^2}{(\xi_3^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \end{vmatrix}.$$

Уравнения для ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 имеют регулярные особые точки при $-a$, $-b$, 0 , $+a$, $+b$. Общий вид $V = \frac{(\xi_2^2 - \xi_3^2)u(\xi_1) + (\xi_1^2 - \xi_3^2)v(\xi_2) + (\xi_1^2 - \xi_2^2)w(\xi_3)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_3^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)}$.

$$\xi_1 = a \frac{\operatorname{dn}(\lambda, k)}{\operatorname{cn}(\lambda, k)}, \quad \xi_2 = a \operatorname{dn}(\nu, k'), \quad \xi_3 = a \sqrt{1 - \frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2(\mu, k)}},$$

$$b = ka, \quad \sqrt{a^2 - b^2} = k'a = \sqrt{d}, \quad x = d \frac{\operatorname{sn}(\lambda, k) \operatorname{sn}(\nu, k')}{\operatorname{cn}(\lambda, k) \operatorname{cn}(\mu, k)},$$

$$y = d \frac{\operatorname{sn}(\mu, k) \operatorname{cn}(\nu, k')}{\operatorname{cn}(\lambda, k) \operatorname{cn}(\mu, k)}, \quad z = \frac{d}{2} \left[\frac{\operatorname{sn}^2(\lambda, k)}{\operatorname{cn}^2(\lambda, k)} - \frac{\operatorname{sn}^2(\mu, k)}{\operatorname{cn}^2(\mu, k)} + \frac{\operatorname{dn}^2(\nu, k')}{k'^2} \right].$$

Двумерное уравнение Лапласа разделяется в любой системе координат, получающейся конформным преобразованием из прямоугольной системы x, y .

Трехмерное уравнение Лапласа разделяется во всех приведенных выше 11 системах координат, в которых волновое уравнение разделяется. Кроме того, решение уравнения Лапласа можно разделить по следующей формуле:

$$\psi = X_1(\xi_1) X_2(\xi_2) X_3(\xi_3)/R(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

тогда разделенные уравнения для X можно получить, несколько видоизменя предыдущие уравнения. Полагаем

$$h_1 h_2 h_3 / h_1^2 = g_1(\xi_2, \xi_3) f_1(\xi_1) R^2.$$

Тогда уравнение Лапласа приобретает вид

$$\sum_n \frac{1}{h_n^2} \frac{1}{X_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(f_n \frac{d X_n}{d \xi_n} \right) = \sum_n \frac{1}{h_n^2} \frac{1}{R} \frac{d}{d \xi_n} \left(f_n \frac{\partial R}{\partial \xi_n} \right).$$

Если правая часть этого уравнения равна $-k_1^2/u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где k_1 постоянно, и если

$$h_1 h_2 h_3 = S f_1 f_2 f_3 R^2 u,$$

где S — определитель Штеккеля, то уравнение приводится к такому, для которого применима описанная выше техника.

Двумя системами координат, в которых уравнение Лапласа разделяется в этом смысле, являются бисферическая и тороидальная системы.

Бисферические координаты

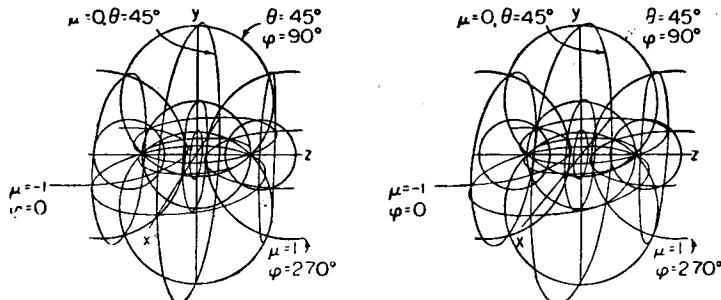


Рис. 5.25.

$$x = a \xi_3 \frac{\sqrt{1 - \xi_2^2}}{\xi_1 - \xi_2}, \quad y = a \frac{\sqrt{(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}}{\xi_1 - \xi_2}, \quad z = a \frac{\sqrt{\xi_1^2 - 1}}{\xi_1 - \xi_2},$$

$$h_1 = \frac{a}{(\xi_1 - \xi_2) \sqrt{\xi_{21} - 1}}, \quad h_2 = \frac{a}{(\xi_1 - \xi_2) \sqrt{1 - \xi_2^2}}, \quad h_3 = \frac{a}{\xi_1 - \xi_2} \sqrt{\frac{1 - \xi_2^2}{1 - \xi_3^2}},$$

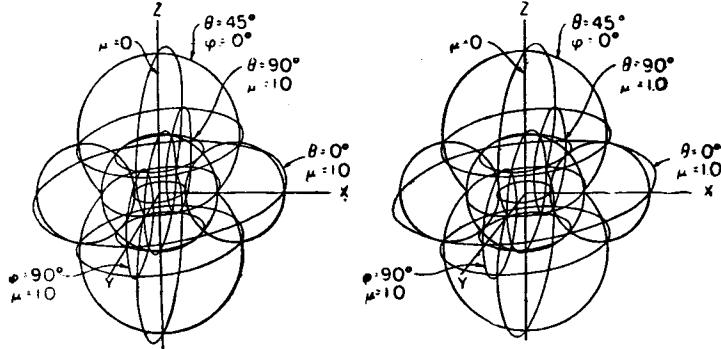
$$f_1 = \sqrt{\xi_1^2 - 1}, \quad f_2 = 1 - \xi_2^2, \quad f_3 = \sqrt{1 - \xi_3^2},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a \sqrt{(\xi_1 + \xi_2)/(\xi_1 - \xi_2)}, \quad k_1^2 = \frac{1}{4},$$

$$R^2 = \frac{a}{\xi_1 - \xi_2}, \quad u = \frac{a^2}{(\xi_1 - \xi_2)^2}, \quad \xi_1 = \operatorname{ch} \mu, \quad \xi_2 = \cos \eta, \quad \xi_3 = \cos \varphi,$$

$$S = \begin{vmatrix} \frac{1}{\xi_1^2 - 1} & \frac{1}{\xi_1^2 - 1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{1 - \xi_2^2} & \frac{1}{(1 - \xi_2^2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{1 - \xi_3^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}.$$

Тороидальные координаты



Р и с. 5.26.

$$x = a \xi_3 \frac{\sqrt{\xi_1^2 - 1}}{\xi_1 - \xi_2}, \quad y = a \frac{\sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_3^2)}}{\xi_1 - \xi_2}, \quad z = a \frac{\sqrt{1 - \xi_2^2}}{\xi_1 - \xi_2},$$

$$h_1 = \frac{a}{(\xi_1 - \xi_2) \sqrt{\xi_1^2 - 1}}, \quad h_2 = \frac{a}{(\xi_1 - \xi_2) \sqrt{1 - \xi_2^2}}, \quad h_3 = \frac{a}{(\xi_1 - \xi_2)} \sqrt{\frac{\xi_1^2 - 1}{1 - \xi_3^2}},$$

$$f_1 = \xi_1^2 - 1, \quad f_2 = \sqrt{1 - \xi_2^2}, \quad f_3 = \sqrt{1 - \xi_3^2},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a \sqrt{(\xi_1 + \xi_2)/(\xi_1 - \xi_2)},$$

$$R^2 = \frac{a}{\xi_1 - \xi_2}, \quad u = \frac{a}{(\xi_1 - \xi_2)^2}, \quad k_1^2 = \frac{1}{4},$$

$$\xi_1 = \operatorname{ch} \mu, \quad \xi_2 = \cos \theta, \quad \xi_3 = \cos \varphi,$$

$$S = \begin{vmatrix} \frac{1}{(\xi_1^2 - 1)} & \frac{-1}{(\xi_1^2 - 1)} & \frac{-1}{(\xi_1^2 - 1)^2} \\ 0 & \frac{1}{(1 - \xi_2^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \xi_3^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}.$$

Дифференциальные уравнения второго порядка и их решения

Одна регулярная особая точка (см. стр. 506).

Канонический вид, точка в ∞ :

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 0; \quad \text{решения } y_1(z) = 1; \quad y_2(z) = z.$$

Общий вид, точка в a :

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \frac{2}{w-a} \frac{dy}{dw} = 0; \quad \text{решения } y_1 = 1; \quad y_2 = \frac{1}{w-a}.$$