$$S=\begin{vmatrix} \frac{1}{\xi_1^2-1} & \frac{1}{\xi_1^2-1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{1-\xi_2^2} & \frac{1}{(1-\xi_2^2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{1-\xi_3^2} \end{vmatrix}=\frac{1}{(\xi_1^2-1)(1-\xi_2^2)(1-\xi_3^2)}.$$

Тороидальные координаты

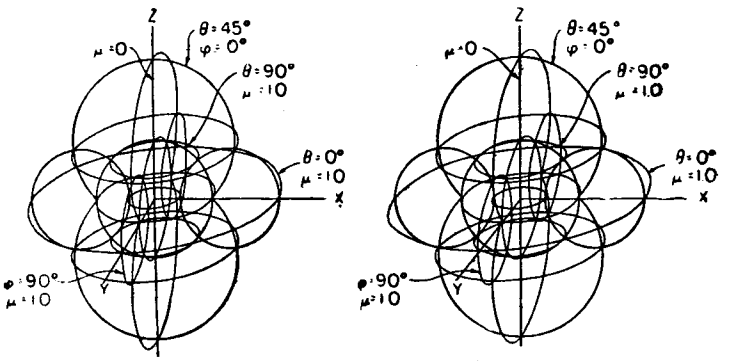

Рис. 5.26.

$$x=a\xi_3\frac{\sqrt{\xi_1^2-1}}{\xi_1-\xi_2},\quad y=a\frac{\sqrt{(\xi_1^2-1)(1-\xi_3^2)}}{\xi_1-\xi_2},\quad z=a\frac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{\xi_1-\xi_2},$$

$$h_1=\frac{a}{(\xi_1-\xi_2)\sqrt{\xi_1^2-1}},\quad h_2=\frac{a}{(\xi_1-\xi_2)\sqrt{1-\xi_2^2}},\quad h_3=\frac{a}{(\xi_1-\xi_2)}\sqrt{\frac{\xi_1^2-1}{1-\xi_3^2}},$$

$$f_1=\xi_1^2-1,\quad f_2=\sqrt{1-\xi_2^2},\quad f_3=\sqrt{1-\xi_3^2},$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a\sqrt{(\xi_1+\xi_2)/(\xi_1-\xi_2)},$$

$$R^2=\frac{a}{\xi_1-\xi_2},\quad u=\frac{a}{(\xi_1-\xi_2)^2},\quad k_1^2=\frac{1}{4},$$

$$\xi_1=\operatorname{ch}\mu,\quad \xi_2=\cos\theta,\quad \xi_3=\cos\varphi,$$

$$S=\begin{vmatrix} \frac{1}{(\xi_1^2-1)} & \frac{-1}{(\xi_1^2-1)} & \frac{-1}{(\xi_1^2-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{(1-\xi_2^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\xi_3^2} \end{vmatrix}=\frac{1}{(\xi_1^2-1)(1-\xi_2^2)(1-\xi_3^2)}.$$

Дифференциальные уравнения второго порядка и их решения

Одна регулярная особая точка (см. стр. 506).
Канонический вид, точка в ∞:

$$\frac{d^2y}{dz^2}=0;\quad \text{решения } y_1(z)=1;\quad y_2(z)=z.$$

Общий вид, точка в a:

$$\frac{d^2y}{dw^2}+\frac{2}{w-a}\frac{dy}{dw}=0;\quad \text{решения } y_1=1;\quad y_2=\frac{1}{w-a}.$$

Одна иррегулярная особая точка (см. стр. 507).
Канонический вид, точка в ∞:

$$\frac{d^2y}{dz^2} - k^2y = 0; \text{ решения } y_1 = e^{kz}; \quad y_2 = e^{-kz}.$$

Общий вид, точка в a:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \frac{2}{w-a}\frac{dy}{dw} - \frac{k^2y}{(w-a)^4} = 0; \quad \text{решения} \quad y_1 = e^{k/(w-a)};$$
$$y_2 = e^{-k/(w-a)}.$$

Мы не рассматриваем уравнения с иррегулярной особой точкой высшего вида.

Две регулярные особые точки (см. стр. 506).
Канонический вид, точки в 0, ∞, индексы 0 и $-a\,(a \geqslant 0)$:

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + (1+a)\frac{dy}{dz} = 0; \quad \text{решения} \quad y_1 = 1;\ y_2 = z^{-a},$$

если $a = 0$, $y_2 = \ln z$.
Общий вид, точки в a и c, индексы λ и μ $(\lambda \neq \mu)$:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \frac{2w + c\,(\lambda+\mu-1) - a\,(\lambda+\mu+1)}{(w-a)\,(w-c)}\frac{dy}{dw} + \frac{\lambda\mu\,(a-c)^2}{(w-a)^2\,(w-c)^2}y = 0;$$

решения $y_1 = \left(\frac{w-a}{w-c}\right)^{\lambda}$; $y_2 = \left(\frac{w-a}{w-c}\right)^{\mu}$, если $\mu = \lambda$, $y_2 = \ln(w - a/w - c)$.

Три регулярные особые точки (см. стр. 508 и 509).
Канонический вид: точки 0, 1, ∞; индексы 0, $1-c$ (в 0); 0, $c-a-b$ (в 1); a, b (в ∞) (мы всегда можем считать, что $\operatorname{Re} c \geqslant 1$, как для вырожденной гипергеометрической функции)

$$z\,(z-1)\frac{d^2y}{dz^2} + [(a+b+1)\,z - c]\frac{dy}{dz} + aby = 0 \text{ (гипергеометрическое уравнение).}$$

Решения $y_1(a, b\,|\,c\,|\,z)$ и $y_2(a, b\,|\,c\,|\,z)$ вблизи особых точек.
Разложение y_1 в ряд при $|z| < 1$, справедливое при $\operatorname{Re} c > 0$

$$y_1^0 = F(a, b\,|\,c\,|\,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)\,z^n}{\Gamma(c+n)\,n!} \text{ (гипергеометрический ряд);}$$

$$F(a, b\,|\,c\,|\,z) = F(b, a\,|\,c\,|\,z) = (1-z)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b\,|\,c\,|\,z) =$$
$$= (1-z)^{-a}F\left(a,\ c-b\,|\,c\,|\,\frac{z}{z-1}\right) = (1-z)^{-b}F\left(c-a,\ b\,|\,c\,|\,\frac{z}{z-1}\right)\left(\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right),$$

$$F(a, b\,|\,c\,|\,1) = \Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)/[\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)],$$

$$F(a, b\,|\,2b\,|\,z) = \left(1 - \frac{1}{2}z\right)^{-a}F\left[\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\,\middle|\,b + \frac{1}{2}\,\middle|\,z^2/(2-z)^2\right],$$

$$F\left(2\alpha,\ 2\beta\,\middle|\,\alpha+\beta+\frac{1}{2}\,\middle|\,z\right) = F\left(\alpha, \beta\,\middle|\,\alpha+\beta+\frac{1}{2}\,\middle|\,4z-4z^2\right),$$

$$zF(a, b\,|\,c\,|\,z) = [(c-1)/(a-b)]\,F[(a-1,\ b\,|\,c-1\,|\,z) - F(a, b-1\,|\,c-1\,|\,z)],$$

$$F(a, b\,|\,c\,|\,z) = [1/(a-b)]\,[aF(a+1,\ b\,|\,c\,|\,z) - bF(a, b+1\,|\,c\,|\,z)],$$

$$(d/dz)\,F(a, b\,|\,c\,|\,z) = (ab/c)\,F(a+1,\ b+1\,|\,c+1\,|\,z).$$

Вторым решением около $z=0$ является $z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1 \mid 2-c \mid z)$; однако оно не независимо от y_1^0, если $c=1, 2, 3, \ldots$ Независимым решением для всех значений $\operatorname{Re} c \geqslant 1$ будет

$$y_2^0 = G(a, b \mid c \mid z) = \frac{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)+\sin\pi a\sin\pi b}{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)-\sin\pi a\sin\pi b} F(a, b \mid c \mid z) +$$

$$+\frac{2\pi z^{1-c}\sin\pi c\Gamma(c)\Gamma(c-1)}{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)-\sin\pi a\sin\pi b}\,\frac{F(a-c+1, b-c+1 \mid 2-c \mid z)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Из определения F можно построить ряд для G, за исключением $c=1, 2, 3, \ldots$.

Если c целое, при помощи предельного процесса можно показать, что

$$G(a, b \mid 1 \mid z) = \frac{2\sin\pi a\sin\pi b}{-\pi\sin\pi(a+b)}\left\{\left[\ln z+2\gamma+\psi(a)+\psi(b)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\pi\operatorname{ctg}\pi a+\frac{1}{2}\pi\operatorname{ctg}\pi b\right]F(a, b \mid 1 \mid z)+$$

$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)[n!]^2}\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a+r}+\frac{1}{b+r}-\frac{2}{r+1}\right)z^n\right\}.$$

Для $m=2, 3, 4, \ldots$

$$G(a, b \mid m \mid z) = \frac{2\sin\pi a\sin\pi b}{-\pi\sin\pi(a+b)}\times$$

$$\times\left\{\left[\ln z+\gamma+\psi(a)+\psi(b)-\psi(m)+\frac{1}{2}\pi\operatorname{ctg}\pi a+\frac{1}{2}\pi\operatorname{ctg}\pi b\right]F(a, b \mid m \mid z)+\right.$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(n+m)n!}\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a+r}+\frac{1}{b+r}-\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+m}\right)z^n-$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\Gamma(a-n)\Gamma(b-n)\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(m-n)}(-z)^{-n}\right\}.$$

Интегральное представление для первого решения около $z=0$

$$y_1^0(a, b \mid c \mid z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)}{2\pi i\Gamma(c+t)}\Gamma(-t)(-z)^t\,dt,$$

где контур проходит слева от точек $t=0, 1, 2, \ldots$ и справа от точек $-a, -a-1, -a-2, \ldots$ и $-b, -b-1, -b-2, \ldots$ (a, b не могут быть целыми отрицательными).

$$y_1^0(a, b \mid c \mid z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_1^{\infty}(t-z)^{-a}t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}\,dt$$

или

$$y_1^0(a, b \mid c \mid z) = \frac{\Gamma(c)(1-z)^{c-a-b}}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}\int_1^{\infty}(t-z)^{a-c}t^{-a}(t-1)^{b-1}\,dt,$$

если $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ и если (для второго представления) $b+1$ не является вещественным числом, большим единицы. Перестановка букв a и b в этих

интегралах даст представление y_1 для $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$.

$$y_1^0(a, b \mid c \mid z) = \frac{\Gamma(c)\, z^{1-c}}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^z (z-t)^{c-b-1} t^{b-1} (1-t)^{-a}\, dt =$$

$$= \frac{e^{-i\pi b}}{4\pi^2}\, \Gamma(c)\,\Gamma(1-b)\,\Gamma(1+b-c)\, z^{1-c} \oint_C (t-z)^{c-b-1} t^{b-1} (1-t)^{-a}\, dt =$$

$$= \frac{e^{i\pi(c-b-1)}}{4\pi^2}\, \Gamma(c)\Gamma(1-b)\Gamma(1+b-c) z^{1-c} (1-z)^{c-a-b} \oint_C (t-z)^{b-1} t^{c-b-1} (1-t)^{a-c} dt,$$

где контур C заворачивает как восьмерка, проходя вокруг $t=z$ в положительном направлении (против часовой стрелки), вокруг $t=0$ в положительном направлении, а затем вокруг $t=z$ и $t=0$ в отрицательном направлении. Представление при помощи контурного интеграла имеет место для любых значений параметров, если только $-c+1$, $+b$ и $c-b$ не целые положительные.

Решения вблизи $z=1$ и $z=\infty$:

$y_1^1(a, b \mid c \mid z) = F(a, b \mid a+b-c+1 \mid 1-z)$; ряд пригоден для $|1-z|<1$;

$y_2^1(a, b \mid c \mid z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b \mid c-a-b+1 \mid 1-z)$,

однако при $a+b-c+1 = 1, 2, 3, \ldots$ надо применять $G(a, b \mid a+b-c+1 \mid 1-z)$;

$y_1^\infty(a, b \mid c \mid z) = z^{-a} F(a, 1-c+a \mid 1-b+a \mid 1/z)$; ряд пригоден для $|z|>1$;

$y_2^\infty(a, b \mid c \mid z) = z^{-b} F(b, 1-c+b \mid 1-a+b \mid 1/z)$,

однако для $a-b=1, 2, \ldots$ применяется $z^{-a} G(a, 1-c+a \mid 1-b+a \mid 1/z)$, а при $a-b=0, -1, -2, \ldots$ применяется $z^{-b} G(b, 1-c+b \mid 1-a+b \mid 1/z)$.

Основные формулы, связывающие решения в виде рядов вокруг одной и другой особенности, таковы:

$$F(a, b \mid c \mid z) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} F(a, b \mid a+b-c+1 \mid 1-z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b \mid c-a-b+1 \mid 1-z),$$

$$z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1 \mid 2-c \mid z) =$$

$$= \frac{\Gamma(2-c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\,\Gamma(1-b)} F(a, b \mid a+b-c+1 \mid 1-z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(2-c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(b-c+1)\,\Gamma(a-c+1)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b \mid c-a-b+1 \mid 1-z),$$

$$F(a, b \mid c \mid z) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F\left(a, 1-c+a \mid 1-b+a \mid \frac{1}{z}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\,\Gamma(a-b)} (-z)^{-b} F\left(b, 1-c+b \mid 1-a+b \mid \frac{1}{z}\right).$$

Следовательно, уравнения перехода, связывающие решения для $z=0$ с решениями для $z=1$ и ∞, имеют вид

$$y_1^0(a, b \mid c \mid z) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} y_2^1(a, b \mid c \mid z) + \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} y_1^1(a, b \mid c \mid z),$$

$$y_2^0(a, b \mid c \mid z) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} y_2^1(a, b \mid c \mid z) - \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} y_1^1(a, b \mid c \mid z),$$

$$y_1^0(a, b \mid c \mid z) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a-b)}{\Gamma(b)\,\Gamma(a-c)} e^{-i\pi a} y_1^\infty(a, b \mid c \mid z) + \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-c)} e^{-i\pi b} y_2^\infty(a, b \mid c \mid z),$$

$$[\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)-\sin\pi a\sin\pi b]\,y_2^0(a,\,b\,|\,c\,|\,z)=$$
$$=\left\{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)\left[1+e^{i\pi c}\frac{\Gamma(a-c+1)\,\Gamma(a-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(a-1)}\right]+\right.$$
$$\left.+\sin\pi a\sin\pi b\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a-b)}{\Gamma(b)\,\Gamma(a-c)}\right\}e^{-i\pi a}y_1^\infty(a,\,b\,|\,c\,|\,z)+$$
$$+\left\{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)\left[1+e^{i\pi c}\frac{\Gamma(b-c+1)\,\Gamma(b-c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(b-1)}\right]+\right.$$
$$\left.+\sin\pi a\sin\pi b\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-c)}\right\}e^{-i\pi b}y_2^\infty(a,\,b\,|\,c\,|\,z).$$

Одна регулярная и одна иррегулярная особые точки (см. стр. 518 и 567).

Канонический вид: особые точки в 0 (регулярная), в ∞ (иррегулярная), индексы в 0 равны 0 и $1-c$ $(c\geqslant 1)$

$z\dfrac{d^2y}{dz^2}+(c-z)\dfrac{dy}{dz}-ay=0$, вырожденное гипергеометрическое уравнение.

Если условие $\operatorname{Re}c\geqslant 1$ не выполнено, полагаем $y=z^{1-c}F$; тогда уравнение для F будет иметь тот же вид, причем вещественная часть нового c будет больше единицы.

Решения $y_1^0(a\,|\,c\,|\,z)$ и $y_2^0(a\,|\,c\,|\,z)$ около $z=0$ таковы:

Разложение y_1 в ряд около 0, справедливое для конечных $|z|$:

$$y_1^0=F(a\,|\,c\,|\,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\,z^n}{\Gamma(c+n)\,n!}=e^zF(c-a\,|\,c\,|\,-z)=\lim_{b\to\infty}F(a,\,b+c\,|\,c\,|\,z/b);$$

вырожденный гипергеометрический ряд

$$F(a\,|\,c\,|\,z)=\frac{1}{(c-a-1)}[(c-1)\,F(a\,|\,c-1\,|\,z)-aF(a+1\,|\,c\,|\,z)],$$
$$zF(a\,|\,c\,|\,z)=(c-1)\,[F(a\,|\,c-1\,|\,z)-F(a-1\,|\,c-1\,|\,z)],$$
$$(d/dz)\,F(a\,|\,c\,|\,z)=(a/c)\,F(a+1\,|\,c+1\,|\,z).$$

Разложение y_2 в ряд около 0 (G — функция Гордона):

$$y_2^0=G(a\,|\,c\,|\,z)=e^{i\pi a}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\left\{\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)}\left[e^{-i\pi c}+\frac{\sin\pi(a-c)}{\sin(\pi a)}\right]F(a\,|\,c\,|\,z)-\right.$$
$$\left.-2\,\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)}\,z^{1-c}F(a-c+1\,|\,2-c\,|\,z)\right\}.$$

Ряд можно построить из приведенного выше определения F, за исключением значений $c=1,\,2,\,3,\,\ldots$

При помощи предельного процесса (см. стр. 577) можно показать, что формула для G при целом c приобретает вид

$$G(a\,|\,1\,|\,z)=\frac{e^{i\pi a}}{\pi}\left\{[2\ln z+\pi\operatorname{ctg}\pi a-i\pi+2\psi(a)]\,F(a\,|\,1\,|\,z)+\right.$$
$$\left.+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)\,(m!)^2}[\psi(a+m)-\psi(a)+2\psi(1)-2\psi(m+1)]\,z^m\right\}.$$

Если $c=n=2,\,3,\,4,\,\ldots$

$$G(a\,|\,n\,|\,z)=\frac{e^{i\pi a}}{\pi}\sin(\pi a)\left\{[2\ln z+\pi\operatorname{ctg}\pi a-i\pi]\,F(a\,|\,n\,|\,z)-\right.$$

$$-2\sum_{m=1}^{\infty}[\psi(m+1)+\psi(n+m)-\psi(a+m)]\frac{\Gamma(a+m)(n-1)!\,z^m}{m!\,\Gamma(a)(n+m-1)!}\Bigg\}-$$

$$-2e^{i\pi a}\frac{(n-1)!}{\Gamma(a)}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{(r-1)!\,(z)^{-r}}{(n-r-1)!\,\Gamma(r-a+1)}.$$

Интегральное представление для y_1^0

$$y_1^0(a\,|\,c\,|\,z)=\frac{\Gamma(c)}{2\pi i\Gamma(a)}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(a+t)}{\Gamma(c+t)}\Gamma(-t)(-z)^t\,dt,$$

где контур проходит слева от $t=0, 1, 2, \ldots$, справа от $-a$, $-a-1, \ldots$ Справедливо для $a\neq 0, -1, -2, \ldots$

$$y_1^0(a\,|\,c\,|\,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt=$$

$$=\frac{e^{-i\pi a}}{4\pi^2}\Gamma(c)\Gamma(1-a)\Gamma(a-c+1)\oint_C e^{zt}t^{a-1}(t-1)^{c-a-1}\,dt,\qquad \operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a>0,$$

где контур заворачивает как восьмерка, проходя в положительном направлении вокруг 1 и 0, а затем в отрицательном направлении вокруг этих точек. Подинтегральная функция вещественна для z вещественного и t вещественного >1. Формула справедлива для всех значений a и c, для которых участвующая гамма-функция аналитична. Асимптотические выражения для $z=|z|e^{i\varphi}\gg 1$, a или c при $0<\varphi<\pi$

$$y_1^0(a\,|\,c\,|\,z)\simeq\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}z^{a-c}e^z+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-z)^{-a},\quad (-z)=|z|e^{i(\varphi-\pi)},$$

$$y_2^0(a\,|\,c\,|\,z)\simeq\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}z^{a-c}e^z-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}.$$

Для других областей изменения φ см. стр. 573 и 575.

Интегральные представления для решения вблизи $z=\infty$ (функции Уиттекера):

$$y_1^\infty=U_1(a\,|\,c\,|\,z)=\frac{z^{a-c}e^z}{\Gamma(c-a)}\int_0^\infty e^{-u}u^{c-a-1}\left(1-\frac{u}{z}\right)^{a-1}du=$$

$$=\frac{z^{a-c}e^z}{\Gamma(1-a)}\int_0^\infty e^{-u}u^{-a}\left(1-\frac{u}{z}\right)^{a-c}du\simeq z^{a-c}e^z,\qquad 0<\varphi<2\pi,$$

$$y_2^\infty=U_2(a\,|\,c\,|\,z)=\frac{(-z)^{-a}}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-u}u^{a-1}\left(1+\frac{u}{z}\right)^{c-a-1}du=$$

$$=\frac{(-z)^{-a}}{\Gamma(a-c+1)}\int_0^\infty e^{-u}u^{a-c}\left(1+\frac{u}{z}\right)^{-a}du\simeq(-z)^{-a},\qquad -\pi<\varphi<\pi.$$

Первый интеграл имеет место при $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a$, второй — при $\operatorname{Re}a<1$ и т. д. Для других значений см. контурные интегралы формул (5.3.53) и (5.3.56).

Уравнения перехода, связывающие решения около 0 и около ∞:

$$U_1(a\,|\,c\,|\,z)=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)}e^{i\pi(a-c)}F(a\,|\,c\,|\,z)-\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)}e^{i\pi a}z^{1-c}F(a-c+1\,|\,2-c\,|\,z),$$

$$U_2(a\,|\,c\,|\,z)=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}e^{i\pi a}F\,(a\,|\,c\,|\,z)+\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}e^{i\pi a}z^{1-c}F\,(a-c+1\,|\,2-c\,|\,z),$$

$$y_1^0(a\,|\,c\,|\,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}y_1^\infty(a\,|\,c\,|\,z)+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}y_2^\infty(a\,|\,c\,|\,z),$$

$$y_2^0(a\,|\,c\,|\,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}y_1^\infty(a\,|\,c\,|\,z)-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}y_2^\infty(a\,|\,c\,|\,z).$$

Две иррегулярные особые точки (см. стр. 523 и 597).

Канонический вид, точки в 0 и ∞:

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+\left(\frac{1}{4}h^2z^2-a+\frac{1}{4}h^2\frac{1}{z^2}\right)y=0.$$

Полагая $z=e^{i\varphi}$, получаем уравнение Матье

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2}+\left(a-\frac{1}{2}h^2\cos 2\varphi\right)y=0,\qquad a=b-\frac{1}{2}h^2.$$

(См. также уравнение для двух регулярных и одной иррегулярной точек.)

Для общих значений a (или b) двумя решениями являются

$$\mathcal{S}(b,\,h,\,e^{i\varphi})=e^{is\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{2in\varphi},\qquad \mathcal{S}(b,\,h,\,e^{-i\varphi})=e^{-is\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{-2ni\varphi},$$

причем коэффициенты a_n подсчитываются при помощи формул, содержащих непрерывные дроби (см. стр. 526).

Если b принимает частные значения, делающие s целым, эти два решения периодичны и не независимы. В этих периодических случаях мы пользуемся функциями (называемыми функциями Матье), определенными следующим образом:

Четные угловые функции около $\varphi=0$; $b=be_{2m}$ или be_{2m+1}:

$$Se_{2m}(h,\,\cos\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}\cos 2n\varphi,\qquad \sum_n B_{2n}=1,$$

$$Se_{2m+1}(h,\,\cos\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}\cos(2n+1)\varphi,\qquad \sum_n B_{2n+1}=1.$$

Нечетные угловые функции около $\varphi=0$; $b=bo_{2m}$ или bo_{2m+1}:

$$So_{2m}(h,\,\cos\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{2n}\sin 2n\varphi,\qquad \sum_n 2nB_{2n}=1,$$

$$So_{2m+1}(h,\,\cos\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}\sin(2n+1)\varphi,\qquad \sum_n(2n+1)B_{2n+1}=1,$$

где коэффициенты B являются функциями h и различны для различных Se или So.

Вторыми решениями для тех же значений константы разделения являются [см. формулу (5.2.79)]:

$$Fe_{2m}(h,\,\cos\varphi)=\gamma_{2m}^e\left[\varphi Se_{2m}(h,\,\cos\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}D_{2n}\sin 2n\varphi\right],$$

$$\gamma_{2m}^e=\left(1+\sum_n 2n\,D_{2n}\right)^{-1},$$

$$Fe_{2m+1}(h, \cos\varphi) = \gamma^e_{2m+1}\left[\varphi Se_{2m+1}(h, \cos\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1}\sin(2n+1)\varphi\right],$$

$$\gamma^e_{2m+1} = \left[1 + \sum_n (2n+1) D_{2n+1}\right]^{-1},$$

$$Fo_{2m}(h, \cos\varphi) = \gamma^o_{2m}\left[\varphi So_{2m}(h, \cos\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}\cos 2n\varphi\right],$$

$$\gamma^o_{2m} = \left(\sum_n D_{2n}\right)^{-1},$$

$$Fo_{2m+1}(h, \cos\varphi) = \gamma^o_{2m+1}\left[\varphi So_{2m+1}(h, \cos\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1}\cos(2n+1)\varphi\right],$$

$$\gamma^o_{2m+1} = \left(\sum_n D_{2n+1}\right)^{-1}.$$

По поводу дальнейших деталей подсчета коэффициентов B и D см. стр. 532 и далее. По поводу поведения решений для комплексных значений φ см. стр. 594 и далее, а также таблицы в конце гл. 11.

ЛИТЕРАТУРА

Статьи и книги, связанные с проблемой разделения переменных:

Bocher M., Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie, Leipzig, 1894 (диссертация).
Eisenhart L. P., Separable Systems of Staeckel, Ann. Math., **35**, 284 (1934).
Eisenhart L. P., Separable Systems in Euclidean 3-space, Phys. Rev., **45**, 427 (1934).
Eisenhart L. P., Potentials for Which Schroedinger Equations Are Separable, Phys. Rev., **74**, 87 (1948).
Michel, Exhaustion of Neumann's Mode of Solution for the Motion of Solids of Revolution etc., Messenger of Mathematics, **19**, 83 (1890).
Redheffer R. M., Separation of Laplace's Equation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1948 (диссертация).
Robertson H. P., Bemerkung über separierbare Systeme in der Wellenmechanik, Math. Ann., **98**, 749 (1927).

Дополнительный материал по решению обыкновенных дифференциальных уравнений:

Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГНТИУ, Харьков, 1939.
Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М., 1950.
Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ГТТИ, Л.—М., 1933—1934.
Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ГТТИ, М.—Л., 1937.
Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1932.
Forsyth A. R., Theory of Differential Equations, vol. 4, Cambridge, New York, 1890.

Работы, содержащие дальнейшие подробности о специальных функциях, исследованных в § 5.2 и 5.3:

Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, Изд. иностр. лит., М., 1949.
Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, Изд. иностр. лит., М., 1952.
Грей Э., Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, Изд. иностр. лит., М., 1949.
Мак-Лахлан Н. В., Теория и приложения функций Матье, Изд. иностр. лит., М., 1953.

Стретт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, ГНТИУ, Харьков—Киев, 1935.
Klein F., Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, Berlin, 1933.
MacRobert T. M., Spherical Harmonics, London, 1927.
McLachlan N. W., Bessel Functions for Engineers, Oxford, New York, 1934.
Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., Hutner R. A., Elliptic Cylinder and Spheroidal Wave Functions, New York, 1941.

Книги, содержащие таблицы формул, связывающих интересующие нас функции, в дополнение к таблицам в конце глав настоящей работы:

Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, ГТТИ, М.—Л., 1948.
Madelung E., Mathematische Hilfsmittel des Physikers, Berlin, 1936.
Magnus W., Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2 Aufl., Berlin, 1948.