

Показать, что

$$\frac{d}{dx} J_n(a, c | x) = -\frac{n(n+a)}{c} J_{n-1}(a+2, c+1 | x),$$

$$x J_n(a, c | x) = \frac{c-1}{2n+a} [J_n(a-1, c-1 | x) - J_{n+1}(a-1, c-1 | x)]$$

и что

$$\int_0^1 x^{c-1} (1-x)^{a-c} J_n(a, c | x) J_m(a, c | x) dx = \frac{n! [\Gamma(c)]^2 \Gamma(n+a-c+1)}{(a+2n) \Gamma(a+n) \Gamma(c+n)} \delta_{mn}.$$

Выразить $P_n(x)$ и $T_n^b(x)$ через J .

6.10. Радиальная функция для уравнения Гельмгольца в сферических координатах равна $j_n(kr) = \sqrt{\pi/2kr} J_{n+1/2}(kr)$. Показать, что собственные функции для стоячих акустических волн внутри жесткой сферической оболочки имеют вид $j_n(\pi \beta_{nm} r/a)$, где β_{nm} — m -й корень уравнения $[dj_n(\pi \beta)/d\beta] = 0$. Показать, что они образуют полную ортогональную систему на интервале $0 \leq r \leq a$. Полагая $a \rightarrow \infty$, показать, что

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty j_n(zu) u^2 du \int_0^\infty f(v) j_n(uv) v^2 dv.$$

6.11. Показать, что

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^a L_n^a(t) dt = [\Gamma(a+n+1)]^2 \frac{(z-1)^n}{n! z^{a+n+1}}.$$

6.12. Доказать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) H_n(y) \frac{t^n}{2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp \frac{2xyt - t^2(x^2 + y^2)}{1-t^2}.$$

Таблица полезных собственных функций и их свойств

Выберем интервал переменной z и функцию плотности $r(z)$ так, чтобы интеграл по этому интервалу от произведения $r(z)$ на любую положительную степень z был конечным. Выберем затем собственную функцию $\psi_0(z) = 1$. Следующая собственная функция $\psi_1(z)$ выбирается в виде комбинации 1 и z , ортогональной ψ_0 в выбранном интервале при выбранной плотности r . Затем $\psi_2(z)$ возьмем как комбинацию z^2 , z и 1, ортогональную ψ_0 и ψ_1 , и т. д. Таким образом, при помощи чисто механического метода, называемого *методом Шмидта*, можно построить систему собственных функций, которая будет служить базисом для разложения любой кусочно-гладкой функции z в выбранном интервале. Обычно оказывается, что полученные таким образом собственные функции получаются также из решения некоторого уравнения Лиувилля с граничными условиями или из некоторой производящей функции. Здесь будут рассмотрены три полезных случая для трех областей изменения z и различных функций плотности $r(z)$. См. также таблицу полиномов Якоби в конце гл. 12.

I. Интервал $-1 \leq z \leq 1$; функция плотности $(1 - z^2)^\beta$; полиномы Гегенбауера $T_n^\beta(z)$.

Производящая функция:

$$\frac{2}{(1 + t^2 - 2tz)^{\beta+1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n^\beta(z).$$

Частные случаи: $T_n^0(z) = P_n(z)$ — полиномы Лежандра [см. (5.3.24)]; $(1 - z^2)^{m/2} T_{n-m}^m(z) = P_n^m(z)$ — присоединенные функции Лежандра [см. (5.3.38)];

$$n T_{-n}^{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{ch}(n \operatorname{arsh} z) \text{ — полиномы Чебышева [см. (5.3.43)]};$$

$$\sqrt{z^2 - 1} T_{n-1}^{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sh}(n \operatorname{arsh} z) \text{ — полиномы Чебышева [см. (5.3.43)]};$$

$$T_0^\beta(z) = \frac{2^\beta}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\beta - 1) \quad \text{для } \beta = 0, 1, 2, \dots;$$

$$T_1^\beta(z) = \frac{2^{\beta+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\beta + \frac{3}{2}\right) z = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\beta + 1) z \quad \text{для } \beta = 0, 1, 2, \dots$$

Рекуррентные формулы, связывающие эти полиномы и полученные из производящей функции:

$$\frac{d}{dz} T_n^\beta(z) = T_{n-1}^{\beta+1}(z);$$

$$\frac{d}{dz} [(z^2 - 1)^\beta T_n^\beta(z)] = (n + 1)(n + 2\beta)(z^2 - 1)^{\beta-1} T_{n+1}^{\beta-1}(z);$$

$$(2\beta + 2n + 1) z T_n^\beta(z) = (n + 1) T_{n+1}^\beta(z) + (2\beta + n) T_{n-1}^\beta(z);$$

$$(2\beta + 2n + 1) T_n^\beta(z) = \frac{d}{dz} [T_{n+1}^\beta(z) - T_{n-1}^\beta(z)] = T_n^{\beta+1}(z) - T_{n-2}^{\beta+1}(z);$$

$$(2\beta + 1) T_n^\beta(z) + 2z \frac{d}{dz} T_n^\beta(z) = T_n^{\beta+1}(z) + T_{n-2}^{\beta+1}(z);$$

$$(n + 2\beta + 1) T_n^\beta(z) = T_n^{\beta+1}(z) - z T_{n-1}^{\beta+1}(z);$$

$$n T_n^\beta(z) = z T_{n-1}^{\beta+1}(z) - T_{n-2}^{\beta+1}(z);$$

$$(2\beta + 2n + 1)(z^2 - 1) T_{n-1}^{\beta+1}(z) = n(n + 1) T_{n+1}^\beta(z) - (n + 2\beta)(n + 2\beta + 1) T_{n-1}^\beta(z);$$

$$T_n^\beta(z) = \frac{2^\beta \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}{n! \sqrt{\pi}} \frac{(2\beta + 1)(2\beta + 3) \cdots (2\beta + 2n - 3)(2\beta + 2n - 1)}{(2\beta + n + 1)(2\beta + n + 2) \cdots (2\beta + 2n - 1)(2\beta + 2n)} \times \\ \times \frac{1}{(z^2 - 1)^\beta} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^{n+\beta};$$

$$(z^2 - 1) \frac{d^2}{dz^2} T_n^\beta(z) + 2(\beta + 1) z \frac{d}{dz} T_n^\beta(z) - n(n + 2\beta + 1) T_n^\beta(z) = 0;$$

последнее уравнение связано с гипергеометрическим уравнением, так как имеет три регулярные особенности. Случай, когда β равно целому n , приводит к присоединенным полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned} T_n^m &= \frac{P_{n+m}^m}{(1-z^2)^{m/2}} = \frac{d^m}{dz^m} (P_{n+m}), \\ T_0^0 &= 1, \quad T_0^1 = 1, \quad T_0^2 = 3, \quad T_0^3 = 15, \dots \\ T_1^0 &= z, \quad T_1^1 = 3z, \quad T_1^2 = 15z, \quad T_1^3 = 105z, \dots \\ T_2^0 &= \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad T_2^1 = \frac{3}{2}(5z^2 - 1), \quad T_2^2 = \frac{15}{2}(7z^2 - 1), \dots \\ T_3^0 &= \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \quad T_3^1 = \frac{5}{2}(7z^3 - 3z), \quad T_3^2 = \frac{105}{2}(3z^3 - z), \dots \\ T_4^0 &= \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3), \quad T_4^1 = \frac{15}{8}(21z^4 - 14z^2 + 1), \dots \\ &\vdots \\ T_n^m &= \frac{(2n+2m)!}{2^{n+m} n! (n+m)!} \left[z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n+2m-1)} z^{n-2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 (2n+2m-1)(2n+2m-3)} z^{n-4} - \dots \right]; \end{aligned}$$

см. также формулы (6.3.37) и (6.3.40).

Нормирующий интеграл:

$$\int_{-1}^1 (1-z^2)^\beta T_m^\beta(z) T_n^\beta(z) dz = \delta_{mn} \frac{2\Gamma(n+2\beta+1)}{(2n+2\beta+1)\Gamma(n+1)}.$$

Частные значения:

$$\begin{aligned} T_n^\beta(z) &= (-1)^n T_n^\beta(-z), \\ T_n^\beta(1) &= \frac{\Gamma(n+2\beta+1)}{2^\beta n! \Gamma(\beta+1)}, \quad T_n^\beta(0) = 0 \quad \text{для } n = 1, 3, 5, \dots; \\ T_n^\beta(0) &= (-1)^{n/2} \frac{2^\beta \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}n\right)!}, \quad \text{для } n = 0, 2, 4, \dots \end{aligned}$$

Связь с гипергеометрической функцией:

$$\begin{aligned} T_n^\beta(z) &= \frac{\Gamma(n+2\beta+1)}{2^\beta n! \Gamma(\beta+1)} F\left(-n, n+2\beta+1 | 1+\beta | \frac{1-z}{2}\right) = \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(n+2\beta+1)}{2^\beta n! \Gamma(\beta+1)} F\left(-n, n+2\beta+1 | 1+\beta | \frac{1+z}{2}\right). \end{aligned}$$

Формула сложения:

$$\begin{aligned} T_n^\beta(\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi) &= \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_{m=0}^n \frac{(\beta+m)(n-m)!}{\Gamma(2\beta+n+m+1)} [\sin \theta \sin \theta_0]^m \times \\ &\quad \times T_{n-m}^{\beta+m}(\cos \theta) T_{n-m}^{\beta+m}(\cos \theta_0) T_m^{\beta+1/2}(\cos \varphi). \end{aligned}$$

II. Интервал $0 \leq z < \infty$; функция плотности $z^a e^{-z}$; полиномы Лагерра $L_n^a(z)$.

Производящая функция:

$$\frac{e^{-zt/(1-t)}}{(1-t)^{a+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+a+1)} L_n^a(z).$$

Частные случаи: $L_n^0(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n}(z^n e^{-z})$,

$$L_0^a(z) = \Gamma(a+1), \quad L_1^a(z) = \Gamma(a+2)\{(a+1)-z\}.$$

Рекуррентные формулы:

$$\frac{d}{dz} L_n^a(z) = -L_{n-1}^{a+1}(z), \text{ за исключением случая } n=0;$$

$$\frac{d}{dz} [z^a e^{-z} L_n^a(z)] = (n+1) z^{a-1} e^{-z} L_{n-1}^{a-1}(z),$$

$$L_n^a(z) = \frac{d}{dz} \left[L_n^a(z) - \frac{1}{n+a+1} L_{n+1}^a(z) \right],$$

$$z L_n^a(z) = (a+2n+1) L_n^a(z) - \frac{n+1}{a+n+1} L_{n+1}^a(z) - (a-n)^2 L_{n-1}^a(z),$$

$$z \frac{d}{dz} L_n^a(z) = (z-a) L_n^a(z) - (n+1) L_{n-1}^{a-1}(z),$$

$$L_n^a(z) = \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{e^z}{z^a} \frac{d^n}{dz^n} [z^{a+n} e^{-z}],$$

$$z \frac{d^2}{dz^2} L_n^a(z) + (a+1-z) \frac{d}{dz} L_n^a(z) + n L_n^a(z) = 0;$$

последнее уравнение является вырожденным гипергеометрическим уравнением с регулярной особой точкой при $z=0$ и иррегулярной точкой на ∞ .

Если a равно целому m , получаются *присоединенные полиномы Лагерра*:

$$L_n^m(z) = (-1)^m \frac{d^m}{dz^m} [L_{n+m}^0(z)],$$

$$L_0^0 = 1, \quad L_1^1 = 1, \quad L_2^2 = 2, \quad L_3^3 = 6, \dots, \quad L_0^m = m!;$$

$$L_1^0 = 1-z, \quad L_1^1 = 4-2z, \quad L_1^2 = 18-6z, \quad L_1^3 = 96-24z, \dots$$

$$L_2^0 = 2-4z+z^2, \quad L_2^1 = 18-18z+3z^2, \quad L_2^2 = 144-96z+12z^2, \dots$$

$$L_3^0 = 6-18z+9z^2-z^3, \quad L_3^1 = 96-144z+48z^2-4z^3, \dots$$

$$\dots$$

$$L_n^m = \frac{[(m+n)!]^2}{n!m!} F(-n|m+1|z),$$

где F представляет собой вырожденный гипергеометрический ряд с $n+1$ членами.

Нормирующие интегралы:

$$\int_0^\infty z^a e^{-z} L_m^a(z) L_n^a(z) dz = \delta_{mn} \frac{[\Gamma(a+n+1)]^2}{\Gamma(n+1)},$$

$$\int_0^\infty z^p e^{-z} L_m^{p-\mu}(z) L_n^{p-\nu}(z) dz = (-1)^{m+n} \Gamma(p+m-\mu+1) \Gamma(p+n-\nu+1) \mu! \nu! \times$$

$$\times \sum_{\sigma} \frac{\Gamma(p+\sigma+1)}{\sigma! (m-\sigma)! (n-\sigma)! (\sigma+\mu-m)! (\sigma+\nu-n)!},$$

где m, n, μ, ν — целые, а σ принимает все целые значения, большие либо $m - \mu$, либо $n - \nu$ и меньшие либо m , либо n (если этим требованиям нельзя удовлетворить, то интеграл равен нулю).

Связь с вырожденным гипергеометрическим рядом для общих значений a :

$$\begin{aligned} L_n^a(z) &= \frac{[\Gamma(a+n+1)]^2}{n! \Gamma(a+1)} F(-n|a+1|z) = \\ &= \frac{[\Gamma(a+n+1)]^2}{n! \Gamma(a+1)} e^z F(a+n+1|a+1|-z) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\Gamma(a+n+1)}{n!} (-z)^n. \end{aligned}$$

Формула сложения и другие соотношения:

$$\begin{aligned} L_n^a(x+y) &= e^y \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(m+n+a+1)} y^m L_n^{a+m}(x), \\ (1+t)^a e^{-xt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(a+1)} L_n^{a-n}(x), \\ x^m &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n m! \Gamma(a+m+1)}{(m-n)! [\Gamma(a+n+1)]^2} L_n^a(x), \\ e^t (xt)^{-a/2} J_a(2\sqrt{xt}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{[\Gamma(a+n+1)]^2} L_n^a(x), \\ \int_0^{\infty} e^{-u/2} u^{\nu+1} J_{\nu} \left(\frac{1}{2} uz \right) L_n^{2\nu}(u) du &= \\ &= 8 \left(n + \nu + \frac{1}{2} \right) \Gamma(n+2\nu+1) \frac{(2z)^{\nu}}{(z^2+1)^{\nu+3/2}} T_n^{\nu} \left(\frac{z^2-1}{z^2+1} \right), \end{aligned}$$

где m и n — целые, в то время как a и ν не обязательно целые.

III. Интервал $-\infty < z < \infty$; функция плотности e^{-z^2} ; полиномы Эрмита $H_n(z)$.

Производящая функция: $e^{-t^2+2tz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(z)$.

Рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} H_n(z) &= 2nH_{n-1}(z), \\ zH_n(z) &= nH_{n-1}(z) + \frac{1}{2} H_{n+1}(z), \\ \frac{d}{dz} [e^{-z^2} H_n(z)] &= -2e^{-z^2} H_{n+1}(z), \\ H_n(z) &= (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (z+it)^n e^{-t^2} dt, \\ \frac{d^2}{dz^2} H_n(z) - 2z \frac{d}{dz} H_n(z) + 2nH_n(z) &= 0; \end{aligned}$$

последняя является уравнением для вырожденных гипергеометрических функций

$$\begin{aligned}
 & F\left(-\frac{1}{2}n \left|\frac{1}{2}\right| z^2\right) \quad \text{и} \quad zF\left(-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \left|\frac{1}{2}\right| z^2\right); \\
 & H_0 = 1, \quad H_1 = 2z, \quad H_2 = 4z^2 - 2, \\
 & H_3 = 8z^3 - 12z, \quad H_4 = 16z^4 - 48z^2 + 12, \\
 & H_n = (-1)^{n/2} \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}n\right)!} F\left(-\frac{1}{2}n \left|\frac{1}{2}\right| z^2\right), \quad n=0, 2, 4, \dots, \\
 & = 2(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)!} zF\left(-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \left|\frac{1}{2}\right| z^2\right), \quad n=1, 3, 5, \dots, \\
 & \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} 2^n z^n, \\
 & x^m = \sum_{s=0}^{s \leq \frac{1}{2}m} \frac{m!}{2^m s! (m-2s)!} H_{m-2s}(x).
 \end{aligned}$$

Нормирующий интеграл и другие формулы:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} H_m(z) H_n(z) e^{-z^2} dz = \delta_{mn} 2^n n! \sqrt{\pi}, \\
 & H_{2n}(z) = \frac{(-4)^n n!}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} L_n^{-1/2}(z^2), \quad H_{2n+1}(z) = \frac{2(-4)^n n!}{\Gamma(n + \frac{3}{2})} z L_n^{1/2}(z^2). \\
 & e^{-(x^2+y^2+2xyz)/(1+z^2)} / \sqrt{1+z^2} = e^{-x^2-y^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{2^m m!} H_m(x) H_m(y), \\
 & \exp\left\{-\frac{1}{2}[(u^2+v^2)\cos\varphi+2uv\sin\varphi]\right\} = \\
 & = \sec\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m \operatorname{tg}^m\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}{m!} e^{(v^2-u^2)/2} H_m(u) H_m(iv).
 \end{aligned}$$

Можно ввести видоизмененные полиномы, аналогично тому, как в случаях I и II были введены полиномы с верхними индексами β и a , если выбрать функцию плотности e^{-z^2+2az} , вместо e^{-z^2} . Однако это сведется к перемещению центра полиномов с $z=0$ в $z=a$. Новая производящая функция имеет вид

$$e^{-t^2+2t(z-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n^a(z) = e^{-2ta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} H_m(z),$$

где

$$\begin{aligned}
 H_n^a(z) = H_n(z-a) &= \sum_{m=0}^n \frac{(-2a)^{n-m} n!}{m! (n-m)!} H_m(z) = \\
 &= 2^{-n/2} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m! (n-m)!} H_m(z \sqrt{2}) H_{n-m}(-a \sqrt{2}),
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}(z-a)^2} H_n(z-a) &= \\ &= e^{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}z^2} \left[\sum_{m=0}^n H_m(z) \frac{n!(-a)^{n-m}}{m!(n-m)!} F\left(n+1|n-m+1|-\frac{1}{2}a^2\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=n+1}^{\infty} H_m(z) \frac{(a/2)^{m-n}}{(m-n)!} F\left(m+1|m-n+1|-\frac{1}{2}a^2\right) \right]. \end{aligned}$$

Все рекуррентные формулы будут те же, но с новым началом. Нормирующий интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2+2az} [H_n(z)]^2 dz = e^{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-a)^2} [H_n(z-a)]^2 dz = 2^n n! \sqrt{\pi} e^{a^2}.$$

На этих трех системах собственных функций мы видим различные возможности для особенностей функции плотности в концевых точках: полиномы Гегенбауера соответствуют плотности, имеющей точки ветвления в обоих концах интервала, полиномы Лагерра — функции плотности, имеющей точку ветвления в одном конце и существенно особую точку в другом, и полиномы Эрмита — функции плотности с существенно особыми точками в обоих концах. При этом значения независимой переменной в обоих концевых точках можно сделать равными данным выше стандартным значениям при помощи очевидных преобразований. Например, для интервала от $z = -a$ до $z = \infty$ при функции плотности, имеющей точки ветвления в обоих концах, мы применяем систему собственных функций $T_n^{\beta}[z/(z+2a)]$ с функцией плотности $r = 2^{2\beta+1}a^{\beta+1}(z+a)^{\beta}/(z+2a)^{2\beta+2}$ и т. д.

Собственные функции, полученные при помощи метода факторизации

Основным уравнением является уравнение типа Шредингера

$$d^2\Phi/dx^2 + [\lambda - V_m(x)]\Phi = 0,$$

где λ — собственное значение, а от соответствующей собственной функции Φ требуется интегрируемость в квадрате в интервале $a \leq x \leq b$, причем a и b — соседние особые точки уравнения. Параметр m может меняться непрерывно или принимать только дискретные значения (в последнем случае масштаб выбирается таким, чтобы эти значения были целыми). Это уравнение иногда равносильно следующим операторным уравнениям:

$$\mathfrak{G}_{m+1}^+ \mathfrak{G}_{m+1}^- \Phi_n(m|x) = (\lambda_n - a_{m+1}) \Phi_n(m|x),$$

$$\mathfrak{G}_m^- \mathfrak{G}_m^+ \Phi_n(m|x) = (\lambda_n - a_m) \Phi_n(m|x),$$

где

$$\mathfrak{G}_m^+ = u_m(x) + \frac{d}{dx}, \quad \mathfrak{G}_m^- = u_m(x) - \frac{d}{dx}$$

— взаимно сопряженные операторы. Если $V_m(x)$ такова, что факторизацию можно осуществить, причем a_m зависит от m , но не зависит от x , то собственные значения не зависят от m , и если $a_{m+1} > a_m$, то $\lambda_n = a_{m+1}$,