или

$$e^{-\frac{1}{2}(z-a)^2} H_n(z-a) =$$
$$= e^{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}z^2}\left[\sum_{m=0}^{n} H_m(z)\frac{n!\,(-a)^{n-m}}{m!\,(n-m)!}F\left(n+1\,|\,n-m+1\,|-\frac{1}{2}a^2\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=n+1}^{\infty} H_m(z)\frac{(a/2)^{m-n}}{(m-n)!}F\left(m+1\,|\,m-n+1\,|-\frac{1}{2}a^2\right)\right].$$

Все рекуррентные формулы будут те же, но с новым началом. Нормирующий интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2+2az}[H_n^a(z)]^2\,dz = e^{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-a)^2}[H_n(z-a)]^2\,dz = 2^n n!\sqrt{\pi}e^{a^2}.$$

На этих трех системах собственных функций мы видим различные возможности для особенностей функции плотности в концевых точках: полиномы Гегенбауера соответствуют плотности, имеющей точки ветвления в обоих концах интервала, полиномы Лагерра — функции плотности, имеющей точку ветвления в одном конце и существенно особую точку в другом, и полиномы Эрмита — функции плотности с существенно особыми точками в обоих концах. При этом значения независимой переменной в обоих концевых точках можно сделать равными данным выше стандартным значениям при помощи очевидных преобразований. Например, для интервала от $z=-a$ до $z=\infty$ при функции плотности, имеющей точки ветвления в обоих концах, мы применяем систему собственных функций $T_n^\beta[z/(z+2a)]$ с функцией плотности $r=2^{2\beta+1}a^{\beta+1}(z+a)^\beta/(z+2a)^{2\beta+2}$ и т. д.

Собственные функции, полученные при помощи метода факторизации

Основным уравнением является уравнение типа Шредингера

$$d^2\Phi/dx^2+[\lambda-V_m(x)]\,\Phi=0,$$

где λ — собственное значение, а от соответствующей сообственной функции Φ требуется интегрируемость в квадрате в интервале $a\leqslant x\leqslant b$, причем a и b — соседние особые точки уравнения. Параметр m может меняться непрерывно или принимать только дискретные значения (в последнем случае масштаб выбирается таким, чтобы эти значения были целыми). Это уравнение иногда равносильно следующим операторным уравнениям:

$$\mathfrak{G}_{m+1}^{+}\mathfrak{G}_{m+1}^{-}\Phi_n(m\,|\,x)=(\lambda_n-a_{m+1})\,\Phi_n(m\,|\,x),$$
$$\mathfrak{G}_m^{-}\mathfrak{G}_m^{+}\Phi_n(m\,|\,x)=(\lambda_n-a_m)\,\Phi_n(m\,|\,x),$$

где

$$\mathfrak{G}_m^{+}=u_m(x)+\frac{d}{dx},\quad \mathfrak{G}_m^{-}=u_m(x)-\frac{d}{dx}$$

— взаимно сопряженные операторы. Если $V_m(x)$ такова, что факторизацию можно осуществить, причем a_m зависит от m, но не зависит от x, то собственные значения не зависят от m, и если $a_{m+1}>a_m$, то $\lambda_n=a_{n+1}$,

$n=m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots,$

$$\Phi_n(n|x)=\left[\int_a^b \exp\left(2\int u_{n+1}\,dx\right)dx\right]^{-1/2} e^{\int u_{n+1}(x)\,dx},$$

$$\Phi_n(m|x)=\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}-a_{m+1}}}\left[u_{m+1}(x)+\frac{d}{dx}\right]\Phi_n(m+1\,|\,x),$$

$$\int_a^b \Phi_n(m\,|\,x)\,\Phi_{n'}(m\,|\,x)\,dx=\delta_{nn'},$$

а если $a_{m+1}<a_m$, то $\lambda_n=a_n$, $n=m,\ m-1,\ m-2,\ \ldots,$

$$\Phi_n(n\,|\,x)=\left[\int_a^b \exp\left(-2\int u_n\,dx\right)dx\right]^{-1/2} e^{-\int u_n(x)\,dx},$$

$$\Phi_n(m\,|\,x)=\frac{1}{\sqrt{a_n-a_m}}\,[u_m(x)-d/dx]\,\Phi_n(m-1|x),$$

где Φ_n — снова ортонормированная система.

Различные виды функций V, допускающих факторизацию, можно получить, определяя такие функции u_m, которые удовлетворяют соотношениям

$$u_{m+1}^2-u_m^2+\frac{d}{dx}u_{m+1}+\frac{d}{dx}u_m=a_m-a_{m+1},$$

причем a_m не зависит от x. Тогда соответствующая функция V для исходного уравнения равна

$$V_m(x)=u_m^2(x)-\frac{d}{dx}u_m(x)+a_m=u_{m+1}^2(x)+\frac{d}{dx}u_{m+1}(x)+a_{m+1}.$$

Тривиально простым случаем является тот, когда u_m не зависит от x; тогда $a_m=-u_m^2$, $V_m=0$, а собственными функциями являются тригонометрические функции. Другие возможности дают

$$u_m=v(x)+m\,w(x),$$

где для того, чтобы a_m не зависело от x, должно быть $w^2+w'=\text{const}$, $v'+vw=\text{const}$;

$$u_m=(1/m)\,y(x)+m\,w(x),$$

где должно быть $y=\text{const}$ и $w^2+w'=\text{const}$. Любой другой выбор зависимости от m и x не допускает независимости a_m от x.

Решая эти уравнения для v, w и y при различных значениях постоянных (включая нулевые значения), мы получаем следующие частные виды $u_m(x)$, a_m и $V_m(x)$, содержащие все возможные случаи описанного выше метода факторизации:

(A) $$u_m=(m+c)\,b\,\mathrm{ctg}\,[b\,(x+p)]+d\,\mathrm{cosec}\,[b\,(x+p)],\quad a_m=b^2(m+c)^2,$$

$$V_m=\Big\{b^2(m+c)(m+c+1)+d^2+ +2bd\left(m+c+\frac{1}{2}\right)\cos\,[b\,(x+p)]\Big\}\,\mathrm{cosec}^2\,[b\,(x+p)],$$

откуда при помощи преобразования переменных и выбора значений постоянных b, c, d и p можно получить сферические гармонические функции

и другие собственные функции, связанные с гипергеометрической функцией.

(Б) $$u_m = de^{bx} - m - c, \quad a_m = b^2(m+c)^2,$$
$$V_m = -d^2e^{2bx} + 2bd\left(m + c + \frac{1}{2}\right)e^{bx},$$

откуда при помощи преобразования можно получить функции Лагерра и другие собственные функции, связанные с вырожденной гипергеометрической функцией.

В) $$u_m = (m+c)\frac{1}{x} + \frac{1}{2}bx, \quad a_m = -2bm + \frac{1}{2}b,$$
$$V_m = -(m+c)(m+c+1)\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}b^2x^2 + b(m-c),$$

что также дает вырожденные гипергеометрические функции.

(Г) $$u_m = bx + d, \quad a_m = -2bm,$$
$$V_m = -(bx+d)^2 + b(2m+1),$$

что дает обобщение полиномов Эрмита.

(Д) $$u_m = ma\operatorname{ctg}[b(x+p)] + \frac{q}{m}, \quad a_m = b^2m^2 - \frac{q^2}{m^2},$$
$$V_m = -m(m+1)b^2\operatorname{cosec}^2[b(x+p)] - 2bq\operatorname{ctg}[b(x+p)];$$

это связано с гипергеометрической функцией [см. формулу (12.3.22)].

(Е) $$u_m = \frac{m}{x} + \frac{q}{m}, \quad a_m = -\frac{q^2}{m^2},$$
$$V_m = -\frac{2q}{x} - m(m+1)\frac{1}{x^2},$$

что приводит к полиномам Лагерра [см. формулу (12.3.38)].

ЛИТЕРАТУРА

Рассмотрение различных типов уравнений с частными производными, типов краевых условий, а также разностных уравнений:

Вебстер А., Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. 1 и 2, ГТТИ, М.—Л., 1934.

Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, М., 1950.

Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, М.—Л., 1951.

Курант Р., Фридрихс К., Леви Г., О разностных уравнениях математической физики, Успехи матем. наук, VIII, 125 (1941).

Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, изд. 14, Гостехиздат, М., 1956; т. IV, изд. 3, Гостехиздат, М., 1957.

Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 3, Гостехиздат, М., 1954.

Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, изд. 2, Гостехиздат, М., 1953.

Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, М., 1957.

Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1932.

Hadamard J., Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, New Haven, 1923.

Phillips H., Wiener N., Nets and the Dirichlet Problem, J. Math. Phys., 2, 105 (March, 1923).

Poeckels F., Über die Partielledifferentialgleichung $\nabla^2 u + k^2 u = 0$, Leipzig, 1891.

Книги, содержащие довольно полное исследование свойств и применений собственных функций:

Айнс Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, НТИУ, Харьков, 1939, гл. 10 и 11.
Зоммерфельд А., Строение атома и спектры, т. II, Гостехиздат, М., 1956.
Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, М., 1954.
Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, ГТТИ, М.—Л., 1937.
Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1932.
Bibliography of Orthogonal Polynomials, National Research Council, Washington, 1940.
Infeld L., Hull T., Factorization Method, Rev. Modern Phys., **23**, 21 (1951).
Kemble E., Fundamental Principles of Quantum Mechanics, ch. 3, 4, New York, 1937.
Magnus W., Oberhettinger F., Special Functions of Mathematical Physics, Berlin, 1943.
Szego G., Orthogonal Polynomials, American Math. Soc., New York, **1939**.