Показать, что

$$G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) - \frac{\lambda}{4\pi}\int G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_1)\,G_0(\mathbf{r}_1\,|\,\mathbf{r}_0)\,dV_1$$

и

$$G_0(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) + \frac{\lambda}{4\pi}\int G_0(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_1)\,G_\lambda(\mathbf{r}_1\,|\,\mathbf{r}_0)\,dV_1.$$

7.14. Пусть G — функция Грина скалярного уравнения Гельмгольца для полубесконечной области $x > 0$, удовлетворяющая смешанным граничным условиям

$$\partial\psi/\partial x = F\psi \quad \text{при} \quad x = 0;$$

показать, что

$$\frac{\partial G}{\partial x} - FG = -\left(\frac{\partial}{\partial x} + F\right)\left(\frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR'}}{R'}\right),$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, а $R' = |\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|$. При помощи интегрирования показать, что

$$G = (e^{ikR}/R) + T.$$

Определить T.

Таблица функций Грина

Общие свойства. Функция Грина $G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{L}(G) - \lambda G = -4\pi\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

и некоторым однородным граничным условиям на граничной поверхности S. Сопряженная к ней функция [см. формулу (7.5.4)] $\widetilde{G}_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{\mathscr{L}}(\widetilde{G}) - \lambda\widetilde{G} = -4\pi\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

и сопряженным граничным условиям [см. формулу (7.5.9)] на граничной поверхности S. *Принцип взаимности* состоит в том, что

$$G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = \widetilde{G}_\lambda(\mathbf{r}_0\,|\,\mathbf{r}).$$

Если оператор $\mathscr{L}$ эрмитов (если его сопряженный и комплексно сопряженный операторы совпадают), то функция G_λ также эрмитова. В этом случае собственные значения λ_n оператора $\mathscr{L}$,

$$\mathscr{L}(\psi_n) - \lambda_n\psi_n = 0,$$

вещественны, собственные функции ψ_n взаимно ортогональны и

$$G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = 4\pi\sum_n \frac{\overline{\psi}_n(\mathbf{r}_0)\,\psi_n(\mathbf{r})}{N_n(\lambda - \lambda_n)},$$

где $N_n = \int |\psi_n|^2\,dV$. Если $\mathscr{L}$ не эрмитов, то собственные функции Φ_n эрмитово сопряженного уравнения

$$\mathscr{L}^*(\Phi_n) - \mu_n\Phi_n = 0, \quad \overline{\mathscr{L}}^* = \widetilde{\mathscr{L}}, \quad \mu_n = \overline{\lambda}_n,$$

могут отличаться от собственных функций ψ_n, и как в той, так и в другой системе функции могут не быть взаимно ортогональными. Однако

в этом случае двойная система ψ, Φ биортогональна и

$$G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\overline{\Phi}_n(\mathbf{r}_0)\,\psi_n(\mathbf{r})}{N_n(\lambda-\lambda_n)},$$

а сопряженная функция $\widetilde{G}$ не обязательно равна комплексно сопряженной $\overline{G}$ $\left[\text{см. формулу (7.5.44); } N_n = \int \overline{\Phi}_n \psi_n\, dv\right]$.

Функция Грина для уравнения Гельмгольца. Функция G является решением уравнения

$$\nabla^2 G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) + k^2 G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),$$

удовлетворяющим однородным граничным условиям на некоторой поверхности S. Тогда соотношение взаимности имеет вид $G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)$, так как уравнение самосопряженное. Если ψ представляет собой решение уравнения $(\nabla^2 + k^2)\psi = -4\pi\rho$, имеющее на поверхности S значение $\psi_0(\mathbf{r}^s)$ и производную по направлению внешней нормали $N_0(\mathbf{r}^s) = (\partial\psi/\partial n)_S$, то внутри и на S

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}_0)\,G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)\,dv_0 + \frac{1}{4\pi}\oint \left[G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0^s)\,N_0(\mathbf{r}_0^s) - \psi_0(\mathbf{r}_0^s)\frac{\partial}{\partial n_0}G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0^s)\right] dA_0,$$

где первый интеграл берется по объему, ограниченному поверхностью S, а второй представляет собой поток через всю S наружу. Нормальная производная берется по внешней (указывающей наружу) нормали.

Если поверхность S находится на бесконечности и задаются расходящиеся волны [условие причинности, формула (7.2.17)], то G принимает простой вид $g_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)$ для *бесконечной области*:

$$\begin{aligned} g_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) &= e^{ikR}/R, && \text{3 измерения; } R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2; \\ &= i\pi H_0^{(1)}(kP), && \text{2 измерения; } P^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2; \\ &= \frac{2\pi i}{k}\,e^{ik|x-x_0|}, && \text{1 измерение.} \end{aligned}$$

Функция Грина для уравнения Пуассона $\nabla^2\psi = -4\pi\rho$ равна $G_0(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)$, т. е. $\lambda = 0$. Соответствующий вид для бесконечной области:

$$\begin{aligned} g_0(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) &= 1/R, && \text{3 измерения;} \\ &= -2\ln R, && \text{2 измерения.} \end{aligned}$$

Если S целиком или частично совпадает с одной из координатных поверхностей разделяющей системы координат, исследованных в § 5.1, то G можно разложить в ряд по разделенным решениям. Допустим, что граничные условия (конечность, периодичность или однородные условия на границе) таковы, что два из множителей могут быть собственными функциями, скажем ξ_2- и ξ_3-множители. ξ_1-множитель должен также удовлетворять однородным условиям на поверхности, которую мы считаем соответствующей поверхностям $\xi_1 = a$, $\xi_1 = b$, $b > a$. Пусть координаты имеют коэффициенты Ламе h_1, h_2, h_3, определитель Штеккеля S с элементами $\Phi_{mn}(\xi_m)$ и алгебраические дополнения $M_m = \partial S/\partial\Phi_{m1}$ [см. формулы (5.1.25) и далее]. Тогда в уравнении Гельмгольца

$$\sum_n \frac{M_n}{Sf_n}\frac{\partial}{\partial\xi_n}\left(f_n\frac{\partial\psi}{\partial\xi_n}\right) + k_1^2\psi = 0, \quad k_1^2 = k^2,$$

переменные разделяются, если положить $\psi = X_1(\xi_1) X_2(\xi_2) X_3(\xi_3)$, где

$$\frac{1}{f_m}\frac{d}{d\xi_m}\left(f_m \frac{dX_m}{d\xi_m}\right) + \sum_{n=1}^{3} k_n^2 \Phi_{mn} X_m = 0$$

и в качестве X_2 и X_3 берутся решения, имеющие вид собственных функций для соответствующих граничных условий:

$$W_q(\xi_2, \xi_3) = \theta_{\nu_q}(\xi_2) X_{\mu_q}(\xi_3), \qquad \nu, \mu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Они ортогональны относительно функции плотности ρ (часто $\rho = h_2 h_3$), так что

$$\int\int \overline{W}_p W_q \rho(\xi_2, \xi_3)\, d\xi_2\, d\xi_3 = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad p \neq q, \\ N_q & \text{для} \quad p = q, \end{cases}$$

причем функции W образуют полную систему для координат ξ_2, ξ_3 внутри поверхности S.

В качестве ξ_1-множителя выбираются два независимых решения $y_{1q}(\xi_1)$ и $y_{2q}(\xi_1)$, каждое из которых соответствует константам разделения в W_q, причем эти решения выбраны так, что y_1 удовлетворяет требуемому граничному условию при $\xi_1 = a$, а y_2 — при $\xi_1 = b$ $(b > a)$. Тогда

$$G_k(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}') = -\frac{4\pi h_1}{h_2 h_3} \sum_q \frac{\rho(\xi_2', \xi_3')}{N_q} \overline{W}_q(\xi_2', \xi_3') W_q(\xi_2, \xi_3) \frac{1}{\Delta} \times$$

$$\times \begin{cases} y_{1q}(\xi_1) y_{2q}(\xi_1') & \text{для} \quad \xi_1 < \xi_1', \\ y_{2q}(\xi_1) y_{1q}(\xi_1') & \text{для} \quad \xi_1 > \xi_1', \end{cases}$$

где коэффициенты Ламе являются функциями координат со штрихами, а Δ — определитель Вронского для двух ξ_1'-решений:

$$\Delta = \Delta(y_{1q}, y_{2q}) = y_{1q} y_{2q}' - y_{1q}' y_{2q} = \mathrm{const}/f_1, \text{ функции от } \xi_1'.$$

Разложение функции Грина для бесконечной области в обобщенном сейчас виде приведено для двумерных полярных координат в формулах (7.2.51) и (11.2.23), для прямоугольных координат в формуле (11.2.11), для параболических координат в формуле (11.2.70) и для эллиптических координат в формуле (11.2.93). Разложения для трехмерных систем прямоугольных координат имеются в формуле (11.3.10), для сферических координат в формуле (11.3.44) и для сфероидальных координат в формуле (11.3.91). Подобные разложения для векторных решений даны в формулах (13.3.15) и (13.3.79).

Функция Грина для волнового уравнения. Функция G является решением уравнения

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = -4\pi\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\, \delta(t - t_0),$$

удовлетворяющим однородным граничным условиям на поверхности S и подчиняющимся требованию «причинности», состоящему в том, что $G = 0$ и $\partial G/\partial t = 0$ всюду при $t < t_0$. В этом случае соотношение взаимности имеет вид

$$G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, -t_0 \mid \mathbf{r}, -t).$$

Если $\psi(\mathbf{r}, t)$ — решение уравнения $\nabla^2\psi - (1/c^2)(\partial^2\psi/\partial t^2) = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$, имеющее на поверхности S значение $\psi_s(\mathbf{r}^s)$ и производную по внешней нормали $N_s(\mathbf{r}^s)$, а внутри S при $t = 0$ начальное значение $\psi_0(\mathbf{r})$ и начальную производную

по времени $v_0(\mathbf{r}) = \partial\psi/\partial t_{t=0}$, то для $t > 0$ внутри и на S

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^{t+\varepsilon} dt_0 \int dV_0 \cdot G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0)\, \rho(\mathbf{r}_0, t_0) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{t+\varepsilon} dt_0 \oint dA_0 \cdot \left[G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0^s, t_0) N_s(\mathbf{r}_0^s) - \psi(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0^s, t_0) \right] -$$

$$- \frac{1}{4\pi c^2} \int dV_0 \cdot \left[\left(\frac{\partial G}{\partial t_0} \right)_{t_0=0} \psi_0(\mathbf{r}_0) - G_{t_0=0}\, v_0(\mathbf{r}_0) \right], \quad \varepsilon \to +0.$$

Замкнутый вид функции Грина для бесконечной области таков:

$$g(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = (1/R)\, \delta[(R/c) - (t - t_0)] \quad \text{для 3 измерений,}$$

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2;$$

$$= \left[2c/\sqrt{c^2 (t - t_0)^2 - P^2}\right] u[(t - t_0) - (P/c)] \quad \text{для 2-измерений,}$$

$$P^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2;$$

$$= 2c\pi\, u[(t - t_0) - (|x - x_0|/c)] \quad \text{для 1 измерения,}$$

где

$$u(x) = 0, \quad x < 0, \quad u(x) = 1, \quad x > 0, \quad \delta(x) = u'(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x + a)\, dx = f(a), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x + a)\, dx = -f'(a).$$

Функция Грина для волнового уравнения связана с функцией Грина для уравнения Гельмгольца интегральным соотношением Фурье

$$G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0)\, e^{-ikc(t - t_0)}\, dk =$$

$$= 4\pi c^2 u(t - t_0) \sum_n \frac{1}{\omega_n} \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0)\, \psi_n(\mathbf{r}) \sin[\omega_n (t - t_0)],$$

где ψ_n является собственной функцией — решением уравнения $\nabla^2\psi + k_n^2\psi_n = 0$ внутри S, причем $\omega_n = k_n c$. Контур интегрирования по k расположен непосредственно выше вещественной оси.

Функция Грина для уравнения диффузии. Функция G является решением уравнения

$$\nabla^2 G_a(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) - a^2 \frac{\partial}{\partial t} G_a(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\, \delta(t - t_0),$$

удовлетворяющим однородным граничным условиям на поверхности S и подчиняющимся требованию причинности, состоящему в том, что G при $t < t_0$ равна нулю. Сопряженная функция $\widetilde{G}_a(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = G_a(\mathbf{r}, -t \mid \mathbf{r}_0, -t_0)$ удовлетворяет сопряженному уравнению $\nabla^2\widetilde{G} + a^2\, \partial\widetilde{G}/\partial t = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\, \delta(t - t_0)$. Соотношение взаимности имеет вид

$$G_a(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = \widetilde{G}_a(\mathbf{r}_0, t_0 \mid \mathbf{r}, t) = G_a(\mathbf{r}_0, -t_0 \mid \mathbf{r}, -t).$$

Если $\psi(\mathbf{r})$ — решение уравнения $\nabla^2\psi - a^2\, \partial\psi/\partial t = -4\pi\rho(\mathbf{r})$, имеющее на поверхности S значение $\psi_s(\mathbf{r}^s)$ и производную по внешней нормали $N_s(\mathbf{r}^s) = \partial\psi/\partial n$, а внутри S при $t = 0$ — начальное значение $\psi_0(\mathbf{r})$, то для

$t > 0$ внутри и на S

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^{t+\varepsilon} dt_0 \int \rho(\mathbf{r}_0, t)\, G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0)\, dV_0 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{t+\varepsilon} dt_0 \int \left[G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0^s, t_0) N_s(\mathbf{r}_0^s) - \psi_s(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0^s, t_0) \right] dA_0 +$$

$$+ \frac{a^2}{4\pi} \int \psi_0(\mathbf{r}_0)\, G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, 0)\, dV_0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Вид функции Грина для бесконечной области в случае n измерений:

$$g_a(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{4\pi}{a^2} \left(\frac{a}{2\sqrt{\pi\tau}} \right)^n e^{-a^2R^2/4\tau}\, u(\tau),$$

где $\tau = t - t_0$ и $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$. Функция Грина для уравнения диффузии связана с собственными функциями ψ_n соответствующего уравнения Гельмгольца $(\nabla^2 + k_n^2)\psi_n = 0$ для области, заключенной внутри S, соотношением

$$G_a(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{4\pi}{a^2} u(t - t_0) \sum_n \frac{e^{-(k_n^2/a^2)(t-t_0)}}{N_n} \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0)\, \psi_n(\mathbf{r}),$$

где $\int \bar{\psi}_n \psi_m\, dV = \delta_{nm} N_n$.

ЛИТЕРАТУРА

Сведения по функциям Грина и их приложениям разбросаны по разным работам. Удовлетворительное изложение различных аспектов этой теории можно найти в следующих книгах:

Вебстер А., Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1934.

Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, М., 1950.

Карслоу Х. С., Теория теплопроводности, Гостехиздат, М.—Л., 1947.

Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, М.—Л., 1951.

Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, изд. 3, Гостехиздат, М., 1957.

Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 3, Гостехиздат, М.—Л., 1954.

Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, изд. 2, Гостехиздат, М.—Л., 1953.

Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, ГТТИ, М.—Л., 1937.

Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, ch. 2, Cambridge, New York, 1932.

Kellogg O., Foundations of Potential Theory, Berlin, 1939, перепечатка, New York, 1944.

Murnaghan F., Introduction to Applied Mathematics, New York, 1948.