Тем не менее существуют случаи, для которых мы можем получить решение прямым путем. Например, для ядер вида $v(x-x_0)$ применимо преобразование Фурье. Однако для многих случаев еще не найден подходящий алгорифм для получения общего решения. Несмотря на это, сведение задач к интегральным уравнениям оказывается полезным, потому что, как мы увидим в следующей главе, интегральные уравнения служат основой для развития многих приближенных методов решения уравнений физики.

Основные свойства интегральных уравнений и их решений

Типы уравнений. В уравнениях Фредгольма фигурируют интегралы с фиксированными пределами; в уравнениях Вольтерра — интегралы, у которых один из пределов переменный; в уравнения первого рода неизвестная функция ψ входит только под знаком интеграла; в уравнениях второго рода ψ имеется также и вне интеграла.

Уравнение Фредгольма первого рода:

$$\varphi(z)=\int_a^b K(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0, \quad \varphi \text{ и } K \text{ известны.}$$

Уравнение Фредгольма второго рода:

$$\psi(z)=\varphi(z)+\lambda\int_a^b K(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0, \quad \varphi \text{ и } K \text{ известны.}$$

При $\varphi=0$ это уравнение становится однородным.

Уравнение Вольтерра первого рода:

$$\varphi(z)=\int_a^z K(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0, \quad \varphi \text{ и } K \text{ известны.}$$

Уравнение Вольтерра второго рода:

$$\psi(z)=\varphi(z)+\int_a^z K(z\,|\,z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0, \quad \varphi \text{ и } K \text{ известны.}$$

Соответствующее однородное уравнение, возникающее при $\varphi=0$, не имеет ненулевых решений. Функция $K(z\,|\,z_0)$ называется *ядром* уравнения.

Типы ядер. *Симметрическое* ядро удовлетворяет равенству $K(z\,|\,z_0)=K(z_0\,|\,z)$. *Полярное* ядро имеет вид $r(z_0)\,G(z\,|\,z_0)$, где функция G симметрична. Уравнение Фредгольма с симметрическим ядром *самосопряженное*, уравнение Вольтерра с симметрическим ядром не является самосопряженным. Ядро является *определенным*, если

$$\int f(z)\,dz\int K(z\,|\,z_0)\,f(z_0)\,dz_0>0 \quad \text{(положительно определенное)}$$

или

$$\int f(z)\,dz\int K(z\,|\,z_0)\,f(z_0)\,dz_0<0 \quad \text{(отрицательно определенное)}$$

для любой функции f, конечной в промежутке интегрирования, соответствующем уравнению с ядром K.

Ядро называется *эрмитовым*, если для него $K(z_0 \mid z) = \overline{K}(z \mid z_0)$, и *антиэрмитовым*, если $K(z_0 \mid z) = -\overline{K}(z \mid z_0)$. Ядра обоих этих типов можно преобразовать в определенные или полуопределенные (полуопределенными называются ядра, для которых в предыдущих определениях знаки $>$ или $<$ заменены на $\geqslant$ или $\leqslant$ соответственно) при помощи итераций [см. формулу (8.2.10) и следующие]. Уравнение с полярным ядром можно преобразовать в уравнение с симметрическим ядром [см. формулу (8.2.8)].

Вещественное, *положительно определенное*, *симметрическое* ядро в уравнении Фредгольма обладает следующими свойствами. Однородное уравнение второго рода имеет ненулевые решения для некоторой последовательности значений параметра λ; называемых собственными значениями ($0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots$); соответствующие решения $\psi_n(z)$ являются *собственными функциями* и образуют семейство, ортогональное на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ (см. стр. 844). Эти собственные функции удовлетворяют вариационному принципу

$$\delta \left\{ \frac{\int \overline{\psi}(z)\,\psi(z)\,dz}{\left\{\int\int \overline{\psi}(z)\,K(z \mid z_0)\,\psi(z_0)\,dz_0\,dz\right\}} \right\} = 0$$

[см. (6.3.20) по поводу аналогичного соотношения для дифференциальных уравнений]. Стационарными значениями выражения, стоящего в скобках, являются собственные значения λ_n [см. (8.2.24)].

Сингулярное ядро имеет разрывы или особенности внутри промежутка интегрирования или же бесконечные пределы интегрирования. Некоторые из этих ядер можно свести к несингулярным при помощи итераций; те ядра, которые не могут быть сведены к несингулярным, называются *существенно сингулярными* (см. стр. 855). Однородные уравнения Фредгольма с существенно сингулярными ядрами могут иметь несчетное множество собственных значений; могут оказаться допустимыми все значения λ из некоторой области.

Функция Грина для неоднородного уравнения. Неоднородное уравнение Фредгольма второго рода можно решить при помощи функции Грина $G_\lambda(z \mid z_0)$, являющейся решением уравнения

$$G_\lambda(z \mid z_0) = K(z \mid z_0) + \lambda \int K(z \mid z_1)\,G_\lambda(z_1 \mid z_0)\,dz_1.$$

Решение исходного уравнения имеет вид

$$\psi(z) = \varphi(z) + \lambda \int G_\lambda(z \mid z_0)\,\varphi(z_0)\,dz_0.$$

Функция Грина G_λ может быть разложена в различные ряды, содержащие собственные функции ψ_n, собственные значения λ_n или итерированные ядра K_n:

$$G_\lambda(z \mid z_0) = \sum_m \frac{\psi_m(z)\,\overline{\psi}_m(z_0)}{\lambda_m - \lambda}, \quad \psi_m \text{ нормированы.}$$

$$G_\lambda(z \mid z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(z \mid z_0)\,\lambda^n,$$

$$K(z \mid z_0) = K_1(z \mid z_0) = G_0(z \mid z_0),$$

$$K_{n+1}(z \mid z_0) = \int K_n(z \mid z_1)\,K(z_1 \mid z_0)\,dz_1 = \sum_m \frac{\psi_m(z)\,\overline{\psi}_m(z_0)}{(\lambda_m)^{n+1}}.$$

Следом функции Грина является

$$\int G_\lambda(z\,|\,z)\,dz = \sum_m \frac{1}{\lambda_m - \lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\lambda^n, \quad C_n = \int K_n(z\,|\,z)\,dz = \sum_m \frac{1}{\lambda_m^n}.$$

Решение уравнений Фредгольма первого рода. Обычно это уравнение решается при помощи разложения φ, K и искомой функции ψ в какие-либо ряды и приравнивания коэффициентов. Тип применяемых рядов зависит от типа ядра K.

а. K является *производящей функцией* для некоторого множества собственных функций χ_n, соответствующих данным пределам интегрирования:

$$K(z\,|\,z_0) = \sum b_n z^n \overline{\chi}_n(z_0).$$

Полагая $\psi = \sum a_n\chi_n$, мы получаем $\varphi(z) = \sum a_n b_n z^n$, и неизвестные коэффициенты a_n могут быть определены при помощи сравнения с разложением в ряд функции φ.

б. K является *функцией Грина*, которую всегда можно выразить при помощи соответствующих собственных функций χ_n:

$$K(z\,|\,z_0) = \sum b_n \overline{\chi}_n(z_0)\,\chi_n(z).$$

Полагая $\psi = \sum a_n\chi_n$, мы получаем $a_n = (1/b_n)\int \varphi(z)\,\overline{\chi}_n(z)\,dz$, т. е. получаем формулу, выражающую коэффициенты a_n.

Если нельзя воспользоваться ни одной из этих возможностей, то коэффициенты a_n можно найти по методу Шмидта [см. равенства (8.3.10) и следующие] или при помощи биортогональных функций [см. равенства (8.3.19) и следующие], или же численными методами (см. гл. 9).

Для бесконечного промежутка интегрирования, когда ядра являются сингулярными, иногда можно воспользоваться тем, что уравнение Фредгольма первого рода представляет собой соотношение типа интегрального преобразования между известной функцией φ и неизвестной ψ при помощи ядра K:

в. $K(z\,|\,z_0) = e^{izz_0}$, интегрирование от $-\infty$ до ∞, — преобразование Фурье. Решение [см. (8.3.59)]

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k)\,e^{-izk}\,dk.$$

г. $K = e^{-zz_0}$, интегрирование от 0 до ∞, — преобразование Лапласа. Решение [см. (8.3.66)]

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} \varphi(p)\,e^{pz}\,dp.$$

д. $K = J_m(zz_0)\,z_0$, интегрирование от 0 до ∞, — преобразование Ганкеля. Решение [см. (8.3.64)]

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} J_m(zr)\,\varphi(r)\,r\,dr.$$

е. $K = (z_0)^{z-1}$, интегрирование от 0 до ∞, — преобразование Меллина. Решение [см. (8.3.68)]

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} z^{-s}\varphi(s)\,ds.$$

Решение уравнений Вольтерра первого рода. Здесь отсутствуют типы а и б; обычно приходится прибегать к методу ортогонализации Шмидта или к биортогональным рядам. Для ядер вида $K = v(z - z_0)$ можно использовать преобразование Лапласа [равенство (4.8.30) и следующие]:

а. $K = v(z - z_0)$, интегрирование от 0 до z. Решение [см. (8.5.34)]

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} \frac{\Phi(p)}{V(p)} e^{pz}\, dp, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

где

$$V(p) = \int\limits_0^\infty v(x)\, e^{-px}\, dx, \quad \Phi(p) = \int\limits_0^\infty \varphi(x)\, e^{-px}\, dx.$$

б. $K = v(z - z_0)$, интегрирование от z до ∞. Решение

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} \left[\frac{\Phi(p)}{V(-p)}\right] e^{pz}\, dp,$$

где

$$V(-p) = \int\limits_0^\infty v(-x)\, e^{px}\, dx.$$

Решение уравнений Фредгольма второго рода. Ядро можно представить при помощи соответствующего ортонормированного семейства собственных функций χ_n, $K(z \mid z_0) = \sum g_n(z_0)\chi_n(z)$. Тогда, полагая $\psi = \sum a_n\chi_n$, мы сводим однородное уравнение к системе уравнений

$$\sum_n a_n [\alpha_{mn} - (1/\lambda)\delta_{mn}] = 0, \quad \alpha_{mn} = \int \chi_m(z_0)\, g_n(z_0)\, dz_0.$$

Определитель этой системы $|\alpha_{mn} - (1/\lambda)\delta_{mn}|$ должен равняться нулю (вековое уравнение). Корни этого уравнения являются собственными значениями λ_n, а соответствующие ряды для ψ — собственными функциями. Некоторые случаи упрощения:

а. K является функцией Грина; тогда функции g_n пропорциональны $\bar{\chi}_n$, $\alpha_{mn} = \alpha_n\delta_{mn}$. Определитель, входящий в вековое уравнение (вековой определитель), *диагонален*, собственными значениями служат $1/\alpha_n$, а собственными функциями $-\chi_n$.

б. K является производящей функцией или каким-либо другим выражением, для которого вековой определитель *полудиагонален* [см. (8.4.3)].

в. K таково, что вековой определитель *конечен* [см. (8.4.11)].

Соответствующее неоднородное уравнение можно решить при помощи ряда по собственным функциям ψ_n однородного уравнения и по биортогональным решениям φ_n сопряженного уравнения (если K симметрично, то $\varphi_n = \bar{\psi}_n$). Тогда

$$K(z \mid z_0) = \sum \frac{1}{\lambda_n} \psi_n(z)\, \varphi_n(z_0),$$

и частное решение имеет вид

$$\psi(z) = \sum_n \left[\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \int \varphi(x)\, \varphi_n(x)\, dx\right] \psi_n(z),$$

где $\varphi(z)$ — неоднородный член в интегральном уравнении.

При бесконечном промежутке интегрирования появляется континуум собственных значений λ, вековой определитель превращается в интеграл, и следует применять метод интегральных преобразований.

г. $K = v(z - z_0)$, интегрирование от $-\infty$ до ∞, — преобразование Фурье. Если оба преобразования $\Phi(k)$ и $V(k)$ регулярны при $\operatorname{Im} k \leqslant \tau$, $-\infty \leqslant \operatorname{Re} k \leqslant \infty$, то решением является

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{\Phi(k)\, e^{-ikz}\, dk}{1 - \sqrt{2\pi}\, \lambda V(k)}.$$

Если приходится вводить различные преобразования при $z < 0$ и при $z > 0$ (обобщенное преобразование Фурье), то применима формула (8.5.17).

д. $K = v(z - z_0)$, интегрирование от 0 до ∞, — уравнение типа Винера — Хопфа. Для решения см. формулы (8.5.55), (8.5.56), а также (8.5.76) и следующие.

е. $K = v(z + z_0)$, интегрирование от $-\infty$ до ∞, — преобразование Фурье. Для решения см. формулу (8.5.29).

ж. $K = (1/z_0)\, v(z/z_0)$, интегрирование от 0 до ∞, — преобразование Меллина. Для решения см. формулу (8.5.43).

Решение уравнений Вольтерра второго рода. Однородное (несингулярное) уравнение не имеет ненулевых решений. В случаях когда $K = v(z - z_0)$ и интегрирование производится от 0 до z или от z до ∞, можно воспользоваться преобразованием Лапласа, так же как для уравнений Вольтерра первого рода. Для решения неоднородного уравнения второго рода см. формулы (8.5.34) и (8.5 38).

ЛИТЕРАТУРА

Книги, в которых излагаются вопросы общей теории интегральных уравнений:

Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, изд. 3, Гостехиздат, М.—Л., 1951, гл. 3.
Ловитт У. В., Линейные интегральные уравнения, изд. 2, Гостехиздат, М., 1957.
Михлин С. Г., Сингулярные интегральные уравнения, Успехи матем. наук, 3, вып. 3 (25) (1948).
Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, Гостехиздат, М., 1951.
Привалов И. И., Интегральные уравнения, изд. 2, ОНТИ, М.—Л., 1937.
Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, изд. 3, Гостехиздат, М., 1957, гл. 1.
Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1934, гл. 11.
Hamel G., Integralgleichungen, Berlin, 1937.
Kneser A., Integralgleichungen und ihre Anwendung in der Mathematischen Physik, Brunswick, 1911.
Kowalewski G. W. H., Integralgleichungen, Berlin, 1930.
Shohat J. A. and Tamarkin J. D., The Problem of Moments, New York, 1943.
Vivanti G., Elemente der Theorie der linearen Integralgleichungen, Hanover, 1929.

Книги, в которых рассматривается применение преобразований Фурье и Лапласа для решения интегральных уравнений:

Ван дер Поль Б. и Бреммер Х., Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, Изд. иностр. лит., М., 1952.
Титчмарш Е. К., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
Doetsch G., Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1937.
Hopf E., Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge, New York, 1934.
Paley R. E. A. C. and Wiener N., Fourier Transforms in the Complex Domain, New York, 1934.
Smithies F., Singular Integral Equations, Proc. London Math. Soc., 46 (1939), 409.