Особо важным свойством оператора $\mathfrak{R}$ является то, что он не только порождает вращение векторов в спиновом пространстве, но и, кроме того, может вызвать связанное с первым вращение 4-векторов в обычном пространстве. Например, спинор

$$\mathfrak{S} = c_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* + c_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* + c_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^* + c_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^*$$

(где c имеют любые значения) преобразуется как 4-вектор [см. уравнение (1.7.18)] с компонентами F_n [см. уравнения (1.7.12)]. Вектор, образованный воздействием оператора $\mathfrak{R}$ «справа и слева» на $\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{R}^{-1} = c_{11}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1^{*\prime} + c_{12}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2^{*\prime} + c_{21}\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1^{*\prime} + c_{22}\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2^{*\prime} = \\ = F_1\sigma_1' + F_2\sigma_2' + F_3\sigma_3' + F_4\sigma_4', \tag{1.7.23}$$

имеет те же компоненты F_n, но теперь они являются компонентами в разложении по штрихованным единичным векторам, повернутым относительно нештрихованных. Поэтому воздействие оператором $\mathfrak{R}$ справа и слева действительно повернуло вектор $\mathfrak{S}$ на величину, задаваемую углами θ, ψ и Φ. В соответствии с соотношением «квадратного корня» между спиновым пространством и пространством-временем мы должны были воздействовать на спиновый вектор оператором $\mathfrak{R}$ один раз, чтобы произвести поворот, но чтобы получить поворот 4-вектора на соответствующую величину, на него надо подействовать дважды.

Заметим, что здесь мы имели дело с поворотами на конечные углы. Если же поворот бесконечно мал, то углы Эйлера θ и $(\Phi+\psi)$ делаются малыми и поворот может быть представлен при помощи бесконечно малого вектора $\Delta\boldsymbol{\omega}$, направление которого дает ось поворота, а длина — угол поворота в радианах. Рассмотрение свойств векторного произведения показывает, что операция перехода от обычного трехмерного вектора $\mathbf{A}$ к другому вектору $\mathbf{A}'$ при помощи бесконечно малого поворота задается уравнением

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \Delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}. \tag{1.7.24}$$

Изучение приведенных на стр. 105 уравнений для поворота, содержащих углы Эйлера, показывает, что если θ и $(\Phi+\psi)$ малы, то

$$(\Delta\boldsymbol{\omega})_1 \simeq -(\Phi+\psi), \quad (\Delta\boldsymbol{\omega})_2 \simeq -\theta\sin\psi, \quad (\Delta\boldsymbol{\omega})_3 \simeq -\theta\cos\psi.$$

Рассмотрение уравнений для компонент $\mathfrak{R}$ приводит к соответствующей системе уравнений

$$R_4 = 1, \quad R_3 = (i/2)(\Phi+\psi), \quad R_1 = -(i/2)\,\theta\sin\psi,$$
$$R_2 = (i/2)\,\theta\cos\psi,$$

когда θ и $(\Phi+\psi)$ малы.

Следовательно, для бесконечно малого поворота, представленного вектором $\Delta\omega$, спинорный оператор вращения равен

$$\mathfrak{R} \to \sigma_4 + (i/2)\,[(\Delta\boldsymbol{\omega})_1\sigma_1 + (\Delta\boldsymbol{\omega})_2\sigma_2 + (\Delta\boldsymbol{\omega})_3\sigma_3]. \tag{1.7.25}$$

Эти уравнения иногда можно использовать, чтобы проверить, не подчиняются ли компоненты какого-либо неизвестного оператора правилам преобразования 4-векторов.

Задачи к главе 1

1.1. При постоянном ψ поверхности, заданные уравнением

$$(x^2+y^2)\cos^2\psi + z^2\operatorname{ctg}^2\psi = a^2, \quad 0<\psi<\pi,$$

являются эквипотенциальными поверхностями. Выразить ψ через x, y, z; подсчитать направляющие косинусы нормали к поверхности ψ в точке x, y, z. Показать, что ψ является решением уравнения Лапласа. Каков вид поверхности $\psi = \text{const}$? $\psi = 0$? $\psi = \pi$?

1.2. Уравнение

$$\left[\sqrt{x^2+y^2}-\psi\right]^2+z^2=\psi^2-a^2, \quad a<\psi<\infty,$$

при фиксированном ψ определяет одну из поверхностей, образующих семейство. Каков вид этой поверхности? Каков вид поверхности в предельных случаях $\psi = a$, $\psi = \infty$? Выразить ψ через x, y, z и подсчитать направляющие косинусы нормали к поверхности ψ в точке x, y, z. Является ли ψ решением уравнения Лапласа?

1.3. Компонентами векторного поля являются

$$F_x=2zx, \quad F_y=2zy, \quad F_z=a^2+z^2-x^2-y^2.$$

Показать, что, интегрируя уравнения линий тока, можно получить функции тока φ и μ, где

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{x^2+y^2+z^2+a^2}{2a\sqrt{x^2+y^2}}=\operatorname{cth}\mu.$$

Показать, что существует псевдопотенциал, равный ψ, где

$$\frac{x^2+y^2+z^2-a^2}{2az}=\operatorname{ctg}\psi.$$

Показать, что поверхности, на которых соответственно φ, μ, ψ постоянны, являются взаимно-ортогональными.

1.4. Три компоненты векторного поля суть

$$F_x=3xz, \quad F_y=3yz, \quad F_z=2z^2-x^2-y^2.$$

Проинтегрировав уравнения линий тока, получить функции тока

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad \theta=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

и показать, что псевдопотенциал равен

$$\psi=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Является ли ψ решением уравнения Лапласа?

1.5. Вычислить для силовых полей задач 1.3 и 1.4 поток через сферу радиуса r с центром в начале, а также через две полусферы: одну соответствующую $z<0$, вторую — $z>0$ (замыкаемые диском в плоскости $z=0$). Вычислить поток через те же поверхности для векторного поля

$$F_x=\frac{x}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}, \quad F_y=\frac{y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}},$$
$$F_z=\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}.$$

1.6. Вычислить циркуляцию вдоль лежащей в плоскости xy окружности радиуса r с центром в начале координат для поля

$$F_x=\frac{(x-a)}{(x-a)^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}, \quad F_y=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{y}{(x-a)^2+y^2},$$
$$F_z=0.$$

Для поля задачи 1.3 вычислить циркуляцию вдоль окружности, определяемой уравнениями $\varphi = 0$, $\mu = \text{const}$.

1.7. Параболические координаты определяются следующими уравнениями:

$$\lambda = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z}, \quad \mu = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z},$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Описать координатные поверхности (или дать их набросок). Выразить коэффициенты Ламе и направляющие косинусы для этой системы через x, y, z. Выразить x, y, z через λ, μ, φ и отсюда получить коэффициенты Ламе и направляющие косинусы как функции от λ, μ, φ. Выписать выражения для $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\nabla^2\psi$. Подсчитать составляющие по λ, μ, φ следующего векторного поля

$$F_x = \frac{x/\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad F_y = \frac{y/\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad F_z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

в виде функции от λ, μ, φ. Выразить дивергенцию $\mathbf{F}$ через λ, μ, φ.

1.8. Функции тока φ, μ и псевдопотенциал ψ, данные в задаче 1.3, образуют тороидальную систему координат. Описать эти поверхности (или дать их набросок). Найти коэффициенты Ламе как функции x, y, z, а также как функции μ, ψ, φ. Выписать выражения для $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\operatorname{div}\mathbf{F}$ и $\nabla^2 U$. Найти выражения составляющих вектора $\mathbf{F}$ из этой же задачи вдоль координатных линий тороидальной системы; вычислить направление его линий тока.

1.9. Семейство поверхностей, которое можно использовать в качестве семейства координатных поверхностей, задается уравнением

$$\ln(x^2+y^2) - z = \xi$$

при постоянных ξ. Показать, что два семейства, образующих вместе с данным трехмерную систему координат, имеют вид

$$\eta = \frac{1}{2}(x^2+y^2)+z, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

т. е. показать, что эти семейства взаимно ортогональны. Эта система координат может быть названа экспоненциальной. Почему? Подсчитать коэффициенты Ламе и направляющие косинусы для преобразования компонент вектора.

1.10. Бисферическая система координат определяется уравнениями

$$x = \frac{a\sin\vartheta\cos\varphi}{\operatorname{ch}\mu-\cos\vartheta}, \quad y = \frac{a\sin\vartheta\sin\varphi}{\operatorname{ch}\mu-\cos\vartheta}, \quad z = \frac{a\operatorname{sh}\mu}{\operatorname{ch}\mu-\cos\vartheta}.$$

Описать эти поверхности (или дать их наброски) и определить фактические промежутки изменения μ, ϑ, φ. Подсчитать коэффициенты Ламе и направляющие косинусы. Выписать выражения лапласиана и градиента. Показать, что поверхности μ имеют постоянную кривизну, т. е. показать, что величина

$$\frac{1}{h_\vartheta}\cdot\frac{\partial \mathbf{a}_\mu}{\partial\vartheta} = \frac{1}{h_\varphi}\cdot\frac{\partial \mathbf{a}_\mu}{\partial\varphi}$$

не зависит от ϑ и φ и что поэтому эти поверхности являются сферами.

1.11. Выписать выражения для компонент производных по направлению $(\mathbf{a}_\vartheta \cdot \nabla)\mathbf{A}$ и $(\mathbf{a}_\varphi \cdot \nabla)\mathbf{B}$ в сферических координатах и в сфероидальных координатах

$$x = a \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \cos \varphi, \quad y = a \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \sin \varphi,$$
$$z = a \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta.$$

1.12. Скалярная функция $\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в ортогональной криволинейной системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 может быть превращена в вектор умножением на единичный вектор $\mathbf{a}_1$, нормальный к координатным поверхностям ξ_1. Другой вектор может быть получен как $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot}(\mathbf{a}_1 \psi)$. Показать, что $\mathbf{A}$ касателен к поверхности ξ_1. Какому уравнению должна удовлетворять ψ и какие условия должны быть наложены на коэффициенты Ламе, чтобы вектор $\mathbf{A}$ удовлетворял уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0?$$

1.13. Пользуясь тензорной записью, найти выражение для $\nabla \times (u \nabla v)$ в общих ортогональных криволинейных координатах.

1.14. Мы можем определить кривизну координатных поверхностей ξ_n по направлению ξ_m как составляющую по $\mathbf{a}_m$ скорости изменения $\mathbf{a}_n$ по отношению к расстоянию в направлении $\mathbf{a}_m$. Выразить обе кривизны поверхности ξ_n при помощи символов Кристоффеля.

1.15. Вывести выражения для символов Кристоффеля и для ковариантной производной компонент $f_i = h_i F_i$ для бисферических координат, приведенных в задаче 1.10, и для параболических координат, определенных равенствами

$$x = \lambda\mu \cos \varphi, \quad y = \lambda\mu \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2).$$

1.16. Дать явные выражения компонент симметрического аффинора $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla)$ для сфероидальных координат, приведенных в задаче 1.11, и для эллиптических цилиндрических координат, задаваемых равенствами

$$x = a \operatorname{ch} \lambda \cos \varphi, \quad y = a \operatorname{sh} \lambda \sin \varphi, \quad z = z.$$

Дать также выражения для лапласиана вектора в обеих системах.

1.17. Найти главные оси аффинора деформаций

$$\mathfrak{S} = -\mathbf{i}\left(\frac{1}{2} + \alpha y^2\right)\mathbf{i} - \mathbf{j}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\alpha y^2\right)\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k} - \alpha x y\,(\mathbf{i}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{i})$$

в точке (x, y, z). Чему равны удлинения вдоль этих осей (главные удлинения)?

1.18. Разбить аффинор

$$\mathfrak{A} = \mathbf{i}\mathbf{i} - 2\mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k} + \sqrt{2\alpha^2 - 4}\,\mathbf{i}\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\alpha \mathbf{k}\mathbf{j} + \beta\,(\mathbf{j}\mathbf{k} - \mathbf{k}\mathbf{j})$$

на симметричную и кососимметричную части. Найти вектор вращения для кососимметричного аффинора и главные оси симметричного аффинора. Какой вид будет иметь аффинор после приведения к этим главным осям?

1.19. Написать разложение аффинора

$$\mathfrak{D} = z\,(\mathbf{i}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{i}) - y\mathbf{k}\mathbf{i} + x\mathbf{k}\mathbf{j}$$

на составляющие в цилиндрических координатах

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ z.$$

После этого выделить его симметричную и кососимметричную части и определить вектор вращения для кососимметричной части и главные оси для симметричной.

1.20. Вектор смещения $\mathbf{s}$ можно представить в виде суммы градиента скалярного потенциала φ и вихря векторного потенциала $\mathbf{A}$. Получить в случае общих ортогональных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 выражение аффинора напряжений

$$\Gamma=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{s}+\mathbf{s}\nabla),\quad \mathbf{s}=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{rot}\mathbf{A},$$

через φ и компоненты $\mathbf{A}$ вдоль ξ_1, ξ_2, ξ_3. Выписать явный вид этих выражений для цилиндрических координат r, φ, z и для сферических координат r, ϑ, φ.

1.21. В некоторых случаях, вектор смещения $\mathbf{s}$ для упругой среды может быть представлен выражением $\mathbf{s}=\operatorname{rot}(\mathbf{a}_z\psi)$, где ψ — некоторая функция цилиндрических координат r, φ, z. Показать, что когда $\psi=r^2f(\varphi,z)+g(r,z)$, то все три диагональных члена аффинора равны нулю. Найти аффинор деформаций и определить главные оси и главные удлинения для случая $\psi=zr^2\cos\varphi$.

1.22. Показать, что возможные смещения упругой среды, дающие нулевые диагональные члены в тензоре деформаций $\mathfrak{S}$, записанном для сферических координат r, ϑ, φ, могут быть представлены в виде суммы двух векторов $\operatorname{rot}(\mathbf{a}_\varphi r\sin\vartheta g(\varphi))$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}_\vartheta rf(\vartheta))$. Найти аффинор деформаций, главные оси и главные удлинения для двух случаев

$$\mathbf{s}=\operatorname{rot}(\mathbf{a}_\varphi r\sin\vartheta\cos\varphi)\ \text{и}\ \mathbf{s}=\operatorname{rot}(\mathbf{a}_\vartheta r\sin(2\vartheta)).$$

1.23. Три связанных осциллятора удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+\omega^2y_1=k^2y_2,\quad \frac{d^2y_2}{dt^2}+\omega^2y_2=k^2y_1+k^2y_3,\quad \frac{d^2y_3}{dt^2}+\omega^2y_3=k^2y_2.$$

Выразить эти уравнения при помощи абстрактного векторного пространства и векторных операторов. Найти главные оси оператора и таким образом собственные частоты этой системы.

1.24. Система из $N-1$ связанных осцилляторов имеет следующее уравнение движения в абстрактном векторном представлении:

$$(d^2/dt^2)\,\mathbf{R}+\omega^2\mathbf{R}=k^2\mathfrak{U}\cdot\mathbf{R},$$

где $\mathbf{R}=\sum\limits_{n=0}^{N}y_n(t)\,\mathbf{e}_n$, с граничными условиями $y_0=y_N=0$; здесь оператор $\mathfrak{U}$ действует на единичные векторы $\mathbf{e}_n$ (соответствующие амплитуде колебаний y_n для n-го осциллятора) согласно уравнению

$$\mathfrak{U}\cdot\mathbf{e}_n=\frac{1}{2}\mathbf{e}_{n-1}+\frac{1}{2}\mathbf{e}_{n+1}.$$

Показать, что главные оси этого оператора $\mathfrak{U}$ имеют направления

собственных векторов

$$\mathbf{a}_m = C_m \sum_{n=0}^{N} \sin\left(\frac{\pi n m}{N}\right) \mathbf{e}_n, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, N-1,$$

иными словами, что $\mathfrak{U} \cdot \mathbf{a}_m = u_m \mathbf{a}_m$. Найти собственные значения u_m и, таким образом, допустимые частоты этой системы. Найти такие значения постоянных C_m, чтобы новые векторы $\mathbf{a}_m$ были единичными векторами. Показать, что векторы $\mathbf{a}_m$ взаимно-ортогональны.

1.25. Доказать неравенство треугольника

$$|\mathbf{e}| + |\mathbf{f}| \geqslant |\mathbf{e} + \mathbf{f}|.$$

1.26. Эрмитов оператор $\mathfrak{R}$, удовлетворяющий неравенству $(\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{R} \cdot \mathbf{e}) \geqslant 0$ для всех векторов $\mathbf{e}$, называется *положительно определенным*. Показать, что если $\mathfrak{R}$ — положительно определенный оператор, то

$$|\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{R} \cdot \mathbf{f}| \leqslant \sqrt{(\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{R} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{f}^* \cdot \mathfrak{R} \cdot \mathbf{f})}.$$

1.27. а. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(e^{i\lambda \mathfrak{S}} \mathfrak{A} e^{-i\lambda \mathfrak{S}}\right) = i\left[\mathfrak{S}, e^{i\lambda \mathfrak{S}} \mathfrak{A} e^{-i\lambda \mathfrak{S}}\right]$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\left(e^{i\lambda \mathfrak{S}} \mathfrak{A} e^{-i\lambda \mathfrak{S}}\right) = (i)^2\left[\mathfrak{S}, \left[\mathfrak{S}, e^{i\lambda \mathfrak{S}} \mathfrak{A} e^{-i\lambda \mathfrak{S}}\right]\right],$$

где

$$[\mathfrak{S}, \mathfrak{T}] = [\mathfrak{S}\mathfrak{T} - \mathfrak{T}\mathfrak{S}] \quad \text{и} \quad [\mathfrak{S}, [\mathfrak{S}, \mathfrak{T}]] = \mathfrak{S}[\mathfrak{S}, \mathfrak{T}] - [\mathfrak{S}, \mathfrak{T}]\mathfrak{S}.$$

б. Из «а» получить разложение

$$e^{i\lambda \mathfrak{S}} \mathfrak{A} e^{-i\lambda \mathfrak{S}} = \mathfrak{A} + i\lambda[\mathfrak{S}, \mathfrak{A}] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[\mathfrak{S}, [\mathfrak{S}, \mathfrak{A}]] + \frac{(i\lambda)^3}{3!}[\mathfrak{S}, [\mathfrak{S}, [\mathfrak{S}, \mathfrak{A}]]] + \ldots.$$

в. Показать, что если $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ — два оператора, таких, что $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}] = i$, то

$$e^{b\mathfrak{q}} e^{a\mathfrak{p} + b\mathfrak{q}} e^{-b\mathfrak{q}} = e^{-iab} e^{a\mathfrak{p} + b\mathfrak{q}}.$$

1.28. Если $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{f}_n$ — два множества ортогональных векторов (т. е. $\mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{f}_p = 0$), то проекционный оператор $\mathfrak{P}$ на множество $\mathbf{e}_n$ определяется равенствами $\mathfrak{P}\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n$, $\mathfrak{P}\mathbf{f}_p = 0$. Показать, что

а. $\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}$.

б. $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}$.

в. Если $\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}$ и выбрано множество таких векторов $\mathbf{e}_n$, что $\mathfrak{P}\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n$, то $\mathfrak{P}$ есть оператор проектирования на это множество.

г. Если $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ являются операторами проектирования на два различных множества векторов, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ был проекционным оператором, будет $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1 = 0$.

1.29. Четырехмерной системой координат, аналогичных сферическим, является система $(\tau, \alpha, \vartheta, \varphi)$, где

$$x_4 (= ict) = c\tau \operatorname{ch} \alpha, \quad x = ic\tau \operatorname{sh} \alpha \cos \vartheta,$$
$$y = ic\tau \operatorname{sh} \alpha \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = ic\tau \operatorname{sh} \alpha \sin \vartheta \sin \varphi,$$

а преобразованием Лоренца служит любое преобразование, оставляющее масштаб τ инвариантным. Вычислить коэффициенты Ламе и направля-

ющие косинусы и показать, что уравнение $\Box^2\psi = 0$ преобразуется к виду

$$\frac{1}{c^2\tau^2 \operatorname{sh}^2\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{sh}^2\alpha\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{c^2\tau^3}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau^3\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)\right]=0.$$

Показать, что решением этого уравнения является $\psi = (1/\tau^3)\operatorname{ch}\alpha$. Найти составляющие по x, y, z, t 4-вектора, являющегося четырехмерным градиентом ψ. Показать, что это есть истинный 4-вектор.

1.30. Частица с массой покоя m_0, двигаясь со скоростью v в направлении x, сталкивается с другой частицей, находившейся в состоянии покоя (относительно наблюдателя A) и имевшей ту же массу покоя. Частицы отскакивают друг от друга без изменения суммарной энергии-импульса, причем частица, наносившая удар, отклоняется от оси x на угол θ (относительно того же наблюдателя). Найти 4-векторы энергии-импульса для обеих частиц до и после столкновения относительно наблюдателя A (неподвижного до момента удара относительно частицы, получившей удар) и относительно наблюдателя B, неподвижного относительно центра инерции этой пары. Объяснить получающееся различие.

1.31. Для наблюдателя A, неподвижного относительно некоторой жидкости, эта жидкость находится под однородным изотропным давлением p. Вычислить ее плотность, плотность импульса и давление в жидкости для наблюдателя B, движущегося относительно жидкости со скоростью, равной 0,8 скорости света.

1.32. Найти направляющие косинусы преобразования спиновых векторов, соответствующего комбинации из преобразования Лоренца (вдоль оси x) и пространственного поворота.

1.33. Пусть достоверно известно, что спин электрона ориентирован в положительном направлении оси x для наблюдателя, находящегося в покое относительно этого электрона. С какими вероятностями для наблюдателя B, движущегося относительно этого электрона вдоль оси x со скоростью u, спин может быть расположен в положительном или отрицательном направлении оси x? Какова вероятность, что для наблюдателя A спин этого электрона будет расположен под углом 45° к положительному направлению оси x? А для наблюдателя B?

1.34. Пусть $\boldsymbol{\sigma}$ является трехкомпонентным векторно-спиновым оператором с компонентами σ_1, σ_2, σ_3.

а. Показать, что если $\mathbf{A}$ — вектор, то

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A})\,\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} + i\,(\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{A}),$$
$$\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A} - i\,(\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{A}),$$
$$\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\sigma} = 2i\boldsymbol{\sigma},$$
$$\boldsymbol{\sigma}\times(\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{A}) = i\,(\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{A}) - 2\mathbf{A}.$$

б. Показать, что если $\mathbf{a}$ — единичный вектор, а λ — постоянная, то

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\exp(i\lambda\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}) = -\exp(i\lambda\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})$$

и, следовательно,

$$\exp(i\lambda\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}) = \cos\lambda + i\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})\sin\lambda.$$