мы придерживались определенной общей формы уравнения, так как было вероятно, что уравнение должно быть релятивистски инвариантным и мы искали *простейшее* уравнение, которое привело бы нас к «разумным» (т. е. не чрезмерно сложным) выражениям для заряда, тока и других измеримых количеств. Результат мог показаться на первый взгляд не очень простым, но читателю достаточно немного дней исследования (или чтения старых номеров журналов, выпущенных в тот период когда выводилось уравнение Дирака), чтобы убедиться в том, что много легче составить более сложные уравнения, чем найти уравнение более простое.

Среди общих принципов, которые можно использовать для того, чтобы наметить направление поисков новых уравнений, одним из наиболее важных является требование инвариантности, в частности инвариантности относительно преобразования Лоренца. Но существуют и другие пути. Например, обычно сначала ищут линейные уравнения; часто применяют оператор Лапласа.

Когда уравнение составлено, необходимо исследовать все входящие в него величины, чтобы убедиться в том, достаточно ли они «соответствуют» различным физическим величинам. Обычно здесь встречается, например, плотность энергии; тогда соответствующая выбранная величина не должна обладать неприятным свойством становиться где-либо и когда-либо отрицательной. В качестве путеводной нити при получении уравнения Дирака мы выбрали выражения для плотности тока и плотности заряда, а также требование, чтобы эти выражения удовлетворяли уравнению неразрывности. Формальным аппаратом для получения этих вспомогательных величин является вариационный метод, который мы рассмотрим в ближайшей главе. Когда эти величины обоснованы, можно решить, являются ли они слишком сложными или нет.

Другой полезный способ испытать уже составленное уравнение состоит в том, чтобы найти другое физическое явление, к которому можно было бы применить то же самое уравнение. Свойство решений уравнения Клейна — Гордона могут быть изучены с помощью струны в резиновой оболочке (см. стр. 139), которая удовлетворяет тому же самому уравнению и которую легче представить себе, чем волновую функцию, так как движения струны достаточно хорошо известны. Аналогии этого вида встречаются в теоретической физике повсюду и приводят к своего рода перекрестному опылению, чрезвычайно полезному. Раннее изучение переменного электрического тока было значительно облегчено благодаря аналогии с более знакомым механическим осциллятором. Теперь, когда «каждый слыхал» про переменные токи, мы склонны и при изучении других видов колебательных и волновых движений (даже механического осциллятора) говорить об импедансах, емкостях и т. д.

В ближайшей главе мы подробно рассмотрим аналогию между поведением поля и вариационными принципами классической динамики, развитыми Гамильтоном. Мы найдем, что эта аналогия является полезным унифицирующим фактором при изучении всех уравнений, рассмотренных в этой главе (а также и других).

Задачи к главе 2

2.1. Мембрана натянута на одной стороне герметического сосуда, так что на нее действуют одновременно и ее натяжение T и избыток давления воздуха внутри сосуда.

Показать, что

$$p = -\frac{\rho c^2}{V}\int \Psi\, dA,$$

если Ψ обозначает отклонение мембраны от положения равновесия; ρ, V являются плотностью и объемом воздуха в сосуде в состоянии равновесия, а c — скорость звука в воздухе.

Показать, что уравнение движения мембраны имеет поэтому вид

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \nabla^2\Psi - \frac{\rho c^2}{VT}\int \Psi\, dA,$$

где $v^2 = T/\sigma$, T — натяжение, а σ — масса единицы площади мембраны. Какие допущения сделаны при выводе этого уравнения?

2.2. Пусть бесконечная упругая среда обладает пьезоэлектрическими свойствами относительно сжатия в направлении оси x и электрического поля в направлении оси y (при смещении s в направлении оси x электрическая напряженность E и вектор электрической индукции D направлены по оси y). Диэлектрическая поляризация P, также в направлении y, связана с D и E обычным уравнением $D = E + 4\pi P$, а с компонентой напряжения $X = T_{xx}$ и E — уравнением связи $P = \delta X + \chi E$, где χ — диэлектрическая восприимчивость, а δ — пьезоэлектрическая постоянная. С другой стороны, деформация $S_{xx} = u$ связана с напряжением и электрической напряженностью уравнением $u = \sigma X + \delta E$, где σ — величина, обратная модулю упругости. С помощью уравнений упругости и уравнений Максвелла составить два совокупных уравнения для движения волн сжатия вдоль оси x. Показать, что возможны две электроупругие волны; одна, движущаяся со скоростью несколько меньшей, чем волны безвихревого расширения (когда значение δ равно нулю), и другая — со скоростью несколько большей, чем скорость чистых электромагнитных волн.

2.3. Во время прохождения звуковой волны через вещество температура областей сжатия выше средней температуры, в то время как в областях расширения температура ниже средней. Эта разность температур вызывает поток тепла от одной части вещества к другой.

а. Показать, что уравнения потока тепла и распространения звука имеют вид

$$\partial T/dt = (\partial T_0/\partial \rho_0)_S\,(\partial \rho/\partial t) + (k/c_p\rho_0)\,\nabla^2 T,$$

$$\partial^2\rho/\partial t^2 = (\partial p_0/\partial \rho_0)_T\,\nabla^2\rho + (\partial p_0/\partial T_0)_\rho\,\nabla^2 T,$$

где индекс нуль употребляется для обозначения значений при равновесии.

б. Предположим, что T и ρ распространяются как плоские волны

$$T = A\exp[i(kx - \omega t)]; \quad \rho = B\exp[i(kx - \omega t)].$$

Показать, что k и ω связаны равенством

$$0 = i(k/c_p\rho_0\omega)\,[(\partial p_0/\partial \rho_0)_T k^2 - \omega^2] - \{\omega^2 - k^2\,[(\partial p_0/\partial \rho_0)_T + (\partial T_0/\partial \rho_0)_S\,(\partial p_0/\partial T_0)_\rho]\}.$$

Определить скорость распространения волн при $k/c_p\rho_0\omega \ll 1$, при $k/c_p\rho_0\omega \gg 1$. Рассмотреть распространение волн при $k/c_p\rho_0\omega \simeq 1$.

2.4. Проводящая жидкость (электропроводность σ, проницаемость μ) при движении вызывает магнитное поле, которое в свою очередь влияет на движение жидкости. Показать, что уравнения, связывающие скорость $\mathbf{v}$

и магнитную индукцию **B**, имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \left(\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\right)\nabla^2\mathbf{B},$$

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p - \left(\frac{c}{4\pi\mu}\right)[\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B})].$$

2.5. При растворении в соответствующем растворителе многие соли расщепляются на положительные и отрицательные ионы. Под влиянием электрического поля они диффундируют. Показать, что уравнение, описывающее движение положительных ионов, в предположении, что они движутся в вязкой среде с их установившейся скоростью, имеет вид

$$\partial c_1/\partial t = A_1^2\nabla^2 c_1 + B_1 Q \operatorname{div}(c_1 \operatorname{grad}\varphi),$$

где c_1 — концентрация, A_1^2 — постоянная диффузии, B_1 — отношение установившейся скорости к приложенной силе, Q — ионный заряд и φ — электростатический потенциал. Показать, что φ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\varphi = -4\pi(F/e)(c_1 - c_2),$$

где F — постоянная Фарадея.

2.6. Частицы микроскопических размеров находятся в состоянии беспорядочного движения, называемого броуновским движением, вызываемого молекулярными столкновениями. Пусть количество частиц, имеющих в момент t_0 положение между x_0 и x_0+dx_0 и скорости между v_0 и v_0+dv_0, равно $f(x_0, v_0, t_0)\,dx_0\,dv_0$. Пусть число, указывающее, какая часть этих частиц в момент τ находилась в области между x и $x+dx$ и имела скорости между v и $v+dv$, равно $w(\Delta x, \Delta v, \tau \mid x_0, v_0, t_0)\,dx\,dv$, где $\Delta x = x - x_0$; $\Delta v = v - v_0$, $\tau = t - t_0$.

а. Показать, что

$$f(x, v, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(\Delta x, \Delta v, \tau \mid x_0, v_0, t_0)\, f(x_0, v_0, t_0)\,dx_0\,dv_0.$$

б. Показать, что для малых τ, Δx и Δv

$$\frac{\partial f(x, v, t_0)}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f\overline{\Delta x}}{\tau}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f\overline{\Delta v}}{\tau}\right) + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{f\overline{\Delta x^2}}{\tau}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial v}\left(\frac{f\overline{\Delta x\Delta v}}{\tau}\right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{f\overline{\Delta v^2}}{\tau}\right)\right\},$$

где

$$\overline{\Delta x} = \overline{\Delta x}(x, v, t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta x\, w(\Delta x, \Delta v, \tau \mid x, v, t_0)\,dx_0\,dv_0$$

с соответствующими определениями других средних величин.

в. Если частицы движутся в вязкой жидкости и если молекулярные столкновения беспорядочны, то $\overline{\Delta v} = -\alpha v\tau$ и $\overline{\Delta v^2} = A\tau$, где α и A — постоянные. Показать, что в пределе при малых τ

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(vf) + \alpha\frac{\partial}{\partial v}(vf) + \frac{1}{2}A\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

г. Показать, что в условиях стационарного состояния

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, v)\,dx = F_0 e^{-(\ /A)v^2}.$$

Показать, что среднее значение n-й степени скорости, определенное равенством

$$\overline{v^n} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v^n f(x, v)\, dx\, dv,$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\overline{v^n}}{dt} = -n\alpha\overline{v^n} + \frac{1}{2} An(n-1)\overline{v^{n-2}}.$$

2.7. а. Пусть два оператора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}^*$ подчиняются следующему правилу перестановочности:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* - \mathfrak{a}^*\mathfrak{a} = 1.$$

Показать, что собственными значениями оператора $\mathfrak{a}^*\mathfrak{a}$ являются $0, 1, 2, 3, \ldots$. Если соответствующими состояниями будут $\mathbf{e}_n$, показать, что

$$\mathfrak{a}\mathbf{e}_n = \sqrt{n}\,\mathbf{e}_{n-1}; \quad \mathfrak{a}^*\mathbf{e}_n = \sqrt{n+1}\,\mathbf{e}_{n+1}.$$

б. Пусть два оператора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}^*$ подчиняются следующему правилу перестановочности:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{a}^*\mathfrak{a} = 1;$$

пусть также $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{a}^*\mathfrak{a}^* = 0$. Показать, что собственными значениями оператора $\mathfrak{a}^*\mathfrak{a}$ будут только 0 и 1. Если $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ будут соответствующими состояниями, показать, что

$$\mathfrak{a}^*\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1, \quad \mathfrak{a}^*\mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathfrak{a}\mathbf{e}_0 = 0, \quad \mathfrak{a}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_0.$$

2.8. Пусть электрон движется в кулоновом поле ядра, имеющего заряд Z.

а. Полагая

$$r = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2},$$

доказать, что соответствующий сопряженный импульс p_r равен

$$p_r = (1/r)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} - i\hbar).$$

б. Показать, что оператор Гамильтона для электрона может быть записан следующим образом:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2m}\mathfrak{p}_r^2 + \frac{\mathfrak{L}^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r},$$

где $\mathfrak{L}$ является оператором момента количества движения.

в. Определить значения энергии E_n электрона, имеющего данный момент количества движения l, пользуясь следующим методом. Найти оператор $\mathfrak{A}(r)$ такой, что

$$(\mathfrak{p}_r + i\mathfrak{A})(\mathfrak{p}_r - i\mathfrak{A})\,\mathbf{e}_{nl} = \left(2m\mathfrak{H}_l + \frac{m^2e^4Z^2}{\hbar^2 l^2}\right)\mathbf{e}_{nl},$$

$$(\mathfrak{p}_r - i\mathfrak{A})(\mathfrak{p}_r + i\mathfrak{A})\,\mathbf{e}_{nl} = \left(2m\mathfrak{H}_{l-1} + \frac{m^2e^4Z^2}{\hbar^2 l^2}\right)\mathbf{e}_{nl}.$$

Показать отсюда, что E_{nl} не зависит от l, что для данного E_{nl} существует максимум величины l, который мы обозначим через $n-1$. Выразить E_{nl} через n.

2.9. Показать, что при преобразовании

$$\mathbf{e} = \exp(-i\mathfrak{A}_0 t/\hbar)\,\mathbf{f}$$

уравнение Шредингера

$$(\mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1)\,\mathbf{e} = i\hbar\,(\partial\mathbf{e}/\partial t)$$

принимает вид

$$\mathfrak{H}_1(t)\,\mathbf{f} = i\hbar\,(\partial\mathbf{f}/\partial t),$$

где

$$\mathfrak{H}_1(t) = \exp(i\mathfrak{H}_0 t/\hbar)\,\mathfrak{H}_1 \exp(-i\mathfrak{H}_0 t/\hbar).$$

Показать, что

$$\mathbf{f} = \mathfrak{U}\mathbf{f}_0,$$

где

$$\mathfrak{U} = 1 + (1/i\hbar)\int_{-\infty}^{t} \mathfrak{H}_1(t')\,dt' + (1/i\hbar)^2 \int_{-\infty}^{t} \mathfrak{H}_1(t')\,dt' \int_{-\infty}^{t'} \mathfrak{H}_1(t'')\,dt'' + \ldots,$$

а $\mathbf{f}_0$ не зависит от времени. Связать $\mathbf{f}_0$ с решениями уравнения

$$\mathfrak{H}_0\mathbf{e}_0 = i\hbar\,(\partial\mathbf{e}_0/\partial t).$$

2.10. Разложить решение $\mathbf{e}$ волнового уравнения Дирака следующим образом:

$$\mathbf{e} = \mathbf{f} + \mathbf{g}; \quad \mathbf{f} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\alpha}_0)\,\mathbf{e}; \quad \mathbf{g} = \frac{1}{2}(1 - \boldsymbol{\alpha}_0)\,\mathbf{e}.$$

Показать, что

$$\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{g} = 0$$

и что

$$(E + eV + mc^2)\,\mathbf{f} = c\,[\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)]\mathbf{g},$$
$$(E + eV + mc^2)\,\mathbf{g} = -c\,[\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)]\,\mathbf{f}.$$

Показать для состояний с положительной энергией при малых $e\mathbf{A}$ и eV сравнительно с mc^2, что $\mathbf{g}^*\cdot\mathbf{g} \ll \mathbf{f}^*\cdot\mathbf{f}$.

2.11. Определить совокупность четырех состояний $\mathbf{e}_i$, которые удовлетворяют уравнению Дирака для неподвижной частицы

$$(\boldsymbol{\alpha}_0 mc^2)\,\mathbf{e}_i = E_0\mathbf{e}_i.$$

Показать, что четыре решения уравнений Дирака для частицы с импульсом $\mathbf{p}$ имеют вид

$$[c\,(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}) + \boldsymbol{\alpha}_0\,(mc^2 + |E|)]\mathbf{e}_i,$$

где

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4.$$

Стандартные формы некоторых уравнений с частными производными теоретической физики

Номера уравнений

Уравнение Лапласа $\nabla^2\psi = 0$. (1.1.4), (2.3.6)

Векторная форма $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$; $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$.

Уравнение Пуассона $\nabla^2\psi = -4\pi\rho$. (1.1.5), (2.1.2) (2.5.2)

Векторная форма $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 4\pi\mathbf{J}$; $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$. (2.5.7)