

### Задачи к главе 3

**3.1.** а. Показать, что может быть определена производящая функция  $S'(q, P, t)$  канонического преобразования следующим образом:

$$S' = S(q, Q, t) + PQ$$

и

$$p = \partial S'/\partial q, \quad Q = \partial S/\partial P, \quad K = H + (\partial S'/\partial t).$$

б. Показать, что  $S' = qP$  определяет тождественное преобразование.

в. Показать, что если мы имеем бесконечно малое преобразование

$$S' = qP + \varepsilon T(q, P) = qp + \varepsilon T(q, p), \quad \varepsilon \ll 1,$$

то

$$P - p = -\varepsilon(\partial T/\partial q), \quad Q - q = \varepsilon(\partial T/\partial P).$$

г. Показать, что  $\Delta f = f(P, Q) - f(p, q)$  выражается в виде

$$\Delta f = \varepsilon(f, T)$$

[где  $(f, T)$  — скобки Пуассона] и отсюда вывести, что  $T$  является константой движения, если соответствующее преобразование оставляет инвариантной функцию Гамильтона.

д. Показать, что для бесконечно малого поворота вокруг оси  $z$   $T = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z = \mathbf{M}_z$ .

**3.2.** Показать, что уравнения Лагранжа не изменятся, если к функции Лагранжа прибавить какую-либо полную производную по времени. Показать отсюда, что для нерелятивистской частицы, движущейся в электромагнитном поле, функцию Лагранжа можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - e\phi - (e/c)[(\partial \mathbf{A}/\partial t) + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{A})] \cdot \mathbf{r},$$

где  $\nabla \mathbf{A}$  — аффинор (градиент воздействует только на  $\mathbf{A}$ ). Показать, что соответствующей функцией Гамильтона является

$$\mathcal{H} = \left( \frac{1}{2m} \right) |\mathbf{p} + (e/c)(\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathbf{r}|^2 + (e/c)\mathbf{r} \cdot (\partial \mathbf{A}/\partial t) + e\phi \quad (\text{Ричардс}).$$

**3.3.** Показать, что в обобщенных ортогональных координатах  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  уравнение Лагранжа — Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \left( \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \right) \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[ h_1 h_2 h_3 \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial \xi_i)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial t)} \right] = 0.$$

Взяв в качестве плотности функции Лагранжа  $(\nabla \psi)^2$ , получить формулу

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[ \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \right].$$

**3.4.** Показать, что тензор третьего ранга

$$M_{\mu\nu\lambda} = T_{\mu\nu}x_\lambda - T_{\mu\lambda}x_\nu$$

( $T_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}$ , см. стр. 303) удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\sum_\mu \frac{\partial M_{\mu\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0,$$

только если тензор  $T_{\mu\nu}$  симметричен. Показать, что  $M_{ijk}$  есть плотность момента количества движения и что, интегрируя уравнение неразрывности, мы получим закон сохранения момента количества движения.

3.5. а. Показать, что для бесконечно малого лоренцова преобразования

$$x'_\mu = x_\mu + \sum_\sigma \omega_{\mu\sigma} x_\sigma$$

выполняются равенства  $\omega_{\mu\sigma} = -\omega_{\sigma\mu}$ .

б. Опираясь на инвариантность плотности функции Лагранжа относительно лоренцовых преобразований, показать, что в случае электромагнитного поля, когда

$$L = -\frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} \left[ \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) - \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right) \right]^2,$$

мы имеем

$$\sum_{\nu\sigma} \omega_{\nu\sigma} \Gamma_{\nu\sigma} = 0,$$

где

$$\Gamma_{\nu\sigma} = -T_{\nu\sigma} + \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial A_\nu / \partial x_\mu)} A_\sigma \right].$$

Показать также, что

$$\Gamma_{\nu\sigma} = \Gamma_{\sigma\nu}.$$

3.6. Если  $T_{\mu\nu}$  не симметричен, то всегда можно найти тензор  $S_{\mu\nu}$ , симметричный и обладающий всеми физическими свойствами  $T_{\mu\nu}$ .

а. Показать, что  $S_{\mu\nu}$  должен удовлетворять условиям

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}; \quad \sum_\mu (\partial / \partial x_\mu) S_{\mu\nu} = 0; \quad \int S_{4\nu} dV = \int T_{4\nu} dV.$$

б. Показать, что  $S_{\mu\nu}$  должен иметь вид

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \sum_\lambda \left( \frac{\partial G_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \right),$$

где

$$G_{\lambda\mu\nu} = -G_{\mu\lambda\nu} \quad \text{и} \quad T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} = \sum_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} [G_{\lambda\mu\nu} - G_{\lambda\nu\mu}].$$

в. Воспользовавшись результатом задачи 3.5, б, показать, что

$$G_{\lambda\mu\nu} - G_{\lambda\nu\mu} = H_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial (\partial A_\mu / \partial x_\lambda)} A_\nu - \frac{\partial L}{\partial (\partial A_\nu / \partial x_\lambda)} A_\mu.$$

Вывести отсюда соотношения

$$G_{\nu\mu\lambda} = \frac{1}{2} (H_{\nu\mu\lambda} + H_{\mu\lambda\nu} + H_{\lambda\nu\mu}).$$

г. Вычислить  $S_{\mu\nu}$  для электромагнитного поля.

3.7. Показать, что однородное интегральное уравнение

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(x | x_0) \psi(x_0) dx_0$$

вытекает из вариационного уравнения

$$\delta \int_a^b \phi(x) \left[ \phi(x) - \lambda \int_a^b K(x | x_0) \psi(x_0) dx_0 \right] dx = 0,$$

если  $K(x|x_0) = K(x_0|x)$ . Показать, что при  $K(x|x_0) \neq K(x_0|x)$

$$\delta \int_a^b \tilde{\psi}(x) \left[ \psi(x) - \lambda \int_a^b K(x|x_0) \psi(x_0) dx_0 \right] dx = 0,$$

где  $\tilde{\psi}(x)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\tilde{\psi}(x) = \lambda \int_a^b K(x_0|x) \tilde{\psi}(x_0) dx_0.$$

**3.8.** Уравнением движения мембраны, натянутой на отверстие в герметическом сосуде, служит

$$(1/c^2)(\partial^2 \psi / \partial t^2) = \nabla^2 \psi - (\rho c^2 / VT) \int \phi dS$$

(см. задачу 2.1). Найти соответствующие плотности функций Лагранжа и Гамильтона.

**3.9.** Уравнение затухающих колебаний струны имеет вид

$$(\partial^2 \psi / \partial t^2) + 2k(\partial \psi / \partial t) = c^2 (\partial^2 \psi / \partial x^2).$$

Показать, что соответствующей плотностью функции Лагранжа будет

$$L = \{(\partial \tilde{\psi} / \partial t)(\partial \psi / \partial t) + k[\psi(\partial \tilde{\psi} / \partial t) - \tilde{\psi}(\partial \psi / \partial t)] - c^2(\partial \tilde{\psi} / \partial x)(\partial \psi / \partial x)\}$$

и найти уравнение, которому должна удовлетворять  $\tilde{\psi}$ . Найти канонические импульсы, соответствующие  $\psi$  и  $\tilde{\psi}$ , и плотность функции Гамильтона. Выяснить физический смысл полученных результатов.

**3.10.** Стационарному уравнению переноса при анизотропном рассеянии на очень тяжелых рассеивающих частицах (см. § 2.4 и 12.2) можно привести вид

$$\cos \theta (\partial f / \partial \xi) = -f(\xi, \theta) + (x/4\pi) \int w(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) f(\xi, \theta_0) d\Omega_0,$$

где  $x$  — постоянная, единичные векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}_0$  имеют направления, определяемые соответственно сферическими углами  $\theta, \varphi$  и  $\theta_0, \varphi_0$ , а  $d\Omega_0$  — элемент телесного угла, охватывающий  $\mathbf{a}_0$ . Показать, что это уравнение может быть получено из вариационного уравнения

$$\delta \int_0^{\xi_0} d\xi \int d\Omega \tilde{f}(\xi, \theta) \left[ \cos \theta (\partial f / \partial \xi) + f - (x/4\pi) \int w(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) f(\xi, \theta_0) d\Omega_0 \right] = 0.$$

Показать, что  $\tilde{f}$  удовлетворяет уравнению

$$-\cos \theta (\partial \tilde{f} / \partial \xi) = -\tilde{f}(\xi, \theta) + (x/4\pi) \int w(\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}) \tilde{f}(\xi, \theta_0) d\Omega_0.$$

Итолковать эти результаты.

**3.11.** Диффузия заряженных частиц под действием внешнего поля  $\mathbf{E}$  описывается уравнением

$$\partial c / \partial t = a^2 \nabla^2 c + b(\nabla c \cdot \mathbf{E})$$

(предположения, при которых это уравнение выводится, высказаны в задаче 2.5). Показать, что соответствующая вариационная задача

ставится так:

$$\delta \iiint dV dt \tilde{c} [(\partial c / \partial t) - a^2 \nabla^2 c - b (\nabla c \cdot \mathbf{E})] = 0.$$

Найти уравнение для  $\tilde{c}$  и истолковать его.

**3.12.** В теории дейтрана встречается пара интегральных уравнений, которые можно записать в виде

$$u(r) = \lambda \int_0^\infty G_0(r | r_0) [f(r_0)u + g(r_0)w] dr_0,$$

$$w(r) = \lambda \int_0^\infty G_2(r | r_0) [g(r_0)u + h(r_0)w] dr_0,$$

где функции  $G_0$  и  $G_2$  симметричны. Показать, что соответствующий вариационный интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [u^2 f + 2uwg + w^2 h] dr - \\ & - \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \{[f(r)u(r) + g(r)w(r)]G_0(r | r_0)[f(r_0)u(r_0) + g(r_0)w(r_0)] + \\ & + [g(r)u(r) + h(r)w(r)]G_2(r | r_0)[g(r_0)u(r_0) + h(r_0)w(r_0)]\} dr dr_0. \end{aligned}$$

**3.13.** Взаимосвязь между механическим движением и распространением тепла в звуковой волне описывается уравнениями

$$\partial T / \partial t = \alpha (\partial \rho / \partial t) + \beta \nabla^2 T, \quad \partial^2 \rho / \partial t^2 = \gamma \nabla^2 \rho + \varepsilon \nabla^2 T,$$

где постоянные  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\varepsilon$  заданы в задаче 2.3. Показать, что эти уравнения могут быть получены при помощи вариационного интеграла

$$\iiint dV dt \left\{ \varepsilon \nabla^2 \tilde{T} \left[ \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \rho}{\partial t} - \beta \nabla^2 T \right] - \alpha \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \gamma \nabla^2 \rho - \varepsilon \nabla^2 T \right] \right\}.$$

Показать, что при должном подборе начальных условий  $\tilde{T}$  и  $\tilde{\rho}$  удовлетворяют аналогичным уравнениям с обращенным временем.

**3.14.** В задаче 2.2 описаны свойства бесконечной пьезоэлектрической среды, связывающие электрическое поле  $E$ , поляризацию  $P$ , напряжение и деформацию. Если оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  направлены по главным осям кристалла, то соотношения между  $E$  и  $P$ , а также между аффинором напряжений  $\mathfrak{S}$  и аффинором деформаций  $\mathfrak{T}$  выражаются тремя системами из трех уравнений:

$$T_{xx} = \lambda_x^x S_{xx} + \lambda_x^y S_{yy} + \lambda_x^z S_{zz} \quad \text{и т. д.,}$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \lambda_{xy}^x S_{xy} + \sigma_{xy} P_z \quad \text{и т. д.,}$$

$$E_z = \kappa_z P_z + \sigma_{xy} S_{xy} \quad \text{и т. д.,}$$

где  $\lambda$  — элементы тетрадика модуля упругости, приведенного к главным осям,  $\kappa$  — обратные величины диэлектрических восприимчивостей вдоль координатных осей,  $\sigma$  — элементы некоторого недиагонального «триадика» (преобразующего вектор в аффинор и наоборот), который связывает деформации и поляризацию. Комбинируя эти уравнения с уравнениями Максвелла

велла и с уравнениями упругих колебаний для частного случая поперечной волны, движущейся вдоль оси  $z$  при смещениях, направленных вдоль оси  $y$ , показать, что в результате получится пара связанных друг с другом волновых уравнений. Они будут соответствовать двум возможным электрическим волнам сдвига, одна из которых распространяется со скоростью, несколько меньшей, чем скорость чистых волн сдвига (при равных нулю  $\epsilon$ ), а другая со скоростью, несколько большей скорости света в рассматриваемой среде. Вычислить плотность импульса и аффинор напряжения-энергии для плоских волн сдвига, движущихся вдоль оси  $z$  (при  $E$ , направленном вдоль оси  $y$ ). В каком отношении находятся энергии, несомые медленными волнами, соответственно электрического и упругого полей? Тот же вопрос, относящийся к быстрой волне.

### Сводка результатов главы 3

Плотность функции Лагранжа  $L$  есть функция переменных поля  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и их производных  $\psi_{is} = \partial\psi_i/\partial\xi_s$  ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — пространственные координаты,  $\xi_4 = t$ ). Иногда  $L$  зависит также от  $\xi$  явно (например, через посредство потенциалов или плотностей заряда и тока). Полный лагранжиев интеграл

$$\mathcal{L} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_4}^{b_4} L d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \quad (3.1.1)$$

является инвариантом. Требование, состоящее в том, чтобы  $\mathcal{L}$  принимал максимальное или минимальное значение, то есть чтобы первая вариация интеграла  $\mathcal{L}$  обращалась в нуль, приводит к уравнениям Лагранжа — Эйлера

$$\sum_{s=1}^4 \frac{\partial}{\partial \xi_s} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{is}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi_i} = 0, \quad (3.4.1)$$

служащих для отыскания  $\psi_i$ . Если  $L$  — квадратичная функция от  $\psi_{i4}$ , то плотность канонического импульса

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{i4}}$$

представляет собой линейную функцию от  $\psi_{i4}$ . Если  $L$  — линейная функция от  $\psi_{i4}$ , то  $p_i$  и функция Гамильтона от  $\psi_{i4}$  не зависят. Большинство других важных физических свойств поля описывается тензором напряжения-энергии  $\mathfrak{W}$ , компоненты которого равны

$$W_{ms} = \sum_{i=1}^n \psi_{im} \frac{\partial L}{\partial \psi_{is}} - \delta_{ms} L.$$

Например, его 4,4-компоненты

$$W_{44} = H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{\psi}_{i4} - L$$

представляет собой плотность энергии. Если  $p_i$  зависит от  $\psi_{i4}$ , то из  $W_{44}$  можно исключить  $\psi_{i4}$  и получить плотность функции Гамильтона  $H$  — функцию от  $p_i$ ,  $\psi_i$  и их пространственных производных. В этом