В тех случаях, когда нет такого значения $\operatorname{Re} s$, при котором интеграл (4.8.34) сходится при всех x, приходится разрезать область определения $f(x)$ и брать две различные функции, обладающие каждая своим множителем, которым обеспечивается сходимость, так же, как это делалось с преобразованием Фурье [см. формулу (4.8.18) и следующие за ней абзацы]. Это построение, вполне аналогичное приведенному выше, вынесено в задачи.

Обратимся, наконец, к теореме о свертке, относящейся к преобразованию Меллина. Взяв формулу (4.8.25) и осуществив подстановки

$$e^y = \eta, \qquad f(y) = v(\eta),$$
$$e^x = \xi, \qquad h(x-y) = w(e^{x-y}) = w(\xi/\eta),$$

приходим к формуле

$$\int_0^\infty v(\eta)\, w\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0'-i\infty}^{\sigma_0'+i\infty} V_m(s)\, W_m(s)\,\frac{ds}{\xi^s}, \tag{4.8.39}$$

которой можно придать еще такой вид

$$\int_0^\infty v(\xi)\, w(\xi)\,\xi^{s-1}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_0'-i\infty}^{\tau_0'+i\infty} V_m(\rho)\, W_m(s-\rho)\, d\rho. \tag{4.8.40}$$

В качестве примера применения формулы (4.8.40) вычислим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0'-i\infty}^{\sigma_0'+i\infty} \Gamma(a+\rho)\,\Gamma(s-\rho)\, d\rho \qquad (-a < \sigma_0' < s).$$

Заметив, что $f(x) = e^{-x}x^a$, если $F_m(s) = \Gamma(a+s)$, воспользуемся формулой (4.8.40):

$$I = \int_0^\infty e^{-x}\, x^a\, e^{-x}\, x^{s-1}\, dx = \int_0^\infty e^{-2x}\, x^{a+s-1}\, dx = \frac{\Gamma(a+s)}{2^{a+s}}.$$

Положим $s = a$ в I и вычислим интеграл вдоль мнимой оси. Мы получим следующее интересное соотношение между значениями $\Gamma(z)$ при действительных $z = a$ и комплексных $z = a + i\tau$:

$$\int_0^\infty |\Gamma(a+i\tau)|^2\, d\tau = \frac{\pi\Gamma(2a)}{2^{2a}}.$$

Изучив поведение функций комплексного переменного, мы перейдем в следующей главе к исследованию их связи с дифференциальными уравнениями.

Задачи к главе 4

4.1. Доказать, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right) \qquad (a > b > 0).$$

4.2. Доказать, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{q\cos\theta}}{1-2p\sin\theta+p^2}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(q\sin\theta) \begin{matrix}-\\ +\end{matrix} p\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(q\sin\theta+\theta)\right\}d\theta = 2\pi\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(pq).$$

4.3. Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b}-\frac{e^{-a}}{a}\right) \qquad (\operatorname{Re} a > \operatorname{Re} b > 0).$$

Каково значение этого интеграла при $a=b$, $\operatorname{Re} a > 0$?

4.4. Доказать, что

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\,d\theta = \frac{2\pi}{n!}.$$

4.5. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2a-1}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi\operatorname{cosec}\pi a \qquad (0<a<1).$$

4.6. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)(1-2x\cos\theta+x^2)}.$$

4.7. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi(1-a)}{4\cos(\pi a/2)} \qquad (-1<a<3).$$

4.8. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 z}{1+z^2}\,dz = \frac{\pi^3}{8}.$$

4.9. Рассмотреть действительный интеграл

$$\int_a^b (b-x)^{\mu}(x-a)^{n-\mu-1}F(x)\,dx,$$

где a и b — действительные числа, $b>a$, $\mu>-1$, n — целое число, большее μ, и $z^nF(z)\to 0$ при $|z|\to\infty$. Функция $F(z)$ предполагается аналитической во всей плоскости z, за исключением конечного числа полюсов c_k, ни один из которых не лежит на действительной оси левее точки $z=b$. Показать, что заданный интеграл равен

$$\frac{1}{2i\sin\mu\pi}\int_C (z-a)^{n-\mu-1}(z-b)^{\mu}F(z)\,dz,$$

где контур C идет от точки $b+\varepsilon$ к $-\infty$ непосредственно под действительной осью, затем вдоль окружности бесконечно большого радиуса против часовой стрелки и от $-\infty$ возвращается к точке $b+\varepsilon$, идя непосредственно над действительной осью. Вывести отсюда, что этот интеграл равен

$$\pi\operatorname{cosec}\mu\pi\sum(\operatorname{Res}(z-b)^{\mu}(z-a)^{n-\mu-1}F(z) \text{ в } c_k).$$

Показать, что при $0 < \mu < 1$, $k > 1$

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\mu} \frac{dx}{(x-k)^2} = 2\pi\mu \operatorname{cosec} \mu\pi\, (k-1)^{\mu-1} (k+1)^{-\mu-1}.$$

4.10. Доказать, что

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{-a}\, dx}{1+2x\cos\theta + x^2} = \frac{\pi}{\sin \pi a} \frac{\sin a\theta}{\sin\theta} \qquad (-1 < a < 1,\ -\pi < \theta < \pi).$$

4.11. Воспользовавшись формулами (4.2.19), показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx \sin k'x}{x^2 - \xi^2}\, dx = \frac{\pi}{\xi} \cdot \begin{cases} \sin k\xi \cos k'\xi & (k \leqslant k'), \\ \cos k\xi \sin k'\xi & (k \geqslant k'). \end{cases}$$

4.12. Пользуясь формулами (4.2.19), показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px - \cos qx}{x^2}\, dx = \pi (p - q).$$

4.13. Пользуясь формулами (4.2.19), показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(x^2 - ab)\sin x + (a+b)\, x \cos x}{x\,(x^2+a^2)\,(x^2+b^2)}\, dx = \frac{\pi}{ab}.$$

4.14. Показать, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\beta}^{\infty - i\beta} \ln \left[\frac{z^2+1}{z^2}\left(1 - \frac{1}{z}\operatorname{arctg} z\right)\right] \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2}\ln 3.$$

4.15. Рассмотреть интеграл

$$I(z) = \int_{0}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}\, dt$$

при действительном z, где путь интегрирования идет вдоль действительной оси, но обходит точку z по малой полуокружности против часовой стрелки. Показать, что

$$I(z) = \pi i f(z) + \mathcal{P} \int_{0}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}\, dt,$$

где $\mathcal{P}$ — главное значение этого несобственного интеграла.

4.16. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в полосе $|\operatorname{Im} z| < \alpha$. Показать, что

$$f(z) = f_-(z) - f_+(z),$$

где

$$f_- = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\beta}^{\infty + i\beta} \frac{f(t)}{t-z}\, dt, \qquad f_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\beta}^{\infty - i\beta} \frac{f(t)}{t-z}\, dt,$$

причем $\beta < \alpha$. Показать, что функции f_- и f_+ аналитичны соответственно при $\operatorname{Im} z < \beta$ и $\operatorname{Im} z > -\beta$.

4.17. Функция $\psi(x)$ определена равенством

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma}\frac{(1+z^2)\,e^{-izx}}{(z^2-z_0^2)\,(z+i\alpha)}\,dz-\int\limits_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau}\frac{(1+z^2)\,e^{-izx}}{(z^2-z_0^2)\,(z-i\alpha)}\,dz\right\},$$

где $\tau<1$ и $\sigma>-1$. Показать, что

$$\psi(x)=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+z_0^2}\,e^{\alpha|x|}+\frac{z_0^2+1}{z_0\sqrt{\alpha^2+z_0^2}}\cos\left(z_0\,|x|-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{z_0}\right).$$

4.18. Показать, что $z=1$ является особой точкой функции, представляемой (внутри круга сходимости) рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(-z)^n}{\Gamma(1+n)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}.$$

4.19. Обобщенная гипергеометрическая функция $F(a_0,a_1,\ldots,a_s|c_1,c_2,\ldots,c_s|\,z)$ определяется посредством степенного ряда

$$1+\frac{a_0a_1\ldots a_s}{c_1\ldots c_s}\,z+\frac{a_0\,(a_0+1)\,a_1\,(a_1+1)\ldots a_s\,(a_s+1)}{c_1\,(c_1+1)\ldots c_s\,(c_s+1)}\,\frac{z^2}{2!}+\ldots.$$

Показать, что $z=1$ является особой точкой функции F, и если $a_i<c_i$, то

$$F\simeq\frac{\Gamma(p)\prod\limits_{n=1}^{s}\Gamma(c_n)}{(1-z)^p\prod\limits_{m=0}^{s}\Gamma(a_m)}\quad\text{при}\quad z\to1,$$

где $p=a_0+\sum\limits_{n=1}^{s}(a_n-c_n)$.

4.20. Доказать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^4+a^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}\,a^3}\,\frac{\operatorname{sh}(\pi a\sqrt{2})+\sin(\pi a\sqrt{2})}{\operatorname{ch}(\pi a\sqrt{2})-\cos(\pi a\sqrt{2})}.$$

4.21. Доказать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n^2+a^2)\,(n^2+b^2)}=\frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{\operatorname{cth}\pi a}{a}-\frac{\operatorname{cth}\pi b}{b}\right).$$

4.22. Показать, что четная целая функция может быть представлена в виде

$$f(z)=f(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{a_n^2}\right),$$

где $f(a_n)=0$ и в произведение из каждой пары нулей $a_n,-a_n$ входит только один. Пусть $f(z)$ подчиняется условиям, сформулированным при выводе формулы (4.3.8). Показать тогда, что если $f(0)=1$, то

$$f''(0)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2},\quad f^{\mathrm{IV}}(0)=3\,[f''(0)]^2-12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^4}.$$

Воспользовавшись представлением (4.3.9) функции $\sin z/z$, показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

4.23. Доказать, что

$$e^{az} - e^{bz} = (a-b)\, z e^{(a+b)z/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2\pi^2}\right).$$

4.24. Доказать, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m^2+a^2)(n^2+a^2)} = \frac{\pi^2}{ab} \operatorname{cth} a\pi \cdot \operatorname{cth} b\pi.$$

4.25. Пользуясь обобщенным преобразованием Эйлера, показать, что

$$F(a_0, a_1, \ldots \mid b_1, b_2, \ldots \mid z) =$$

$$= F(a_1, \ldots \mid b_2, \ldots \mid z) + z \frac{b_1 - a_0}{b_1} \cdot \frac{a_1 a_2 \ldots}{b_2 b_3 \ldots} F(a_1+1, a_2+1, \ldots \mid b_2+1, \ldots \mid z) +$$

$$+ \frac{z^2}{2!} \frac{(b_1-a_0)(b_1-a_0+1)\, a_1(a_1+1)\ldots}{b_1(b_1+1)\, b_2(b_2+1)\ldots} F(a_1+2, a_2+2, \ldots \mid b_2+2, \ldots \mid z) + \ldots .$$

4.26. Вычисляя интеграл функции $e^{-hz} z^{n-1}$ вдоль границы сектора, заключенного между действительной осью, прямой $\varphi = \alpha$ $(z = re^{i\varphi})$, дугой окружности малого радиуса $r = \varepsilon$ и дугой окружности большого радиуса $r = R$, доказать, что

$$\int^{\infty} x^{a-1} e^{-px\cos\theta} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (px \sin\theta)\, dx = p^{-m} \Gamma(a) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} a\theta,$$

где $\theta < \pi/2$, a и p — действительны и положительны.

4.27. Вычисляя интеграл функции $z^{a-1} e^z$ вдоль пути, идущего от точки, примыкающей к началу справа $(z = \varepsilon)$, к точке $-\infty$ непосредственно под действительной осью, далее соединяющего последовательно точки $-\infty - i\infty$, $b - i\infty$, $b + i\infty$, $-\infty + i\infty$, $-\infty$ и затем идущего к точке $z = \varepsilon$ непосредственно над действительной осью, показать, что при $0 < a < 1$ и $b > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy} (b + iy)^{a-1}\, dy = 2e^{-b} \sin a\pi\, \Gamma(a)$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\pi/2} \cos[\operatorname{tg}\theta - (1-a)\theta] \sec^{a+1}\theta\, d\theta = \frac{1}{e} \sin a\pi\, \Gamma(a).$$

4.28. Показать, что интеграл

$$\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1}\, dx\, dy\, dz,$$

взятый по октанту объема, ограниченного поверхностью $(x/a)^p+(y/b)^q+(z/c)^r=1$, равен

$$\frac{a^l b^m c^n}{pqr}\,\frac{\Gamma(l/p)\,\Gamma(m/q)\,\Gamma(n/r)}{\Gamma[(l/p)+(m/q)+(n/r)+1]}.$$

4.29. Доказать, что

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{(n-1)/2}\,n^{1/2-nz}\,\Gamma(nz).$$

4.30. Выразить интеграл

$$\int\limits_C e^{-t^2}\,t^{n-\lambda-1}\,dt,$$

входящий в формулу (4.5.26), через гамма-функцию.

4.31. Показать, что

$$1-\frac{\cos a\pi}{\operatorname{ch} z\pi}=\frac{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}-iz\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+iz\right)}{\Gamma\left(\frac{a+iz}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a-iz}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{a+iz}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{a-iz}{2}\right)}.$$

4.32. Показать, что

$$|\Gamma(iy)|^2=\frac{\pi}{y\operatorname{sh}\pi y}.$$

4.33. Показать, что

$$|\Gamma(z+1)|^2\simeq 2\pi r^{2x+1}\,e^{-2(y\varphi+x)}\left(1+\frac{x}{6r^2}+\frac{1}{72r^2}+\ldots\right),$$

где $z=x+iy$, $r^2=x^2+y^2$, $\varphi=\operatorname{arctg}(y/x)$.

Показать, что $\arg\Gamma(z)$ асимптотически выражается в виде

$$\frac{1}{2}\,y\ln(x^2+y^2)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y\left(1+\frac{1}{12(x^2+y^2)}-\frac{3x^2-y^2}{360(x^2+y^2)^3}+\ldots\right).$$

4.34. Рассмотреть интеграл

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{e^{zt-\lambda\sqrt{z}}}{z(\varkappa+\sqrt{z})}\,dz,$$

причем линией ветвления служит отрицательная действительная полуось, а контур C идет из $-\infty$ под линией ветвления, обходит точку ветвления (начало координат) в положительном направлении и идет к $-\infty$ над линией ветвления. Разбив этот интеграл на три интеграла, из которых два берутся от $-\infty$ до $-\varepsilon_0$, где ε_0 мало, а третий вдоль окружности радиуса ε_0 с центром в нуле, показать, что при $\varepsilon_0\to 0$ последний интеграл имеет предел $1/\varkappa$, а сумма остальных может быть выражена в виде

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\varkappa^{n+1}}\frac{d^n}{d\lambda^n}\int\limits_0^{\infty}e^{-ut}\sin\left(\lambda\sqrt{u}\right)\frac{du}{u}.$$

Показать, что

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-ut}\sin\left(\lambda\sqrt{u}\right)\frac{du}{u}=\sqrt{\pi}\int\limits_0^{\lambda/\sqrt{t}}e^{-\xi^2}\,d\xi$$

и, следовательно, что

$$f(t)=\frac{1}{x}-\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1}}\frac{d^n}{d\lambda^n}\int_0^{\lambda/\sqrt{t}}e^{-\xi^2}\,d\xi.$$

4.35. Рассмотреть интеграл

$$g(z)=\int_{-i\infty}^{i\infty}G(t)\,\Gamma(-t)\,(-z)^t\,dt,$$

где функция $G(t)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}t>0$, а $G(t)\,z^t/\Gamma(t+1)$ стремится к нулю с возрастанием $\operatorname{Re}t$. Интегрирование производится вдоль мнимой оси, но с обходом нуля вдоль малой полуокружности по часовой стрелке. Замкнув этот контур большой полуокружностью в полуплоскости $\operatorname{Re}t>0$, показать, что

$$g(z)=2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}G(n)\frac{z^n}{n!}.$$

Вывести отсюда выражение

$$F(a,\,b\,|\,c\,|\,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!}=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{2\pi i\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(a+t)\,\Gamma(b+t)}{\Gamma(c+t)}\,\Gamma(-t)\,(-z)^t\,dt$$

для $\operatorname{Re}(a+b-c)<0$ $(a,\,b\neq 0,-1,-2,\ldots)$. Показать, что исходный контур может также быть замкнут полуокружностью в левой полуплоскости. Вывести отсюда, что

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,\,b\,|\,c\,|\,z)=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a-b)}{\Gamma(a-c)}(-z)^{-a}F\left(a,\,1-c+a\,|\,1-b+a\,|\,\frac{1}{z}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b-c)}(-z)^{-b}F\left(b,\,1-c+b\,|\,1-a+b\,|\,\frac{1}{z}\right)$$

[см. формулу (5.2.49)].

4.36. Доказать, что

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\theta)^{a-2}\,e^{it\theta}\,d\theta=\frac{\pi\Gamma(a-1)}{2^{a-2}\Gamma\left(\frac{a+t}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a-t}{2}\right)},$$

где $a>1$. Для этого вычислить интеграл

$$\int_C\left(z+\frac{1}{z}\right)^{a-2}z^{t-1}\,dz,$$

где C идет от $+i$ к $-i$ вдоль мнимой оси и возвращается к $+i$ вдоль правой половины единичной окружности.

4.37. С помощью метода перевала показать, что для функции $H_\nu^{(1)}$, определенной равенством

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{e^{-i\nu\pi/}}{\pi}\int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty}e^{i(z\cos\varphi+\nu\varphi)}\,d\varphi,$$

справедливо асимптотическое равенство

$$H_\nu^{(1)}(\nu \sec \alpha) \simeq \frac{e^{i[\nu(\operatorname{tg}\alpha-\alpha)+\pi/4]}}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\pi \operatorname{tg}\alpha}}\left(1-i\frac{1+\frac{5}{3}\operatorname{ctg}^2\alpha}{8\operatorname{tg}\alpha}+\ldots\right).$$

4.38. Показать, что в интеграле

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3-qt)}\,dt,$$

вычисленном вдоль действительной оси, можно взять новый путь интегрирования, составив его из полупрямой $\varphi=5\pi/6$ $(t=re^{i\varphi})$, идущей от $-\infty$ к 0, и полупрямой $\varphi=\pi/6$, идущей от 0 до ∞. Отсюда будет следовать, что

$$I=\frac{2}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left(\frac{2}{3}m\pi+\frac{\pi}{6}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right)\frac{(1-q)^m}{m!}.$$

Почему q должно быть при этом действительным?

4.39. Метод перевала может быть несколько модифицирован при малом $|f''(t_0)|$. В интеграле (4.6.6)

$$J=\int_C e^{zf(t)}\,dt$$

разложим $f(t)$ по степеням $t-t_0$, причем $f'(t_0)=0$. Показать, что при малом $|f''|$ целесообразно преобразование

$$t-t_0=\alpha+\beta s,$$

где

$$\alpha=-\frac{f''(t_0)}{f'''(t_0)},\quad \beta=\left(\frac{6i}{zf'''(t_0)}\right)^{1/3}.$$

Показать, что

$$J\simeq\exp\left\{zf+\frac{1}{3}\frac{z[f''(t_0)]^3}{[f'''(t_0)]^2}\right\}\int_C e^{i(s^3-qs)}\,ds,$$

где

$$q=\frac{z}{2}\frac{(f'')^2}{f'''}\left(\frac{6i}{zf'''}\right)^{1/3}.$$

4.40. Показать, что при $p\to\infty$

$$H_p^{(1)}(p)=\frac{e^{-ip\pi/2}}{\pi}\int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{ip(\cos\theta-\theta)}\,d\theta\simeq\frac{1}{\pi}e^{-\pi i/3}\sqrt{3}\left(\frac{6}{p}\right)^{1/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right).$$

4.41. Показать, что при конформном отображении

$$z=x+iy=w+\sqrt{w^2-1}\qquad (w=u+iv)$$

действительная ось плоскости w переходит в участок $|x|\geqslant 1$ действительной оси плоскости z и в единичную окружность $z=e^{i\varphi}$. Нанести на плоскости z линии, соответствующие прямым $u=0,\pm 1$ и $v=0,\pm 1$.

4.42. Показать, что при отображении

$$z = w + iae^{i\varphi}\operatorname{tg}\psi + \frac{a^2e^{2i\varphi}}{w + iae^{i\varphi}\operatorname{tg}\psi}$$

(a, φ, ψ — постоянные) окружность радиуса $a\sec\psi$ с центром в начале на плоскости w переходит в дугу окружности, которая стягивается хордой длины $4a$, образующей угол φ с осью x. На плоскости z нанести кривые, соответствующие линиям $u=0$, $|v| \geqslant a\sec\psi$ и $v=0$, $|u| \geqslant a\sec\psi$ при $a=1$, $\varphi=30°$, $\psi=15°$. Какова угловая мера дуги в плоскости z, соответствующей окружности $w = a\sec\psi e^{i\varphi}$?

4.43. Показать, что формула Шварца — Кристоффеля дает для функции, отображающей внутренность четырехугольника со сторонами $x=0$, $y \geqslant 0$; $y=0$, $x \geqslant 0$; $y=-a$, $x \geqslant -b$; $x=-b$, $y \geqslant -a$ на верхнюю полуплоскость плоскости w выражение

$$z = \frac{2a}{\pi}\operatorname{Ar\,th}\sqrt{\frac{a^2-b^2w}{a^2(1+w)}} - \frac{2b}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a^2-b^2w}{b^2(1+w)}}.$$

Найти на плоскости w образы точек $z=0$, $z=-b-ai$, $z=-b$, $z=-ai$.

4.44. Показать, что функция

$$w = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos z^2\right)$$

отображает «крест» $y=0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $x=0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ на действительную ось плоскости w. Найти на плоскости w образы точек $z=1$, $z=i$, $z=-1$, $z=-i$. Какие физические задачи могут быть решены с помощью этого конформного отображения?

4.45. Тонкий металлический киль, поддерживаемый при температуре T_0, расположен перпендикулярно к металлической пластинке, поддерживаемой при нулевой температуре, так что кромка киля параллельна этой пластинке и находится на расстоянии a от нее. Посредством преобразования Шварца — Кристоффеля показать, что стационарное распределение температуры в окружающей (теплопроводящей) среде может быть определено функцией (преобразованием)

$$z = a\operatorname{sh}\left(\frac{\pi(U+iT)}{2T_0}\right),$$

причем линии $T=\text{const}$ представляют собой изотермы. Показать, что полоса киля длины L и высоты b (последняя отсчитывается от кромки) испускает

$$\frac{4LT_0\varkappa}{\pi}\operatorname{Ar\,ch}\left(\frac{a+b}{a}\right) \text{ калорий в секунду,}$$

где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности среды.

4.46. Посредством преобразования Шварца — Кристоффеля показать, что участок плоскости z, лежащий над прямой $y=-a$ вне двух частей $x \geqslant 0$ и $x \leqslant -b$ вещественной оси (это соответствует двум параллельным плоскостям, расположенным на расстоянии a друг от друга, в верхней из которых имеется щель ширины b), отображается на верхнюю полуплоскость плоскости w функцией

$$z = -\frac{a}{\pi}\left[\frac{(e^{\beta}-1)(w-1)}{w-e^{\beta}} + \ln w\right],$$

где $b=(2a/\pi)(\beta+\operatorname{sh}\beta)$. Для случая $b=a$ (при этом $\beta=0{,}7493$) вычислить (с двумя значащими цифрами) образы в плоскости w точек $z=-a$, $-a/2$, $-a/2-ia$, $-a/2+ia$.

4.47. Показать, что если

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\pi x/l} \quad (-l\leqslant x\leqslant l),$$

то

$$A_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-in\pi x/l}\,dx.$$

Внося эти выражения A_n в ряд, представляющий функцию $f(x)$, и переходя должным образом к пределу при $l\to\infty$, вывести интеграл Фурье.

4.48. Обобщенные преобразования Меллина определяются равенствами

$$F_-(s)=\int_0^1 f(x)\,x^{s-1}\,dx, \quad F_+(s)=\int_1^\infty f(x)\,x^{s-1}\,dx.$$

Показать, что F_- аналитична в некоторой полуплоскости вида $\operatorname{Re} s>\sigma_0$, а F_+ — в некоторой полуплоскости вида $\operatorname{Re} s<\sigma_1$. Показать, что если существует преобразование Меллина в обычном смысле, то $\sigma_0<\sigma_1$. Показать, что для $\sigma>\sigma_0$ и $\tau<\sigma_1$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_-(s)\frac{ds}{x^s}+\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} F_+(s)\frac{ds}{x^s}\right).$$

4.49. Найти преобразования Фурье F_+ и F_- функции $\cos ax$ при комплексном a и определить их области аналитичности.

4.50. Найти преобразования Фурье F_+ и F_- функции $x^n e^{-x}$ и определить их области аналитичности.

4.51. Посредством формулы суммирования Пуассона показать, что

$$\vartheta_3(u,\ e^{-\alpha^2/2})=\frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(2/\alpha^2)(u+m\pi)^2}$$

(функция ϑ_3 определена на стр. 407).

Основные свойства функций комплексного переменного

Функция $f=u+iv$ комплексного переменного $z=x+iy$ называется *аналитической* в области R плоскости z, если она удовлетворяет одному из следующих трех эквивалентных условий:

а. Производная df/dz в любой точке $z=a$ области R существует и не зависит от направления dz; эта производная непрерывна в области R.

б. $\partial u/\partial x=\partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y=-\partial v/\partial x$, причем все эти производные непрерывны в R.