вновь связано с уравнением Бесселя, обладая решением $(1/t)J_\mu(t)$. Присоединенная билинейная форма равна

$$P(J_\nu, v) = J_\nu(zt)J_\mu(t) + \frac{d}{dt}[tJ_\nu(zt)J_\mu(t)] - 2J_\nu(zt)\frac{d}{dt}[tJ_\mu(t)],$$

и если только $\operatorname{Re}\mu + \operatorname{Re}\nu > -1$, можем получить

$$\psi(z) = \int_0^\infty J_\nu(zt)J_\mu(t)\frac{dt}{t}.$$

Как известно, эта величина имеет разрыв при $z = 1$.

Имеется много других интегральных представлений, играющих некоторую роль в совсем специальных случаях, но мало пригодных к любому другому уравнению. Такие решения обычно находятся в результате проб и ошибок или «нюхом». Во всяком случае, было бы мало смысла тратить время на их каталогизацию или на указание рецептов, когда их надо применять. Мы рассмотрели здесь наиболее полезные преобразования, а прочие можно отыскать в специальной литературе.

Задачи к главе 5

5.1. Построить уравнение Гельмгольца в конических координатах и разделить переменные. Какой вид имеют координатные поверхности? В каких физических задачах это уравнение было бы полезным?

5.2. Построить уравнение Лапласа в бисферических координатах и разделить переменные. Показать, что постоянная k_1^2 для уравнения (5.1.47) равна $\frac{1}{4}$ и что $R = (x^2 + y^2)^{1/4}$.

5.3. Построить уравнение Шредингера для электрона в двухатомной молекуле в вытянутых сфероидальных координатах

$$\xi = (r_1 + r_2)/a, \quad \eta = (r_1 - r_2)/a, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/x),$$

где r_1 представляет собой расстояние от одного ядра, а r_2 — от другого, причем ядра предполагаются расположенными в точках $z = \pm\frac{1}{2}a$, $x = y = 0$. Выразить x, y, z через ξ, η, φ, получить коэффициенты Ламе; построить уравнение Шредингера и определитель Штеккеля. Показать, что для потенциальной функции $-c_1/r_1 - c_2/r_2$ уравнение Шредингера разделяется. Получить разделенные уравнения.

5.4. Показательные координаты задачи 1.9 имеют вид

$$\xi = \ln(x^2 + y^2) - z, \quad \eta = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/x).$$

Набросать поверхности, найти коэффициенты Ламе, построить волновое уравнение и показать что оно не разделяется.

5.5. Гиперболоидальные координаты определяются уравнениями

$$\lambda^4 = z^2(x^2 + y^2), \quad \mu^2 = \frac{1}{2}(z^2 - x^2 - y^2), \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/x).$$

Набросать некоторые из координатных поверхностей, подсчитать коэффициенты Ламе, построить волновое уравнение и показать, что оно не разделяется.

5.6. Координаты вращения характеризуются наличием оси симметрии вращения (например, оси x); они имеют вид $\lambda(r, x)$, $\mu(r, x)$ и $\varphi = \operatorname{arctg}(z/y)$ $(r^2 = y^2 + z^2)$. φ-Множитель, если Φ отделяется, равен $\sin m\varphi$ или $\cos m\varphi$, и если положить решение ϕ трехмерного уравнения Лапласа равным $e^{\pm im\varphi}\Phi(r, x)/r$, то уравнение для Φ имеет вид

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{r^2}\Phi = 0.$$

Исследовать разделимость этого уравнения в координатах λ и μ следующим образом. Положить $z = x + ir$ и $w = \lambda + i\mu$, так что z будет функцией w, и наоборот. Воспользоваться техникой, примененной в уравнении (5.1.6) и далее, чтобы показать, что требование равенства $|z'|^2/r^2 = -4z'\bar{z}'/(z - \bar{z})^2$ выражению $f(\lambda) + g(\mu)$ приводит к уравнению

$$F + 2\bar{z}G + \bar{z}^2H = \bar{F} + 2z\bar{G} + z^2H,$$

где

$$F = (1/z')\ (z'''z^2 + 6z'^3 - 6z''z'z),$$
$$G = 3z'' - (z'''z/z'),\quad H = z'''/z',$$

а $z' = dz/dw$ и т. д. Показать, что наиболее общее решение этого уравнения получается при

$$d^2F/dz^2 = c_1,\quad d^2G/dz^2 = c_2,\quad d^2H/dz^2 = c_3,$$

что в конце концов приводит к решению

$$(dz/dw)^2 = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4.$$

Решить это уравнение для различных видов систем координат $z(w)$, допускающих разделение λ, μ-части уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} + \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 \frac{\frac{1}{4} - m^2}{r^2}\varphi = 0.$$

Показать, что в случае $z = w$ получается обычная цилиндрическая система координат: $z'^2 = z$, $z = \frac{1}{4}w^2$ — параболическая система; $z' = z$, $z = e^w$ — сферическая система; $z'^2 = z^2 \pm 1$ — две сфероидальные системы; $z' = 1 \pm z^2$ — бисферическая и тороидальная системы координат. Набросать системы координат, соответствующие $z'^2 = z^3$ и $z' = z^2$.

5.7. Для координат вращения, рассмотренных в задаче 5.6, исследовать случай $z'^2 = a(1 - z^2)(1 - k^2z^2)$, что дает $z = a\,\mathrm{sn}(w, k)$ [см. формулу (4.5.74)]. Набросать на плоскости $z = x + ir$ для $k = 0{,}6$ достаточное число координатных линий $\lambda = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$, чтобы указать строение системы. Построить λ, μ-часть уравнения Лапласа и разделить в ней переменные. Для каких физических задач была бы эта система координат полезной?

5.8. Провести анализ системы координат вращения (см. задачу 5.6), соответствующей соотношению $z = a\,\mathrm{cn}(w, k)$ $(z = x + ir,\ w = \lambda + i\mu)$. Набросать вид координатных линий λ, $\mu = \mathrm{const}$ на плоскости z. Разделить уравнение Лапласа в этих координатах. В какой физической ситуации была бы эта система полезной? [См. формулу (4.5.77) для определения cn].

5.9. Провести анализ системы координат вращения (см. задачу 5.6), соответствующей соотношению $z = a\,\mathrm{dn}(w, k)$ $(z = x + ir,\ w = \lambda + i\mu)$ [см. формулу (4.5.77)]. Набросать систему координат, разделить уравнение Лап-

ласа и указать физическую ситуацию, в которой эта система была бы подходящей.

5.10. Построить уравнение Лапласа в полярных координатах r, φ и разделить их. Найти основную фундаментальную систему решений полученных двух уравнений около точек $r=a$, $\varphi=0$.

5.11. Уравнение Шредингера для электрона в одномерном потенциальном поле $V=(\hbar^2/2M)x^2$ имеет вид $\psi''+(k-x^2)\psi=0$, где $k=2MW/\hbar^2$. Одно решение этого уравнения при $k=1$ равно $\psi_1=\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$. Найти фундаментальную систему решений около $x=0$.

5.12. Найти общее решение уравнения

$$(d^2\psi/dx^2)-(6/x^2)\psi=x\ln x.$$

5.13. Одним из решений уравнения Лежандра

$$(1-x^2)\psi''-2x\psi'+2\psi=0$$

служит $\psi=x$. Найти фундаментальную систему около $x=0$. Каков определитель Вронского для этой системы? Какое решение имеет значение 2 при $x=1$? Какие решения имеют значение 2 при $x=0$? Почему ответ однозначен в одном случае, но не в другом?

5.14. Уравнение Ламе имеет вид

$$\psi''+\left[\frac{z}{z^2-a^2}+\frac{z}{z^2-b^2}\right]\psi'+\frac{k-m(m+1)z^2}{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}\psi=0;$$

определить местонахождение особых точек этого уравнения и указать индексы решений в каждой точке. Какова фундаментальная система решений вблизи $z=0$? Чему равен определитель Вронского для этой системы?

5.15. Показать, что единственная особая точка уравнения

$$\psi''-2az\psi'+[E+2bcz-(a^2-в^2)z^2]\psi=0$$

— это иррегулярная точка при $z\to\infty$. Показать, что если положить $\psi=\exp(\alpha z+\beta z^2)F(z)$ и согласовать значения α и β, то для F получится уравнение, на основании которого можно разложить F в ряд около $z\to\infty$. Выписать три члена этого ряда. Записать уравнение, имеющее только иррегулярную особую точку на бесконечности, для которого решением будет $\psi=\exp(\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)G(z)$, где $G(z)$ — ряд вида $a_0z^s+a_1z^{s+1}+\ldots$ Сравнить это уравнение с предыдущим и с уравнением $\psi''+k^2\psi=0$, также имеющим особую точку при $z\to\infty$. Что можно высказать относительно классификации иррегулярных особых точек?

5.16. В уравнении (5.2.26) с одной лишь регулярной особой точкой сумма показателей двух решений около этой точки равна -1. Для уравнения с двумя регулярными особыми точками (5.2.28) сумма показателей решений около одной точки плюс их сумма для решений около другой точки $\lambda+\mu-\lambda-\mu$ равна нулю. Каково соответствующее утверждение относительно уравнения (5.2.36) с тремя регулярными особыми точками? Какой вид имеет уравнение с четырьмя регулярными особыми точками без иррегулярных точек и каково соответствующее утверждение? По индукции, чему равна сумма показателей около всех особых точек для уравнения с N регулярными точками, но без иррегулярных точек?

5.17. Показать, что решением уравнения

$$\psi''+\left\{-\frac{1}{4}(c-1)^2+\left[ab-\frac{1}{2}c(a+b-c+1)\right]\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}(a+b-c+1)(a+b-c-1)\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)^2\right\}\psi=0$$

является функция

$$\psi=(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}(a+b-c+1)}e^{-\frac{1}{2}(c+1)x}F(a,\,b\,|\,c\,|\,e^{-x}).$$

Для каких значений a, b и c гипергеометрический ряд является конечным многочленом и ψ конечно в области $0\leqslant x\leqslant\infty$?

5.18. Построить одномерное уравнение Шредингера для частицы массы M в потенциальном поле $-(\hbar^2A^2/2M)\,\mathrm{sech}^2(x/d)$. Заменив независимое переменное на $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{th}\,(x/d)$, показать, что получающееся уравнение относительно z имеет три регулярные особые точки. Выразить решения этого уравнения через гипергеометрические функции z. Какое решение остается конечным при $x\to-\infty$? Найти значения энергии, для которых это решение представляет собой конечный многочлен относительно z. Будет ли это решение конечным при $z\to\infty$?

5.19. Показать, что уравнение для $\psi(x)=(z^{\frac{1}{2}c}e^{-\frac{1}{2}z}/\sqrt{z'})\,F(a\,|\,c\,|\,z)$, где z — функция x, имеет вид

$$\psi''+\left\{-\frac{1}{4}(z')^2-\frac{3}{4}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2-c(c-1)\left(\frac{z'}{z}\right)^2+(c-a)\frac{(z')^2}{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{z'''}{z'}\right)\right\}\psi=0,$$

причем $z'=dz/dx$ и т. д. Показать, что уравнение для

$$\psi(x)=z^{\frac{1}{2}c}(1-z)^{\frac{1}{2}(a+b-c+1)}(z')^{-\frac{1}{2}}F(a,\,b\,|\,c\,|\,z)$$

таково:

$$\psi''+\left\{\frac{1}{4}c(2-c)\left(\frac{z'}{z}\right)^2-\frac{1}{4}(a+b-c+1)(a+b+c-1)\left(\frac{z'}{z-1}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{4}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{z'''}{z'}\right)+\left[ab-\frac{1}{2}c(a+b-c+1)\right]\frac{(z')^2}{z(z-1)}\right\}\psi=0.$$

Каков вид этих уравнений при $z=x^n$? При $z=e^{-x}$?

5.20. Разделить переменные в уравнении Гельмгольца для сферических координат и показать, что радиальное уравнение, где $x=kr$

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\psi}{dx}\right)+\left[1-\frac{n(n+1)}{x^2}\right]\psi=0,$$

имеет решения $j_n(x)=\sqrt{\pi/2x}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $n_n(x)=\sqrt{\pi/2x}\,N_{n+\frac{1}{2}}(x)$. Показать, что решением этого уравнения является функция

$$h_n(x)=\frac{(2n)!}{i2^n n!}\frac{e^{ix}}{x^{n+1}}F(-n\,|\,-2n\,|\,-2ix).$$

Показать, что она имеет асимптотический вид $e^{ix}/i^{n+1}x$ и потому $h_n=j_n+in_n$.

5.21. Построить уравнение Шредингера в сферических координатах r, ϑ, φ для электрона в потенциальном поле $V=-e^2Z/r$. Разделить переменные и показать, что решение радиального уравнения можно выразить

через вырожденную гипергеометрическую функцию. Найти два асимптотических ряда для решения, независимого от ϑ и φ. Найти, при каких значениях энергии асимптотические ряды обрываются и превращаются в конечные многочлены (в этом случае ряд не является асимптотическим, а дает точное решение). Для каких энергий это решение конечно для всех значений r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$?

5.22. Каков асимптотический ряд около $z=\infty$ для сфероидального уравнения

$$(z^2-1)\psi''+2(a+1)\psi'+(h^2z^2-b)\psi=0?$$

Каков асимптотический ряд около $z=0$ для уравнения

$$\psi''+(2/z)\psi'+[(a/z^4)-(b/z^6)]\psi=0?$$

5.23. Очень близким выражением для потенциала электронов проводимости в металлической решетке является

$$V=\frac{\hbar^2}{2M}U_0\left[\cos^2\left(\frac{\pi x}{l_x}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi y}{l_y}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi z}{l_z}\right)\right].$$

Показать, что все разделенные уравнения имеют вид уравнения Матье (5.2.67), в котором $h^2=l^2U_0/\pi^2$, а b пропорционально энергии электрона. Применяя формулу (5.2.71), подсчитать значения фазового множителя s для $h=1$ и $b=0{,}3$, $0{,}469$, $1{,}0$, $1{,}242$ и $1{,}5$. Какие из этих значений b приводят к допустимому решению (конечному при $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$)?

5.24. Применяя формулу (5.2.77) и дальнейшие формулы, подсчитать be_0 и коэффициенты Фурье функции $Se_0(h, \cos\varphi)$ для $h=2$.

5.25. Построить уравнение Гельмгольца в вытянутых сфероидальных координатах (VIII) и показать, что если решение независимо от ξ_3, то уравнения для ξ_1- и ξ_2-множителей имеют вид

$$(x^2-1)\psi''+2x\psi'+(h^2x^2-b)\psi=0.$$

Исследовать особые точки этого уравнения и построить трехчленную рекурсивную формулу для коэффициентов разложения в ряд около $x=0$. Указать равенство, связывающее с помощью непрерывных дробей b и a, которое должно выполняться, чтобы ряд сходился при $x=\pm 1$ (отрицательные степени x отсутствуют, а ряд должен сходиться) для решения, имеющего нулевую производную при $x=0$ для $h=1$.

5.26. Разложить решение уравнения задачи 5.25 по сферическим гармоникам $P_n(x)$ (см. стр. 539) и получить трехчленную рекурсивную формулу для коэффициентов. Получить из нее соотношение, связывающее с помощью непрерывных дробей h^2 и a. Решить его относительно b для $h=1$ и провести сравнение с результатами задачи 5.25.

5.27. Применив преобразование Лапласа, показать, что решение уравнения

$$[xf(D)+F(D)]\psi=0,$$

где $D\psi=d\psi/dx$, $D^2\psi=d^2\psi/dx^2$, и т. д., а f и F представляют собой конечные многочлены по степеням D, имеет вид

$$\psi=\int^{b}\exp\left\{xt+\int[F(t)/f(t)]\,dt\right\}[dt/f(t)].$$

где a и b выбраны так, что

$$\left[\exp\left(xt+\int F\,dt/f\right)\right]_a^b=0$$

для всех значений x. Применить эту формулу для подсчета интегрального представления вырожденной гипергеометрической функции.

5.28. Показать, что решение уравнения

$$z(z-1)(z-a)\psi''-(\alpha-1)z(2z-a)\psi'+\alpha(\alpha-1)(z+1)\psi=0$$

имеет вид

$$\psi=A\int(z-t)^{\alpha}(t-1)^{\beta-\alpha\beta-1}(t-a)^{\beta-\alpha\beta+\alpha-2}(dt/t),$$

где $\beta=(\alpha-1)/(a-1)$. Каковы должны быть пределы интегрирования, чтобы ψ было решением? Какой выбор пределов и A дает решение, равное единице при $z=0$? Каково поведение этого решения вблизи трех остальных особых точек?

5.29. Показать, что решением уравнения

$$(d^{n-1}\psi/dz^{n-1})-z\psi=a$$

будет

$$\psi=\sum_{s=0}^{n-1}A_s e^{2\pi is/n}\int_0^{\infty}\exp\left[zte^{2\pi is/n}-(t^n/n)\right]dt,$$

где

$$\sum_{s=0}^{n-1}A_s=a.$$

5.30. Показать, что решением уравнения

$$z(d^3\psi/dz^3)-\psi=0$$

будет

$$\psi=\int_0^{\infty}\sin(z/u)\,e^{-\frac{1}{2}u^2}u\,du.$$

5.31. Взяв определение гамма-функции и заменяя переменные интегрирования, показать, что

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du=$$

$$=\frac{-e^{-\pi i(p+q)}\Gamma(p+q)}{\sin\pi p\sin\pi q}\oint_C u^{p-q}(1-u)^{q-1}du,$$

где контур C подобен показанному на рис. 5.7, но обходит точки 0 и 1 (где подинтегральная функция вещественна?). Разложить $F(a,b\,|\,c\,|\,z)$ около $z=0$, воспользоваться последней формулой для замены $\Gamma(b+n)/\Gamma(c+n)$ в ряде (полагая $p=b+n$, $q=c-b$) и получить, таким образом, ряд по $(uz)^n$ внутри контурного интеграла. Показать, что этот ряд можно просуммировать и в конце концов получить

$$F(a,b\,|\,c\,|\,z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-b)}{4\pi\sin\pi(c-b)}e^{-\pi ic}\oint_C u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-uz)^{-a}du.$$

Показать, что эта формула равносильна первой части соотношений (5.3.16).

5.32. Применяя преобразование Эйлера, показать, что решением уравнения

$$(1-z^2)\psi''-2z\psi'+[n(n+1)-m^2/(1-z^2)]\psi=0$$

является присоединенная функция Лежандра (n, m не обязательно целые)

$$P_n^m(z)=\frac{\Gamma(n+m+1)}{2^n\pi i\Gamma(n+1)}(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}\oint\frac{(t^2-1)^n\,dt}{(t-z)^{n+m+1}},$$

где контур проходит как вокруг $+1$, так и вокруг z в положительном направлении. При помощи изменения переменной интегрирования показать, что

$$P_n^m=(z)\frac{i^m\Gamma(n+m+1)}{\pi\Gamma(n+1)}\int_0^\pi[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi]^n\cos(m\varphi)\,d\varphi.$$

Показать, что эта функция равна функции, определенной формулой (5.3.36). Показать, что эти функции входят во все потенциальные и волновые задачи в сферических координатах.

5.33. При помощи формулы (5.3.33) и дальнейших формул показать, что для n целого

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}P_n(z)\ln[(1+z)/(1-z)]-W_{n-1}(z),$$

где $W_{n-1}(z)$ — многочлен относительно z степени $n-1$. Отсюда вывести что если x вещественное между -1 и $+1$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[Q_n(x+i\varepsilon)-Q_n(x-i\varepsilon)]=\pi iP_n(x).$$

5.34. При помощи теоремы Коши показать, что

$$Q_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_2}\frac{Q_n(w)\,dw}{w-z}-\oint_{C_1}\frac{Q_n(w)\,dw}{w-z}\right],$$

где контур C_1 содержит точки $w=\pm 1$ внутри, а точку $w=z$ вне себя, а контур C_2 представляет собой окружность радиуса $R\gg|z|$ и 1. Показать, что интеграл по C_2 равен нулю, если $n=0$ или целому положительному. Привести контур C_1 к обходу вплотную к отрезку между ± 1 и при помощи второго результата задачи 5.33 показать, что

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(w)\frac{dw}{z-w}.$$

5.35. Показать, что полиномы $W_{n-1}(z)$ задачи 5.33 равны

$$W_{n-1}(z)=\frac{2n-1}{n}P_{n-1}(z)+\frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(z)+\frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(z)+\ldots$$

5.36. Можно определить второе решение гипергеометрического уравнения около $z=0$, как

$$y_2^0(a,b\,|\,c\,|\,z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(a,b\,|\,a+b-c+1\,|\,1-z)-$$
$$-\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b\,|\,c-a-b+1\,|\,1-z).$$

Показать, что оно равно

$$\frac{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)+\sin\pi a\sin\pi b}{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)-\sin\pi a\sin\pi b}F(a,b\,|\,c\,|\,z)+$$
$$+\frac{2\pi z^{1-c}\sin\pi c\,\Gamma(c)\,\Gamma(c-1)}{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)-\sin\pi a\sin\pi b}\frac{F(a-c+1,\,b-c+1\,|\,2-c\,|\,z)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}.$$

Показать, что предельным видом этой функции при $c\to 1$ является ряд, приведенный на стр. 624.

5.37. Доказать, что

$$J_m(z)=\frac{1}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi}e^{iz\cos u}\cos mu\,du.$$

5.38. Найти асимптотический ряд для функции Уиттекера $U_2(a\,|\,c\,|\,z)$. Из него при помощи формулы (5.3.3) получить соотношение

$$U_2(a\,|\,c\,|\,z)=\frac{e^{i\pi a}z^{-a}}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(t+a-c+1)\,\Gamma(t+a)}{\Gamma(a-c+1)\,\Gamma(a)}\Gamma(-t)\,z^{-t}dt.$$

Каков точный вид контура? Повторяя процесс, примененный к выводу формулы (5.3.5), получить формулу (5.3.58) (исследовать пределы сходимости при каждом шаге).

5.39. Показать, что радиальный множитель для решений уравнения Гельмгольца в полярных, сферических и конических координатах удовлетворяет уравнению Бесселя

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{dJ}{dz}\right)+\left(1-\frac{\lambda^2}{z^2}\right)J=0.$$

Определить местонахождение особых точек и описать их; составить три первых члена разложения в ряд решения J_ν, регулярного при $z=0$ около каждой особой точки. При помощи преобразования Лапласа вывести интегральное представление (5.3.53). Показать, что вторым решением этого уравнения является

$$N_\lambda(z)=\operatorname{ctg}\pi\lambda\cdot J_\lambda(z)-\operatorname{cosec}\pi\lambda\cdot J_{-\lambda}(z).$$

Подсчитать первые три члена разложения N_λ в ряд (для λ не целого) около $z=0$ и первые три члена асимптотического разложения этой функции. Показать, что для $\lambda=0$

$$N_0(z)=\frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{d}{d\lambda}J_\lambda(z)-(-1)^\lambda\frac{d}{d\lambda}J_{-\lambda}(z)\right]=$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{1}{2}z\right)+\gamma\right]J_0(z)-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{1}{2}z\right)^{2m}\left[\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right].$$

5.40. Показать, что решение уравнения Шредингера в параболических координатах $x=\sqrt{\lambda\mu}\cos\varphi$, $y=\sqrt{\lambda\mu}\sin\varphi$, $z=\frac{1}{2}(\lambda-\mu)$, $r=\frac{1}{2}(\lambda+\mu)$ для частицы массы M при потенциале $V=\eta^2/r$ равно

$$\psi=Ne^{im\varphi}(\lambda\mu)^{\frac{1}{2}m}e^{-\frac{1}{2}ik(\lambda+\mu)}\times$$
$$\times F\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}-\sigma\,|\,m+1\,|\,ik\lambda\right)F\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}-\tau\,|\,m+1\,|\,ik\mu\right),$$

где $\sigma+\tau=-iM\eta^2/\hbar^2k$ и $k^2=2ME/\hbar^2=(Mv/\hbar)^2$. Показать, что при $m=0$, $\sigma=-\frac{1}{2}$ и $N=\Gamma(1-i\eta^2/\hbar v)\,e^{\pi\eta^2/2\hbar v}$ решение имеет асимптотический вид

$$\psi\simeq\exp[ikz-i(\eta^2/\hbar v)\ln k(r-z)]+$$
$$+\frac{\eta^2\exp[i(\eta^2/\hbar v)\ln(1-z/r)-2i\delta]}{Mv^2(r-z)}\exp\left[ikr+\left(\frac{i\eta^2}{\hbar v}\right)\ln(kr)\right],$$

где $\Gamma(1-i\eta^2/\hbar v)=|\Gamma|e^{i\delta}$. Исследовать физическое значение этого результата и получить закон рассеяния Резерфорда.

5.41. При помощи способа, аналогичного указанному в тексте для $Je_{2m}(h,\operatorname{ch}\mu)$, вывести разложения в ряды для «радиальной» функции Матье

$$Je_{2m+1}(h,\operatorname{ch}\mu)=\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}B_{2n+1}J_{2n+1}(h\operatorname{csh}\mu)=$$
$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}}{B_1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}B_{2n+1}\left[J_n\left(\frac{1}{2}he^{-\mu}\right)J_{n+1}\left(\frac{1}{2}he^{\mu}\right)-\right.$$
$$\left.-J_{n+1}\left(\frac{1}{2}he^{-\mu}\right)J_n\left(\frac{1}{2}he^{\mu}\right)\right],$$

где B_{2n+1} — коэффициенты ряда Фурье для «угловой» функции $Se_{2m+1}(h,\cos\theta)$, определенной на стр. 531.

5.42. При помощи преобразования Лапласа показать, что если

$$u(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}K(t)\,dt \quad\text{и}\quad v(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\varphi(t)\,dt, \quad\text{то}\quad f(x)=\int_0^{x}K(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где $u(s)\,v(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt$. Отсюда доказать, что

$$n\int_0^{x}J_m(x-t)\,J_n(t)\frac{dt}{t}=J_{m+n}(x).$$

Таблица разделяющих координат для трех измерений

Система координат определяется соотношениями между прямоугольными координатами x, y, z и криволинейными координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 или при помощи коэффициентов Ламе $h_n=\sqrt{(\partial x/\partial\xi_n)^2+(\partial y/\partial\xi_n)^2+(\partial z/\partial\xi_n)^2}$ и т. д., обладающих свойством (см. стр. 34)

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=\sum_n h_n^2\,d\xi_n{}^2.$$

Выражения для оператора Лапласа, градиента, вихря и т. д. через эти h приведены в табл. на стр. 116. Стандартное уравнение с частными производными $\nabla^2\psi+k_1^2\psi=0$ приобретает вид

$$\sum_m\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_m}\left[\frac{h_1h_2h_3}{h_m^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_m}\right]+k_1^2\psi=0,$$