В частности, сам оператор $\mathfrak{A}$ имеет особенно простой вид

$$\mathfrak{A} = \sum_n \mathbf{e}_n a_n \mathbf{e}_n^*, \text{ т. е. } A_{mn} = a_n \delta_{mn},$$

где a_n есть собственное значение оператора $\mathfrak{A}$, соответствующее собственному вектору $\mathbf{e}_n$. Другими словами, матрица оператора, отнесенная к собственным главным осям, является *диагональной матрицей*.

Другие общие свойства, применимые равным образом к абстрактным векторным операторам и к обыкновенным дифференциальным операторам, были уже рассмотрены в §§ 1.6 и 2.6; еще некоторые будут выведены позже. Теперь должно быть очевидно, что абстрактное векторное изображение имеет значительное преимущество в простоте из-за наличия простой геометрической аналогии, делающей неоценимой эту новую точку зрения почти во всех наших задачах.

Задачи к главе 6

6.1. Сеточный потенциал $\varphi(m, n)$ удовлетворяет разностному уравнению (6.2.6) и должен удовлетворять граничным условиям на граничных линиях $n=0$, $n=5$, $m=0$, $m=5$. Показать, что решение, удовлетворяющее требованию, что φ принимает значение φ_ν в ν-й граничной точке, имеет вид

$$\varphi(m, n) = \sum_\nu G(m, n \mid \nu)\, \varphi_\nu,$$

где $G(m, n \mid \nu)$ представляет собой решение уравнения (6.2.6), равное нулю во всех граничных точках, кроме ν-й, где оно имеет единичное значение. Показать, что все G можно получить из этих функций, построенных для точек (0,1) и (0,2). Подсчитать эти две G с точностью до трех десятичных знаков для каждого внутреннего узла.

6.2. Показать, что решение разностного уравнения Пуассона

$$\psi(m+1, n) + \psi(m-1, n) + \psi(m, n+1) + \psi(m, n-1) - 4\psi(m, n) = F(m, n),$$

где $F(m, n)$ — заданная функция и $\psi = 0$ во всех граничных точках, равно

$$\psi(m, n) = \sum_{\mu\nu} G(m, n \mid \mu, \nu)\, F(\mu, \nu),$$

где $G(m, n \mid \mu, \nu)$ представляет собой решение разностного уравнения Пуассона, если $F(\mu, \nu) = 1$, все прочие $F = 0$ и $G = 0$ во всех граничных точках. Каковы значения G для 4×4-сетки задачи 6.1? Как можно скомбинировать эти результаты с результатами задачи 6.1, чтобы получить общее решение уравнения Пуассона, удовлетворяющее общим граничным условиям?

6.3. Дифференциальное уравнение является простым параболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

а граница состоит из линий $x=0$, $x=\pi$ и $t=0$. Показать, что при граничном условии $\psi = 0$ для $x=0$ и $x=\pi$ решение при $t \geqslant 0$ имеет вид

$$\psi(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \sin \nu x \cdot \exp(-\nu^2 t),$$

где A выбираются в соответствии с начальным значением ψ при $t=0$. Рассмотреть сеточное приближение этого уравнения, полученное делением интервала $0 \leqslant x \leqslant \pi$ на N равных частей длины $h=\pi/N$, а оси t на интервалы длины $k=\pi/M$. Показать, что решение соответствующего уравнения

$$\frac{1}{h^2}[\psi(m+1, n)+\psi(m-1, n)-2\psi(m, n)]=\frac{1}{k}[\psi(m, n+1)-\psi(m, n)],$$
$$\psi(0, n)=\psi(N, n)=0, \quad n \geqslant 0,$$

равно

$$\psi(m, n)=\sum_{\nu=1}^{N-1} B_\nu \sin \nu m h \cdot \exp\left[n \ln\left(1-\frac{4k}{h^2}\sin^2\frac{1}{2}h\nu\right)\right].$$

Что произойдет с этим решением, если k выбрать большим h^2? Какое ограничение надо наложить на величину k, чтобы решение было устойчивым? Пусть начальные условия таковы, что коэффициенты A_ν в точном решении для $\nu > \nu_{\max}$ можно не учитывать. Что можно сказать о выборе h и k, который приведет к достаточно точному (скажем, до 1%) сеточному решению в области $0 \leqslant t \leqslant \pi$ и в то же время не будет настолько «мелкозернистым» (N и M слишком велики), чтобы сделать численные подсчеты чересчур трудоемкими?

6.4. Пусть начальные значения $\psi(x, t)$ задачи 6.3 таковы:

$$\psi(x, 0)=\begin{cases}\frac{1}{4}\pi x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{4}\pi(\pi-x) & \text{при } \frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \pi\end{cases}=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{1}{(2\sigma+1)^2}\sin[(2\sigma+1)x].$$

Подсчитать значения $\psi(x, t)$ при $x=\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi$; $t=\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi$ для точного решения. Затем подсчитать значения ψ при помощи разностного уравнения

$$\psi(m, n+1)=\left[1-\frac{2k}{h^2}\right]\psi(m, n)+\frac{k}{h^2}[\psi(m+1, n)+\psi(m-1, n)],$$

начиная от $n=0$ и вычисляя вперед (для возрастающего n) при тех же начальных условиях. Принять $h=\frac{1}{4}\pi$ $(N=4)$ и произвести подсчеты с $k=\pi/4$ и $k=\pi/16$. Сравнить с четырьмя уже подсчитанными точными значениями.

6.5. Будет ли уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-y\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

эллиптическим или гиперболическим? Каковы уравнения характеристик? Набросать несколько из них. Показать, что если условия Коши ставятся на границе $y=y_0>0$, то решение для $y>y_0$ имеет вид

$$\psi=\frac{1}{2}\psi_0\left(x+\ln\frac{y}{y_0}\right)+\frac{1}{2}\psi_0\left(x-\ln\frac{y}{y_0}\right)+\frac{1}{2}y_0\varphi_0\left(x+\ln\frac{y}{y_0}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}y_0\varphi_0\left(x-\ln\frac{y}{y_0}\right),$$

где $\psi_0(x)$ есть значение ψ при $y=y_0$, а $\varphi_0(z)=\int v_0(z)\,dz$, причем $v_0(x)$ есть начальное значение $\partial\psi/\partial y$ при $y=y_0$. Почему это решение непригодно для $y_0=0$?

6.6. Построить последовательность взаимно ортогональных полиномов от x для интервала $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Начать с $y_0 = 1$, $y_1 = x$, ..., а полином y_n степени n выбирать так, что

$$\int_{-1}^{1} y_n(x)\, y_m(x)\, dx = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Получить первые четыре таких полинома. Показать, что эти полиномы для четных n не имеют нечетных степеней x, а для нечетных n не имеют четных степеней. Показать, что полученные полиномы пропорциональны полиномам Лежандра $P_n(x)$. Будет ли этот процесс построения системы ортогональных полиномов однозначным? Если нет, то какие ограничения надо добавить, чтобы сделать процесс однозначным? Будет ли получающаяся система функций полной? Как в этом можно убедиться?

6.7. Повторить процесс, указанный в задаче 6.6, для интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$ и требования ортогональности

$$\int_{0}^{1} y_n(x)\, y_m(x)\, x\, dx = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Начать вновь с $y_0 = 1$ и получить первые четыре полинома. Сравнить это с системой функций $\varphi_n(x) = J_0(\pi\alpha_{on}x)$, где α_{on} есть n-й корень уравнения $dJ_0(\pi\alpha)/d\alpha = 0$. Показать, что эти функции также взаимно ортогональны для того же интервала x и функции плотности x. Для каких задач полезны эти системы функций?

6.8. Полиномы Чебышева $T_n(x)$ определяются производящей функцией

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\, t^n.$$

Получить первые четыре полинома и при помощи действий с производящей функцией показать, что

$$T_1(x) - 2xT_0(x) = 0; \quad 2T_0(x) - 2xT_1(x) + T_2(x) = 0;$$
$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n > 1,$$

и, следовательно, что $T_n(x) = \varepsilon_n \cos(n \arccos x)$. Показать, что

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)\, T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \varepsilon_n \pi \delta_{mn}.$$

6.9. Полиномы Якоби определяются как

$$J_n(a, c \mid x) = F(a+n, -n \mid c \mid x).$$

Выписать первые четыре полинома и показать, что система полна (для какого интервала?). При помощи контурного интеграла, полученного из формулы (5.3.21), и последующего применения формулы (4.3.1) показать, что

$$J_n(a, c \mid x) = \frac{x^{1-c}(1-x)^{c-a}\,\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{c+n-1}(1-x)^{a+n-c}\right].$$

Показать, что

$$\frac{d}{dx} J_n(a, c \mid x) = -\frac{n(n+a)}{c} J_{n-1}(a+2, c+1 \mid x),$$

$$xJ_n(a, c \mid x) = \frac{c-1}{2n+a} [J_n(a-1, c-1 \mid x) - J_{n+1}(a-1, c-1 \mid x)]$$

и что

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{a-c} J_n(a, c \mid x) J_m(a, c \mid x)\, dx = \frac{n!\,[\Gamma(c)]^2\,\Gamma(n+a-c+1)}{(a+2n)\,\Gamma(a+n)\,\Gamma(c+n)}\,\delta_{mn}.$$

Выразить $P_n(x)$ и $T_n^\beta(x)$ через J.

6.10. Радиальная функция для уравнения Гельмгольца в сферических координатах равна $j_n(kr) = \sqrt{\pi/2kr}\,J_{n+1/2}(kr)$. Показать, что собственные функции для стоячих акустических волн внутри жесткой сферической оболочки имеют вид $j_n(\pi\beta_{nm}r/a)$, где β_{nm} — m-й корень уравнения $[dj_n(\pi\beta)/d\beta] = 0$. Показать, что они образуют полную ортогональную систему на интервале $0 \leqslant r \leqslant a$. Полагая $a \to \infty$, показать, что

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty j_n(zu)\, u^2\, du \int_0^\infty f(v)\, j_n(uv)\, v^2\, dv.$$

6.11. Показать, что

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^a L_n^a(t)\, dt = [\Gamma(a+n+1)]^2 \frac{(z-1)^n}{n!\, z^{a+n+1}}.$$

6.12. Доказать, что

$$\sum_{n=0}^\infty H_n(x) H_n(y) \frac{t^n}{2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp \frac{2xyt - t^2(x^2+y^2)}{1-t^2}.$$

Таблица полезных собственных функций и их свойств

Выберем интервал переменной z и функцию плотности $r(z)$ так, чтобы интеграл по этому интервалу от произведения $r(z)$ на любую положительную степень z был конечным. Выберем затем собственную функцию $\psi_0(z) = 1$. Следующая собственная функция $\psi_1(z)$ выбирается в виде комбинации 1 и z, ортогональной ψ_0 в выбранном интервале при выбранной плотности r. Затем $\psi_2(z)$ возьмем как комбинацию z^2, z и 1, ортогональную ψ_0 и ψ_1, и т. д. Таким образом, при помощи чисто механического метода, называемого *методом Шмидта*, можно построить систему собственных функций, которая будет служить базисом для разложения любой кусочно-гладкой функции z в выбранном интервале. Обычно оказывается, что полученные таким образом собственные функции получаются также из решения некоторого уравнения Лиувилля с граничными условиями или из некоторой производящей функции. Здесь будут рассмотрены три полезных случая для трех областей изменения z и различных функций плотности $r(z)$. См. также таблицу полиномов Якоби в конце гл. 12.