так что

$$(\lambda_m - \lambda_n)(\mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}_m) = 0.$$

Следовательно, скалярное произведение $\mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}_m$ равно нулю, за исключением случая, когда $m = n$. Поэтому разложение любого вектора $\mathbf{F}$ имеет вид

$$\mathbf{F} = \sum F_n \mathbf{e}_n, \quad \text{где} \quad F_n = \mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{F}. \tag{7.5.43}$$

Двойная система собственных векторов $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{f}_n$ называется *биортогональной системой* собственных векторов. Об их представлениях через векторы $\mathbf{e}(x)$

$$\psi_n(\mathbf{r}) = \mathbf{e}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_n, \quad \overline{\varphi}_n(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r})$$

говорят, что они образуют биортогональную систему собственных функций.

Отсюда оператор тождественного преобразования $\mathfrak{J}$ равен $\sum \mathbf{e}_n \mathbf{f}_n^*$, а разложение оператора Грина имеет вид

$$\mathfrak{G} = \sum_{m,\, n} \mathbf{e}_n G_{nm} \mathbf{f}_m^* = 4\pi \sum_n \frac{\mathbf{e}_n \mathbf{f}_n^*}{\lambda - \lambda_n},$$

и соответствующая функция Грина равна

$$G(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r})\, \overline{\varphi}_n(\mathbf{r}_0)}{\lambda - \lambda_n}. \tag{7.5.44}$$

Эта функция симметрична, только если $\varphi_n = \overline{\psi}_n$ (как будет в некоторых случаях).

В § 11.1 [формулы (11.1.21) и далее] мы рассмотрим случай колеблющейся струны с однородными граничными условиями, зависящими от частоты (наклон графика ψ на границе зависит как от значения ψ, так и от ее скорости). Эти граничные условия не самосопряженные, и соответствующий оператор не эрмитов, так что надо применять биортогональные собственные функции. Мы решаем задачу для данных условий, а также для сопряженных граничных условий, комплексно сопряженных к (11.1.22). Оказывается, что в этом случае $\varphi_n = \overline{\psi}_n$, так что ряд (11.2.25) соответствует формуле (7.5.44).

Задачи к главе 7

7.1. Круговой проводящий диск радиуса a с постоянным потенциалом V помещен целиком в бесконечный плоский проводник (совпадающий с плоскостью $z = 0$), на котором поддерживается нулевой потенциал. Показать, что функция Грина, соответствующая этой задаче, равна

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2} - [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2]^{-1/2}.$$

Показать, что потенциал в точке (x, y, z), порожденный этой комбинацией проводников, равен

$$\psi(r, \vartheta) = \frac{zV}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a y\, dy\, (r^2 + y^2 - 2ry \sin\vartheta \cos\varphi)^{-3/2},$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и $\operatorname{tg}\vartheta = (1/z)\sqrt{x^2 + y^2}$. Найти плотность заряда на диске и на бесконечном проводнике в виде определенных интегралов. Найти ψ для r, больших по сравнению с a, и для r, малых по сравнению с a.

7.2. Пусть граничное условие на плоскости $z=0$ состоит в том, что $\partial\psi/\partial z=V$ на диске радиуса a и $=0$ в остальной части плоскости. Показать, что функция Грина равна

$$[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{-1/2}+[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2]^{-1/2}.$$

Подсчитать потенциал ψ на поверхности диска и его градиент при $r\gg a$.

7.3. Пусть диск, о котором говорится в задачах 7.1 и 7.2, колеблется нормально к своей плоскости со скоростью $Ve^{-i\omega t}$, излучая звук в области $z>0$. Показать, что соответствующая функция Грина равна $(e^{ikR}/R)+$ $+(e^{ikR'}/R')$, где $k=\omega/c$ и

$$R^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$
$$(R')^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2.$$

Показать, что если $r^2=x^2+y^2+z^2\gg a^2$, то асимптотическое выражение для ψ имеет вид

$$\psi\simeq(Va^2/r)\,e^{ikr-i\omega t}J_1(ka\sin\theta)/ka\sin\theta.$$

Применить этот результат для исследования диффракции Фраунгофера волн, исходящих из круглого отверстия.

7.4. На внутренней поверхности сферы радиуса a поддерживается потенциал $\psi_a(\vartheta,\varphi)$, где ϑ и φ — угловые координаты сферической системы, концентрической с данной сферой. Показать, что функция Грина, соответствующая этой задаче, равна

$$[r^2+r_0^2-2rr_0\cos\theta]^{-1/2}-[(rr_0/a)^2+a^2-2rr_0\cos\theta]^{-1/2},$$

где θ — угол между радиусом-вектором $\mathbf{r}$ точки наблюдения и радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ точки источника $[\cos\theta=\cos\vartheta\cos\vartheta_0+\sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]$. Показать, что внутренний потенциал равен

$$\psi(r,\vartheta,\varphi)=\frac{a}{4\pi}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\int_0^{2\pi}d\varphi_0\int_0^{\pi}\frac{\psi_a(\vartheta_0,\varphi_0)\sin\vartheta_0\,d\vartheta_0}{[a^2+r^2-2ar\cos\theta]^{3/2}}.$$

Найти разложение ψ в ряд по степеням r/a, применимый для точек, находящихся вблизи начала координат.

7.5. Показать, что в сферических координатах функция Грина для уравнения Лапласа равна

$$\frac{1}{R}=\sum_{n,m}\varepsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\cos[m(\varphi-\varphi_0)]\,P_n^m(\cos\vartheta)\,P_n^m(\cos\vartheta_0)\cdot\begin{cases}(r^n/r_0^{n+1}) & \text{для } r\leqslant r_0,\\ (r_0^n/r^{n+1}) & \text{для } r\geqslant r_0,\end{cases}$$

а для уравнения Гельмгольца

$$\frac{e^{ikR}}{R}=ik\sum_{n,m}\varepsilon_m(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\cos[m(\varphi-\varphi_0)]\,P_n^m(\cos\vartheta)\times$$
$$\times P_n^m(\cos\vartheta_0)\cdot\begin{cases}j_n(kr)\,h_n(kr_0) & \text{для } r\leqslant r_0,\\ j_n(kr_0)\,h_n(kr) & \text{для } r\geqslant r_0,\end{cases}$$

где j_n и h_n — сферические функции Бесселя (см. задачу 5.20 и таблицы в конце гл. 11).

7.6. Решение уравнения Гельмгольца первоначально имеет вид

$$\psi_0(\mathbf{r})=\sum A_{mn}\cos(m\varphi+\alpha_m)\,P_n^m(\cos\vartheta)\,j_n(kr)$$

и определено во всем пространстве. Вводится сфера радиуса a с центром в начале координат, на которой ψ должна удовлетворять граничному условию

$$-\frac{\partial\psi}{\partial r}=\eta\psi, \quad r=a.$$

Показать, что новое решение ψ уравнения $\nabla^2\psi+k^2\psi=0$ вне сферы, удовлетворяющее указанному граничному условию при $r=a$ и тому условию, что ψ при $r\to\infty$ должна равняться сумме ψ_0 и расходящейся волны, является решением следующего интегрального уравнения:

$$\psi(\mathbf{r})=\psi_0(\mathbf{r})+\frac{1}{4\pi}\oint\psi(\mathbf{r}_0^s)\left[\frac{\partial}{\partial r_0}G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0^s)-\eta G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0^s)\right]dA_0, \quad r\geqslant a,$$

где G — второй ряд задачи 7.5, а интегрирование производится по поверхности сферы.

7.7. Проволока радиуса b погружена в масляную ванну бесконечного объема. Коэффициент тепло-диффузии как масла, так и проволоки равен a^2. Как масло, так и проволока сначала имели нулевую температуру. Через проволоку послан электрический импульс, мгновенно нагревающий ее до температуры T_0. Показать, что температура на расстоянии r от оси провода через время t равна

$$T=\frac{T_0}{2a^2t}\,e^{-r^2/4a^2t}\int\limits_0^b e^{-y^2/4a^2t}J_0\left(\frac{iyr}{2a^2t}\right)y\,dy.$$

При помощи разложения в ряд и асимптотического выражения для J_0 подсчитать T для двух предельных случаев, когда $2a^2t/r$ значительно меньше или значительно больше b.

7.8. Определить одномерную функцию Грина $G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)$ для дифференциального оператора Бесселя

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dG_k}{dr}\right)+k^2rG_k=-\delta(r-r_0), \quad r\leqslant a,$$

где $G_k(a\,|\,\mathbf{r}_0)=0$. Показать, что G_k имеет особенности при $k=k_n$, где $J_0(k_na)=0$. Из поведения G_k в такой особенности определить нормирующий интеграл

$$\int\limits_0^a rJ_0^2(k_nr)\,dr.$$

7.9. Показать, что в цилиндрических координатах

$$\frac{e^{ikR}}{iR}=\sum_{m}(2-\delta_{0m})\cos[m(\varphi-\varphi_0)]\int\limits_0^\infty J_m(\lambda\rho)J_m(\lambda\rho_0)\frac{e^{i\sqrt{k^2-\lambda^2}\,|z-z_0|}}{\sqrt{k^2-\lambda^2}}\lambda\,d\lambda.$$

7.10. Пусть $u=E_x$ и $v=-E_y$, где $\mathbf{E}$ — двумерное электрическое поле. Показать, что уравнения, которым удовлетворяют u и v, можно объединить следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\partial/\partial x & -\partial/\partial y\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=0.$$

Определить аффинор Грина

$$\mathfrak{G}=\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющий уравнению

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x & -\partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{pmatrix} \mathfrak{G} = -4\pi\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Показать, что

$$\mathfrak{G}=\begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x \end{pmatrix} G,$$

где G — функция Грина для двумерного уравнения Лапласа. Исследовать смысл $\mathfrak{G}$ и получить при помощи $\mathfrak{G}$ решение неоднородного вида уравнений для u и v.

7.11. Пусть ψ удовлетворяет следующему уравнению:

$$(d^2\psi/dx^2)+k^2\psi=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l,$$

и граничному условию $\psi(0)=0$ и $\psi(l)=f\psi'(l)$, где f — комплексная постоянная. Показать, что собственными функциями служат $\sin(k_n x)$, где $\operatorname{tg} k_n = fk_n$. Показать, что сопряженное решение удовлетворяет тому же уравнению, что и ψ, но с граничными условиями $\tilde{\psi}(0)=0$, $\tilde{\psi}(l)=\bar{f}\tilde{\psi}'(l)$. Показать, что $\tilde{\psi}_n=\bar{\psi}_n$. Показать, что

$$\int_0^l \bar{\tilde{\psi}}_n\psi_m\,dx=\int_0^l \psi_n\psi_m\,dx=0, \quad n\neq m.$$

Рассмотреть нормировку функций ψ_n и проверить результат при помощи исследования функции Грина, которую можно получить в замкнутом виде для этой задачи.

7.12. Пусть самосопряженный оператор $\mathscr{L}$ можно разбить на две самосопряженных части $\mathscr{L}_r$ и $\mathscr{L}_\rho$, где $\mathscr{L}_r$ действует только на переменную r, а $\mathscr{L}_\rho$ — только на ρ:

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_r+\mathscr{L}_\rho.$$

Пусть ортогональными и нормированными собственными функциями оператора $\mathscr{L}_\rho$ служат $\varphi_n(\rho)$:

$$\mathscr{L}_\rho\varphi_n(\rho)=\lambda_n\varphi_n(\rho).$$

Показать, что функция Грина $G_\lambda(r,\rho\,|\,r_0,\rho_0)$, удовлетворяющая уравнению

$$[\mathscr{L}(r,\rho)-\lambda]\,G_\lambda=-\delta(r-r_0)\,\delta(\rho-\rho_0),$$

выражается формулой

$$G_\lambda=\sum_n g_{\lambda-\lambda n}(r\,|\,r_0)\,\varphi_n(\rho)\,\varphi_n(\rho_0),$$

где

$$[\mathscr{L}_r-(\lambda-\lambda_n)]\,g_{\lambda-\lambda n}=-\delta(r-r_0).$$

7.13. Пусть

$$(\mathscr{L}-\lambda)\,G_\lambda=-4\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

Показать, что

$$G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) - \frac{\lambda}{4\pi}\int G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_1)\,G_0(\mathbf{r}_1\,|\,\mathbf{r}_0)\,dV_1$$

и

$$G_0(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) + \frac{\lambda}{4\pi}\int G_0(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_1)\,G_\lambda(\mathbf{r}_1\,|\,\mathbf{r}_0)\,dV_1.$$

7.14. Пусть G — функция Грина скалярного уравнения Гельмгольца для полубесконечной области $x > 0$, удовлетворяющая смешанным граничным условиям

$$\partial\psi/\partial x = F\psi \quad \text{при} \quad x = 0;$$

показать, что

$$\frac{\partial G}{\partial x} - FG = -\left(\frac{\partial}{\partial x} + F\right)\left(\frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR'}}{R'}\right),$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, а $R' = |\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|$. При помощи интегрирования показать, что

$$G = (e^{ikR}/R) + T.$$

Определить T.

Таблица функций Грина

Общие свойства. Функция Грина $G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{L}(G) - \lambda G = -4\pi\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

и некоторым однородным граничным условиям на граничной поверхности S. Сопряженная к ней функция [см. формулу (7.5.4)] $\widetilde{G}_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{\mathscr{L}}(\widetilde{G}) - \lambda\widetilde{G} = -4\pi\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

и сопряженным граничным условиям [см. формулу (7.5.9)] на граничной поверхности S. *Принцип взаимности* состоит в том, что

$$G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = \widetilde{G}_\lambda(\mathbf{r}_0\,|\,\mathbf{r}).$$

Если оператор $\mathscr{L}$ эрмитов (если его сопряженный и комплексно сопряженный операторы совпадают), то функция G_λ также эрмитова. В этом случае собственные значения λ_n оператора $\mathscr{L}$,

$$\mathscr{L}(\psi_n) - \lambda_n\psi_n = 0,$$

вещественны, собственные функции ψ_n взаимно ортогональны и

$$G_\lambda(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = 4\pi\sum_n \frac{\overline{\psi}_n(\mathbf{r}_0)\,\psi_n(\mathbf{r})}{N_n(\lambda - \lambda_n)},$$

где $N_n = \int |\psi_n|^2\,dV$. Если $\mathscr{L}$ не эрмитов, то собственные функции Φ_n эрмитово сопряженного уравнения

$$\mathscr{L}^*(\Phi_n) - \mu_n\Phi_n = 0, \quad \overline{\mathscr{L}}^* = \widetilde{\mathscr{L}}, \quad \mu_n = \overline{\lambda}_n,$$

могут отличаться от собственных функций ψ_n, и как в той, так и в другой системе функции могут не быть взаимно ортогональными. Однако