

## Решение уравнений Лапласа и Пуассона

Мы в общем завершили изучение свойств и поведения полей. Мы рассмотрели различные виды полей, важные для физики, исследовали разнообразные уравнения и граничные условия, позволяющие строить поля, соответствующие в той или иной степени заданной физической картине, обсудили различные математические методы, при помощи которых уравнения могут быть решены, а граничные условия удовлетворены. Оставшаяся часть настоящей работы посвящается более или менее систематическому применению этих общих методов и результатов к конкретным физическим задачам.

В ходе предыдущих исследований мы уже рассмотрели многочисленные приложения общей теории в качестве примеров, выясняющих тот или иной вопрос; таким образом, характер возникающих задач и методы их решения в основном уже знакомы нам. Теперь необходимо систематически изложить, как применяются эти методы для решения новых задач, какие методы применять в первую очередь в тех или иных случаях и т. д. Этому будет посвящена остальная часть книги.

Следует еще раз подчеркнуть, что эта книга посвящена методам теоретической физики, математическому аппарату, который применяется при решении проблем во многих областях физики. Следовательно, мы ограничимся здесь изложением физического содержания рассматриваемых задач, достаточным лишь для того, чтобы показать их связь с физикой в целом, но не для того, чтобы дать связную картину физических явлений со всеми их подробностями. Мы будем часто переходить от одной области физики к другой, не всегда соблюдая логическое единство, показывая (мы надеемся, что это нам удастся), как данный математический аппарат может быть использован при решении задач, характерных для большого числа полей разнообразной природы.

Мы главным образом будем заниматься применениями наиболее современных методов расчета. Более простых приемов теоретической физики мы касались в различных местах предшествующей части этой книги, и они освещены во многих хорошо известных курсах. Но, как нам кажется, имеет смысл изложить здесь менее известные методы. Конечно, в результате этого чтение последующих глав книги будет затруднено для более или менее случайного читателя. Во многих местах ему будет трудно разглядеть за деревьями лес. Но мы надеемся, что за массой деталей более внимательный читатель в конце концов почувствует характер, дух метода и начнет приобретать то полуинтуитивное «чувство» новой проблемы, которому так трудно научить, но которое является таким необходимым качеством для физика-теоретика.

Мы начнем с рассмотрения простейших уравнений: уравнения Лапласа  $\nabla^2\psi = 0$  и соответствующего ему неоднородного уравнения — уравнения Пуассона  $\nabla^2\psi = -4\pi\rho$ . Эти уравнения принадлежат к эллиптическому

типу, и поэтому к ним необходимо добавить условия Дирихле или Неймана на замкнутой границе. Возвращаясь к изложенному на стр. 18 и 643 тома I, напомним, что уравнение Лапласа эквивалентно требованию, чтобы функция  $\psi$  не достигала ни максимума, ни минимума внутри области и чтобы значение  $\psi$  в каждой точке равнялось бы среднему из значений  $\psi$  в соседних точках.

Мы развили два метода для удовлетворения граничных условий, связанных соответственно с использованием собственных функций и функции Грина. Большей частью мы будем использовать оба этих метода, разлагая функцию Грина в ряд по собственным функциям в подходящей системе координат. В частном случае при решении уравнения Лапласа для двух измерений несколько весьма эффективных специальных методов дают нам свойства функций комплексного переменного и конформные отображения. К сожалению, эти методы не могут быть распространены на трехмерный случай, по крайней мере в их полной общности.

Уравнение Лапласа, как мы видели в гл. 2 и 3, появляется в гравитационных или электростатических проблемах; решения его суть электропотенциальные или гравитационные потенциалы. Границами обычно являются поверхности проводников, а граничные условия — условиями Дирихле в том случае, когда задан потенциал проводника. Уравнение Лапласа появляется также в гидродинамике при изучении стационарного безвихревого потока несжимаемой жидкости; решением его является потенциал скоростей (или функция тока), граничные условия суть условия Неймана, возникающие из простого требования, чтобы жидкость не могла проникать сквозь твердые границы. К этому уравнению приходят также при описании установившегося потока тепла, стационарной (установившейся) диффузии в растворе (или диффузии нейтронов) и при исследовании многих других установившихся процессов. Скалярное поле, удовлетворяющее этому уравнению и граничным условиям, является *потенциалом*, его градиент пропорционален скорости потока или силе.

Когда имеются «источники» или «стоки», или «заряды», создающие поле, мы должны пользоваться уравнением Пуассона, где величина  $\rho$  есть плотность распределения источников или зарядов. При этом частное решение неоднородного уравнения строится с помощью функции Грина для свободного пространства, а граничные условия удовлетворяются подходящим выбором решений уравнения Лапласа.

Эти задачи будут последовательно рассмотрены для различных систем разделяющих координат, каждая из которых применяется для соответствующих видов граничных поверхностей. Сначала мы изучим двумерный случай с его специфическими методами, основанными на свойствах аналитических функций, а затем перейдем к трехмерному случаю, где имеющийся в нашем распоряжении аппарат более ограничен.

## 10.1. Решения в двумерном случае

В соответствии со сказанным на стр. 474—478 тома I в двумерном случае координатная система может быть выражена в декартовых координатах  $x, y$  с помощью функции  $\omega(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$ . вещественная и мнимая части  $\omega = \xi_1 + i\xi_2$  являются ортогональными координатами с тем специальным свойством, что соответствующие коэффициенты Ламе  $h_1$  и  $h_2$  равны (иными словами, отображение  $\omega \rightarrow z$  конформно). Поэтому уравнение Лапласа имеет особенно простую форму

$$\nabla^2\psi = \left| \frac{d\omega}{dz} \right|^2 \left[ \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_2^2} \right] = 0, \quad (10.1.1)$$

а решения, представимые при помощи собственных функций, можно найти сразу для большого числа координатных систем.

Решения, являющиеся произведениями функций от одной переменной, могут иметь различный вид:

$$\xi_1, \xi_2, e^{ik\xi_1 \pm k\xi_2}, \sin(k\xi_1) \operatorname{sh}(k\xi_2), \operatorname{ch}(k\xi_1) \sin(k\xi_2) \text{ и т. д.} \quad (10.1.2)$$

Решением наиболее простого уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \psi = \left| \frac{d\omega}{dz} \right|^2 \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} \right] = -4\pi \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (10.1.3)$$

соответствующего единичному «заряду», сосредоточенному в точке  $(x_0, y_0)$ , является, согласно формуле (7.1.9), функция Грина

$$G(x, y | x_0, y_0) = \operatorname{Re} [-2 \ln(z - z_0)] = \ln(1/|z - z_0|^2), \quad (10.1.4)$$

которая, конечно, должна быть преобразована к новым переменным  $\omega$ ,  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Дальнейшие рассуждения более полезно проводить для какой-нибудь конкретной системы координат.

**Декартовы координаты.** Эти простейшие координаты удобны для бесконечных плоских границ (параллельных одна другой) и для областей, заключенных в прямоугольные призматические границы. Например,

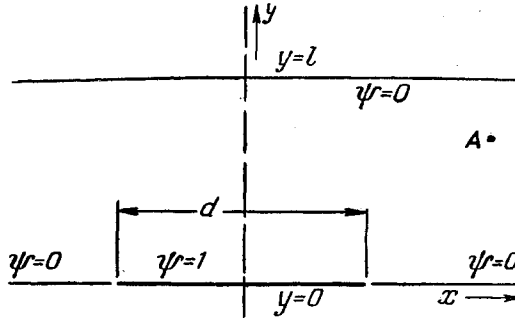


Рис. 10.1. Потенциал между двумя плоскостями с граничными значениями, зависящими только от  $x$ .

в полупространстве  $y > 0$  (граничная плоскость  $y = 0$ ) с граничными значениями потенциала, зависящими только от  $x$ , мы пользуемся частными решениями  $e^{-ky \pm ikx}$ , так как выбранная зависимость от  $y$  обеспечивает стремление решения к нулю при  $y \rightarrow \infty$ , а зависимость от  $x$  позволяет получить собственные функции для области  $-\infty < x < \infty$ . Так как эта область бесконечна, то спектр собственных значений непрерывен и  $k^2$  изменяется от 0 до  $\infty$ . Этот случай был уже разобран в гл. 6. Формула (6.3.3) дает нам выражение для потенциала при положительных  $y$ , если вдоль границы  $y = 0$  задан потенциал  $\phi_0(x)$ .

В качестве примера можно вычислить распределение потенциала для конфигурации пластин, изображенной на рис. 10.1. Полоса шириной  $d$  имеет единичный потенциал, а остальная часть плоскости  $y = 0$  имеет нулевой потенциал, плоскость  $y = l$  также имеет нулевой потенциал. Тогда, используя видоизмененную формулу (6.3.3), получаем

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{i\infty} \frac{\operatorname{sh}[k(l-y)]}{\operatorname{sh}(kl)} dk \int_{-d/2}^{d/2} \cos[k(\xi - x)] d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-d/2}^{d/2} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[k(l-y)]}{\operatorname{sh}(kl)} e^{ik(\xi-x)} dk \right\}. \end{aligned}$$

Интеграл по  $k$  может быть вычислен при помощи контурного интегрирования. Если  $(\xi - x) > 0$ , мы замыкаем контур полуокружностью бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости  $k$ . Тогда интеграл равен умноженной на  $2\pi i$  сумме вычетов по всем полюсам подынтегральной функции в верхней полуплоскости (так как при  $y < l$  и  $\xi > x$  интеграл по верхней полуокружности равен нулю). Полюсы расположены в нулях функции  $\text{sh}(kl)$ , т. е. при  $k = i \frac{n\pi}{l}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Несколько громоздкие алгебраические выкладки приводят к выражению

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \int_{-d/2}^{d/2} e^{-(n\pi/l)|\xi-x|} d\xi = \\ &= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \left[ 1 - e^{-n\pi d/2l} \text{ch}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right], & |x| < \frac{1}{2} d, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) e^{-n\pi|x|/l} \text{sh}\left(\frac{n\pi d}{2l}\right), & |x| > \frac{1}{2} d. \end{cases} \end{aligned}$$

Естественно, что если потенциал полосы равняется  $V$ , а не 1, то результат надо будет умножить на  $V$ .

Таким образом, наш интеграл по собственным функциям вдоль оси  $x$  оказался разложенным в ряд по собственным функциям. Если раскрыть квадратные скобки в выражении, применяемом при  $|x| < \frac{1}{2} d$ , то первый из получающихся рядов оказывается разложением простой функции  $lf(y)$ , где

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) = 1 - \frac{y}{l}, \quad 0 < y \leq l.$$

Этот ряд сходится условно и, следовательно, его нельзя почленно дифференцировать (это связано с тем, что весьма неестественно выражать рядом по синусам функцию, равную единице при  $y=0$ ). Если все же использовать это конечное выражение для ряда, то можно записать

$$\psi(x, y) = \begin{cases} l\left(1 - \frac{y}{l}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n\pi} e^{-n\pi d/2l} \text{ch}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), & |x| < \frac{1}{2} d, \\ \frac{1}{2} l\left(1 - \frac{y}{l}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi} e^{-n\pi d/l} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), & |x| = \frac{1}{2} d, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n\pi} e^{-n\pi|x|/l} \text{sh}\left(\frac{n\pi d}{2l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), & |x| > \frac{1}{2} d. \end{cases} \quad (10.1.5)$$

Эти ряды можно почленно дифференцировать всюду, исключая  $x = \pm d$ ,  $y = 0$ , где имеется разрыв потенциала. Заметим, что конечное выражение  $1 - y/l$  само является решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим граничным условиям при  $y=0$  и  $y=l$  для части области изменения  $x$ .

Отметим, что для  $|x|$ , значительно превосходящего  $d/2$  (например, в точке  $A$  на рис. 10.1), третий ряд сходится столь быстро, что суще-

стবেন только первый его член и

$$\psi(x, y) \simeq \frac{2l}{\pi} e^{-\pi|x|/l} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi d}{2l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right), \quad |x| \gg \frac{1}{2}d.$$

Плотность заряда на полосе, где потенциал равен единице, получается по формуле  $\sigma = -(1/4\pi)(\partial\psi/\partial y)$  при  $y=0$ . Так как мы избавились от недифференцируемой части ряда, то для плотности заряда получаем выражение

$$\sigma(x) = \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi d/2l} \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad |x| < \frac{1}{2}d.$$

Используя разложение  $\ln(1-x) = -\sum \frac{x^n}{n}$ , мы можем получить конечное выражение для заряда, приходящегося на единицу длины полосы между  $-x$  и  $+x$  ( $|x| < \frac{1}{2}d$ ):

$$Q = \int_{-x}^x \sigma dx = \frac{x}{2\pi} + \frac{l}{\pi^2} \ln \left[ \frac{e^{\pi d/2l} - e^{-\pi x/l}}{e^{\pi d/2l} - e^{+\pi x/l}} \right], \quad 0 < x < \frac{1}{2}d. \quad (10.1.6)$$

Эта функция имеет логарифмическую особенность при  $x \rightarrow \frac{1}{2}d$  (когда мы определяем полный заряд, размещенный на полосе), потому что плотность заряда у внешнего края полосы стремится к бесконечности благодаря близкому соседству проводящей плоскости, имеющей нулевой потенциал, каковой является вся оставшаяся часть плоскости  $y=0$ . Когда  $d$  велико по сравнению с  $l$ , логарифмический член мал по сравнению с первым членом всюду, исключая близкую окрестность края ( $x \rightarrow \frac{1}{2}d$ ).

**Прямоугольная призма, нагреваемая с одной стороны.** Для плоских неограниченных областей можно провести много подобных расчетов распределения потенциала. Если же мы займемся областью, лежащей внутри прямоугольной призмы, то нам вместо интеграла Фурье понадобится ряд Фурье. Например, пусть имеется брус с прямоугольным поперечным сечением, показанным на рис. 10.2. Нижняя грань бруса нагрета до температуры  $T=1$ , а на верхней и боковых гранях поддерживается нулевая температура. Температура в точке  $(x, y)$  внутри бруса будет [на основании (6.3.2)] выражаться при помощи ряда

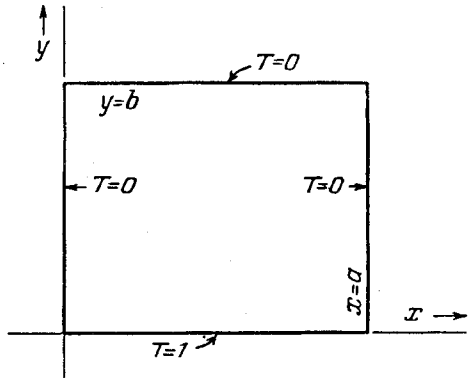


Рис. 10.2. Граничные условия для установившегося потока тепла в прямоугольном бруске.

$$T(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\operatorname{sh}[(\pi/a)(2n+1)(b-y)]}{\operatorname{sh}[(2n+1)(\pi b/a)]} \sin\left[(2n+1)\frac{\pi x}{a}\right], \quad (10.1.7)$$

довольно быстро сходящегося всюду, если только  $y$  не стремится к нулю. Мы можем еще более улучшить сходимость этого ряда, заметив, что для больших значений  $n$  отношение гиперболических синусов сводится к  $e^{-(\pi y/a)(2n+1)}$ . Такой ряд можно просуммировать; прибавляя и вычитая

этот ряд почленно, получим

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1} \left\{ e^{-(\pi y/a)(2n+1)} \sin \left[ \frac{\pi x}{a} (2n+1) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{sh} \left[ \frac{\pi}{a} (b-y) (2n+1) \right] - e^{-(\pi y/a)(2n+1)} \operatorname{sh} \left[ \frac{\pi b}{a} (2n+1) \right]}{\operatorname{sh} [(2n+1) (\pi b/a)]} \sin \left[ \frac{\pi x}{a} (2n+1) \right] \right\} = \\ & = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1} \left\{ \operatorname{Im} [e^{i(\pi/a)(2n+1)(x+iy)}] + \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{sh} [(\pi y/a)(2n+1)]}{\operatorname{sh} [(\pi b/a)(2n+1)]} e^{-(\pi b/a)(2n+1)} \sin \left[ \frac{\pi x}{a} (2n+1) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Так как  $\operatorname{Arth} u = u + \frac{1}{3} u^3 + \dots$ , то мы можем просуммировать первые члены (они образуют ряд, сходящийся более медленно), и получим ( $z = x + iy$ )

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \frac{4}{\pi} \left\{ \operatorname{Im} [\operatorname{Arth} (e^{i\pi z/a})] - \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\pi b/a)(2n+1)} \operatorname{sh} \left[ \frac{\pi y}{a} (2n+1) \right]}{2n+1} \frac{\sin \left[ \frac{\pi x}{a} (2n+1) \right]}{\operatorname{sh} \left[ \frac{\pi b}{a} (2n+1) \right]} \right\} = \\ & = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sin (\pi x/a)}{\operatorname{sh} (\pi y/a)} \right] - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\pi b/a)(2n+1)} \operatorname{sh} \left[ \frac{\pi y}{a} (2n+1) \right]}{\pi (2n+1) \operatorname{sh} \left[ \frac{\pi b}{a} (2n+1) \right]} \sin \left[ \frac{\pi x}{a} (2n+1) \right]. \end{aligned}$$

Последний ряд (и его производная) мал и сходится столь быстро, что обычно достаточно при его рассмотрении ограничиться первым членом. Действительно, первый член ряда всегда меньше 0,1, если  $b$  есть величина того же порядка, что и  $a$ . Поэтому с очень большой степенью точности

$$T(x, y) \simeq \frac{2}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sin (\pi x/a)}{\operatorname{sh} (\pi y/a)} \right] - 2e^{-\pi b/a} \frac{\operatorname{sh} (\pi y/a)}{\operatorname{sh} (\pi b/a)} \sin (\pi x/a) \right\}. \quad (10.1.8)$$

Когда  $b$  стремится к бесконечности и призма превращается в полубесконечную плиту, нагретую по основанию, распределение температуры описывается одним только первым членом этого выражения. По своему происхождению этот первый член есть вещественная часть функции  $-(4i/\pi) \operatorname{Arth} (e^{i\pi z/a}) = \psi + i\chi$ :

$$\psi = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sin (\pi x/a)}{\operatorname{sh} (\pi y/a)} \right], \quad \chi = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Arth} \left[ \frac{\cos (\pi x/a)}{\operatorname{ch} (\pi y/a)} \right].$$

Следовательно, в этом случае мы получаем в замкнутой форме выражения как для потенциала (в данном случае — температуры), так и для функции тока (см. стр. 153, 154 тома I). Остаток ряда в формуле (10.1.8) и в предыдущей может рассматриваться как поправочный член, добавляемый к этому основному решению для того, чтобы потенциал обращался в нуль при  $y = b$ , а не при  $y = \infty$ .

Градиент температуры пропорционален потоку тепла. Как и в предыдущем примере, этот градиент имеет особенность при  $y = 0$  и  $x = 0$ ,  $x = a$ .

**Функция Грина.** В соответствии с формулой (10.1.4) функция Грина в декартовых координатах имеет вид  $-\ln [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]$ . Она обращается в  $\infty$  в точке  $(x_0, y_0)$ , где расположен «источник», и непрерывно убывает по мере удаления от этой точки. Когда границей является бесконечная плоскость, как, например, плоскость  $y=0$ , соответствующее решение может быть получено при помощи метода изображений (см. стр. 753 тома I).

Например, потенциал, соответствующий единичному линейному заряду в точке  $(x_0, y_0)$  (длинная тонкая проволока, перпендикулярная плоскости  $x, y$ , с линейной плотностью заряда, равной единице) и бесконечной проводящей плоскости  $y=0$ , на которой поддерживается нулевой потенциал, равен

$$\phi(x, y) = \ln \left[ \frac{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \right]. \quad (10.1.9)$$

Плотность заряда, индуцированного на заземленной плоскости, равна при этом

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{y=0} = \frac{-y_0/\pi}{(x-x_0)^2+y_0^2}.$$

Она достигает максимума при  $x=x_0$ . Весь заряд в полосе между  $z$  и  $z+1$  (от  $x=-\infty$  до  $x=+\infty$ ) равен единице. Он и должен быть таковым, чтобы уравновесить единичный заряд, приходящийся на единицу длины проволоки.

Силовые линии такого поля образуют семейство координатных линий  $\chi = \text{const}$ , которые всюду ортогональны эквипотенциальным линиям  $\psi = \text{const}$  (см. стр. 25 тома I). Другими словами,  $\text{grad } \chi$  перпендикулярен  $\text{grad } \psi$ , что в рассматриваемом здесь двумерном случае можно получить, полагая

$$\partial \psi / \partial x = \partial \chi / \partial y \quad \text{и} \quad \partial \psi / \partial y = -\partial \chi / \partial x.$$

Но, согласно формуле (4.1.10), эти равенства соответствуют требованию, чтобы потенциальная функция  $\psi$  была вещественной частью, а  $\chi$  мнимой частью некоторой функции комплексного переменного  $z = x + iy$ . В данном случае, если считать, что на единицу длины приходится заряд  $q$ , эта функция равна

$$\begin{aligned} F(z) &= \psi + i\chi = 2q \ln \left( \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0} \right), & z_0 &= x_0 + iy_0, \quad \bar{z}_0 = x_0 - iy_0, \\ \psi &= q \ln \left[ \frac{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \right], & & \\ \chi &= 2q \arctg \left( \frac{y+y_0}{x-x_0} \right) - 2q \arctg \left( \frac{y-y_0}{x-x_0} \right) = \\ &= 2q \arctg \left[ \frac{2y_0(x-x_0)}{(x-x_0)^2+y^2-y_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (10.1.10)$$

Линии  $\psi = \text{const}$ ,  $\chi = \text{const}$  показаны на рис. 10.3,а (они являются координатными линиями биполярной системы координат). Функция  $\chi$  называется *функцией тока* (см. стр. 24 тома I) или функцией силовых линий. К сожалению, этот простой метод разыскания силовых линий применим только для двумерных задач теории потенциала.

Как мы показали на стр. 753, 754 тома I, если «источник» в точке  $(x_0, y_0)$  является однородным линейным зарядом (с линейной плотностью  $q$ ), параллельным оси  $z$ , то  $\psi$  представляет электростатический потенциал, а  $\chi$  силовые линии, и напряженность электрического поля равна  $-\text{grad } \psi$ . С другой стороны, как показывает предыдущее рассмотрение, если «источник» является тонкой проволокой, по которой течет ток  $q$  в поло-

жительном направлении оси  $z$ , то функция  $\psi$  определяет магнитные силовые линии, а функция  $\chi$  — магнитный «потенциал». Этот потенциал многозначен, так как  $\text{arctg } z$  — многозначная функция (зависящая от числа обходов вокруг проволоки), но его градиент в каждой точке равен напряженности магнитного поля в этой точке.

Поэтому, если через точку  $(x_0, y_0)$  проходит такая проволока, по которой в положительном направлении оси  $z$  течет ток  $q$ , а через точку  $(x_0, -y_0)$  проходит вторая проволока с током  $q$ , текущим в противоположном направлении, то функция  $\psi$ , определяемая формулой (10.1.10), описывает магнитные силовые линии возникшего поля, а величина  $\text{grad } \chi$  (равная  $|dF/dz|$ ) равна напряженности этого поля в точке  $(x, y)$ .

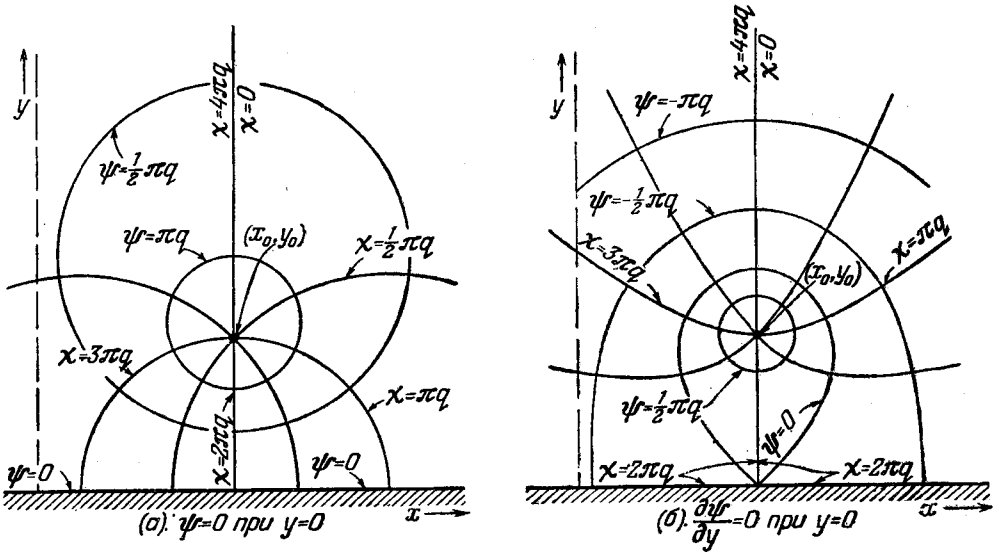


Рис. 10.3. [Потенциал и функция тока для линейного источника и плоскости.

Записав уравнение  $\psi = V$  в координатах  $\xi = x - x_0, \eta = y - y_0$ , для которых точка  $(x_0, y_0)$  играет роль начала координат, мы можем показать, что эквипотенциальные линии  $\psi = V$  являются окружностями. Потенцируя обе части этого уравнения и дополняя до полного квадрата, мы получаем уравнение для линии, соответствующей значению потенциала  $V$ :

$$\xi^2 + \left( \eta - \frac{2y_0}{e^{V/q} - 1} \right)^2 = \left( \frac{2y_0}{e^{V/q} - 1} \right)^2 e^{V/q}.$$

Это уравнение окружности радиуса  $2y_0 e^{V/2q} / (e^{V/q} - 1)$ . Точка  $x_0, y_0 + [2y_0 / (e^{V/q} - 1)]$  является центром этой окружности и лежит несколько выше фокуса  $(x_0, y_0)$  линий тока  $\chi = \text{const}$ .

Для достаточно больших значений  $V$  можно пренебречь степенями  $e^{-V/2q}$  выше первой. В этом приближении радиус окружности, вдоль которой потенциал равен  $V$ , будет равен  $2y_0 e^{-V/2q}$ , а центр окажется в точке  $(x_0, y_0)$ . Поэтому, если проволока такого радиуса с центром в точке  $(x_0, y_0)$  заряжена  $q$  единицами на единицу длины, то ее потенциал по отношению к потенциалу заземленной плоскости  $y = 0$  будет равен  $V$ .

Обращая эти рассуждения, мы теперь можем найти заряд, необходимый для того, чтобы потенциал проволоки радиуса  $r$  с центром, отстоящим на расстояние  $y_0$  от заземленной плоскости, превосходил потенциал земли на величину  $V$ . В первом приближении, т. е. учитывая лишь



первую степень  $e^{-V/2q}$ , можно считать

$$\rho \simeq 2y_0 e^{-V/2q} \text{ или } q \simeq \frac{V}{2 \ln(2y_0/\rho)}, \quad \rho \ll y_0.$$

Поэтому емкость, приходящаяся на единицу длины проволоки радиуса  $\rho$  с центром, удаленным на расстояние  $y_0$  ( $y_0 \gg \rho$ ) от проводящей плоскости, равна

$$C = q/V \simeq [2 \ln(2y_0/\rho)]^{-1} \quad (10.1.11)$$

электростатических единиц. Для проволок больших радиусов нам пришлось бы пользоваться точными выражениями для радиуса и координат центра. Этот вопрос будет рассмотрен позже.

При другом виде граничных условий, вычисляя потенциал скоростей в случае линейного источника жидкости, расположенного в точке  $(x_0, y_0)$  над твердой плоскостью  $y = 0$ , мы можем воспользоваться методом изображений. В этом случае нормальная производная потенциала скоростей на плоскости  $y = 0$  должна равняться нулю. Этого можно добиться, прибавляя потенциал изображения, а не вычитая его:

$$\begin{aligned} F &= -2q \ln [(z - z_0)(z - \bar{z}_0)] = \psi + i\chi, \\ \psi &= -q \ln \{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2][(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2]\}, \\ \chi &= -2q \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{y - y_0}{x - x_0} \right] - 2q \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{y + y_0}{x - x_0} \right] = \\ &= -2q \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{2y(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + y_0^2 - y^2} \right]. \end{aligned} \quad (10.1.12)$$

Соответствующие эквипотенциальные линии и линии тока показаны на рис. 10.3, б. Функция  $\psi$  соответствует магнитным силовым линиям вокруг провода, по которому течет ток  $q$  и который проходит через точку  $(x_0, y_0)$  над пластиной из мягкого железа, расположенной в плоскости  $y = 0$ . Магнитная проницаемость пластины предполагается столь большой, что магнитное поле всюду нормально к ее поверхности.

Уравнение (2.4.2) показывает, что к этой же задаче сводится и задача о тонкой трубе, помещенной в пористую почву на расстоянии  $y_0$  от плоской непроницаемой для жидкости поверхности. Боковая поверхность трубы пронизана отверстиями, являясь тем самым источником жидкости. Сопротивление почвы потоку обозначим через  $R$ . Полный поток, исходящий из трубы, рассчитанный на единицу длины, равен  $q$ . Этот поток просачивается через почву вдоль линий тока, заданных при помощи функции  $\chi$ . В силу формулы (2.4.2) и следующих, давление в каждой точке равно потенциалу  $\psi$ , умноженному на  $R$ , минус потенциал силы тяжести.

Согласно этому определению, на достаточно большом расстоянии от трубы давление должно было бы стать отрицательным. Поэтому положим, что на достаточно большом расстоянии существуют своего рода «стоки», где жидкость всасывается и давление равно нулю. Предположим, что это происходит на полукруглой поверхности цилиндра с осью, проходящей через точку  $(x_0, 0)$ , радиуса  $D$  ( $D \gg y_0$ ). Тогда, для того чтобы  $\psi$  обращалось в нуль на этой поверхности, надо прибавить  $q \ln(D^2)$  к выражению (10.1.12). Потенциал на поверхности трубы радиуса  $\rho$  ( $\rho \ll y_0$ ) при этом приближенно равен  $\psi \simeq -2q \ln(2\rho y_0/D^2)$ . Тогда давление в трубе, создающее на единицу ее длины поток  $q$ , равно

$$P \simeq y_0 g - 2qR \ln(2\rho y_0/D^2), \quad \rho \ll y_0 \ll D,$$

где  $y_0$  — глубина залегания трубы,  $g$  — увеличение давления при погружении на единицу длины, вызванное силой тяжести,  $R$  — сопротивление почвы потоку,  $\rho$  — радиус трубы (предполагаемый малым по сравнению с  $y_0$ ).

Заметим, что чем *меньше*  $y_0$ , тем большим должно быть избыточное давление в трубе, необходимое для создания заданного потока. Это не является неожиданным, так как, уменьшая  $y_0$ , мы приближаем к трубе непроницаемый слой, который в силу этого больше препятствует созданию потока. Давление в точке  $(x, y)$  равно

$$P = gy - 2qR \ln [(1/D^4)(x^2 + y^2 + y_0^2)^2 - 4(y_0y/D^2)^2],$$

где  $y$  — расстояние от непроницаемого слоя (вниз от него) и где мы положили  $x_0 = 0$ , так как значение  $x_0$  здесь не играет существенной роли.

**Полярные координаты.** При выражении потенциала вокруг уединенной заряженной проволоки удобно ввести полярные координаты

$$\omega = \ln(x + iy) = \zeta + i\varphi, \quad \text{где } \zeta = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad \varphi = \arctg(y/x).$$

Коэффициенты Ламе для этих координат равны  $h_\zeta = h_\varphi = |dz/dw| = e^\zeta$ , а выражение для лапласиана [см. уравнение (10.1.1)]

$$\nabla^2 \psi = e^{-2\zeta} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right], \quad e^\zeta = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Поэтому его частными решениями являются  $\zeta$ ,  $\varphi$ ,  $e^{m\zeta} \cos m\varphi$  и т. п. Каждое решение может быть представлено в виде вещественной части некоторой функции комплексного переменного  $\omega = \zeta + i\varphi = \ln z$ .

Если граничными поверхностями служат концентрические круговые цилиндры, то, очевидно, удобно применять эти координаты; например, потенциал вне цилиндра радиуса  $a$  может быть выражен при помощи ряда по функциям вида  $e^{-m\zeta} \cos(m\varphi) = r^{-m} \cos(m\varphi)$  или  $r^{-m} \sin(m\varphi)$ , где  $m$  должно быть целым для того, чтобы  $\psi$  оставалось непрерывной функцией при  $\varphi = 0, 2\pi$ . Используя обычные выражения для рядов Фурье, а также условие, что  $\psi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , мы найдем потенциал вне цилиндра

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \left\{ \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(x) \cos[n(x - \varphi)] dx \right\}, \quad (10.1.13)$$

где  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_n = 2$  при  $n = 1, 2, \dots$ , а  $\psi_0(\varphi)$  есть заданное значение потенциала на поверхности цилиндра.

Например, этот потенциал в случае, когда одна часть боковой поверхности цилиндра ( $0 < \varphi < \pi$ ) имеет потенциал  $+1$ , а другая часть ( $\pi < \varphi < 2\pi$ ) потенциал  $-1$ , равен

$$\psi(r, \varphi) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \left( \frac{a}{r} \right)^{2m+1} \sin[(2m+1)\varphi] = \frac{2}{\pi} \arctg \left[ \frac{2ar \sin \varphi}{r^2 - a^2} \right].$$

Учитывая сказанное на странице 170, замечаем, что функция тока, соответствующая этому потенциалу, равна

$$\chi(r, \varphi) = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Arth} \left[ \frac{2ar \cos \varphi}{r^2 + a^2} \right]. \quad (10.1.14)$$

Далее, потенциал между двумя концентрическими цилиндрами, из которых внутренний (радиуса  $a$ ) имеет нулевой потенциал, а внешний (радиуса  $b$ ) потенциал  $V$ , равен

$$\psi = V \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_1 - \zeta_0} = V \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

**Цилиндры, помещенные в поля.** Во многих задачах теории потенциала нас будет интересовать вопрос о том, как определить влияние границы какой-либо формы на поле, порожденное границами другой формы. Например, нас интересует поле вокруг цилиндра, помещенного внутрь однородного поля, порожденного, например, двумя параллельными плоскостями, расположенными на большом расстоянии друг от друга. В подобных случаях полезно уметь выражать решения уравнения Лапласа, удобно записывающиеся в какой-то одной системе координат, через соответствующие решения в другой системе координат.

Очень простым примером этого является решение  $\psi = -Ex$ , которое соответствует прямоугольным границам и представляет собой однородное поле ( $-\text{grad } \psi = E\mathbf{i}$ ), принимающее в полярных координатах  $r = e^{\zeta}$  и  $\varphi$  вид  $\psi = -Er \cos \varphi$ . Поучительный пример использования подобных соотношений дает задача о цилиндре из диэлектрика, помещенном в однородное поле. Пусть диэлектрическая постоянная цилиндра равна  $\epsilon$ , а граничные условия таковы, что на его поверхности производная потенциала по внешней нормали равна производной потенциала по внутренней нормали, умноженной на  $\epsilon$ , в то время как тангенциальные производные потенциала равны друг другу (или, что то же, внутренний и внешний потенциалы равны на поверхности).

В выражение для потенциала однородного поля  $-Er \cos \varphi$  входит множитель  $\cos \varphi$ . Следовательно, этот множитель должен входить во все члены, так как сопряжение осуществляется на поверхности  $r = a$ , где  $r$  постоянно, а  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ . Внутри цилиндра только частное решение  $Ar \cos \varphi$  имеет нужный нам вид зависимости от  $\varphi$ , так как решение другого вида  $(B/r) \cos \varphi$  не остается конечным при  $r = 0$ . Допустимая форма решения вне цилиндра имеет вид  $Ar \cos \varphi + (B/r) \cos \varphi$  и превращается в  $Ar \cos \varphi$  при достаточно больших значениях  $r$ . Но, по предположению, при достаточно больших  $r$  потенциал поля сводится к выражению  $-Er \cos \varphi$ , соответствующему однородному полю. Следовательно, выражения, подлежащие сопряжению на границе  $r = a$ , таковы:  $\psi = -Er \cos \varphi + (B/r) \cos \varphi$  для  $r > a$  и  $\psi = Ar \cos \varphi$  для  $r < a$ . Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, мы должны иметь  $-Ea + B/a = Aa$  и  $-E - B/a^2 = \epsilon A$ . Решая эти уравнения, получим

$$\psi(r, \varphi) = \begin{cases} -Er \cos \varphi + E \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{a^2}{r} \cos \varphi, & r > a, \\ -\frac{2E}{\epsilon + 1} r \cos \varphi, & r < a. \end{cases}$$

Другой, более простой пример представляет цилиндр, погруженный в поток идеальной, несжимаемой жидкости, имеющей скорость  $v_0$ . Здесь граничные условия заключаются в том, что при  $r \rightarrow \infty$  скорость (т. е.  $\text{grad } \psi$ ) должна равняться  $v_0$  по величине и должна быть направлена по оси  $x$ , а при  $r = a$  должна быть направлена по касательной к поверхности цилиндра ( $\partial\psi/\partial r = 0$ ). Решение, удовлетворяющее этим требованиям, имеет вид

$$\psi = v_0 r \cos \varphi + v_0 (a^2/r) \cos \varphi, \quad \chi = v_0 r \sin \varphi - v_0 (a^2/r) \sin \varphi.$$

Эквипотенциальные линии и линии тока показаны на рис. 10.4.

**Поток вязкой жидкости.** Выражения (2.3.14) и (2.3.15) показывают, что соотношение между давлением и скоростью жидкости в медленном установившемся потоке вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\text{grad } p = -2\eta \text{rot } \omega,$$

где  $p$  есть давление в жидкости,  $\eta$  — ее коэффициент вязкости,  $\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$  — вихревой вектор (или просто вихрь), а  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости.

Мы пренебрегаем объемными силами  $\mathbf{F}$ , такими как, например, сила тяжести; мы считаем, что  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , так как жидкость предполагается несжимаемой; мы пренебрегаем членом  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ , так как  $\mathbf{v}$  предполагается малой.

В двумерном потоке  $\mathbf{v} = i v_x + j v_y$ , вихревой вектор  $\omega$  направлен по оси  $z$  и имеет величину

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Уравнения, связывающие давление  $p$  с величиной вихря  $\omega$  в случае двух измерений, имеют вид

$$\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

т. е. являются уравнениями Коши—Римана, связывающими вещественную и мнимую части аналитической функции комплексного переменного.

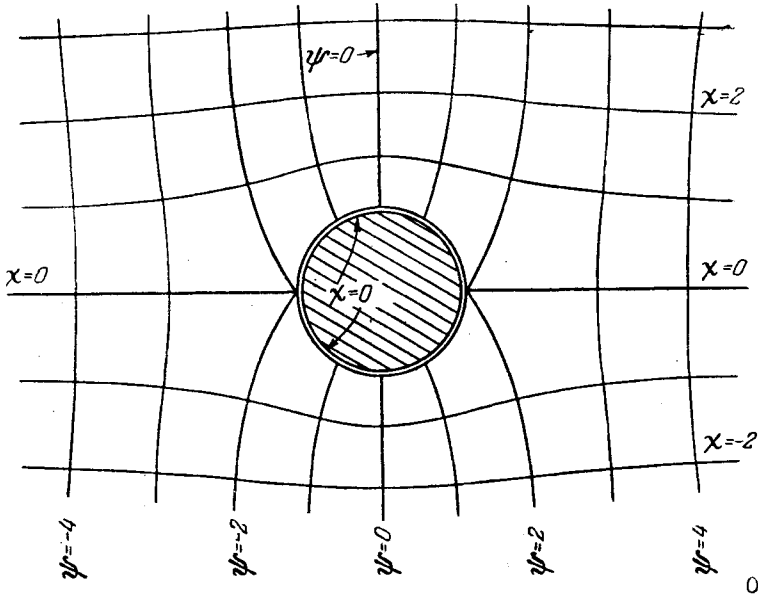


Рис. 10.4. Потенциал скоростей и функция тока для безвихревого потока, обтекающего цилиндр.

Поэтому, если мы сможем найти подходящую функцию  $W(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$ , вещественная часть которой равна  $p/2\eta$ , а мнимая часть  $-\omega$ , то можно будет найти давление и вихрь.

С другой стороны, если существует функция тока  $U(x, y)$ , производные которой связаны со скоростью соотношениями

$$\frac{\partial U}{\partial y} = v_x, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -v_y$$

(другими словами  $\operatorname{rot} U \mathbf{k} = \mathbf{v}$ ), то  $U$  связана с вихрем уравнением Пуассона

$$\nabla^2 U = -2\omega.$$

Поэтому, определив  $U$  (либо  $W$ ), удовлетворяющую граничным условиям, мы сможем найти  $\omega$  и  $p$  (либо  $U$  и  $p$ ) и решить задачу о движении вязкой жидкости.

Очень простым является случай двумерного (параллельного плоскости  $x, y$ ) потока вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями,

одна из которых имеет уравнение  $y = +b$ , а другая  $y = -b$ . Весь поток параллелен оси  $x$ , а скорость жидкости в точке  $(x, y)$  равна

$$v_x = \frac{3Q}{4b^3} (b^2 - y^2),$$

где  $Q$  есть объем жидкости, протекающей в единицу времени между плоскостями, рассчитанный на единицу глубины. Отсюда следует, что  $U = \frac{Q}{b^3} \left( \frac{3}{4} b^2 y - \frac{1}{4} y^3 \right)$ . Лапласиан  $U$  равен  $-\frac{3Q}{2b^3} y$ , т. е. удвоенной мнимой части аналитической функции

$$W = -\frac{3Q}{4b^3} [x + iy - x_0] = \frac{p}{2\gamma} - i\omega.$$

Поэтому давление равно  $(3\eta Q/2b^3)(x_0 - x)$ , где  $x_0$  — край пластин (где давление равно нулю); вихрь равен  $(3Q/4b^3)y$  и по абсолютной величине принимает наибольшее значение вблизи пластин при  $y = \pm b$ , что не является неожиданным.

Эти соотношения могут быть также выражены при помощи криволинейных координат на плоскости. Положим  $f(\zeta + i\varphi) = x + iy$ , где  $\zeta$  и  $\varphi$  — новые координаты. Оба коэффициента Ламе  $h_\zeta$  и  $h_\varphi$  равны  $|df/dw|$ , где  $w = \zeta + i\varphi$ , а лапласиан в новых координатах равен, согласно (4.1.11),

$$\nabla^2 U = 4 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} \right) = \frac{4}{h^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial w \partial \bar{w}} \right),$$

где  $h^2 = |df/dw|^2$ , а  $w$  и  $\bar{w}$  следует рассматривать как независимые переменные.

Представим теперь функцию тока  $U$  в виде суммы двух функций:

$$U = \frac{i}{8} [f(w) F(\bar{w}) - f(\bar{w}) F(w)] + U_0 = \frac{1}{4} \operatorname{Im} [f(\bar{w}) F(w)] + U_0, \quad (10.1.15)$$

где  $f(w)$  — функция, определяющая координаты  $\xi$  и  $\varphi$ ,  $F$  — произвольная функция от  $w$  или  $\bar{w}$ , а  $U_0$  — решение уравнения Лапласа  $\nabla^2 U_0 = 0$ ;  $F$  и  $U_0$  подбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия задачи. Выражение, стоящее в скобках, не является аналитической функцией, так как оно одновременно зависит от  $w$  и  $\bar{w}$ . Однако из него мы можем получить скорость путем дифференцирования:

$$v_\zeta = \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \zeta}.$$

Так как выражение, стоящее в скобках, не является мнимой частью аналитической функции, то оно необязательно удовлетворяет уравнению Лапласа. Мы имели это в виду, так как в соответствии с предшествующими рассуждениями вихрь равен

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{2} \nabla^2 U = -\frac{i}{4h^2} [f'(w) F'(\bar{w}) - f'(\bar{w}) F'(w)] = \\ &= \frac{i}{4} \left[ \frac{F'(w)}{f'(w)} - \frac{F'(\bar{w})}{f'(\bar{w})} \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[ \frac{F'(w)}{f'(w)} \right], \end{aligned}$$

где штрихи обозначают дифференцирование по  $w$  или по  $\bar{w}$ . Но этот результат показывает, что если выбрать  $U$  в виде (10.1.15), то вихрь будет мнимой частью некоторой функции от  $w = \zeta + i\varphi$ , следовательно, на основании проведенных выше рассуждений для медленного потока давление и вихрь задаются при помощи комплексной функции

$$W = \frac{1}{2} \frac{F'(w)}{f'(w)} = \frac{p}{2\gamma} + \operatorname{const} - i\omega. \quad (10.1.16)$$

Чтобы разобрать пример, не столь тривиальный, как пример с параллельными пластинами, предположим, что мы наклонили пластины так, что угол между ними равен  $2\alpha$ . В полярных координатах уравнение одной из граничных плоскостей имеет вид  $\varphi = \alpha$ , а другой  $\varphi = -\alpha$ . Предположим, что жидкость прогоняется из наиболее узкой области, например со стороны  $r = r_0$ , где расстояние между пластинами равно  $2r_0 \sin \alpha$ , в сторону более широкого раствора при  $r = r_1$ , где расстояние между пластинами равно  $2r_1 \sin \alpha$ . Подходящими являются полярные координаты  $\zeta$  и  $\varphi$ , где  $z = f(\omega) = e^\omega$ ,  $\omega = \zeta + i\varphi$ . Коэффициент Ламе  $h$  равен  $|f'| = e^\zeta$ ;  $x = e^\zeta \cos \varphi$ ,  $y = e^\zeta \sin \varphi$ .

Мы хотели бы найти такую функцию  $F$ , чтобы функция тока  $U$  зависела только от  $\varphi$  и не зависела от  $\zeta$ , так что весь поток был бы радиальным. Чтобы получить такую функцию, попытаемся ее искать в виде  $F(\omega) = Ae^{-\omega}$ . Тогда из уравнения (10.1.15)

$$U = \frac{1}{8} iA [e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}] + B\varphi = B\varphi - \frac{1}{4} A \sin(2\varphi).$$

Функция  $B\varphi$ , являющаяся решением уравнения Лапласа, добавлена, чтобы удовлетворить граничным условиям. Вычисляя  $v$ , находим, что

$$v_r = e^{-\zeta} \left[ B - \frac{1}{2} A \cos(2\varphi) \right], \quad v_\varphi = 0.$$

$v_r$  должна обращаться в нуль при  $\varphi = \pm \alpha$ . Поэтому  $B = \frac{1}{2} A \cos 2\alpha$ .

Определим теперь значение  $A$ , подсчитав полный поток:

$$Q = \int_{-\alpha}^{\alpha} v_r e^\zeta d\varphi = \frac{1}{2} A [2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha],$$

откуда  $A = Q / \left( \alpha \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)$ . Следовательно,

$$F(\omega) = \frac{Qe^{-\omega}}{\alpha \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \quad \text{и} \quad W = \frac{-Qe^{-2\omega}}{2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Окончательное решение имеет, таким образом, следующий вид:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{Q/r}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} [\cos 2\varphi - \cos 2\alpha], \quad v_\varphi = 0, \\ p &= \frac{-2\eta Q}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \left[ \frac{1}{r_0^2} - \frac{\cos 2\varphi}{r^2} \right], \\ \omega &= \frac{Q}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \frac{\sin 2\varphi}{r^2}, \end{aligned} \quad (10.1.17)$$

где мы положили давление равным нулю при  $r = r_0$ ,  $\varphi = 0$ . Перепад давления вдоль оси между  $r_0$  и  $r_1$  равен

$$\frac{2\eta Q}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2 r_0^2}.$$

Как можно видеть, этот метод не является вполне удовлетворительным, поскольку приходится начинать с конца, подбирая различные функции  $F$ , пока не будет найдена (если это удастся) такая функция, которая соответствует физически интересному случаю для некоторой координатной системы. Когда такой случай найден, результаты оказываются полезными, но это не слишком удовлетворительный путь построения теоретической физики.

**Функция Грина в полярных координатах.** Потенциал создаваемый единичным линейным зарядом, расположенным в точке  $(r_0, \varphi_0)$ , является действительной частью комплексной функции [см. уравнение (10.1.4)]

$$-\ln [(z-z_0)^2] = \begin{cases} -2 \ln z + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n, & |z| > |z_0|, \\ -2 \ln z_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n, & |z| < |z_0|, \end{cases}$$

где  $z = re^{i\varphi}$  и  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ . Поэтому потенциал, являющийся функцией Грина, выраженной в полярных координатах, имеет вид

$$G(r, \varphi | r_0, \varphi_0) = \begin{cases} -2 \ln r + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos [n(\varphi - \varphi_0)], & r > r_0, \\ -2 \ln r_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos [n(\varphi_0 - \varphi)], & r < r_0. \end{cases} \quad (10.1.18)$$

При помощи этой функции Грина можно решить задачу о потенциале, который создается линейным зарядом с линейной плотностью  $q$ , находящимся в точке  $(r_0, 0)$ , в присутствии заземленного цилиндра радиуса  $a$  ( $a < r_0$ ) с осью, совпадающей с осью  $z$ . Если бы не было заземленного цилиндра, то в координатах  $(r, \varphi)$  в силу уравнения (10.1.18) потенциал, создаваемый линейным зарядом, выражался бы в виде

$$-2q \ln r_0 + 2q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos(n\varphi), \quad r < r_0.$$

К этому выражению надо прибавить такую комбинацию из членов вида  $(1/r)^n \cos(n\varphi)$ , являющихся решениями уравнения Лапласа, чтобы потенциал обратился в нуль при  $r = a$ . Нетрудно видеть, что такой комбинацией является

$$\psi(r, \varphi) = \begin{cases} 2q \ln \left(\frac{r}{a}\right) - 2q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n - \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \right] \cos(n\varphi), & a < r < r_0, \\ 2q \ln \left(\frac{r_0}{a}\right) - 2q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n - \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \right] \cos(n\varphi), & r > r_0; \end{cases} \quad (10.1.19)$$

появление второго выражения связано с тем фактом, что форма функции Грина различна при  $r > r_0$  и при  $r < r_0$ .

Таким образом, мы прибавили ряд

$$2q \ln \left(\frac{r r_0}{a}\right) - 2q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \cos(n\varphi)$$

к функции Грина  $qG(r, \varphi | r_0, 0)$ . Но этот ряд (с точностью до константы) представляет собой потенциал, создаваемый линейным зарядом с плотностью  $-q$ , помещенным в точке  $r = a^2/r_0$ ,  $\varphi = 0$ , являющейся изображением точки  $(r_0, 0)$  относительно окружности  $r = a$ . Поэтому мы можем за-

писать потенциал, заданный равенством (10.1.19), в виде

$$\begin{aligned} \psi(r, \varphi) &= qG(r, \varphi | r_0, 0) - qG\left(r, \varphi \left| \frac{a^2}{r_0}, 0\right.\right) + 2q \ln\left(\frac{r_0}{a}\right) = \\ &= q \ln \left\{ \frac{(r/a)^2 + (a/r_0)^2 - 2(r/r_0) \cos \varphi}{1 + (r/r_0)^2 - 2(r/r_0) \cos \varphi} \right\}. \end{aligned} \quad (10.1.20)$$

Это выражение, очевидно, можно было получить непосредственно из рассуждений гл. 7 о потенциалах изображений относительно плоскостей, цилиндров и сфер.

Эта функция является вещественной частью функции

$$2q \ln \left[ r_0 \left( z - \frac{a^2}{r_0} \right) / a(z - r_0) \right].$$

Мнимая часть этой функции есть функция

$$\chi(r, \varphi) = 2q \operatorname{arctg} \left[ \frac{(a^2 - r_0^2)(r/r_0) \sin \varphi}{r^2 + a^2 - (r/r_0)(r_0^2 + a^2) \cos \varphi} \right],$$

которая задает силовые линии или линии тока.

Это решение описывает не только распределение потенциала и силовых линий в электростатическом поле, создаваемом линейным зарядом

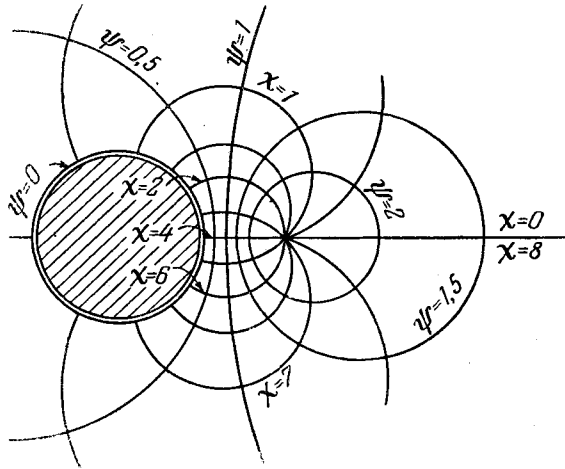


Рис. 10.5. Потенциал и функция тока для источника, расположенного вне заземленного кругового цилиндра.

вокруг заземленного цилиндра. Оно соответствует также случаю установившейся диффузии вещества, поступающего в раствор вдоль прямой, проходящей через точку  $r = r_0$ ,  $\varphi = 0$ , и выделяющегося из раствора вдоль цилиндрической поверхности  $r = a$ . Плотность вещества в каждой точке пропорциональна  $\psi$ . Линии тока и эквипотенциальные линии показаны на рис. 10.5.

В непосредственной близости от точки  $r = r_0$ ,  $\varphi = 0$  эквипотенциальные линии приблизительно совпадают с окружностями. Потенциал в точках окружности радиуса  $\rho$  может быть получен наиболее просто путем подсчета, с точностью до членов первого порядка относительно  $\rho/r_0$ , потенциала  $\psi$  для  $z = r_0 + \rho e^{i\theta}$ :

$$\begin{aligned} V &= \operatorname{Re} \left\{ 2q \ln \left[ r_0 \left( z - \frac{a^2}{r_0} \right) / a(z - r_0) \right] \right\} \simeq \\ &\simeq -2q \operatorname{Re} \left\{ \ln \left[ \rho e^{i\theta} / r_0 \left( r_0 - \frac{a^2}{r_0} \right) \right] \right\} \simeq -2q \ln \left[ \frac{\rho a}{r_0^2 - a^2} \right], \quad r_0 > a \gg \rho. \end{aligned}$$



Исходя из этого, можно вычислить емкость тонкого провода вблизи заземленного цилиндра. Дифференцируя выражение для потенциала, можно определить плотность заряда, индуцированного на цилиндре (или, в случае диффузии, скорость выделения вещества на цилиндре).

**Внутреннее нагревание цилиндров** Функция Грина может быть использована также при решении уравнения Пуассона в случае, когда заряды или источники распределены внутри кругового цилиндра. Типичная проблема такого рода возникает при вычислении распределения температуры внутри уранового цилиндра, нагревающегося изнутри в результате ядерного распада. В каждой точке скорость образования тепла пропорциональна скорости распада в этой точке, которая в свою очередь пропорциональна плотности медленных нейтронов. Если количество тепла, образующегося в единице объема за единицу времени, равно  $q(x, y)$ , а теплопроводность урана равна  $K$ , то температура внутри цилиндра, согласно (2.4.4), удовлетворяет уравнению Пуассона  $\nabla^2 T = -q/K$ .

Для источника тепла, расположенного на прямой, проходящей через точку  $(r_0, \varphi_0)$  внутри цилиндра, ось которого совпадает с осью  $z$ , стационарное распределение температуры задается суммой функции Грина (10.1.18) и решения уравнения Лапласа, выбранного так, чтобы полностью удовлетворялись граничные условия на поверхности цилиндра  $r = a$ . Если на границе задано условие  $T = 0$  при  $r = a$ , то температура в точке  $(r, \varphi)$  равна

$$T(r, \varphi | r_0, \varphi_0) =$$

$$= \frac{q(r_0, \varphi_0)}{4\pi K} \left\{ G(r, \varphi | r_0, \varphi_0) + 2 \ln a - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{r_0 r}{a^2} \right)^n \cos [n(\varphi_0 - \varphi)] \right\}.$$

Если плотность распределения источников тепла во внутренних точках  $(r_0, \varphi_0)$  цилиндра равна  $q(r_0, \varphi_0)$  и не зависит от координаты  $z$ , то температура в точке  $(r, \varphi)$  равна интегралу от  $T(r, \varphi | r_0, \varphi_0)$ , взятому по внутренней части цилиндра:

$$T(r, \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \left\{ \int_0^r r_0 \left[ \ln \left( \frac{a}{r} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{r_0^n r^n}{a^{2n}} - \frac{r_0^n}{r^n} \right) \cos n(\varphi_0 - \varphi) \right] q(r_0, \varphi_0) dr_0 + \int_r^a r_0 \left[ \ln \left( \frac{a}{r_0} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{r_0^n r^n}{a^{2n}} - \frac{r^n}{r_0^n} \right) \cos n(\varphi_0 - \varphi) \right] q(r_0, \varphi_0) dr_0 \right\}. \quad (10.1.21)$$

Если плотность нейтронов изотропна, то  $q$  не зависит от  $\varphi_0$  и выражение для температуры принимает более простой вид:

$$T(r) = \frac{1}{K} \left\{ \ln \left( \frac{a}{r} \right) \int_0^r q(r_0) r_0 dr_0 + \int_r^a \ln \left( \frac{a}{r_0} \right) q(r_0) r_0 dr_0 \right\}.$$

При дальнейшем упрощении мы можем предположить, что скорость распада является наибольшей вблизи внешней поверхности цилиндра и падает с приближением к центру, грубо говоря, в соответствии с формулой  $q(r_0) = (Q/\pi a^2) \left[ (b^2 + r_0^2) / \left( b^2 + \frac{1}{2} a^2 \right) \right]$ . Здесь  $Q$  — общее количество тепла, образующегося в секунду, рассчитанное на единицу длины ци-

линдра. В этом случае мы можем осуществить интегрирование в элементарных функциях и найдем, что

$$T(r) = \frac{Q}{4\pi K} \frac{b^2(a^2 - r^2) + \frac{1}{4}(a^4 - r^4)}{a^2b^2 + \frac{1}{2}a^4}.$$

Как и следовало ожидать, температура максимальна на оси цилиндра, причем чем меньше  $b$  (чем больше тепла выделяется вблизи поверхности), тем меньше максимум температуры, достигаемый в центре, и тем больше градиент температуры вблизи поверхности.

**Потенциал вблизи цилиндра с щелью.** Аппарат функции Грина может быть использован для вычисления потенциала вблизи заземленной металлической цилиндрической оболочки радиуса  $r = a$ , имеющей щель при  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ . (Иными словами, поверхность  $r = a$ ,  $\varphi_2 < \varphi < 2\pi + \varphi_1$  для всех значений  $z$  является металлической оболочкой, а остальная часть поверхности цилиндра от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$  вырезана.) Мы будем исходить из соотношения (7.2.7). Если свободные заряды отсутствуют, то

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint [G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \text{grad}_0 \psi(\mathbf{r}_0^s) - \psi(\mathbf{r}_0^s) \text{grad}_0 G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s)] dA_0.$$

Мы этим воспользуемся двояким образом.

Сначала в качестве поверхности  $S_0$  мы выберем металлическую часть разрезанного цилиндра и возьмем функцию Грина для свободного пространства, определенную равенством (10.1.18). Так как, по предположению, потенциал  $\psi$  равен нулю на этой поверхности, то в подынтегральной функции остается только первый член и мы имеем

$$\psi(r, \varphi) = \frac{a}{4\pi} \int_{\varphi_2}^{2\pi + \varphi_1} G(r, \varphi | a, \beta) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \psi_i(r, \beta) - \frac{\partial}{\partial r} \psi_o(r, \beta) \right]_{r=a} d\beta,$$

где  $\psi_i$  — потенциал поля с внутренней стороны поверхности цилиндра,  $\psi_o$  — потенциал поля с ее внешней стороны. Как мы уже сказали, функция  $G(r, \varphi | a, \beta)$  определяется формулой (10.1.18). Полученное уравнение очень просто интерпретируется: разность нормальных производных  $\psi$  изнутри и извне поверхности, деленная на  $4\pi$ , равна плотности заряда, индуцированного полем на этой поверхности.

Естественно, что искомый потенциал совпадает с потенциалом, порожденным этим зарядом, с точностью до решения уравнения Лапласа, не имеющего особенностей в конечной части плоскости, которое мы должны добавить для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на бесконечности.

Точно решить это интегральное уравнение не очень просто, но мы можем с его помощью получить искомое поле в первом приближении. Предположим, что разрезанный цилиндр помещен в однородное поле, имеющее на большом расстоянии от цилиндра напряженность  $E$ . Тогда, в качестве нулевого приближения, положим потенциал вне цилиндра равным  $\psi_o^{(0)} = -Er \cos \varphi + E(a^2/r) \cos \varphi$ , а внутри цилиндра  $\psi_i^{(0)} = 0$ . При этом величина, стоящая в скобках под знаком интеграла, равна  $2E \cos \varphi$ , т. е. в  $4\pi$  раз больше заряда, который индуцируется на цилиндре без щели. В соответствии с проведенными рассуждениями первое приближение для потенциала внутри или вне разрезанного цилиндра равно

$$\psi(r, \varphi) \approx -Er \cos \varphi + \frac{Ea}{2\pi} \int_{\varphi_2}^{2\pi + \varphi_1} G(r, \varphi | a, \beta) \cos \beta d\beta,$$

где первый член добавлен для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на бесконечности.

Заметим, что если  $\varphi_1 = \varphi_2$  (щель отсутствует), то  $\psi_0 = -Er \cos \varphi + E(a^2/r) \cos \varphi$ , а  $\psi_i = 0$ . как это и должно быть, а если же нет никакого цилиндра (т. е. весь он оказался щелью). то  $\psi_0 = \psi_i = -Er \cos \varphi$ . Для промежуточных случаев мы подставляем в полученное выражение ряд (10.1.18). Мы получим, например, для внутреннего потенциала

$$\psi_i^{(1)} \approx \frac{Ea}{\pi} \ln a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \beta \, d\beta - \frac{Ea}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \beta \cos [n(\varphi - \beta)] \, d\beta;$$

здесь мы использовали ортогональность косинусов для того, чтобы заменить интегрирование по металлической поверхности ( $\varphi_2 < \varphi < 2\pi + \varphi_1$ ) интегрированием по щели ( $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ ). Очевидно, этот потенциал в точности совпадает с взятым с обратным знаком потенциалом, создаваемым зарядом, устраненным при образовании щели. Этот потенциал не равен в точности нулю на остальной части цилиндра, но в конце концов это только лишь первое приближение.

В качестве следующего приближения мы построим потенциал, равный нулю при  $r = a$ ,  $\varphi_2 < \varphi < 2\pi + \varphi_1$ , значения которого совпадают со значениями первого приближения при  $r = a$ ,  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ . Для этого мы применим функцию Грина, заданную формулой (10.1.19), которая обращается в нуль при  $r = a$ . Вновь используя (7.2.7), получим

$$\psi(r, \varphi) = -\frac{a}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \psi_i^{(1)}(a, \gamma) \left[ \pm \frac{\partial}{\partial r_0} G(r, \varphi | r_0, \gamma) \right]_{r_0=a} d\gamma,$$

где знак плюс у производной берется для  $r < a$ , знак минус для  $r > a$ . При  $r = a$  для  $\psi_i^{(1)}$  получается ряд

$$\psi_i^{(1)}(a, \gamma) = Ea \ln(a) X_{10} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ea}{n} \left[ X_{1n} \cos(n\varphi) + Y_{1n} \sin(n\varphi) \right],$$

где

$$X_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos(m\gamma) \cos(n\gamma) \, d\gamma = \left[ \frac{\sin[(m-n)\gamma]}{2\pi(m-n)} + \frac{\sin[(m+n)\gamma]}{2\pi(m+n)} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

$$Y_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos(m\gamma) \sin(n\gamma) \, d\gamma = \left[ \frac{\cos[(m-n)\gamma]}{2\pi(m-n)} - \frac{\cos[(m+n)\gamma]}{2\pi(m+n)} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

В случае, когда  $\varphi_2 = \varphi_1$  (щель отсутствует), все коэффициенты  $X$  и  $Y$  равны нулю, когда же  $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$  (цилиндр отсутствует),  $X_{mn} = 2/\varepsilon_m$ , а все остальные коэффициенты равны нулю ( $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_m = 2$  для  $m > 0$ ).

Потенциал внутри разрезанного цилиндра во втором приближении получается при помощи функции Грина подобно тому, как была получена формула (10.1.19) для  $r < a$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_0} G(r, \varphi | r_0, \gamma) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial r_0} \left\{ 2 \ln \left( \frac{a}{r_0} \right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^m - \left( \frac{rr_0}{a^2} \right)^m \right] \cos [m(\varphi - \gamma)] \right\} \simeq \\ &\simeq -\frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left( \frac{r}{a} \right)^m \cos [m(\varphi - \gamma)] \quad \text{при } r_0 \rightarrow a. \end{aligned}$$

Подставляя все это в уравнение для второго приближения, получим

$$\psi_i^{(2)}(r, \varphi) \approx \frac{1}{2} aE \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left(\frac{r}{a}\right)^m [A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)],$$

где

$$A_m = X_{10} X_{m0} \ln a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (X_{1n} X_{mn} + Y_{1n} Y_{mn}),$$

$$B_m = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (X_{1n} Y_{nm} + Y_{1n} Z_{mn})$$

и

$$Z_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin(m\gamma) \sin(n\gamma) d\gamma = \left[ \frac{\sin[(m-n)\gamma]}{2\pi(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)\gamma]}{2\pi(m+n)} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Таким образом, потенциал в центре цилиндра равен

$$\psi_i(0) = \frac{1}{2} aE \left\{ (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) (\varphi_2 - \varphi_1) \ln a / \pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} (\sin n\varphi_2 - \sin n\varphi_1) \left[ \frac{\sin[(n+1)\gamma]}{n+1} + \frac{\sin[(n-1)\gamma]}{n-1} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right\}.$$

То же приближение для потенциала вне цилиндра имеет вид

$$\psi_o^{(2)}(r, \varphi) \approx -Er \cos \varphi + E \frac{a^2}{r} \cos \varphi + \frac{1}{2} aE \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left(\frac{a}{r}\right)^m [A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)],$$

где первые два члена введены, чтобы удовлетворить условиям на бесконечности. Эти члены, очевидно, равны нулю при  $r = a$ , и ряд равен нулю при  $r = a$ ,  $\varphi_2 < \varphi < 2\pi + \varphi_1$  в точности так же, как и ряд для  $\psi_i$ . Поэтому эти два выражения полностью совпадают на щели, однако непрерывность градиента потенциала в щели не обеспечена. Еще лучшее приближение может быть получено, если проинтегрировать по металлической поверхности разность производных этих решений, как мы это сделали для  $\psi_o^{(0)}$  и  $\psi_i^{(0)}$ , и т. д.

Другой метод вычисления поля предполагает, что нам известен потенциал  $\psi_s(\varphi)$  в щели. Можно предположить, что щель расположена в промежутке  $-\frac{1}{2}\Delta < \varphi < \frac{1}{2}\Delta$ . Тогда потенциал внутри и вне цилиндра равен

$$\psi(r, \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} [A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)] \left(\frac{r}{a}\right)^m, & r < a, \\ E \left[ \frac{a^2}{r} - r \right] \cos(\varphi - \alpha) + \sum_{m=0}^{\infty} [A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)] \left(\frac{a}{r}\right)^m, & r > a, \end{cases}$$

где

$$A_m = \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \psi_s(u) \cos(mu) du, \quad (10.1.22)$$

$$B_m = \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \psi_s(u) \sin(mu) du.$$

На стр. 195, 196 мы увидим, что в некоторых случаях возможно высказать довольно точные предположения относительно зависимости  $\psi_s(u)$  от  $u$  в промежутке  $\pm \frac{1}{2}\Delta$ . Тогда мы можем непосредственно получить выражение для потенциала. Можно также использовать эту формулу, сделав заранее предположение о виде функции  $\psi_s$ , а затем так подобрать функцию этого вида, чтобы осуществить сопряжение наилучшим образом. Как мы видели, производная функции  $\psi(r, \varphi)$  испытывает скачок при  $r = a$ ,  $-\frac{1}{2}\Delta < \varphi < \frac{1}{2}\Delta$ . Можно так подбирать функции  $\psi$ , чтобы средняя величина этого скачка вдоль щели равнялась нулю, или так, чтобы среднее квадратичное скачка было минимальным.

**Эллиптические координаты.** Из равенства (5.1.15) видно, что преобразование  $w = \mu + i\vartheta = \text{Ar ch}(2z/a)$  приводит к эллиптическим координатам

$$x = \frac{1}{2} a \text{ch } \mu \cos \vartheta, \quad y = \frac{1}{2} a \text{sh } \mu \sin \vartheta;$$

$$h_\mu = h_\vartheta = \left| \frac{dz}{dw} \right| = \frac{1}{2} a \sqrt{\text{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta} = \frac{1}{2} a \sqrt{\text{ch}^2 \mu - \cos^2 \vartheta},$$

$$r = \frac{1}{2} a \sqrt{\text{ch}^2 \mu - \sin^2 \vartheta}, \quad \varphi = \text{arc tg} [\text{th } \mu \text{tg } \vartheta], \quad (10.1.23)$$

$$r_1 = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} a\right)^2 + y^2} = \frac{1}{2} a (\text{ch } \mu + \cos \vartheta),$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2} a\right)^2 + y^2} = \frac{1}{2} a (\text{ch } \mu - \cos \vartheta),$$

где кривые  $\mu = \text{const}$  и  $\vartheta = \text{const}$  представляют собой эллипсы и гиперболы с фокусами в точках  $x = \pm \frac{1}{2} a$ . Они показаны на рис. 10.6.

Как и выше, частными решениями уравнения Лапласа являются  $\mu$ ,  $\vartheta$ ,  $e^\mu \cos \vartheta$ ,  $\text{ch}(n\mu) \sin(n\vartheta)$  и т. п. Поверхностями, которые удобно рассматривать в этой системе координат, являются эллиптические цилиндры с большой осью, равной  $a \text{ch } \mu$ , и малой осью  $a \text{sh } \mu$  (поверхности  $\mu = \text{const}$ ), в частности, их предельный случай  $\mu = 0$ , которому соответствует плоская полоса ширины  $a$ , симметричная относительно оси  $z$ , или гиперболические цилиндры  $\vartheta = \text{const}$ , в частности, их предельный случай  $\vartheta = 0, \pi$ , которому соответствует плоскость  $(x, z)$  с вырезанной полосой ширины  $a$ , симметричной относительно оси  $z$ .

Например, потенциал скоростей несжимаемой идеальной жидкости, протекающей через щель ширины  $a$  в плоской преграде, по обе стороны от которой пространство заполнено жидкостью, равен

$$\phi = A\mu = A \text{Ar ch} [(r_1 + r_2)/a], \quad (10.1.24)$$

где  $r_1$  — расстояние от точки, в которой измеряется потенциал, до одного края щели  $x = -\frac{1}{2} a$ ,  $y = 0$ , а  $r_2$  — до другого края  $x = \frac{1}{2} a$ ,  $y = 0$ .

При очень больших значениях  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  для расстояний  $r_1$  и  $r_2$  имеем

$$r_1 \simeq r + \frac{1}{2} a \cos \varphi, \quad r_2 \simeq r - \frac{1}{2} a \cos \varphi.$$

Таким образом, с точностью до членов второго порядка относительно  $\frac{a}{r}$  при больших  $r$  получаем

$$\psi \simeq A \ln(4r/a), \quad v = \text{grad } \psi \simeq A/r.$$

Очевидно, что функция тока равна

$$\chi = A\vartheta = A \arccos[(r_1 - r_2)/a] \simeq A|\varphi|.$$

В этом примере мы заставляем  $\mu$  изменяться от  $-\infty$  до  $+\infty$ ; при этом изменение знака  $\mu$  вызывает изменение знака  $y$ . Угол  $\vartheta$  доста-

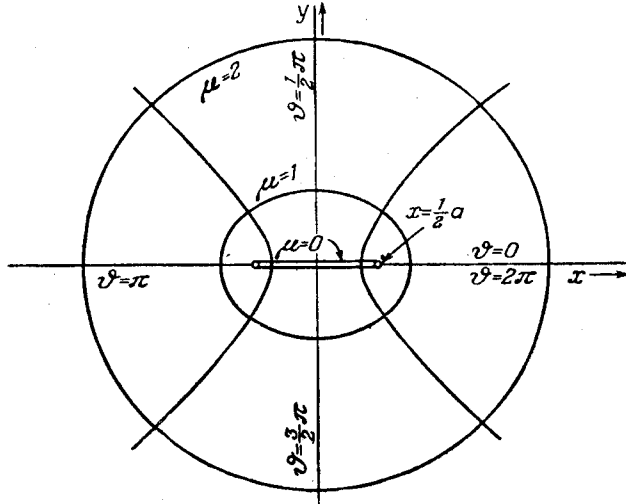


Рис. 10.6. Эллиптические координаты  $\mu$  и  $\vartheta$ .

точно изменять только от 0 до  $\pi$ ; мы не нуждаемся в полной непрерывности по  $\vartheta$ , так как полуплоскости  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  являются преградами.

Скорость течения жидкости через линию  $\mu = 0$  равна

$$\text{grad } \psi = \frac{2/a}{\sqrt{\text{ch}^2 \mu - \cos^2 \vartheta}} \left[ a_\mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + a_\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right] = \frac{A}{\sqrt{(a/2)^2 - x^2}} \mathbf{j},$$

где  $\mu = 0$ , а поток через полосу между  $x = x_0$  и  $x = x_1$ . ( $|x_0|, |x_1| < \frac{1}{2} a$ ) равен

$$A(\vartheta_{x_1} - \vartheta_{x_0}) = A[\arccos(2x_1/a) - \arccos(2x_0/a)].$$

Следовательно, полный поток через щель равен  $\pi A$ .

В случае определения электростатического потенциала, создаваемого полосой ширины  $a$ , на которой поддерживается потенциал  $V$  по отношению к потенциалу заземленного конфокального эллиптического цилиндра с большой осью  $a \text{sh } \mu_0$ , малой осью  $a \text{ch } \mu_0$ , мы считаем, что  $\vartheta$  меняется от 0 до  $2\pi$ , а  $\mu$  положительно. Тогда полуплоскость  $y < 0$  соответствует значениям  $\pi < \vartheta < 2\pi$ , а не отрицательным значениям  $\mu$ . Потенциал в рассматриваемом случае равен

$$\psi = V[1 - (\mu/\mu_0)],$$

плотность заряда в точке  $\vartheta = \arccos(2x/a)$  на полосе равна

$$\sigma = \frac{V/\mu_0}{2\pi a |\sin \vartheta|},$$

а полный заряд, приходящийся на единицу длины полосы,

$$Q = \frac{1}{2} a \int_0^{2\pi} \sigma |\sin \vartheta| d\vartheta = \frac{V}{2\mu_0}.$$

Сюда мы включили заряд «обеих сторон» полосы (верхней  $0 < \vartheta < \pi$  и нижней  $\pi < \vartheta < 2\pi$ ). Следовательно, емкость единицы длины такого конденсатора равна  $C = Q/V = 1/2\mu_0$ . Если  $\mu_0$  велико, то эллиптический цилиндр почти не отличается от кругового цилиндра радиуса  $r_0 \simeq (a/4)e^{\mu_0}$ , концентричного с полосой. Поэтому емкость системы, состоящей из кругового цилиндра радиуса  $r_0$  и малой полосы ширины  $a$ , симметричной относительно оси цилиндра, в пределе равна

$$C \simeq \frac{1}{2} [\ln(4r_0/a)]^{-1}$$

электростатических единиц на единицу длины.

Если полосу, помещенную внутри цилиндра, заменить концентрическим цилиндром диаметра  $a$ , равного ширине полосы, то емкость окажется равной  $\frac{1}{2} [\ln(2r_0/a)]^{-1}$ , т. е. будет несколько большей.

**Поток вязкой жидкости через щель.** Возвращаясь к уже встречавшемуся на стр.176, 177 исследованию потока вязкой жидкости, мы, используя эллиптические координаты, можем провести расчет для случая несжимаемой вязкой жидкости, протекающей через щель ширины  $a$ . Мы хотим, чтобы в каждой точке скорость была направлена вдоль координатной линии  $\vartheta = \text{const}$ , проходящей через эту точку. Тогда функция тока  $U$ , определенная равенством (10.1.15), должна зависеть только от  $\vartheta$ .

Так как  $f(\mu + i\vartheta) = z = \frac{1}{2} a \operatorname{ch} w$ , то можно добиться, чтобы в выражении (10.1.15) мнимая часть не зависела от  $\mu$ , положив  $F(w) = A \operatorname{sh} w$  и  $U_0 = B\vartheta$  (это есть решение уравнения Лапласа). При вычислении значения скорости мы можем подобрать  $A$  и  $B$  так, чтобы  $v$  равнялась нулю на границах (при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ ), а полный поток на единицу длины щели равнялся бы  $Q$ . Окончательный подсчет показывает, что точные выражения для  $F(w)$  и  $U$  при  $f(w) = \frac{1}{2} a \operatorname{ch} w = z$  таковы:

$$F(w) = -\frac{8Q}{\pi a} \operatorname{sh} w,$$

$$U = \frac{Q}{\pi} \left( \vartheta - \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) \right), \quad v_\mu = \frac{4Q}{\pi a} \frac{\sin^2 \vartheta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}}, \quad v_\vartheta = 0.$$

Скорость оказывается наибольшей в центре щели и падает до нуля у ее краев, а также на больших расстояниях от щели. В плоскости щели, на расстоянии  $x$  от центральной линии, скорость направлена вверх и величина ее равна

$$v_y = (4Q/\pi a) \sqrt{1 - (2x/a)^2}, \quad \mu = 0.$$

Это выражение обращается в нуль в точках  $x = \pm \frac{1}{2} a$ , соответствующих краям щели.

Теперь мы используем формулу (10.1.16), чтобы определить комплексную функцию  $W$ , с помощью которой вычислим давление и вихрь:

$$W = -\frac{8Q}{\pi a^2} \operatorname{cth} \omega, \quad \omega = \frac{4Q}{\pi a^2} \frac{-\sin 2\vartheta}{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta},$$

$$p = \frac{8\eta Q}{\pi a^2} \left[ 2 - \frac{\operatorname{sh} 2\mu}{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta} \right] \simeq \begin{cases} 0, & \mu \rightarrow \infty, \\ 16\eta Q/\pi a^2, & \mu \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Активное сопротивление щели потоку, т. е. отношение перепада давления к потоку  $Q$ , приходящемуся на единицу длины щели, есть величина

$$R = p/Q = 16\eta/\pi a^2,$$

пропорциональная коэффициенту вязкости и обратно пропорциональная квадрату ширины щели.

Следует еще раз напомнить, что эти рассуждения обоснованы только тогда, когда вязкость достаточно велика, так что в формулах (2.3.15) можно пренебречь членом, соответствующим кинетической энергии, по сравнению с членом, зависящим от вязкости жидкости.

Распределение потенциала вне эллиптического цилиндра  $\mu = \mu_0$ , принимающего на поверхности цилиндра заданное значение  $\psi_0(\vartheta)$ , выражается, как и ранее, формулой

$$\begin{aligned} \psi(\mu, \vartheta) = & \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(\beta) d\beta \right] (\mu - \mu_0) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(\beta) \cos [m(\beta - \vartheta)] d\beta \right] e^{m(\mu_0 - \mu)}. \end{aligned} \quad (10.1.25)$$

Это выражение остается конечным при  $\mu > \mu_0$ , за исключением первого члена. Аналогично потенциал внутри такой поверхности равен

$$\begin{aligned} \psi(\mu, \vartheta) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(\beta) d\beta + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(\beta) \cos (m\beta) d\beta \right] \cos (m\vartheta) \frac{\operatorname{ch} (m\mu)}{\operatorname{ch} (m\mu_0)} + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(\beta) \sin (m\beta) d\beta \right] \sin (m\vartheta) \frac{\operatorname{sh} (m\mu)}{\operatorname{sh} (m\mu_0)}. \end{aligned}$$

Здесь множитель  $\operatorname{ch} (m\mu)$  стоит при  $\cos (m\vartheta)$ , а  $\operatorname{sh} (m\mu)$  при  $\sin (m\vartheta)$  для того, чтобы обеспечить непрерывность потенциала при  $\mu = 0$ . Для четных функций от  $\vartheta$  (т. е. членов, содержащих косинусы) производная множителя, содержащего  $\mu$ , должна равняться нулю при  $\mu = 0$ , а для нечетных функций от  $\vartheta$  (т. е. членов, содержащих синусы) множитель, зависящий от  $\mu$ , должен равняться нулю при  $\mu = 0$ .

Например, потенциал и функция тока вне эллиптического цилиндра  $\mu = \mu_0$ , правая половина которого имеет потенциал  $+1$ , а левая  $-1$ , равны (после суммирования рядов)

$$\psi = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\cos \vartheta}{\operatorname{sh} (\mu - \mu_0)} \right], \quad \chi = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Arth} \left[ \frac{\sin \vartheta}{\operatorname{ch} (\mu - \mu_0)} \right]; \quad (10.1.26)$$

последняя формула является видоизменением формулы (10.1.14) в новых координатах.



**Эллиптические цилиндры в однородных полях.** Следуя ранее намеченному плану, мы прежде всего рассмотрим случай однородного поля, имеющего направление  $\gamma$ :

$$-E(x \cos \gamma + y \sin \gamma) = -\frac{1}{2} Ea [\operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \cos \gamma + \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta \sin \gamma].$$

Другое множество решений, с той же зависимостью от  $\vartheta$ , но обращающихся в нуль на бесконечности, образуют функции  $e^{-\mu} \cos \vartheta$  и  $e^{-\mu} \sin \vartheta$ , которые можно использовать для того, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Например, если эллиптический цилиндр с большой осью  $a \operatorname{ch} \mu_0$  и малой осью  $a \operatorname{sh} \mu_0$ , помещенный в однородное поле, имеет диэлектрическую постоянную  $\varepsilon$ , то соответствующий потенциал оказывается равным

$$\psi = \begin{cases} -Ee^{\mu_0} \left[ \frac{x \cos \gamma}{\operatorname{ch} \mu_0 + \varepsilon \operatorname{sh} \mu_0} + \frac{y \sin \gamma}{\varepsilon \operatorname{ch} \mu_0 + \operatorname{sh} \mu_0} \right], & \mu < \mu_0, \\ -E(x \cos \gamma + y \sin \gamma) + \\ + \frac{1}{4} Ea (\varepsilon - 1) e^{\mu_0} \operatorname{sh} (2\mu_0) e^{-\mu} \left[ \frac{\cos \vartheta \cos \gamma}{\operatorname{ch} \mu_0 + \varepsilon \operatorname{sh} \mu_0} + \frac{\sin \vartheta \sin \gamma}{\varepsilon \operatorname{ch} \mu_0 + \operatorname{sh} \mu_0} \right], & \mu > \mu_0. \end{cases} \quad (10.1.27)$$

Поле внутри этого эллиптического цилиндра однородно, но по величине и по направлению отличается от первоначально имевшегося поля. Вне цилиндра потенциал дополнительного поля стремится к нулю, когда расстояние от оси цилиндра стремится к бесконечности, что оказывается как раз достаточным для того, чтобы при  $\mu = \mu_0$  полный потенциал был непрерывен, а производная по внешней нормали равна производной по внутренней нормали, умноженной на  $\varepsilon$ . Если  $\psi$  — магнитный потенциал, а  $\varepsilon$  — магнитная проницаемость, то приведенные здесь выражения дают потенциал ферромагнитного цилиндра в магнитном поле. Для железа магнитная проницаемость очень велика и  $\psi$  на поверхности практически равняется нулю.

Другой простой задачей является задача о безвихревом потоке жидкости, обтекающем эллиптический цилиндр. Для однородного потока в направлении  $\gamma$  со скоростью  $v_0$  потенциал скоростей, очевидно, равен

$$v_0(x \cos \gamma + y \sin \gamma) = \frac{1}{2} av_0 [\operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \cos \gamma + \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta \sin \gamma].$$

К этому выражению следует прибавить такую комбинацию решений  $e^{-\mu} \cos \vartheta$ ,  $e^{-\mu} \sin \vartheta$  (стремящихся к нулю при  $\mu \rightarrow \infty$ ), чтобы нормальная производная  $\psi$  на поверхности цилиндра  $\mu = \mu_0$  обращалась в нуль. Таким образом, потенциал скоростей и функция тока имеют вид

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} av_0 [\cos \gamma \cos \vartheta (\operatorname{ch} \mu + e^{\mu_0 - \mu} \operatorname{sh} \mu_0) + \sin \gamma \sin \vartheta (\operatorname{sh} \mu + e^{\mu_0 - \mu} \operatorname{ch} \mu_0)], \\ \chi &= \frac{1}{2} av_0 [\cos \gamma \sin \vartheta (\operatorname{sh} \mu - e^{\mu_0 - \mu} \operatorname{sh} \mu_0) - \sin \gamma \cos \vartheta (\operatorname{ch} \mu - e^{\mu_0 - \mu} \operatorname{ch} \mu_0)] \end{aligned} \quad (10.1.28)$$

и являются соответственно вещественной и мнимой частями функции

$$F(\mu + i\vartheta) = \frac{1}{2} av_0 [e^{-i\gamma} \operatorname{ch} (\mu + i\vartheta) + e^{\mu_0 - \mu - i\vartheta} \operatorname{sh} (\mu_0 + i\gamma)].$$

Если  $\mu_0 = 0$ , то эллиптический цилиндр стягивается к полосе ширины  $a$ , перпендикулярной оси  $y$  и, следовательно, образующей угол  $\gamma$  с направлением установившегося потока.

Скорость жидкости на поверхности  $\mu = \mu_0$ , очевидно, равна

$$v = |\operatorname{grad} \psi|_{\mu=\mu_0} = \frac{2/a}{V \operatorname{sh}^2 \mu_0 + \sin^2 \vartheta} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right]_{\mu=\mu_0} = \frac{v_0 e^{\mu_0} \sin (\gamma - \vartheta)}{V \operatorname{sh}^2 \mu_0 + \sin^2 \vartheta}. \quad (10.1.29)$$

Согласно уравнению Бернулли, давление в точке  $(\mu, \vartheta)$  этой поверхности равно

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left[ 1 - \frac{e^{2\mu_0} \sin^2(\gamma - \vartheta)}{\operatorname{sh}^2 \mu_0 + \sin^2 \vartheta} \right], \quad (10.1.30)$$

где  $p_0$  — давление в жидкости на большом расстоянии от цилиндра. Мы пренебрегли влиянием гравитационной силы (эта сила должна была бы породить слагаемое  $\rho g$ , помноженное на глубину, измеряемую от поверхности жидкости).

В следующем параграфе мы рассмотрим более подробно эту задачу о давлениях и силах, связанных с движением жидкости. Сейчас мы, несколько забегаая вперед, сообщим результаты, которые будут получены там. Оказывается, что результирующая сила, действующая на эллиптический цилиндр, равна нулю, хотя результирующий момент отличен от нуля. Тот факт, что результирующая сила равна нулю, сначала кажется удивительным. Однако в случае безвихревого потока с пренебрежимой вязкостью картина потока вокруг цилиндра вполне симметрична; для каждого малого участка из нижней половины потока, имеющего заданную скорость, а следовательно, и давление, существует симметрично расположенный участок в верхней половине с той же скоростью и давлением, так что все вертикальные силы взаимно уничтожаются; аналогичным образом уничтожаются и горизонтальные составляющие.

Давление оказывается наименьшим вблизи точек наибольшей кривизны цилиндра  $\vartheta = 0$  или  $\vartheta = \pi$ , где скорость наибольшая. Когда эллипс, являющийся поперечным сечением цилиндра, очень близок к отрезку, т. е.  $\mu_0$  мало, скорость в этих точках делается настолько большой, что давление становится отрицательным. Следовательно, жидкость не «прилипает» к цилиндру и стационарный безвихревой поток оказывается невозможным. Происходит следующее: вихри сбегают с острого заднего края, и это порождает циркуляцию жидкости вокруг цилиндра в обратном направлении, благодаря чему скорость у этого острого края оказывается конечной. Здесь мы не будем заниматься детальным рассмотрением движения жидкости в возникающих вихрях, нам нужно только учесть обратную циркуляцию жидкости, порождаемую этим движением.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим плоскую полосу ( $\mu_0 = 0$ ). В этом случае скорость и давление у поверхности без учета циркуляции соответственно равны

$$v = \frac{v_0 \sin(\gamma - \vartheta)}{|\sin \vartheta|}, \quad p = p_0 - \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left[ \frac{\sin^2(\gamma - \vartheta) - \sin^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right];$$

у заднего края полосы ( $\vartheta = 0$ ) скорость бесконечна, а давление равно  $-\infty$ . На рис. 10.7,а изображены линии тока, соответствующие этому (физически невозможному) случаю.

Конечно, завихренный поток невозможно представить при помощи однозначного потенциала, но простую циркуляцию вокруг эллиптического цилиндра можно описать многозначным потенциалом  $A\vartheta$ , являющимся решением уравнения Лапласа и соответствующим скорости  $2A/a \sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}$  в направлении  $\vartheta$  в точке  $(\mu, \vartheta)$ . Теперь достаточно к потенциалу, определяемому формулой (10.1.28), прибавить потенциал  $A\vartheta$ , выбрав константу  $A$  так, чтобы соответствующая их сумме скорость обращалась в нуль (или по крайней мере была конечной) при  $\vartheta = 0$ .

В результате получим

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} av_0 [\cos \gamma \cos \vartheta \operatorname{ch} \mu + \sin \gamma \sin \vartheta \operatorname{ch} \mu - \vartheta \sin \gamma], \\ \chi &= \frac{1}{2} av_0 [\cos \gamma \sin \vartheta \operatorname{sh} \mu - \sin \gamma \cos \vartheta \operatorname{sh} \mu + \mu \sin \gamma], \end{aligned} \quad (10.1.31)$$

$$v_{x=0} = v_0 \frac{\sin(\gamma - \vartheta) - \sin \gamma}{|\sin \vartheta|} = -v_0 \left[ \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \vartheta \right) \right],$$

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left\{ \sin^2 \gamma \left[ 1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{1}{2} \vartheta \right) \right] - \sin 2\gamma \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \vartheta \right) \right\}.$$

Распределение давления на полосе оказывается теперь несколько «однобоким», имеется избыток давления на нижней стороне полосы ( $\pi < \vartheta < 2\pi$ ), что можно заключить из наличия члена  $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$  в выражении для давления. Это происходит потому, что из-за циркуляции скорость у нижней стороны

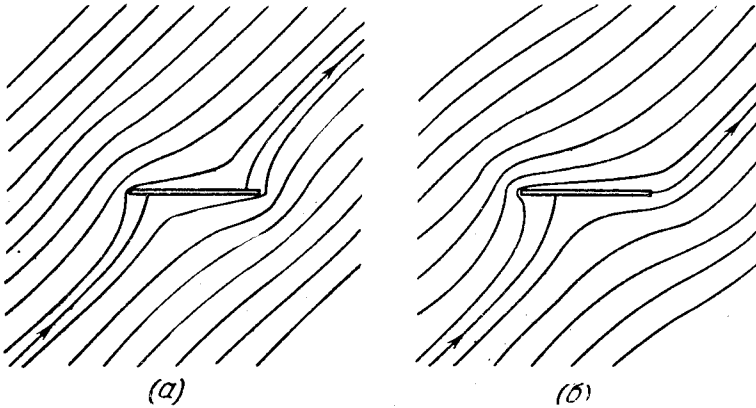


Рис. 10.7. Линии тока при обтекании полосы;  
а) без циркуляции; б) с циркуляцией, достаточной для гладкого обтекания заднего края.

полосы, вообще говоря, меньше, чем у верхней, и, следовательно, связанное со скоростью падение давления там не так велико. Таким образом, мы получаем результирующую *подъемную силу*, действующую на полосу благодаря циркуляции.

Мы умышленно оставили в стороне два трудных вопроса: что происходит с циркуляцией на больших расстояниях от полосы и что делается у переднего края полосы при  $\vartheta = \pi$ , где скорость по-прежнему бесконечна. Связанный с циркуляцией член, пропорциональный  $\vartheta$ , не убывает на бесконечности, и трудно усмотреть, почему вдали от полосы, где поток должен был бы оставаться невозмущенным, получается такая циркуляция. По-видимому, ответ заключается в следующем: вихри, срывающиеся с заднего края полосы, взаимно уничтожаются с циркуляцией вне круга некоторого радиуса, который не слишком велик, но достаточен для того, чтобы искажающее влияние этой суперпозиции циркуляции и вихрей на циркуляцию вблизи полосы было малым. Таким образом, нет необходимости вдаваться в подробности образования этой суперпозиции вихрей и циркуляции, и мы можем не отвлекаться от изучения потока вблизи полосы.

Не так легко объяснить, почему мы пренебрегаем бесконечной скоростью у переднего края. Возможно, только задний край создает вихри, которые покидают его таким способом, что порождают циркуляцию; вихри у ведущего края могут налипать на него, образуя значительное разрежение и изменяя форму линий тока. В обычных расчетах воздушного потока передний край не острый, а закругленный, поэтому скорость там не так велика, как вокруг заднего края, и тенденция к образованию вихрей, возможно, не так сильна. Мы продолжим исследование этой проблемы в следующем параграфе.

**Функция Грина в эллиптических координатах.** Потенциал, создаваемый линейным зарядом с единичной линейной плотностью в точке  $(x_0, y_0)$ , полученный обычным образом из комплексной функции  $-2\ln(z - z_0)$ , может быть также выражен через функцию эллиптических координат

$w = \mu + i\vartheta$  для  $z = \frac{1}{2} a \operatorname{ch} w$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} -\ln \left[ (a^2/16) (e^w + e^{-w} - e^{w_0} - e^{-w_0})^2 \right] = \\ = -2 \ln \left\{ a \operatorname{sh} \left[ \frac{1}{2} (\omega + \omega_0) \right] \operatorname{sh} \left[ \frac{1}{2} (\omega - \omega_0) \right] \right\} = \\ = \begin{cases} -2 \ln(a/4) - 2\omega - 2 \ln(1 - e^{w_0 - w}) - 2 \ln(1 - e^{-w_0 - w}), & \mu > \mu_0, \\ -2 \ln(a/4) - 2\omega_0 + 2 \ln(1 - e^{w - w_0}) - 2 \ln(1 - e^{-w - w_0}), & \mu < \mu_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому функция Грина равна

$$G(\mu, \vartheta | \mu_0, \vartheta_0) = \begin{cases} -2 \left[ \mu + \ln \left( \frac{a}{4} \right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} e^{-n\mu} [\operatorname{ch} n\mu_0 \cos n\vartheta \cos n\vartheta_0 + \\ \quad + \operatorname{sh} n\mu_0 \sin n\vartheta \sin n\vartheta_0], & \mu > \mu_0, \\ -2 \left[ \mu_0 + \ln \left( \frac{a}{4} \right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} e^{-n\mu_0} [\operatorname{ch} n\mu \cos n\vartheta \cos n\vartheta_0 + \\ \quad + \operatorname{sh} n\mu \sin n\vartheta \sin n\vartheta_0], & \mu < \mu_0. \end{cases} \quad (10.1.32)$$

Как и во всех подобных разложениях функции Грина, ряд сходится лишь условно, и его можно дифференцировать только тогда, когда плохо сходящаяся часть этого ряда удастся просуммировать и записать в замкнутом виде.

Например, емкость тонкого провода радиуса  $\rho$ , помещенного внутрь полого эллиптического цилиндра с большой осью  $a \operatorname{ch} \mu_1$  и малой осью  $a \operatorname{sh} \mu_1$ , можно найти, если удастся определить потенциал, создаваемый зарядом с линейной плотностью  $q$ , помещенным в точку  $(\mu_0, \vartheta_0)$ , когда при  $\mu = \mu_1$  ( $\mu_1 > \mu_0$ ) поддерживается нулевой потенциал. Распределение потенциала имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi(\mu, \vartheta) = -2q \operatorname{Re} [\ln(z - z_0)] + 2q \left[ \mu_1 + \ln \left( \frac{a}{4} \right) \right] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q}{n} e^{-n\mu_1} \left[ \frac{\operatorname{ch} n\mu_0 \cos n\vartheta_0}{\operatorname{ch} n\mu_1} \operatorname{ch} n\mu \cos n\vartheta + \frac{\operatorname{sh} n\mu_0 \sin n\vartheta_0}{\operatorname{sh} n\mu_1} \operatorname{sh} n\mu \sin n\vartheta \right]. \quad (10.1.33) \end{aligned}$$

Если  $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$ , где  $\rho$  намного меньше  $a$ , то потенциал на цилиндрической поверхности  $\rho = \operatorname{const}$  с точностью до членов первого порядка относительно  $\rho/a$  равен

$$V \simeq 2q \ln(a/4\rho) + 2q\mu_1 - 4q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\mu_1} \left[ \frac{\operatorname{ch}^2 n\mu_0 \cos^2 n\vartheta_0}{\operatorname{ch} n\mu_1} + \frac{\operatorname{sh}^2 n\mu_0 \sin^2 n\vartheta_0}{\operatorname{sh} n\mu_1} \right].$$

Отношение  $q/V$  есть емкость единицы длины провода, выраженная в электростатических единицах.

Можно так видоизменить функцию Грина, чтобы она удовлетворяла нулевым граничным условиям Неймана на границе  $\mu = \mu_1$ . Например, можно рассчитать магнитное поле между двумя проводами, проходящими через фокусы эллипса и окруженными эллиптическим цилиндром

( $\mu = \mu_1$ ) из железа (с магнитной проницаемостью  $\varepsilon$ ), по которым текут токи силы  $q$  в противоположных направлениях. Потенциальная функция «источников» противоположного знака, расположенных в фокусах, равна вещественной части функции, имеющей нужные особенности в точках  $z = \pm \frac{1}{2} a$ :

$$F(\mu, \vartheta) = -4q \ln \left[ \frac{1 - e^{-w}}{1 + e^{-w}} \right] = 8q \operatorname{Ar} \operatorname{th}(e^{-w}),$$

т. е. равна

$$\begin{aligned} \psi_0(\mu, \vartheta) &= 8q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)\mu} \cos[(2n+1)\vartheta] = \\ &= 4q \operatorname{Ar} \operatorname{th} \left[ \frac{\cos \vartheta}{\operatorname{ch} \mu} \right], \end{aligned} \quad (10.1.34)$$

а «функция тока» равна мнимой части  $F$ , т. е.

$$\chi_0(\mu, \vartheta) = -8q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)\mu} \sin[(2n+1)\vartheta] = 4q \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sin \vartheta}{\operatorname{sh} \mu} \right].$$

Эта функция, конечно, разрывна вдоль линии  $\mu = 0$ , как и все функции тока, представляющие циркуляцию вокруг особых точек (например, функция тока вокруг отрезка  $\mu = 0$  пропорциональна углу  $\vartheta$ , который терпит разрыв при  $\vartheta = 0, 2\pi$ ), хотя градиент  $\chi$  непрерывен.

Как было отмечено выше, функция  $\chi$  представляет потенциал магнитного поля двух проводов, а функция  $\psi$  — магнитные силовые линии. Влияние железного цилиндра ( $\mu = \mu_1$ ) выражается в добавлении ряда с членами вида  $A \operatorname{sh}(m\mu) \sin(m\vartheta)$ , непрерывного при  $\mu = 0$  и такого, что граничные условия при  $\mu = \mu_1$  удовлетворяются. Внутри цилиндра ( $\mu > \mu_1$ ) решение представляется рядом с членами вида  $e^{-m\mu} \sin m\vartheta$ , сходящимся при  $\mu \rightarrow \infty$  (здесь нам не нужна непрерывность при  $\mu = 0$ , так как  $\mu > \mu_1$ ). Граничные условия заключаются в том, чтобы нормальная производная  $\chi$  изнутри поверхности  $\mu = \mu_1$  равнялась нормальной производной извне (внутри железа), умноженной на  $\varepsilon$ , а сама функция  $\chi$  была бы непрерывной при  $\mu = \mu_1$ .

Окончательное решение имеет вид

$$\chi = \begin{cases} -8q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(2n+1)(\mu_1 - \mu)} \sin[(2n+1)\vartheta]}{\varepsilon \operatorname{sh}[(2n+1)\mu_1] + \operatorname{ch}[(2n+1)\mu_1]} \frac{1}{(2n+1)}, & \mu > \mu_1, \\ 4q \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sin \vartheta}{\operatorname{sh} \mu} \right] + \\ + 8q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon - 1) e^{-(2n+1)\mu_1} \operatorname{sh}[(2n+1)\mu] \sin[(2n+1)\vartheta]}{\varepsilon \operatorname{sh}[(2n+1)\mu_1] + \operatorname{ch}[(2n+1)\mu_1]} \frac{1}{(2n+1)}, & \mu < \mu_1. \end{cases}$$

Если проницаемость  $\varepsilon$  очень велика, то граничное условие сводится к требованию, чтобы поверхность  $\mu = \mu_1$  соответствовала эквипотенциальной поверхности  $\chi = 0$ , а линии уровня функции  $\psi$  (магнитные силовые линии) были ортогональны к этой поверхности. Тогда магнитный потенциал внутри железного эллиптического цилиндра, создаваемый противоположными токами, проходящими через фокусы, является

мнимой частью функции ( $w = \mu + i\vartheta$ )

$$F(w) = 8q \operatorname{Ar th}(e^{-w}) + 8q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)\mu_1}}{(2n+1) \operatorname{sh}[(2n+1)\mu_1]} \operatorname{ch}[(2n+1)w].$$

Вещественная часть  $F$ , как показано выше, представляет магнитные силовые линии. Отметим, что поле между двумя проводами приблизительно однородно. Расчеты этого типа применяются при конструировании больших электрорядерных машин (ускорителей элементарных частиц и т. п.).

Ряд (10.1.33) можно использовать также для нахождения распределения температуры внутри эллиптического цилиндра при продольном расположении источников тепла. Например, если источник представляет собой полосу ширины  $a$  из металла, обладающего сопротивлением, окруженную изоляционным материалом, внешняя граница которого есть эллиптический цилиндр с фокусами, расположенными по краям полосы, то можно использовать ряд (10.1.33), считая  $q$  равным количеству тепла, выделяемому единицей площади полосы за единицу времени, а  $\psi$  — температуре (мы полагаем, что при  $\mu = \mu_1$  поддерживается нулевая температура). Так как  $\frac{1}{2}a|\sin \vartheta|d\vartheta$  есть линейный элемент поперечного сечения полосы, то мы интегрируем  $\frac{1}{2}\psi$  по  $\vartheta_0$ , положив  $\mu_0 = 0$  (мы приписали множитель  $\frac{1}{2}$ , потому что, интегрируя от 0 до  $2\pi$ , мы проходим полосу дважды). Следовательно, в этом случае распределение температуры имеет вид

$$T(\mu) = \frac{1}{4}a \int_0^{2\pi} \psi |\sin \vartheta| d\vartheta = 2aq(\mu_1 - \mu) = 2aq \left[ \mu_1 - \operatorname{Ar ch} \left( \frac{r_1 + r_2}{a} \right) \right],$$

где уравнение внешней поверхности имеет вид  $r_1 + r_2 = a \operatorname{ch} \mu_1$  [см. (10.1.23)].

Полезно также рассчитать магнитное поле, порожденное двумя проводами, симметрично расположенными в точках  $(\mu_0, \vartheta_0)$  и  $(\mu_0, -\vartheta_0)$ , с токами  $q$ , текущими в противоположных направлениях, при наличии железного эллиптического цилиндра с внешней поверхностью  $\mu = \mu_1$  ( $\mu_1 < \mu_0$ ). Мы полагаем проницаемость железа столь большой, что магнитный потенциал можно принять равным нулю всюду на поверхности  $\mu_1$ .

Потенциал и функция тока, порожденные «источником»  $+q$  в точке  $w_0 = \mu_0 + i\vartheta_0$  и «источником»  $-q$  в точке  $w_0 = \mu_0 - i\vartheta_0$ , равны, согласно (10.1.32), вещественной и мнимой частям функции

$$F(w) = 2q \ln \left[ \frac{e^w + e^{-w} - e^{\bar{w}_0} - e^{-\bar{w}_0}}{e^w + e^{-w} - e^{w_0} - e^{-w_0}} \right] = \\ = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{sh} \left[ \frac{1}{2}(w + \bar{w}_0) \right] \operatorname{sh} \left[ \frac{1}{2}(w - \bar{w}_0) \right]}{\operatorname{sh} \left[ \frac{1}{2}(w + w_0) \right] \operatorname{sh} \left[ \frac{1}{2}(w - w_0) \right]} \right\},$$

которую можно разложить в ряд

$$F = \begin{cases} 8iq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nw}}{n} \operatorname{sh}(n\mu_0) \sin(n\vartheta_0), & \mu > \mu_0, \\ -8iq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\mu_0}}{n} \sin(n\vartheta_0) \operatorname{ch}(nw) - 4iq\vartheta_0, & \mu < \mu_0. \end{cases}$$

К этому выражению надо прибавить ряд по  $e^{-nw}$ , для того чтобы при  $\mu = \mu_1 < \mu_0$  мнимая часть получающейся комбинации обращалась в нуль.

В результате для вещественной части  $\psi$ , описывающей магнитные силовые линии, и для мнимой части  $\chi$ , представляющей магнитный потенциал, получим

$$\psi = \operatorname{Re} [F(w)] + 8q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n(\mu_1 - \mu_0 - \mu)} \sin(n\vartheta_0) \operatorname{ch}(n\mu_1) \sin(n\vartheta),$$

$$\chi = \operatorname{Im} [F(w)] + 8q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n(\mu_1 - \mu_0 - \mu)} \sin(n\vartheta_0) \operatorname{ch}(n\mu_1) \cos(n\vartheta) + 4q\vartheta_0.$$

или

$$\psi + i\chi = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{sh} \left[ \frac{1}{2} (w - \bar{w}_0) \right] \operatorname{sh} \left[ \mu_1 - \frac{1}{2} (w + w_0) \right]}{\operatorname{sh} \left[ \frac{1}{2} (w - w_0) \right] \operatorname{sh} \left[ \mu_1 - \frac{1}{2} (w + w_0) \right]} \right\} =$$

$$= 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{ch}(\mu_1 - \mu_0) - \operatorname{ch}(w + i\vartheta_0 - \mu_1)}{\operatorname{ch}(\mu_1 - \mu_0) - \operatorname{ch}(w - i\vartheta_0 - \mu_1)} \right\}. \quad (10.1.35)$$

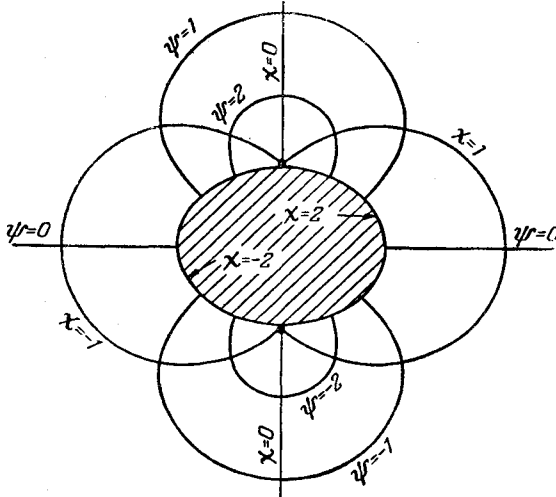


Рис. 10.8. Магнитные силовые линии  $\psi$  и эквипотенциальные линии  $\chi$  вокруг эллиптического железного цилиндра.

Если эти два провода расположены на концах малой оси железного эллиптического цилиндра ( $\mu_0 = \mu_1$ ,  $\vartheta_0 = \frac{1}{2} \pi$ ), то предыдущие выражения сводятся к следующим:

$$\psi = 4q \ln \left[ \frac{\operatorname{ch}(\mu - \mu_1) + \sin \vartheta}{\operatorname{ch}(\mu - \mu_1) - \sin \vartheta} \right], \quad \chi = 4q \operatorname{arctg} \left[ \frac{\cos \vartheta}{\operatorname{sh}(\mu - \mu_1)} \right].$$

Линии  $\psi = \operatorname{const}$  (магнитные силовые линии) и  $\chi = \operatorname{const}$  (магнитный потенциал) показаны на рис. 10.8.

**Потенциал внутри цилиндра с узкой щелью.** Теперь, имея в своем распоряжении результаты, полученные при помощи эллиптических координат, мы можем найти более точное решение задачи, исследованной на стр. 182. Это решение будет получено более простым способом. Мы начнем с выражения для потенциала около заземленной металлической

плоскости, в которой имеется щель ширины  $c$ . Этот потенциал

$$\psi = -\frac{1}{4} c E e^{\mu} \sin \vartheta$$

стремится к величине  $-\frac{1}{2} c E \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta = -E y$  для больших положительных значений  $\mu$ , т. е. для точек, лежащих над осью  $x$  и на некотором расстоянии от щели. Иными словами, этот потенциал соответствует полю с напряженностью  $E$ , нормальному к плоскости  $(x, z)$ . Этот потенциал равен нулю на поверхностях металла  $\vartheta = 0, \pi$ . Для отрицательных  $\mu$  (ниже оси  $x$ ) потенциал быстро стремится к нулю, как это и должно быть.

Итак, мы показали, что если в однородное поле, имевшее напряженность  $E$ , поместить плоский заземленный проводник, перпендикулярный направлению поля и имеющий разрез ширины  $c$ , то потенциал внутри щели окажется равным

$$\psi = -\frac{1}{4} c E \sin \vartheta = -\frac{1}{4} c E \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} = -\frac{1}{2} E \sqrt{\left(\frac{1}{2} c\right)^2 - x^2}$$

для  $y = 0$ ,  $-\frac{1}{2} c < x < \frac{1}{2} c$  (начало координат помещено в центр щели).

Для заземленного цилиндра радиуса  $a$ , помещенного в однородное поле напряженности  $E$ , образующее угол  $\alpha$  с осью  $x$ , потенциал в случае отсутствия щели в цилиндре равен  $-E [r - a^2/r] \cos(\varphi - \alpha)$ . Тогда на поверхности цилиндра в точке  $\varphi = 0$  нормальная производная равна  $-2E \cos \alpha$ , а если при  $-\frac{1}{2} \Delta < \varphi < \frac{1}{2} \Delta$  в цилиндре имеется щель (ширины  $a\Delta$  с центром в точке  $r = a$ ,  $\varphi = 0$ ), то потенциал в щели приближенно равен

$$\psi_{\text{щ}} \approx -\frac{1}{2} E \cos \alpha \sqrt{\left(\frac{1}{2} a\Delta\right)^2 - (a\varphi)^2} = -\frac{1}{4} E a\Delta \cos \alpha \sqrt{1 - (2\varphi/\Delta)^2}$$

для  $-\frac{1}{2} \Delta < \varphi < \frac{1}{2} \Delta$ ,  $r = a$ . Приближение будет тем лучше, чем меньше ширина щели  $a\Delta$  по сравнению с диаметром цилиндра  $2a$ .

Возвращаясь теперь к формуле (10.1.22), мы можем подставить полученные значения непосредственно в выражения для коэффициентов  $A_m$  (коэффициенты  $B_m$  для этого приближения равны нулю). Используя интегральное представление (5.3.65) функций Бесселя, получим

$$A_m \simeq -\frac{\varepsilon_m}{16\pi} E a \Delta^2 \cos \alpha \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{1}{2} m t \Delta\right) \sqrt{1 - t^2} dt =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{32} E a \Delta^2 \cos \alpha, & m = 0, \\ -(1/4m) E a \Delta^2 \cos \alpha J_1\left(\frac{1}{2} m \Delta\right) \simeq -\frac{1}{16} E a \Delta^2 \cos \alpha, & m > 0, \Delta \rightarrow 0. \end{cases}$$

Следовательно, для этого приближения потенциал вдоль оси цилиндра равен  $-(Ea/32)\Delta^2 \cos \alpha$ . Когда  $\Delta$  весьма мал, потенциал внутри цилиндра равен

$$\psi \approx -\frac{Ea\Delta^2}{16} \cos \alpha \operatorname{Re} \left[ \sum_m \left(\frac{r}{a}\right)^m e^{im\varphi} - \frac{1}{2} \right] =$$

$$= -\frac{Ea\Delta^2}{32} \cos \alpha \operatorname{Re} \left[ \frac{1 + (r/a) e^{i\varphi}}{1 - (r/a) e^{i\varphi}} \right] =$$

$$= -\frac{1}{32} E a \Delta^2 \cos \alpha \left[ \frac{1 - (r/a)^2}{1 + (r/a)^2 - 2(r/a) \cos \varphi} \right],$$



т. е. равен поверхностной функции Грина для условий Дирихле  $\psi = 0$  при  $r = a$ , за исключением  $r = a$ ,  $\varphi = 0$ .

**Параболические координаты.** Как мы показали на стр. 474—478 тома I, двумерные координаты, для которых волновое уравнение допускает разделение переменных, получаются при помощи конформных преобразований, представляющих  $z = x + iy$  как простую функцию новых координат,  $z = f(\omega)$ ,  $\omega = \xi_1 + i\xi_2$ . Для полярных координат  $z = e^{i\omega}$ , а для эллиптических координат  $z = \frac{1}{2} a \operatorname{ch} \omega$ . Ясно, что уравнение Лапласа допускает разделение переменных для каждой координатной системы, связанной с конформным преобразованием, соответствующим любой аналитической функции  $f$ . Тем не менее те случаи, для которых волновое уравнение также допускает разделение переменных, представляют особый интерес, и все эти случаи будут нами изучены. Мы до сих пор не рассматривали случая параболических координат, соответствующего  $z = \frac{1}{2} \omega^2$ ,  $\omega = \lambda + i\eta$  [см. уравнение (5.1.9)]:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (\lambda^2 - \eta^2), & y &= \lambda\eta, & h_\lambda &= h_\eta = |\omega| = \sqrt{\lambda^2 + \eta^2}, & (10.1.36) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} (\lambda^2 + \eta^2), & \lambda^2 &= r + x, & \eta^2 &= r - x. \end{aligned}$$

Точка  $z = 0$  является точкой ветвления для этого преобразования, и нужно использовать только одну половину плоскости  $\omega$  для того, чтобы полностью покрыть плоскость  $z$ . Линией разреза, выделяющей однозначную ветвь, может служить любая линия, идущая от  $z = 0$  до  $z = \infty$ , и для удобства решения задачи можно так расположить ее внутри граничной поверхности, чтобы физические условия запрещали переход через разрез. Например, поле вне поверхности  $\lambda = \lambda_0$ , на которой потенциал постоянен, равно

$$\psi = A\lambda^2 + B = A(r + x) + B.$$

В этом случае нам нужно пользоваться только положительными значениями  $\lambda$ , большими  $\lambda_0$ , а  $\eta$  изменяется в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Вообще, если в точке  $(\lambda_0, \eta)$  границы  $\lambda = \lambda_0$  потенциал равен  $\psi_0(\eta)$ , то вне этой границы он равен

$$\psi(\lambda, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{k(\lambda_0 - \lambda)} dk \int_{-\infty}^\infty \psi_0(\beta) \cos[k(\eta - \beta)] d\beta, \quad \lambda > \lambda_0. \quad (10.1.37)$$

Если граница есть полуплоскость, заданная уравнением  $\lambda_0 = 0$  (отрицательная ось  $x$ ), а граничные условия заключаются в том, что полоса от  $x = 0$  до  $x = -a$  имеет потенциал  $V$ , в то время как остальная часть отрицательной оси  $x$  имеет нулевой потенциал, то эта общая формула приводится к виду

$$\psi(\lambda, \eta) = \frac{V}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sqrt{2a + \eta}}{\lambda} \right] + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sqrt{2a - \eta}}{\lambda} \right] \right\}. \quad (10.1.38)$$

Соответствующая функция  $\chi$ , определяющая силовые линии, равна

$$\chi(\lambda, \mu) = \frac{V}{2\pi} \ln \left[ \frac{\lambda^2 + (\eta + \sqrt{2a})^2}{\lambda^2 + (\eta - \sqrt{2a})^2} \right].$$

Функция Грина в параболических координатах является, как обычно, вещественной частью функции

$$F = -2 \ln \left[ \frac{1}{2} (\omega^2 - \omega_0^2) \right] = -2 \ln \left[ \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \right]. \quad (10.1.39)$$

Интересный пример применения метода изображений можно построить, пользуясь полярными координатами с центром в точке  $\lambda = \eta = 0$ . Предположим, что на положительной части оси  $x$  (поверхность  $\eta = 0$ ) поддерживается нулевой потенциал. Решения в полярных координатах, удовлетворяющие граничному условию  $\psi = 0$  при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$ , образуют систему

$$r^{\frac{1}{2}n} \sin\left(\frac{1}{2}n\varphi\right) \text{ и } r^{-\frac{1}{2}n} \sin\left(\frac{1}{2}n\varphi\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Функция Грина для этой системы функций равна [см. уравнение (7.2.63)]

$$G = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}n} \sin\left(\frac{1}{2}n\varphi_0\right) \sin\left(\frac{1}{2}n\varphi\right), & r < r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}n} \sin\left(\frac{1}{2}n\varphi_0\right) \sin\left(\frac{1}{2}n\varphi\right), & r_0 < r. \end{cases} \quad (10.1.40)$$

Наличие коэффициентов, равных  $\frac{1}{2}$ , в показателях степеней и под знаками синусов соответствует тому факту, что  $w = \lambda + i\eta = \sqrt{2z} = \sqrt{2r}e^{\frac{1}{2}i\varphi}$ , а при таком преобразовании лишь одна половина плоскости  $w$  соответствует всей плоскости  $z$ .

В другой половине плоскости  $w$  можно расположить фиктивные источники для того, чтобы удовлетворить граничным условиям при  $\eta = 0$ . Например, мы получим всю плоскость  $z$  с разрезом, идущим по положительной части оси  $x$ , при изменении  $\lambda$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а  $\eta$  — только от 0 до  $+\infty$ . Таким образом, если границей является положительная часть оси  $x$ , то множитель  $w + w_0$  в правой части равенства (10.1.39), соответствующий «источнику» в точке  $\lambda = -\lambda_0$ ,  $\eta = -\eta_0$ , должен быть исключен, и функция Грина должна быть действительной частью функции

$$F = \begin{cases} -2 \ln \left[ \frac{1}{2}(w - w_0) \right] = -2 \ln \left[ \frac{1}{2}(\lambda + i\eta) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}n} e^{\frac{1}{2}in(\varphi_0 - \varphi)}, & r > r_0, \\ -2 \ln \left[ \frac{1}{2}(\lambda_0 + i\eta_0) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}n} e^{\frac{1}{2}in(\varphi - \varphi_0)}, & r < r_0. \end{cases}$$

Фиктивные источники должны располагаться в той части плоскости  $w$ , которая не использовалась для представления плоскости  $z$ , иными словами, в той части, где  $\eta < 0$ . Как показано на рис. 10.9, изменение  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  (отмеченное сплошными линиями) происходит в «действительной» части плоскости  $z$  (т. е. там, где находятся действительные источники) и соответствует положительным значениям  $\eta$ ; изменение  $\varphi$  от 0 до  $-2\pi$  (отмеченное пунктирными линиями) соответствует отрицательным  $\eta$  и должно быть использовано для фиктивных источников.

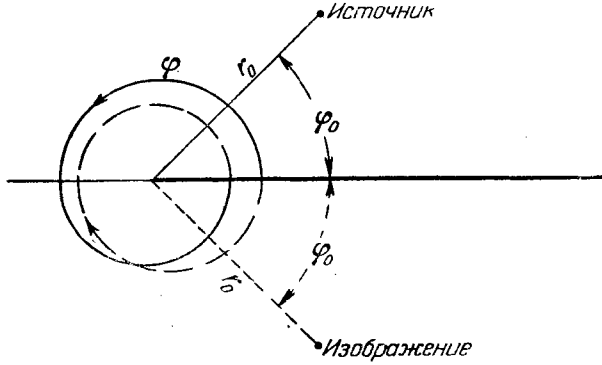
Для того чтобы поверхность  $\eta = 0$  имела нулевой потенциал, мы помещаем отрицательный фиктивный источник в точке  $\lambda = \lambda_0$ ,  $\eta = -\eta_0$  (в «фиктивной» области), и в результате получаем

$$F = 2 \ln \left[ \frac{w - \bar{w}_0}{w - w_0} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4i}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}n} \sin\left(\frac{n\varphi_0}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}in\varphi}.$$

Вещественная часть этой функции совпадает с рядом, данным в формуле (10.1.40). Таким образом, мы, наконец, нашли «практическое» применение понятия римановой поверхности в окрестности точки ветвления. Здесь один

лист соответствует «действительному пространству», а другой «фиктивному пространству».

Этим исчерпываются все те системы координат, для которых волновое уравнение допускает разделение переменных. Однако заслуживают обсуждения и другие системы, для которых уравнение Лапласа разделяется, а



Р и с. 10.9. Изображение источника на втором листе римановой поверхности около точки ветвления в конце полурамы  $\varphi=0$ .

волновое уравнение не разделяется. Одной из таких систем являются *гиперболические координаты*, для которых  $z = \sqrt{2\omega} = \sqrt{2\mu + 2ix}$ ,  $r^2 = 2|\omega|$ ,  $h_\mu = h_x = 1/r$ . Эта система будет рассмотрена в дальнейшем в связи с некоторыми задачами.

**Биполярные координаты.** Более полезной системой координат, в которой волновое уравнение не разделяется (но уравнение Лапласа разделяется), является система, соответствующая случаю двух параллельных цилиндров или цилиндра (конечного радиуса), параллельного плоскости. Эту систему можно получить, рассматривая комплексную функцию, описывающую поле двух противоположных линейных зарядов, удаленных на расстояние  $2a$  друг от друга:

$$\omega = \ln [(a + z)/(a - z)] = 2 \operatorname{Arth} (z/a).$$

Положив  $\omega = \xi + i\theta$  и  $z = x + iy = a \operatorname{th} (\omega/2)$ , получим

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \theta}, & y &= \frac{a \sin \theta}{\operatorname{ch} \xi + \cos \theta}, & h_x = h_\theta &= \frac{a}{\operatorname{ch} \xi + \cos \theta}, \\ \xi &= \operatorname{Arth} \left[ \frac{2ax}{a^2 + x^2 + y^2} \right], & \theta &= \operatorname{arctg} \left[ \frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2} \right], & & (10.1.41) \\ r &= a \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \theta}{(\operatorname{ch} \xi + \cos \theta)^2}}, & \varphi &= \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sin \theta}{\operatorname{sh} \xi} \right]. \end{aligned}$$

Координата  $\theta$  — угловая координата, изменяющаяся от 0 до  $2\pi$ . Координата  $\xi$  — «радиальная», ее значениям от 0 до  $\infty$  соответствует положительная полуплоскость плоскости  $(x, y)$ , области отрицательных значений  $\xi$  соответствует область отрицательных значений  $x$ . Часть оси  $x$  от  $x = -a$  до  $x = +a$  соответствует линии  $\theta = 0$ ,  $-\infty < \xi < \infty$ ; остальная часть оси  $x$  соответствует  $\theta = \pi$  ( $a < x < \infty$  соответствует  $0 < \xi < \infty$ , а  $-\infty < x < -a$  соответствует  $-\infty < \xi < 0$ ). Линия  $\xi = \operatorname{const}$  есть окружность радиуса  $a/\operatorname{sh} \xi$  с центром в точке  $x = a \operatorname{cth} \xi$ ,  $y = 0$ ; линия  $\theta = \operatorname{const}$  есть окружность радиуса  $a \operatorname{cosec} \theta$  с центром в точке  $x = 0$ ,  $y = a \operatorname{ctg} \theta$  [все  $\theta$ -окружности проходят через точки  $(\pm a, 0)$ ]. Эта система координат показана на

рис. 10.10. Мы замечаем, что на частях окружностей  $\theta = \text{const}$ , лежащих выше оси  $x$ , значения  $\theta$  отличаются на  $\pi$  от значений, соответствующих частям тех же окружностей, расположенных ниже оси  $x$ . Это происходит по очевидным причинам.

При помощи этой системы координат можно найти распределение потенциала вне двух цилиндров. Если один цилиндр соответствует поверхности  $\xi_0$ , то его радиус равен  $b = a/\text{sh } \xi_0$ , а расстояние от его оси до оси  $y$  равно  $a \text{cth } \xi_0$ ; если другой цилиндр соответствует поверхности  $-\xi_1$ , то его радиус равен  $c = a/\text{sh } \xi_1$ , а расстояние от его центра до оси  $y$  равно  $a \text{cth } \xi_1$ . Поэтому,

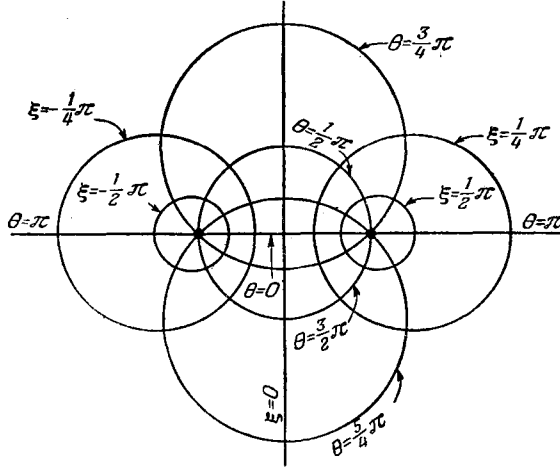


Рис. 10.10. Биполярные координаты  $\xi$  и  $\theta$ .

если расстояние между осями цилиндров равно  $d$ , то расстояние  $a$  между фокусами соответствующей биполярной системы координат можно определить из уравнения

$$d = \sqrt{b^2 + a^2} + \sqrt{c^2 + a^2}. \quad (10.1.42)$$

Потенциал пропорционален  $\xi$ , и, если цилиндр радиуса  $b$  ( $\xi = \xi_0$ ) имеет нулевой потенциал, а цилиндр радиуса  $c$  ( $\xi = -\xi_1$ ) имеет потенциал  $V$ , то распределение потенциала дается функцией

$$\psi = V \frac{\xi_0 - \xi}{\xi_0 + \xi_1} = V \frac{\text{Ar sh } (a/b) - \xi}{\text{Ar sh } (a/b) + \text{Ar sh } (a/c)}. \quad (10.1.43)$$

Электрическая напряженность на первой поверхности равна

$$E = \frac{\text{ch } \xi_0 + \cos \theta}{a} \frac{V}{\xi_0 + \xi_1},$$

а полный заряд, приходящийся на единицу длины первого цилиндра, равен

$$q = \int_0^{2\pi} \frac{E}{4\pi} \text{ch } \xi_0 + \cos \theta \, a \, d\theta = \frac{V/2}{\xi_0 + \xi_1} = \frac{V/2}{\text{Ar sh } (a/b) + \text{Ar sh } (a/c)}. \quad (10.1.44)$$

Емкость цилиндров на единицу длины равна, как обычно,  $q/V$ . Если  $b$  и  $c$  одновременно малы по сравнению с  $d$ , то  $a \approx d/2$  с точностью до членов первого порядка относительно  $b/a$  и  $c/a$ , а емкость на единицу длины приближенно равна

$$\frac{1}{2 \ln(d/b) + \ln(d/c)}$$

электростатических единиц, что совпадает с выражением (10.1.41), когда  $d = 2y_0$ , а  $b = c = \rho$ . Формула (10.1.44) дает точные значения емкости для любых геометрически возможных значений  $b$ ,  $c$  и  $a$ .

**Два цилиндра в однородном поле.** Наш метод остается прежним: мы выражаем решение уравнения Лапласа, записанное в некоторой системе координат, при помощи элементарных решений в биполярных координатах. Снова, как и в других случаях двумерных систем, мы пользуемся свойствами функций комплексного переменного. На этот раз задача будет несколько более трудной, так как даже выражения для однородного поля оказываются бесконечными рядами. Имеем

$$z = x + iy = a \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} w \right) = a \frac{1 - e^{-w}}{1 + e^{-w}} = -a \frac{1 - e^w}{1 + e^w}.$$

Для  $\xi > 0$  мы разлагаем  $z$  в ряд по  $e^{-w}$ , а для  $\xi < 0$  используем  $e^w$ . Окончательные ряды для  $z$  имеют вид

$$z = x + iy = \begin{cases} a + 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\xi - in\theta}, & \xi > 0, \\ -a - 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{n\xi + in\theta}, & \xi < 0. \end{cases} \quad (10.1.45)$$

Отсюда можно получить ряды для однородного поля, имеющего любое направление. Ряды сходятся всюду, за исключением  $\xi = 0$ .

Например, выражение для потенциального поля, напряженность которого (или скорость) образует угол  $\varphi$  с направлением оси, соединяющей полюсы биполярной системы, имеет вид

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \begin{cases} b + 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\xi} \cos(n\theta + \varphi), & \xi > 0, \\ -b - 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{n\xi} \cos(n\theta - \varphi), & \xi < 0, \end{cases} \quad (10.1.46)$$

где  $b = a \cos \varphi$ .

К этому выражению мы должны прибавить такие решения, остающиеся конечными вне цилиндров, чтобы сумма удовлетворяла граничным условиям. Частными решениями, остающимися конечными вне цилиндров ( $\xi < \xi_0$  или  $\xi > -\xi_1$ ) и периодическими по  $\theta$ , являются  $\operatorname{sh}(m\xi) \sin(m\theta)$ ,  $\operatorname{sh}(m\xi) \cos(m\theta)$ ,  $\operatorname{ch}(m\xi) \sin(m\theta)$  и т. д.

Если дополнительные члены должны стремиться к нулю на бесконечности (которой соответствует точка  $\xi = 0$ ,  $\theta = \pi$ ), то можно пользоваться функциями  $\operatorname{sh}(m\xi) \cos(m\theta)$  или  $\operatorname{ch}(m\xi) \sin(m\theta)$ , но не функциями  $\operatorname{ch}(m\xi) \cos(m\theta)$ .

Для случая несжимаемой идеальной жидкости, обтекающей с постоянной скоростью  $v$  эти цилиндры, граничные условия заключаются в том, чтобы  $\partial\psi/\partial\xi$  равнялась нулю на границах цилиндров  $\xi = \xi_0$  и  $\xi = -\xi_1$ , как указывалось выше. Окончательно получим

$$\begin{aligned} \psi = v_0 (x \cos \varphi + y \sin \varphi) + \\ + 2av_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{e^{n\xi}}{e^{2n\xi_0} - e^{-2n\xi_1}} [\cos(n\theta + \varphi) - e^{-2n\xi_1} \cos(n\theta - \varphi)] - \right. \\ \left. - \frac{e^{-n\xi}}{e^{2n\xi_1} - e^{-2n\xi_0}} [\cos(n\theta - \varphi) - e^{2n\xi_0} \cos(n\theta + \varphi)] \right\}. \quad (10.1.47) \end{aligned}$$

Добавленный ряд остается конечным на бесконечности ( $\xi = 0$ ,  $\theta = \pi$ ). Этот ряд, описывающий дополнительное поле, сходится всюду, за исключением

случаев, когда  $\xi_0$  или  $\xi_1$  равны нулю, т. е. когда радиус одного из цилиндров становится бесконечным и поверхность этого цилиндра совпадает с плоскостью  $y, z$ . В этом случае следует ожидать, что бесконечная плоская граница будет искажать поле даже на бесконечности, и нет ничего удивительного в том, что полученный ряд не является всюду сходящимся.

Если оба цилиндра имеют одинаковые размеры ( $\xi_1 = \xi_0$ ), то потенциальная функция вблизи правого цилиндра ( $\xi = \xi_0$ ) сводится к выражению

$$v_0 a \cos \varphi - 2v_0 a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{\cos \varphi \cos (n\theta)}{\operatorname{ch} (n\xi_0)} - \frac{\sin \varphi \sin (n\theta)}{\operatorname{sh} (n\xi_0)} \right],$$

и скорость жидкости вблизи этого цилиндра равна

$$v = \frac{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \\ = 2v_0 (\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta) \sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^n \left[ \frac{\cos \varphi \sin (n\theta)}{\operatorname{ch} (n\xi_0)} + \frac{\sin \varphi \cos (n\theta)}{\operatorname{sh} (n\xi_0)} \right].$$

Средняя скорость будет наибольшей при  $\theta = 0$ , т. е. на той стороне правого цилиндра, которая обращена в сторону второго цилиндра. Следовательно, давление на этой стороне будет меньше, чем на стороне, удаленной от второго цилиндра, а результирующая сила будет стремиться столкнуть (или вернее стянуть) оба цилиндра.

Если диаметр цилиндров мал по сравнению с  $a$ , то достаточно рассматривать один лишь первый член ряда. Кроме того, радиус каждого из цилиндров приближенно равен  $2ae^{-\xi_0}$ , а угол  $\theta$  приближенно равен полярному углу относительно оси цилиндра, проходящей через точку  $x = a, y = 0$ . Давление в точке  $(\xi_0, \theta)$  на поверхности  $\xi = \xi_0$  приближенно равно

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho v^2 \simeq p_0 - 2\rho v_0^2 (\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta)^2 \left[ \frac{\cos \varphi \sin \theta}{\operatorname{ch} \xi_0} + \frac{\sin \varphi \cos \theta}{\operatorname{sh} \xi_0} \right]^2 \simeq \\ \simeq -2\rho v_0^2 \left( 1 + \frac{2b}{a} \cos \theta \right)^2 \sin^2 (\theta + \varphi) + p_0,$$

причем  $\operatorname{sh} \xi_0 \simeq \operatorname{ch} \xi_0 = d/2b$  при  $b \ll a$ , а  $d$  — расстояние между центрами цилиндров — приближенно равно  $2a$ . Результирующая сила, действующая на правый цилиндр, приближенно равна интегралу от

$$[ap (\mathbf{i} \cos \theta - \mathbf{j} \sin \theta) / (\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta)] d\theta,$$

следовательно, она равна

$$\mathbf{F} \simeq \pi \rho v_0^2 (b^2/d) [-\mathbf{i} (1 + 2 \sin^2 \varphi) + \mathbf{j} \sin 2\varphi]. \quad (10.1.48)$$

Ее составляющая по оси  $x$  всегда отрицательна, т. е. толкает правый цилиндр в сторону левого; это взаимное притяжение оказывается наибольшим, когда асимптотическое направление потока образует прямой угол с отрезком, соединяющим центры цилиндров (при  $\varphi = \frac{1}{2} \pi$  или  $\frac{3}{2} \pi$ ). Составляющая результирующей силы по оси  $y$  для правого цилиндра направлена вверх, если  $\varphi$  заключено между 0 и  $\frac{1}{2} \pi$  или между  $\pi$  и  $\frac{3}{2} \pi$ , и равна нулю при  $\varphi = 0, \frac{1}{2} \pi, \pi$  или  $\frac{3}{2} \pi$ . Результирующая сила, действующая на левый цилиндр, равна вектору  $\mathbf{F}$ , определенному формулой (10.1.48), взятому со знаком минус. Отметим, что величина  $\mathbf{F}$  уменьшается с увеличением расстояния  $d$  между цилиндрами.

**Функция Грина в биполярных координатах.** Мы выражаем (так же, как это делалось для других координатных систем) функцию Грина через

элементарные решения в этой системе:

$$F = -2 \ln(z - z_0) = -2 \ln a - 2 \ln \left[ \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} w \right) - \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} w_0 \right) \right] = \\ = -2 \ln 2a - 2 \ln [(e^{-w_0} - e^{-w}) / (1 + e^{-w})(1 + e^{-w_0})]. \quad (10.1.49)$$

Разложение этой функции имеет различный вид в зависимости от знака величин  $\xi$ ,  $\xi_0$  и  $\xi - \xi_0$ . Например,

$$F = 2 \ln \left( \frac{-e^w}{2a} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \{ e^{n(w-w_0)} - (-1)^n [e^{-nw_0} + e^{-nw}] \}$$

в случае, когда одновременно  $\xi$  и  $\xi_0$  положительны и  $\xi_0$  превосходит  $\xi$ , но

$$F' = 2 \ln \left( \frac{1}{2a} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \{ e^{n(w_0-w)} - (-1)^n [e^{nw_0} + e^{-nw}] \}$$

для положительного  $\xi$  и отрицательного  $\xi_0$  и т. д. Эти ряды сходятся, каждый в своей области, но расходятся в предельных случаях, когда  $\xi$  или  $\xi_0 \rightarrow 0$ , что соответствует оси  $y$  и окружности на бесконечности. Например, пусть по двум параллельным цилиндрическим проводящим оболочкам, каждая из которых имеет радиус  $a/\operatorname{ch} \xi_0$  и расстояние между осями которых равно  $2a \operatorname{cth} \xi_0$ , текут токи силы  $I$  в противоположных направлениях. Тогда магнитным силовым линиям и потенциалу поля вне этих оболочек соответствуют вещественная и мнимая части ряда

$$\frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{aF d\theta_0}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0} - \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{aF' d\theta_0}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0}$$

где  $F$  и  $F'$  — вышеприведенные ряды, причем в  $F$   $w_0 = \xi_0 + i\theta_0$ , а в  $F' - w_0 = -\xi_0 + i\theta_0$ .

Для этого (и других) расчетов нам надо разложить в ряд Фурье функцию  $1/(\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0)$ . Мы имеем

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta_0), \quad A_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta_0) d\theta_0}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0},$$

где  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_n = 2$  ( $n > 0$ ). К интегралу, выражающему  $A_n$ , можно прибавить интеграл

$$i \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n\theta_0) d\theta_0}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0},$$

который равен нулю в силу нечетности подинтегральной функции. Следовательно,

$$A_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta_0} d\theta_0}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0}.$$

Производя подстановку  $e^{i\theta_0} = z$ , мы переходим к контурному интегралу по  $z$ :

$$A_n = \frac{\varepsilon_n}{\pi i} \oint \frac{z^n dz}{(z + e^{-\xi_0})(z + e^{-\xi_0})},$$

где контуром интегрирования служит окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Подинтегральная функция имеет один простой полюс внутри контура в точке  $z = -e^{-\xi_0}$  (если  $\xi_0$  положительно, если же  $\xi_0$  отрицательно, то

лежащий внутри контура полюс находится в точке  $z = -e^{\xi_0}$ . Вычет в этом полюсе равен

$$\frac{\varepsilon_n}{\pi} \left[ \frac{(-e^{-\xi_0})^n}{e^{\xi_0} - e^{-\xi_0}} \right], \quad \xi_0 > 0, \text{ или } \frac{\varepsilon_n}{\pi i} \left[ \frac{(-e^{\xi_0})^n}{e^{-\xi_0} - e^{\xi_0}} \right], \quad \xi_0 < 0.$$

Следовательно, искомый ряд Фурье имеет вид

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0} = \frac{1}{\operatorname{sh} |\xi_0|} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m e^{-m|\xi_0|}}{\operatorname{sh} |\xi_0|} \cos(m\theta_0) \quad (10.1.50)$$

независимо от знака  $\xi_0$  (однако  $\xi_0$  предполагается вещественным).

Возвращаясь к рядам для  $F$  и  $F'$ , мы комбинируем два ряда, используя ортогональность  $\cos(n\theta_0)$  и  $\cos(m\theta_0)$ ,  $\sin(n\theta_0)$ , и получаем функцию

$$\begin{aligned} \psi + i\chi &= \frac{2Ia}{\operatorname{sh} \xi_0} \left\{ \ln(-e^w) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n\xi_0} [e^{n(w-\xi_0)} - e^{-n(w+\xi_0)}] \right\} = \\ &= \frac{2Ia}{\operatorname{sh} \xi_0} \left\{ \xi + i(\theta - \pi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-2n\xi_0} \operatorname{sh}[n(\xi + i\theta)] \right\}, \quad (10.1.51) \end{aligned}$$

где  $\xi$  положительно. Вещественная часть этой функции соответствует магнитным силовым линиям, а мнимая часть — магнитному потенциалу. Ввиду наличия множителей  $e^{-2n\xi_0}$  ряд сходится весьма быстро и на самом деле обычно представляет малый поправочный член, добавляемый к главному члену

$$(2Ia/\operatorname{sh} \xi_0) \cdot [\xi + i(\theta - \pi)].$$

Если ток не распределен равномерно по цилиндру, а его плотность изменяется вместе с  $\theta_0$  по закону  $\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0$  (так, что ток несколько слабее на стороне, удаленной от второго цилиндра, чем на обращенной к нему), то дополнительного ряда не требуется, силовыми линиями являются линии  $\xi = \text{const}$ , а потенциал пропорционален  $\theta$ . Таким образом, наличие второго цилиндра искажает поле вокруг равномерно распределенного по поверхности цилиндра тока, и магнитные силовые линии вблизи цилиндра уже не параллельны его поверхности.

## 10.2. Комплексные переменные и двумерное уравнение Лапласа

В предыдущем параграфе мы исследовали решения уравнения Лапласа в двумерном случае при помощи методов, которые, вообще говоря, годятся и для трех измерений и для других уравнений. Мы находили решения с помощью собственных функций для различных систем координат, в которых переменные разделяются, и составляли ряды для функции Грина в этих координатах, показывая на примерах, как могут быть удовлетворены различные граничные условия. Но в процессе исследования выяснилось, что для уравнения Лапласа с двумя переменными существует весьма эффективный специальный аппарат — аппарат функций комплексного переменного, позволяющий упростить наши вычисления и получить решения, недостижимые иными путями. В этом разделе мы отойдем от основного направления наших исследований, с тем чтобы выяснить, что может дать нам этот специфический аппарат в случае двумерного уравнения Лапласа.

Мы начнем с функции  $F(z) = \psi + i\chi$  комплексного переменного  $z = x + iy$ , где  $x$  и  $y$  — декартовы координаты для изучаемой двумерной задачи (все величины, по условию, не зависят от третьей декартовой координаты). В гл. 4 было показано, что как вещественная часть  $\psi$ , так и мнимая