

лежащий внутри контура полюс находится в точке $z = -e^{\xi_0}$. Вычет в этом полюсе равен

$$\frac{\varepsilon_n}{\pi} \left[\frac{(-e^{-\xi_0})^n}{e^{\xi_0} - e^{-\xi_0}} \right], \quad \xi_0 > 0, \text{ или } \frac{\varepsilon_n}{\pi i} \left[\frac{(-e^{\xi_0})^n}{e^{-\xi_0} - e^{\xi_0}} \right], \quad \xi_0 < 0.$$

Следовательно, искомый ряд Фурье имеет вид

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0} = \frac{1}{\operatorname{sh} |\xi_0|} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m e^{-m|\xi_0|}}{\operatorname{sh} |\xi_0|} \cos(m\theta_0) \quad (10.1.50)$$

независимо от знака ξ_0 (однако ξ_0 предполагается вещественным).

Возвращаясь к рядам для F и F' , мы комбинируем два ряда, используя ортогональность $\cos(n\theta_0)$ и $\cos(m\theta_0)$, $\sin(n\theta_0)$, и получаем функцию

$$\begin{aligned} \psi + i\chi &= \frac{2Ia}{\operatorname{sh} \xi_0} \left\{ \ln(-e^w) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n\xi_0} [e^{n(w-\xi_0)} - e^{-n(w+\xi_0)}] \right\} = \\ &= \frac{2Ia}{\operatorname{sh} \xi_0} \left\{ \xi + i(\theta - \pi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-2n\xi_0} \operatorname{sh}[n(\xi + i\theta)] \right\}, \quad (10.1.51) \end{aligned}$$

где ξ положительно. Вещественная часть этой функции соответствует магнитным силовым линиям, а мнимая часть — магнитному потенциалу. Ввиду наличия множителей $e^{-2n\xi_0}$ ряд сходится весьма быстро и на самом деле обычно представляет малый поправочный член, добавляемый к главному члену

$$(2Ia/\operatorname{sh} \xi_0) \cdot [\xi + i(\theta - \pi)].$$

Если ток не распределен равномерно по цилиндру, а его плотность изменяется вместе с θ_0 по закону $\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0$ (так, что ток несколько слабее на стороне, удаленной от второго цилиндра, чем на обращенной к нему), то дополнительного ряда не требуется, силовыми линиями являются линии $\xi = \text{const}$, а потенциал пропорционален θ . Таким образом, наличие второго цилиндра искажает поле вокруг равномерно распределенного по поверхности цилиндра тока, и магнитные силовые линии вблизи цилиндра уже не параллельны его поверхности.

10.2. Комплексные переменные и двумерное уравнение Лапласа

В предыдущем параграфе мы исследовали решения уравнения Лапласа в двумерном случае при помощи методов, которые, вообще говоря, годятся и для трех измерений и для других уравнений. Мы находили решения с помощью собственных функций для различных систем координат, в которых переменные разделяются, и составляли ряды для функции Грина в этих координатах, показывая на примерах, как могут быть удовлетворены различные граничные условия. Но в процессе исследования выяснилось, что для уравнения Лапласа с двумя переменными существует весьма эффективный специальный аппарат — аппарат функций комплексного переменного, позволяющий упростить наши вычисления и получить решения, недостижимые иными путями. В этом разделе мы отойдем от основного направления наших исследований, с тем чтобы выяснить, что может дать нам этот специфический аппарат в случае двумерного уравнения Лапласа.

Мы начнем с функции $F(z) = \psi + i\chi$ комплексного переменного $z = x + iy$, где x и y — декартовы координаты для изучаемой двумерной задачи (все величины, по условию, не зависят от третьей декартовой координаты). В гл. 4 было показано, что как вещественная часть ψ , так и мнимая

часть χ являются решениями двумерного уравнения Лапласа и связаны между собой уравнениями Коши — Римана

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (10.2.1)$$

Иными словами, функция $F(z)$ является аналитической функцией от z (за исключением дискретного множества особенностей), но комбинация $F(z)$ и $F(\bar{z})$ или $\bar{F}(z)$ не является аналитической функцией от z . Однако комбинации $\frac{1}{2}(F + \bar{F})$ и $\frac{1}{2}(F - \bar{F})$ (и вообще любая линейная комбинация F и \bar{F}), рассматриваемые как функции x и y , являются решениями уравнения Лапласа по x и y .

Можно перейти к новой системе координат при помощи конформного преобразования, определенного функциональным соотношением $z = f(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, где ξ и η — новые координаты. Коэффициенты Ламе равны при этом друг другу и система ортогональна, так как преобразование конформно:

$$h_\xi = h_\eta = h = |f'| = 1/|\zeta'|, \quad f' = dz/d\zeta, \quad \zeta' = d\zeta/dz, \quad (10.2.2)$$

$$f(\zeta) = x + iy, \quad \zeta(z) = \xi + i\eta.$$

Так как f зависит от одного лишь ζ , то комплексно сопряженная функция $\bar{f} = x - iy$ зависит от одного лишь $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$.

Так как F — функция от z , то она также может быть записана как функция от ζ , так что любая линейная комбинация ψ и χ является решением уравнения Лапласа в координатах ξ, η , а ψ и χ связаны соотношениями, такими же, как и (10.2.1), лишь вместо x, y нужно подставить ξ и η . Аналогично комплексно сопряженная функция $\bar{F} = \psi - i\chi$ зависит от одного лишь $\bar{\zeta}$ (не зависит от ζ), если F есть функция от z , а $z = f$ есть функция от ζ .

Мы, конечно, помним, что комплексные числа могут рассматриваться как векторы с определенной длиной и направлением. При помощи единичных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ функция $\Phi = R + iJ$ может быть записана как $R\mathbf{i} + J\mathbf{j}$. Как показано в § 4.1, дифференциальные операторы $\text{grad}, \text{div}, \text{rot}$ для двух измерений можно записать при помощи комплексных чисел. Например, для скалярной функции R вектор $\text{grad} R$ можно записать как комплексное число

$$\nabla R = \frac{\partial R}{\partial x} + i \frac{\partial R}{\partial y}; \quad (10.2.3)$$

тогда $\bar{\nabla} R = \partial R/\partial x - i\partial R/\partial y$ будет комплексно сопряженным с ∇R . Вообще говоря, если R — произвольная вещественная функция вещественных переменных x и y , то комплексные величины ∇R и $\bar{\nabla} R$ не являются аналитическими функциями от z .

Если скалярная функция R от x и y есть длина вектора $R\mathbf{k}$, нормального к плоскости (x, y) , то его ротор равен

$$\text{rot}(R\mathbf{k}) = \mathbf{i} \frac{\partial R}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial R}{\partial y} - i \frac{\partial R}{\partial x} = -i \nabla R. \quad (10.2.4)$$

Далее, если $\Phi = R + iJ$ есть комплексная функция от x и y (не обязательно являющаяся аналитической функцией от $z = x + iy$), представляющая вектор Φ в плоскости (x, y) , то мы получим [см. уравнение (4.1.6)]

$$\bar{\nabla} \Phi = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial y} + i \left(\frac{\partial J}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) = \text{div} \Phi + i \text{rot}_z \Phi; \quad (10.2.5)$$

вещественная часть $\bar{\nabla} \Phi$ равна дивергенции вектора Φ , а мнимая часть равна $\text{rot}_z \Phi$ — составляющей его ротора по оси z . Если $\bar{\Phi}$ является аналити-

ческой функцией $F(z)$, то из уравнений (10.2.1) следует, что $\overline{\nabla}F = \nabla\overline{F} = 0$ и, следовательно, что $\overline{\nabla}\Phi = \nabla\overline{F} = 0$ и $\operatorname{div}\Phi$ и $\operatorname{rot}\Phi$ равны нулю (ср. стр. 334 тома I).

Последнее утверждение станет много понятнее, если мы выразим эти величины не через вещественную и мнимую части R, J и действительные аргументы x и y , а (если сможем) через функцию Φ комплексного аргумента z и его сопряженного \bar{z} . Так как $x = \frac{1}{2}(\bar{z} + z)$, а $y = \frac{1}{2}i(\bar{z} - z)$, то комплексную функцию $\Phi(z, \bar{z})$ от x и y можно представить как функцию от z и \bar{z} или от ζ и $\bar{\zeta}$ [см. уравнение (10.2.2)]:

$$\nabla\Phi = 2\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{2}{f'}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \quad \text{и} \quad \overline{\nabla}\Phi = 2\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} = \frac{2}{f'}\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\zeta}}, \quad (10.2.6)$$

а лапласиан равен

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \nabla\overline{\nabla}\Phi = 4\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar{z}} = \frac{4}{|f'|^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}.$$

В этих уравнениях Φ может быть, в частности, чисто вещественной функцией ($\Phi = R$), либо чисто мнимой ($\Phi = iJ$). Однако, если $\overline{\nabla}\Phi$ является функцией F от одного только z (т. е. аналитической функцией от z , за исключением дискретного множества особенностей), то $F = \psi - i\chi$ является функцией от одного только z , и мы имеем

$$\nabla^2F = \nabla^2\overline{F} = \nabla^2\psi = \nabla^2\chi = 0 \quad (10.2.7)$$

всюду, за исключением дискретного множества особенностей F . Тогда комплексные числа, представляющие векторы, являющиеся градиентами от вещественной или мнимой частей $F(z)$, равны [согласно равенствам (10.2.6)]

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\psi &= \frac{1}{2}\nabla(\overline{F} + F) = \overline{\left(\frac{dF}{dz}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{f'}\frac{dF}{d\zeta}\right)}, \quad F(z) = \psi + i\chi, \\ \operatorname{grad}\chi &= \frac{1}{2}i\nabla(\overline{F} - F) = -i\operatorname{grad}\psi, \quad z = x + iy = -f(\zeta), \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

где можно брать производные по z или по ζ , а затем переходить к комплексно сопряженным числам, либо брать производные от \overline{F} по \bar{z} или $\bar{\zeta}$. Имеем соответственно

$$\operatorname{rot}(k\psi) = i\nabla\psi = i\overline{\left(\frac{dF}{dz}\right)} = i\operatorname{rot}(k\chi),$$

где F является функцией от z и не является функцией от \bar{z} .

Поля, граничные условия и аналитические функции. Имея в виду все сказанное, мы можем легко восстановить в памяти соотношения, существующие между различными удобными для приложений аналитическими функциями $F(z)$, их вещественными и мнимыми частями ψ и χ , их производными по z (или по другой переменной $\zeta = \xi + i\eta$, представляющей другую систему координат) и физическими величинами, относящимися к различным задачам, связанным с решениями уравнений Лапласа и Пуассона. Например, для двумерных *электростатических* (или гравитационных) задач мы подбираем аналитическую функцию $F(z)$, такую, что ее вещественная часть $\psi(x, y)$ есть электростатический (или гравитационный) потенциал. Тогда ее мнимая часть $\chi(x, y)$ представляет силовые линии. Комплексная величина $-\operatorname{grad}\psi = -\overline{(dF/dz)}$ представляет вектор напряженности, а величина $(1/4\pi)|dF/dz|$ в точке на поверхности проводника равна плотности заряда в этой точке. Обычно задача заключается в том, чтобы найти такую функцию $F(z)$, чтобы границы (на которых потенциал постоянен) совпадали с одной или несколькими кривыми семейства $\psi = \operatorname{const}$.

Весьма эффективен метод, состоящий в переходе от данной задачи теории потенциала с граничными условиями Дирихле на заданном контуре к другой задаче с аналогичными условиями на контуре, отличающемся своим видом от первого. Мы находим конформное отображение $\zeta = \zeta(z)$ [или $z = f(\zeta)$], при котором старая граница преобразуется в новую; тогда новый потенциал будет вещественной частью функции $F(\zeta)$, а ее мнимая часть будет соответствовать силовым линиям; напряженность будет выражаться комплексной функцией $-(1/f') (dF/d\zeta)$, а плотность заряда в данной точке проводящей поверхности в новых координатах будет равна значению $(1/4\pi |f'|) |dF/d\zeta|$ в этой точке. Некоторые примеры применения этого метода будут рассмотрены ниже в этом же параграфе.

Для магнитоэстатического случая мы обычно выбираем χ в качестве магнитного потенциала, а ψ соответствует магнитным силовым линиям. Тогда напряженность магнитного поля равна $\text{grad } \chi = i (dF/dz) = (i/f') (dF/d\zeta)$. Для установившейся диффузии ψ обычно выражает плотность диффундирующего вещества (или температуру), а плотность потока равна $-a^2 (dF/dz)$, где a — постоянная диффузии [см. уравнение (2.4.3)].

Полный поток вещества между двумя линиями тока χ_0 и χ_1 и двумя плоскостями, параллельными плоскости x, y , расстояние между которыми равно единице, можно получить, интегрируя $-a^2 \text{grad } \psi = -a^2 (dF/dz)$ вдоль линии уровня функции ψ (эта линия всюду ортогональна к потоку) от χ_0 до χ_1 . Интегрирование производится по пути, вдоль которого ψ не изменяется, следовательно, интеграл от $-(dF/dz)$ в точности равен приращению χ и полный поток равен $a^2 (\chi_1 - \chi_0)$. Аналогично полный магнитный поток между силовыми линиями, ψ_0 и ψ_1 , приходящийся на единицу высоты, в точности равен $\psi_1 - \psi_0$.

Для установившегося потока несжимаемой жидкости уравнение (2.3.14) приводится к виду

$$\text{grad} \left(p + V + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + 2\eta \text{rot } \mathbf{w} - 2\rho \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0, \quad (10.2.9)$$

где p — давление, V — гравитационный потенциал (или другой объемный потенциал), ρ — плотность жидкости, η — ее коэффициент вязкости, \mathbf{v} — ее скорость, а $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$ — ее вихрь. Так как жидкость несжимаема, то $\text{div } \mathbf{v} = 0$, а это значит, что \mathbf{v} равна сумме градиента скалярного потенциала и вихря векторного потенциала.

Для безвихревого потока векторный потенциал равен нулю и \mathbf{v} определяется скалярным потенциалом скоростей, являющимся решением уравнения Лапласа. Для двумерного потока этот потенциал равен вещественной части некоторой аналитической функции от z , $F(z) = \psi + i\chi$, где χ — соответствующая функция тока. Скорость жидкости определяется комплексной функцией $-\nabla\psi = -(dF/dz)$, а полный поток жидкости между линиями тока χ_0 и χ_1 , приходящийся на единицу толщины слоя, параллельного плоскости x, y , равен $\chi_1 - \chi_0$. В этом случае $p + V + \frac{1}{2} \rho v^2$ есть величина постоянная, так что давление в каждой точке равно

$$p = \text{const} - V - \frac{1}{2} \rho |dF/dz|^2, \quad (10.2.10)$$

что представляет собой двумерную форму уравнения Бернулли. Обычно задача заключается в отыскании аналитической функции $F(z)$, для которой функция тока χ такова, что граничная поверхность совпадает с одной или более линиями $\chi = \text{const}$. Если это сделано, то результирующая сила на границе может быть вычислена при помощи уравнения (10.2.10).

Если поток не является безвихревым, но настолько медленный, что члены $2\rho\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ и $\frac{1}{2}\rho v^2$ в уравнении (10.2.9) весьма малы по сравнению с остальными членами, то, как показано на стр. 176, 177, мы находим аналитическую функцию $W(z)$ с вещественной частью $(p+V)/2\eta$, определяющей давление, и мнимой частью, равной со знаком минус величине вихря $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\text{rot}_z \mathbf{v}$, который в двумерном случае нормален к плоскости x, y . Теперь скорость уже не может быть только градиентом скалярного потенциала; необходимо также использовать векторный потенциал, нормальный к плоскости x, y . Пусть скалярный потенциал скоростей равен ϕ , а векторный $\mathbf{A} = A\mathbf{k}$; тогда скорость равна

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A} - \text{grad } \phi = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right).$$

Чтобы выразить скорость при помощи комплексного переменного, заметим, что скалярный потенциал равен вещественной части аналитической функции $F(z) = \phi + i\chi$ (так как $\nabla^2 \phi$ должен равняться нулю), но A , вообще говоря, зависит одновременно от z и \bar{z} (т. е. является произвольной функцией от x и y). Представим $\phi(x, y)$ в виде функции $\frac{1}{2}[F(z) + \bar{F}(\bar{z})]$ от z и \bar{z} , а затем используем равенства (10.2.4) и (10.2.6), чтобы получить комплексную запись вектора \mathbf{v} :

$$v = v_x + iv_y = -(\partial/\partial \bar{z})[\bar{F}(\bar{z}) + 2iA(z, \bar{z})], \quad (10.2.11)$$

где $F(z)$ — комплексная функция от $z = x + iy$, \bar{F} — функция от \bar{z} , а A — вещественная функция от z и $\bar{z} = x - iy$.

Связь между функциями F и A и функцией давления-завихренности $W(z) = [(p+V)/2\eta] - i\omega$ получается из определения вихря $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\text{rot } \mathbf{v}$. Так как дивергенция \mathbf{v} равна нулю, то, используя равенства (10.2.5) и (10.2.6), получим

$$-i \frac{\partial v}{\partial z} = -2 \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \text{rot}_z \mathbf{v} = \omega = \frac{1}{2} i [W(z) - \bar{W}(\bar{z})].$$

Поэтому соотношение между A и W может быть выражено следующим образом: находим аналитическую функцию $U(z)$, такую, что $dU/dz = W(z)$, а затем полагаем

$$A = \frac{1}{2} \text{Im} [\bar{z}U(z)] = -\frac{1}{4} i [\bar{z}U(z) - z\bar{U}(\bar{z})], \quad (10.2.12)$$

откуда следует, что

$$4i \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \bar{z}} = U'(z) - \bar{U}'(\bar{z}) = -2i\omega,$$

если $U'(z) = W(z)$. Следовательно, при помощи двух аналитических функций U и F выражения для скорости, вихря и давления для медленного потока вязкой жидкости записываются в виде

$$\begin{aligned} v &= -\bar{F}'(\bar{z}) - \frac{1}{2} U(z) + \frac{1}{2} z\bar{U}'(\bar{z}) = v_x + iv_y, \\ \omega &= -\text{Im} [U'(z)], \quad p = -V + 2\eta \text{Re} [U'(z)], \end{aligned} \quad (10.2.13)$$

где V есть гравитационный потенциал жидкости.

Граничным условиям можно удовлетворить, подбирая U и F таким образом, чтобы функция тока

$$\Omega = \text{Im} [F(z) - \frac{1}{2} \bar{z}U(\bar{z})]$$

определяла линии тока $\Omega = \text{const}$, совпадающие с границами. Нетрудно показать, что $\text{grad } \Omega = -iv$, так что скорости всюду параллельны линиям $\Omega = \text{const}$, а разность $\Omega_1 - \Omega_0$ равняется полному потоку жидкости между линиями тока Ω_0 и Ω_1 , приходящемуся на единицу толщины слоя, параллельного плоскости x, y (в этом и состоит определение функции тока). Оказывается необходимым в каждой координатной системе, заданной соотношением $z = f(\zeta)$, найти такую функцию $U(z)$, чтобы мнимая часть $\overline{f(\zeta)} U[f(\zeta)]$ равнялась нулю или постоянной величине на граничной поверхности $\xi = \xi_0$ или $\eta = \eta_0$ (см. стр. 176).

Наконец, нам желательно найти выражение для силы воздействия жидкости на граничную поверхность. Она также должна представляться в комплексной форме; наилучшим образом ее можно выразить при помощи силы, действующей на элемент поверхности. Рассмотрим элементарную площадку единичной длины в направлении, перпендикулярном плоскости x, y . Пусть ширина этой площадки равна $dz = dx + idy$, причем dz характеризует ширину площадки не только по ее величине, равной $|dz|$, но также и по направлению. Вектор, «представляющий» элементарную площадку, перпендикулярен dz и равен $|dz|$ по длине. Если предположить, что для наблюдателя, стоящего по направлению оси Oz , «внешняя сторона площадки» расположена справа, то векторный элемент площади равен $-idz = -dy - idx$, т. е. вектору, нормальному к dz и равному ему по длине.

На эту элементарную площадку действует сила, порожденная давлением жидкости и равная $ipdz$, где p — скаляр, определяемый равенством (10.2.10) или (10.2.13). Силу, действующую на эту площадку и порожденную вязкостью жидкости, можно получить при помощи соотношения (2.3.10). Для случая двух измерений в комплексной форме записи дополнительная сила, вызванная вязкостью, равна

$$dP = \eta \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dx \right] + i\eta \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy - 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} dx \right]$$

с учетом того факта, что $\partial v_x / \partial x = -(\partial v_y / \partial y)$, так как $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Когда вектор v задан выражением (10.2.13), можно привести это соотношение к виду

$$\begin{aligned} dP &= \eta (dx - idy) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (iv_x - v_y) = 2i\eta d\bar{z} \frac{\partial v}{\partial z} = \\ &= -i\eta [2\overline{F''(z)} - z\overline{U''(z)}] d\bar{z}. \end{aligned} \quad (10.2.14)$$

Для медленного потока вязкой жидкости это выражение может быть использовано как в случае безвихревого потока ($U = 0$), так и в случае завихренного потока ($U \neq 0$). Однако в случае чисто потенциального потока общая сила, действующая на границу от точки z_0 до точки z_1 , равна

$$-2i\eta \int_{z_0}^{z_1} \frac{d\overline{F'(z)}}{dz} d\bar{z} = 2i\eta [\overline{F'(z_0)} - \overline{F'(z_1)}]$$

и если границей служит замкнутый цилиндр или призма, то $z_1 = z_0$ и результирующая сила, порождаемая вязкостью, равна нулю. Так как потенциальный поток предполагает ничтожно малую вязкость, мы не должны удивляться тому, что силы, порождаемые вязкостью, взаимно уничтожаются. Если U не равно нулю, то v не является функцией одного только \bar{z} и интеграл по замкнутому контуру не обязательно равен нулю.

Некоторые элементарные решения. Согласно программе, изложенной на стр. 204, 205, мы должны начать с нескольких особенно простых решений, соответствующих различным физическим условиям, и подробно разобрать

их. Затем могут быть получены и прочие решения простым (?) процессом подбора конформных преобразований, переводящих простые границы в границы, фигурирующие в новых задачах.

Наиболее простым случаем является, конечно, случай параллельных границ $y = y_0$ и $y = y_1$. Здесь потенциал обычно просто пропорционален самому z . Например, для электростатической задачи, в которой потенциал на границе $y = y_0$ равен нулю, а на верхней границе $y = y_1$ равен V , потенциал между пластинами выражается вещественной частью комплексной функции

$$F(z) = \phi + i\chi = \frac{V}{y_1 - y_0} (-iz - y_0) = V \frac{y - y_0 - ix}{y_1 - y_0}. \quad (10.2.15)$$

Напряженность электрического поля в точке z между пластинами равна $-\overline{F'(z)} = -iV/(y_1 - y_0)$, направлена по оси y и (в простейшем случае) не зависит от z . На каждом из граничных проводников плотность заряда равна $V/4\pi(y_1 - y_0)$, так что емкость, приходящаяся на единицу площади пластины, равна $1/4\pi(y_1 - y_0)$ электростатических единиц.

Для потенциала безвихревого потока между пластинами, имеющего скорость v_0 , соответствующая аналитическая функция равна

$$F(z) = -v_0 z, \quad \phi = -v_0 x, \quad \chi = -v_0 y.$$

Скорость $-\overline{F'(z)} = v_0$ всюду постоянна, а полный поток между границами, приходящийся на единицу глубины, равен разности значений χ на границах, т. е. $v_0(y_1 - y_0)$. Если давление на верхней пластине равно нулю, то на нижней оно равно $\rho g(y_1 - y_0)$, где g — ускорение силы тяжести.

Для потока вязкой жидкости между параллельными пластинами функция $U(z)$, введенная на стр. 176, 177, пропорциональна z или z^2 в зависимости от граничных условий. Если верхняя пластина движется со скоростью v_0 в направлении x , а нижняя неподвижна, то мы положим

$$F(z) = \frac{v_0}{y_1 - y_0} \left(\frac{1}{4} iz^2 + y_0 z \right), \quad U(z) = \frac{iv_0 z/2}{y_1 - y_0} = \frac{1}{2} v_0 \frac{ix - y}{y_1 - y_0}. \quad (10.2.16)$$

Так как

$$\overline{U'(z)} = -\frac{1}{2} \frac{iv_0}{y_1 - y_0},$$

мы видим, что скорость в точке z равна

$$v = \frac{v_0}{y_1 - y_0} \left[\frac{1}{2} (ix + y - 2y_0) + \frac{11}{4} (y - ix) + \frac{1}{4} (y - ix) \right] = v_0 \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Аналогично вихрь и давление в точке z равны $\omega = -\frac{v_0/2}{y_1 - y_0}$, и $p = \rho g(y_1 - y)$, причем вихрь отрицателен (направлен по часовой стрелке) и не зависит от положения точки, а давление зависит только от силы тяжести. Используя формулу (10.2.14), найдем, что сила, приходящаяся на единицу площади дна (неподвижного), равна $-2i\eta\overline{F''} = \eta v_0/(y_1 - y_0)$ и направлена в положительном направлении по оси x .

С другой стороны, если обе пластины неподвижны, а жидкость прогоняется между пластинами, то, положив

$$F(z) = \frac{Q/2}{(y_1 - y_0)^3} [-(z - iy_0)^3 + 3i(y_1 - y_0)(z - iy_0)^2],$$

$$U(z) = \frac{3Q}{(y_1 - y_0)^3} [-(z - iy_0)^2 + i(y_1 - y_0)(z - iy_0)].$$

мы найдем, что

$$v = \frac{6Q}{(y_1 - y_0)^3} [(y_1 - y_0)(y - y_0) - (y - y_0)^2] = \frac{6Q}{(y_1 - y_0)^3} (y - y_0)(y_1 - y),$$

$$w = \frac{6Q}{(y_1 - y_0)^3} (2y - y_0 - y_1), \quad p = \rho g (y_1 - y) + \frac{12\gamma Q}{(y_1 - y_0)^3} (x_0 - x), \quad (10.2.17)$$

где Q — полный поток жидкости между пластинами, приходящийся на единицу толщины в направлении, перпендикулярном плоскости x, y . Вихрь равен нулю на средней линии $y = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)$, положителен (направлен против часовой стрелки) выше средней линии и отрицателен (направлен по часовой стрелке) ниже ее. Давление принимается равным нулю в точке $z = x_0 + iy_1$. Оно возрастает с убыванием y под действием силы тяжести, а также возрастает с убыванием x , так как необходима внешняя сила, чтобы прогнать вязкую жидкость между пластинами.

Получив простые решения физических задач для прямоугольной системы, мы покажем теперь, как перенести эти решения на другие системы координат. Одно из простых преобразований переменных определяется соотношениями (см. рис. 10.11)

$$w = \xi + i\varphi = \ln(z + a), \quad z = f(w) = e^w - a. \quad (10.2.18)$$

Оно переводит пару параллельных пластин CA и CB в плоскости w в пару пластин, образующих угол α и пересекающихся в точке $z = -a$ в плоскости z . При этом преобразовании началу координат ($w = 0$) соответствует точка $z = -a$ плоскости z . Если пластина CA ($\varphi = 0$) имеет нулевой потенциал, а пластина CB ($\varphi = \alpha$) — потенциал V_0 , то потенциал между пластинами можно получить из (10.2.15), заменив z на w и положив $y_0 = 0, y_1 = \alpha$:

$$F(z) = F(w) = \phi + i\chi = -iV_0 w / \alpha = (-iV_0 / \alpha) \ln(z + a) =$$

$$= \frac{V_0}{\alpha} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x+a} \right) - \frac{iV_0}{2\alpha} \ln [(x+a)^2 + y^2].$$

Эквипотенциальными линиями ($\varphi = \text{const}$) являются лучи, проходящие через точку $z = -a$ под различными углами φ к оси x . Силовыми линиями ($\xi = \text{const}$) служат дуги окружностей различных радиусов $r = e^\xi$ с центром в точке $z = -a$. Напряженность в точке z (или w в зависимости от выбранной системы координат) равна

$$-\overline{F'(z)} = \frac{\overline{(iV_0/\alpha)}}{z+a} = \frac{V_0}{\alpha} \frac{y - i(x+a)}{y^2 + (x+a)^2} = - \left[\frac{1}{f'} \frac{dF}{dw} \right] = - \frac{iV_0}{\alpha} e^{-\bar{z} + i\varphi}.$$

Последнее выражение явно указывает на то, что напряженность обратно пропорциональна $r = e^\xi$, т. е. расстоянию от точки $z = -a$, образует прямой угол с радиус-вектором и обращена в сторону вещественной оси. (Направление напряженности характеризуется множителем $-ie^{i\varphi}$ и потому получается из направления этого радиус-вектора, характеризуемого множителем $e^{i\varphi}$, поворотом на -90° .) Плотность заряда в точке x на нижней пластине равна $(1/4\pi) |F'(z)| = V_0/4\pi a r$ и убывает с удалением от вершины угла $z = -a$.

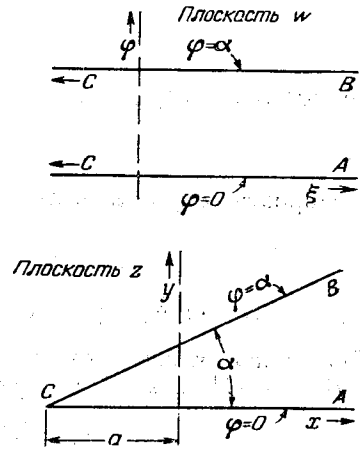


Рис. 10.11. Переход от прямоугольных координат к полярным при помощи конформного преобразования.

Если функция F описывает поток, протекающий между пластинами, то она имеет вид $-v_0\omega = -v_0 \ln [(z+a)/a]$. Здесь линии тока исходят из центра $z = -a$, а линии постоянного потенциала скоростей являются дугами концентрических окружностей. Скорость равна $-\overline{F'}(z) = [v_0 e^{-w}] = v_0 e^{-\xi+i\varphi}$, имеет величину v_0/r и направлена по радиусу.

В случае потока вязкой жидкости между двумя пересекающимися пластинами необходимо выбрать комплексные функции $F(z)$ и $U(z)$ так, чтобы функция тока Ω , введенная на стр. 208, зависела только от φ . Оказывается, что в данном случае это осуществить легче, чем в прямоугольных координатах. Это было сделано на стр. 177. Так как $z = e^{\xi-i\varphi} - a$, то мы можем выбрать

$$U = Ce^{-w}, \quad F = -\frac{1}{2}Ce^{-w} + Bw.$$

Функция A , определяемая формулой (10.2.12), равна

$$A = -\frac{1}{4}i [Ce^{\bar{w}-w} - Ce^{-w} - \bar{C}e^{w-\bar{w}} + \bar{C}e^{-\bar{w}}],$$

а скорость, определяемая формулой (10.2.11), равна

$$v = -\frac{1}{2f'} \frac{d}{d\bar{w}} [-\bar{C}e^{-\bar{w}} + 2B\bar{w} + Ce^{\bar{w}-w} - Ce^{-w} - \bar{C}e^{w-\bar{w}} + \bar{C}e^{-\bar{w}}] = \\ = -e^{-\bar{w}} [B + |C| \cos(2\varphi - \beta)], \quad \text{где } C = |C|e^{i\beta}.$$

Для того чтобы получить $v=0$ при $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$, положим $\beta=\alpha$, а $B = -|C| \cos \alpha$. Тогда функция тока будет равна

$$\Omega = \frac{1}{2}|C| \sin(2\varphi - \alpha) - |C|\varphi \cos \alpha.$$

Для завершения решения задачи используются равенства (10.1.17) и следующие.

Преобразование, пригодное для цилиндрических поверхностей, можно получить, положив в выражении (10.2.18) $a=0$. Электростатический случай получается при $F = [V_0/(\xi_1 - \xi_0)](\omega - \xi_0)$; вещественная часть этой функции есть потенциал, равный нулю при $r = e^{\xi_0}$ и равный V_0 при $r = e^{\xi_1}$. Плотность заряда на внутреннем цилиндре равна

$$\frac{1}{4\pi} \left| \frac{dF}{dz} \right| = \frac{1}{4\pi |f'|} \left| \frac{dF}{d\omega} \right| = \frac{V_0 e^{-\xi_0}}{4\pi (\xi_1 - \xi_0)},$$

а площадь поверхности, соответствующая единице длины цилиндра, равна $2\pi e^{\xi_0}$, так что на единицу длины приходится заряд, равный $V_0/2(\xi_1 - \xi_0)$, откуда можно вычислить и емкость.

Для вязкой жидкости, находящейся между неподвижным внутренним цилиндром радиуса $r_0 = e^{\xi_0}$ и внешним цилиндром радиуса $r_1 = e^{\xi_1}$, вращающимся с угловой скоростью ω , мы можем выбрать функции F и U так, чтобы функция тока

$$\Omega = \text{Im} \left[F(\omega) - \frac{1}{2}e^{\bar{w}}U(\omega) \right]$$

зависела только от одного ξ (и не зависела от φ). Это означает, что U может равняться $iCz = iCe^w$, а F , возможно, будет равной iBw , где C и B — вещественные числа. Тогда модуль векторного потенциала будет равен $A = -\frac{1}{2}Ce^{w+\bar{w}}$, а скорость равна по величине

$$v = -\frac{1}{f'} \frac{d}{d\bar{w}} [-iB\bar{w} - iCe^{w+\bar{w}}] = ie^{i\varphi} [Be^{-\xi} + Ce^{\xi}]$$

и направлена в сторону положительных φ . Следует так подобрать B и C , чтобы получить $|v|=0$ при $\xi = \xi_0 = \ln r_0$ и $v_0 = \omega r_1$ при $\xi = \xi_1 = \ln r_1$. Это дает $B = -Ce^{2\xi_0}$ и $C = v_0 e^{-\xi_0} / 2 \operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_0)$, откуда в силу (10.2.3) имеем

$$v = iv_0 e^{i\varphi} \frac{\operatorname{sh}(\xi - \xi_0)}{\operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_0)}, \quad \omega = -C = \frac{v_0 e^{-\xi_0}}{2 \operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_0)}, \quad p = -\rho g y.$$

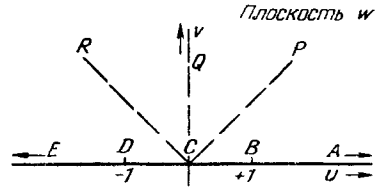
Результирующую силу на внутреннем цилиндре можно подсчитать при помощи формулы (10.2.14). Так как $U = iCz$, то $U'' = 0$; так как $F = -iCe^{2\xi_0} \ln z$, то $F'' = iCe^{2\xi_0}/z^2 = iCe^{-2i\varphi}$ при $\xi = \xi_0$ и, наконец, $dz = ie^{\xi_0+i\varphi} d\varphi$ при $\xi = \xi_0$, откуда находим, что

$$dP = 2i\eta C e^{\xi_0+i\varphi} d\varphi = ie^{i\varphi} \frac{v_0 \eta}{\operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_0)} d\varphi$$

и направлен в сторону положительных φ по касательной к поверхности цилиндра.

Результирующая сила, действующая на внутренний цилиндр, в точности равна выталкивающей силе перемещающейся жидкости, так как интеграл от dP равен нулю. Однако момент на внутреннем цилиндре, порожденный силой dP , равен $r_0 |dP| = e^{\xi_0} |dP|$, так что результирующий вращающий момент, порождаемый вязкостью, равен

$$\frac{2\pi\eta v_0 e^{\xi_0}}{\operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_0)} = \frac{4\pi\eta v_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}.$$



Преобразование решений. Применение последовательных преобразований часто приводит нас к требуемой граничной поверхности. Например, преобразование

$$\omega = u + iv = \operatorname{ch}(\pi z/a), \quad z = x + iy, \quad (10.2.19)$$

показанное на рис. 10.12, переводит вещественную ось $v=0$ в ломаную линию: положительная полуось x , отрезок оси y от нуля до ia , положительная часть прямой $y=a$ (ниже в этом же параграфе мы покажем, как получать такие преобразования более или менее произвольно). Теперь, если мы имеем решение, соответствующее граничным условиям, заданным на вещественной оси, мы можем при помощи введенного преобразования перейти к решению, для которого граничные условия задаются вдоль границы $ABCDE$, показанной на рис. 10.12.

Например, потенциал, возникающий, когда часть плоскости $v=0$ от $u=0$ до $u=+\infty$ имеет нулевой потенциал, а остальная часть этой плоскости имеет потенциал V_0 , равен вещественной части функции

$$F = \psi + i\chi = -i \frac{V_0}{\pi} \ln \omega = \frac{V_0}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{v}{u} \right) - i \frac{V_0}{2\pi} \ln(u^2 + v^2).$$

Выполнив замену переменных при помощи формул (10.2.19), мы получим

$$\begin{aligned} F &= -i \frac{V_0}{\pi} \ln \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\pi z}{a} \right) \right] = \\ &= \frac{V_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\operatorname{th} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi y}{a} \right) \right] - i \frac{V_0}{2\pi} \ln \left[\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi y}{a} \right) \right]. \end{aligned}$$

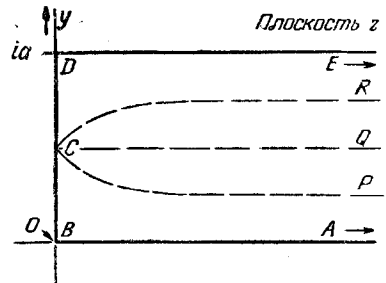


Рис. 10.12. Конформное отображение области ACE , лежащей в плоскости ω , на плоскость z . Эллиптические координаты в плоскости ω переходят в прямоугольные координаты в плоскости z .

Вещественная часть этой функции равна потенциалу, возникающему, когда часть плоскости, обозначенная на рис. 10.12 через ABC , имеет нулевой потенциал, а часть CDE имеет потенциал V_0 .

Далее магнитный потенциал вокруг провода, проходящего через точку $w = ib$ перпендикулярно к плоскости w , по которому течет ток силы q в направлении к плоскости w , причем плоскость $v = 0$ является границей железной плиты с высокой магнитной проницаемостью, расположенной вниз от этой плоскости, равен [см. (10.2.24)] мнимой части функции

$$F = -2q \ln(w^2 + b^2).$$

Поэтому магнитный потенциал, создаваемый током силы q , текущим в направлении от читателя по проводу, проходящему через точку $x = (a/\pi) \operatorname{Ar sh} b$, расположенную в прорезе, сделанном в массе железа, как это показано на рис. 10.12, равен мнимой части функции

$$F = -2q \ln[\operatorname{ch}^2(\pi z/a) + b^2].$$

Например, напряженность магнитного поля вдоль граничной поверхности, соответствующей положительной части оси x , равна

$$\left| \frac{dF}{dz} \right|_{y=0} = \left| \frac{dF}{dw} \right| \frac{1}{|dz/dw|} = \frac{4\pi q}{a} u \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u^2 + b^2}, \quad u = \operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

В качестве третьего примера мы можем показать, что установившаяся температура в верхней полуплоскости w , когда отрезок $-1 < u < +1$ оси u поддерживается при температуре T_0 , а остальная часть оси u имеет нулевую температуру, оказывается равной вещественной части функции

$$F = -i \frac{T_0}{\pi} \ln \left[\frac{w-1}{w+1} \right] = \frac{2iT_0}{\pi} \operatorname{Ar ch} w.$$

Следовательно, распределение температуры в полубесконечной сплошной плите ширины a , торец которой поддерживается при температуре T_0 , а стороны при нулевой температуре, выражается вещественной частью функции

$$F = (2iT_0/\pi) \operatorname{Ar ch} [\operatorname{ch}(\pi z/a)].$$

Этот результат был уже получен другими методами [см. (10.1.8)].

Можно применять преобразования последовательно для получения новых полезных примеров. Например, если подвергнуть преобразованию (10.2.19) плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ вместо плоскости z , где $w = \operatorname{ch} \zeta$, то можно перейти к преобразованию $\zeta = \ln(z/a)$ или $z = ae^\zeta$. При этом точка B в плоскости ζ (точка $\zeta = 0$) соответствует точке $z = a$, линия BCD на плоскости ζ ($0 \leq \eta \leq \pi$) соответствует полуокружности с центром в точке $z = 0$ радиуса a , а линия DE соответствует части оси x , лежащей левее точки $x = -a$. Следовательно, преобразование $w = 2a \operatorname{ch} [\ln(z/a)] = z + a^2/z$ переводит вещественную ось u плоскости w в линию, состоящую из частей вещественной оси и полуокружности, показанную на рис. 10.13. Благодаря наличию множителя $2a$ производная $dw/dz \rightarrow 1$ для больших значений z (это означает, что плоскости w и z совпадают при больших z).

Если задача заключается в исследовании безвихревого потока идеальной жидкости, обтекающего цилиндр, то мы можем начать с простого потенциала $F = -v_0 w$, соответствующего однородному потоку в плоскости w , движущемуся вправо со скоростью v_0 . Совершив преобразование, получим функцию

$$F = \psi + i\chi = -v_0 \left[z + \frac{a^2}{z} \right] = -v_0 x - \frac{v_0 a^2 x}{x^2 + y^2} - i v_0 y + \frac{i v_0 a^2 y}{x^2 + y^2},$$

вещественная часть которой равна потенциалу скоростей (см. стр. 207).

Далее, если часть плоскости z , лежащая выше линии $ABCDE$, изображенной на рис. 10.13, заполнена проводящим тепло материалом, на полуокружности BDC поддерживается температура T_0 , а на остальной

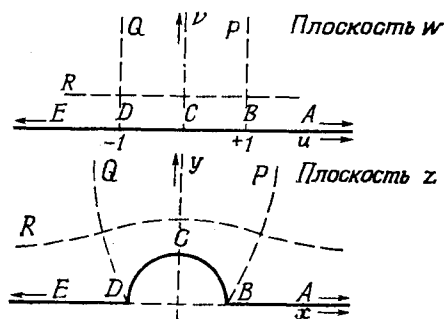


Рис. 10.13. Преобразование эллиптических координат в плоскости w в полярные координаты в плоскости z .

части границы нулевая температура, то распределение температуры описывается вещественной частью функции

$$F = (2iT_0/\pi) \operatorname{Arcth} [z + a^2/z]$$

и т. д.

Циркуляция и подъемная сила. Благодаря компактности комплексных обозначений вычисление ряда величин, связанных с двумерными полями, можно осуществить значительно проще, чем в § 10.1. Это видно, в частности, при изучении потока идеальной жидкости вокруг цилиндров различной формы. На стр. 189, 190 мы разбирали случай, когда наличие острого заднего края вызывало циркуляцию жидкости вокруг цилиндра в дополнение к безвихревому потоку, обтекающему цилиндр. Здесь мы используем преимущества метода комплексного переменного, чтобы более подробно изучить простейший случай и чтобы показать, как при помощи конформного отображения могут быть довольно просто разобраны и другие случаи.

Простейшей задачей является обтекание потоком с циркуляцией кругового цилиндра радиуса a , перпендикулярного плоскости ζ . Как указывалось на стр. 30 и 426 тома I, потенциал скоростей для такого потока равен вещественной части функции

$$F = -v_0 [\zeta + a^2/\zeta] - iv_r \ln \zeta,$$

где v_0 — скорость (вдоль оси ξ) жидкости на бесконечности, а v_r — циркуляция жидкости вокруг цилиндра.

Скорость жидкости у поверхности цилиндра равна $-\bar{F}'$ в точке $\zeta = ae^{i\theta}$, т. е. равна

$$v_0 - v_0 e^{2i\theta} - i(v_r/a) e^{i\theta} = -ie^{i\theta} [2v_0 \sin \theta + v_r/a].$$

Скорость направлена по касательной к этой поверхности, как и должно быть. Вдоль верхней части поверхности она направлена по часовой стрелке (в направлении отрицательных θ), и если v_r положительна, то величина скорости жидкости вдоль верхней части поверхности, вообще говоря, больше, чем вдоль нижней (другими словами, циркуляция ускоряет поток у верхней части поверхности и замедляет его у нижней).

Сила, действующая на цилиндр (если пренебречь силой трения, порожденной вязкостью), вызвана давлением жидкости в соответствии с уравнением Бернулли (2.3.16). Она состоит из двух компонент: вертикальной выталкивающей силы, равной весу вытесненной жидкости, и силы, равной интегралу по полной поверхности от падения давления $-\frac{1}{2}\rho v^2$, вызванного скоростью жидкости. Эта часть, приходящаяся на элемент цилиндра единичной длины, параллельной оси цилиндра, ширина которого равна $dz = ia e^{i\theta} d\theta$, составляет

$$p_r idz = -\frac{1}{2}\rho |dF/dz|^2 i dz = \frac{1}{2}\rho a [2v_0 \sin \theta + v_r/a]^2 e^{i\theta} d\theta,$$

причем idz перпендикулярно dz и направлено внутрь цилиндра, когда интегрирование по поверхности цилиндра производится против часовой стрелки (в направлении возрастающих θ). Следовательно, полная сила Бернулли по величине и направлению равна

$$\frac{1}{2}\rho a \int_0^{2\pi} \left[4v_0 \sin^2 \theta + 4\frac{v_0 v_r}{a} \sin \theta + \left(\frac{v_r}{a}\right)^2 \right] e^{i\theta} d\theta = 2\pi i \rho v_0 v_r.$$

Таким образом, подъемная сила, действующая на единицу длины цилиндра и возникающая в результате совместного действия скорости потока и циркуляции, равна

$$L = 2\pi \rho v_0 v_r. \quad (10.2.20)$$

Эта формула весьма интересна. Во-первых, она указывает на то, что подъемная сила не зависит от диаметра цилиндра; очевидно, что при заданных v_0 и v_r чем меньше цилиндр, тем больше сила, действующая на элемент площади, так что результирующая сила не зависит от a . Во-вторых, формула (10.2.20) показывает, что подъемная сила пропорциональна произведению скорости потока на циркуляцию; если либо v_0 , либо v_r равна нулю, то подъемная сила равна нулю.

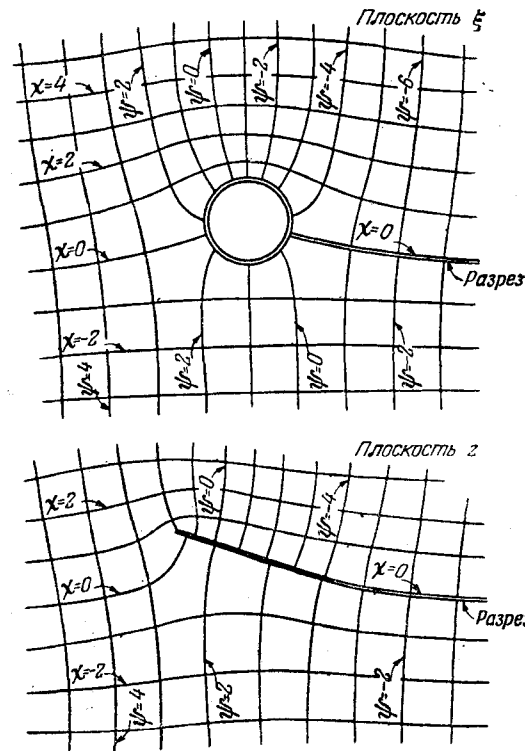


Рис. 10.14. Потенциал скоростей и линии тока в случае потока с циркуляцией вокруг цилиндра и полосы (см. рис. 10.7). Двойной линией показан разрез, выделяющий однозначную ветвь.

Благодаря сочетанию этих факторов возникает разность значений v^2 у верхней и у нижней поверхности цилиндра.

Теперь мы в состоянии видоизменить линии тока и форму границы при помощи конформного отображения с тем, чтобы найти подъемную силу для цилиндров с другими поперечными сечениями. Можно показать, что если при отображении плоскости ζ на плоскость z на большом расстоянии от цилиндра плоскость z совпадает с плоскостью ζ , то подъемная сила для нового цилиндра будет такой же, какой она была для кругового цилиндра, т. е. будет определяться формулой (10.2.20).

Например, отображение $z = \zeta + a^2 e^{-2i\alpha}/\zeta$ преобразует круговой цилиндр $\zeta = ae^{i\theta}$ в полосу с поперечным сечением $z = 2ae^{-i\alpha} \cos(\theta + \alpha)$ ширины $4a$, образующую угол атаки α с осью x , как это показано на рис. 10.14. Скорость жидкости у поверхности полосы равна $|dF/dz| = |dF/d\zeta| [|1/dz/d\zeta|]$ для $\zeta = ae^{i\theta}$, т. е. равна

$$v_s = \frac{2v_0 \sin \theta + v_r/a}{2 \sin(\theta + \alpha)}.$$

В соответствии со сказанным на стр. 190, 191 следует так подобрать циркуляцию v_r , чтобы скорость v_s имела конечное значение у заднего края $\theta = -\alpha$. Поэтому $v_r = 2av_0 \sin \alpha$ и $v_s = v_0 [\sin \theta + \sin \alpha]/\sin(\theta + \alpha)$ на поверхности полосы.

Сила Бернулли, действующая на элемент полосы dz , вновь равна $-\frac{1}{2} \rho v^2 idz$, так что результирующая сила равна

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \rho v_0^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin \theta + \sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)} \right]^2 [-2iae^{-i\alpha} \sin(\theta + \alpha)] d\theta = \\ & = 2\rho av_0^2 ie^{-i\alpha} \int_0^\pi [\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi] \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

где $2\varphi = \theta + \alpha$. Интеграл от первого члена в квадратных скобках равен нулю. Интеграл от второго члена равен $\pi \sin \alpha \cos \alpha$. Третий член обращается в ∞ при $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ в соответствии с тем, что на переднем крае скорость бесконечна. Предполагая, однако, что в действительности контур несколько выходит за пределы рассматриваемой полосы, можно проинтегрировать по контуру, окружающему простой полюс, и после довольно сложных вычислений получить $i\pi \sin^2 \alpha$. Интеграл равен, таким образом,

$$\pi \sin \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \pi e^{i\alpha} \sin \alpha.$$

Итак, результирующая сила перпендикулярна асимптотической скорости v_0 и по модулю равна $2\pi \rho av_0^2 \sin \alpha$.

Однако мы могли бы избежать этих хлопот, вспомнив, что результирующую силу можно определить, подсчитав силу давления, действующую поперек линий тока на больших расстояниях от цилиндра. Исследуемое преобразование выбрано так, что на больших расстояниях поток, соответствующий полосе, совпадает с потоком для кругового цилиндра. Следовательно, подъемная сила будет той же и определяется формулой (10.2.20). В случае полосы нам достаточно вычислить скорость вокруг нее, с тем чтобы путем соответствующего подбора циркуляции обеспечить конечность потока у заднего края. Для этого v_r должна равняться $2av_0 \sin \alpha$. Подставляя это в формулу (10.2.20), получим значительно более простым путем тот же результат:

$$L = 2\pi \rho av_0^2 \sin \alpha.$$

Заметим, что подъемная сила должна возрастать непрерывно вместе с ростом α вплоть до значения $\alpha = \pi/2$. На практике же, если угол атаки α слишком велик, то с переднего края начинают «срываться» вихри, линии тока не следуют за верхней частью поверхности, и полоса полностью теряет подъемную силу, как говорят «застревает». Когда φ мало отличается от π , следует поменять ролями передний и задний края, v_r положить равным $-2av_0 \sin \alpha$ и изменить знак у «подъемной силы».

С другой стороны, порожденный силами Бернулли вращающий момент, приложенный к полосе, приходится вычислять заново для каждого

профиля. Для случая полосы мы умножаем подинтегральную функцию в выражении для силы на $|z| = 2a \cos(\theta + \alpha)$. После ряда преобразований получим, что существенную роль играет только средний член, содержащий $\sin \alpha \cos \alpha$. При этом результирующий вращающий момент относительно центра полосы, рассчитанный на единицу длины, равен

$$T = \pi a^2 v_0^2 \sin(2\alpha).$$

Многие другие преобразования координат приводят к интересным решениям для различных часто встречающихся граничных контуров. Некоторые из них будут рассмотрены ниже в этом же параграфе, когда мы будем использовать метод Шварца — Кристоффеля для построения преобразований, соответствующих границам произвольной призматической формы. Однако до этого мы изучим виды полей, образованных различным образом распределенными линейными источниками.

Поля, создаваемые распределениями линейных источников. Одно из основных полей — поле, порожденное единичным линейным источником, — имеет вид

$$F = -2 \ln z = -\ln(x^2 + y^2) - 2i \operatorname{arctg}(y/x). \quad (10.2.21)$$

Если это поле создается линейным единичным электростатическим зарядом (единица заряда на единицу длины), то $\phi = -\ln(x^2 + y^2)$ является потенциальной функцией, а $-\bar{F}' = 2/\bar{z}$ есть вектор напряженности, направленный вдоль радиус-вектора z , величина которого обратно пропорциональна $|z| = r$. Если поле порождено единичным током в проводе, проходящем через начало координат перпендикулярно к плоскости x, y , то $\chi = -2 \operatorname{arctg}(y/x)$ является магнитным потенциалом, $\phi = \operatorname{const}$ есть уравнение магнитных силовых линий, а $i\bar{F}' = -i(2/\bar{z})$ есть вектор магнитной напряженности (перпендикулярный радиус-вектору и направленный по часовой стрелке, так как положительным мы считаем направление тока *от читателя*).

Если поле порождено единичным линейным источником жидкости, то ϕ есть потенциал скоростей, χ — функция тока, а вектор скорости равен $-\bar{F}' = 2/\bar{z}$. С другой стороны, если F описывает завихренный поток жидкости в окрестности *вихревой линии*, то ϕ является функцией тока, χ — потенциалом скоростей и $-i\bar{F}' = i(2/\bar{z})$ — вектором скорости. Поток такого рода может возникнуть, если длинный стержень, проходящий через начало координат перпендикулярно плоскости x, y , вращается против часовой стрелки с угловой скоростью, равной $2/r_0^2$, где r_0 — радиус стержня. (Предполагается, что вязкость достаточна для того, чтобы вблизи поверхности стержня жидкость двигалась вместе с этой поверхностью, и что продолжительность движения достаточна для установления стационарного безвихревого потока.)

Нашей задачей теперь является нахождение мероморфной (см. стр. 362 тома I) функции (в нашем случае просто z), имеющей простой нуль в точке $z = 0$ и не имеющей никаких других нулей или полюсов в конечной части плоскости. Тогда, чтобы найти F , мы возьмем умноженный на -2 натуральный логарифм этой функции. Если мощность источника равна q , то следует применить функцию z^q с точкой ветвления $z = 0$. Для того чтобы найти решение в случае нескольких линейных источников, расположенных в точках z_1, z_2, \dots и т. д., соответственно мощности q_1, q_2, \dots и т. д. следует взять натуральный логарифм от произведения $(z - z_1)^{q_1} (z - z_2)^{q_2} \dots$, а потенциал, функцию тока, скорость и другие характеристики можно полу-

чить посредством функции

$$F = -2 \ln \left[\prod_n (z - z_n)^{q_n} \right]. \quad (10.2.22)$$

Например, функция

$$F = -2 \ln \left[\frac{z-a}{z+a} \right] = \psi + i\chi, \quad \psi = \ln \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right], \\ \chi = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{y}{x+a} \right) - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{y}{x-a} \right) = -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right] \quad (10.2.23)$$

соответствует единичному положительному линейному источнику, расположенному в точке $z = a$, и единичному отрицательному источнику в точке $z = -a$. Из этой же функции можно получить решение и в случае единичного линейного заряда в точке $z = a$ и проводящей плоскости $x = 0$, имеющей нулевой потенциал. Тогда ψ является электростатическим потенциалом, а

$$-\bar{F}' = \frac{2}{z-a} - \frac{2}{z+a} = \frac{4a}{z^2 - a^2} = 4a \left[\frac{x^2 - y^2 - a^2 + 2ixy}{(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4} \right]$$

— электростатической напряженностью. Плотность заряда на проводящей плоскости $x = 0$ равна значению

$$\frac{1}{4\pi} |F'| = \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{1}{(z^2 - a^2)(\bar{z}^2 - a^2)}} = \frac{a/\pi}{V(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4}$$

при $x = 0$, т. е. равна $a/\pi(y^2 + a^2)$. Если заряд расположен не на бесконечно тонкой линии, а на тонкой проволоке радиуса ρ с осью, проходящей через точку $z = a$, то потенциал на поверхности проволоки равен вещественной части функции

$$2 \ln \left[\frac{a + \rho e^{i\theta} + a}{a + \rho e^{i\theta} - a} \right] = 2 \ln (2a/\rho) - 2i\theta + 2 \ln [1 + (\rho/2a) e^{i\theta}],$$

причем мы считаем $z = a + \rho e^{i\theta}$ на поверхности проволоки. Благодаря последнему члену эквипотенциальные поверхности несколько отличаются от окружностей с центрами в точке $z = a$, и, таким образом, вещественная часть этого выражения не равна в точности постоянной величине при постоянном ρ . Но, когда ρ достаточно мало по сравнению с a , мы можем пренебречь последним членом. Поэтому с точностью до членов первого порядка относительно малой величины ρ/a потенциал на поверхности проволоки равен $2 \ln (2a/\rho)$. Отсюда можно вычислить емкость проволоки относительно проводящей плоскости (см. стр. 173).

Функция F , соответствующая безвихревому потоку вязкой жидкости вокруг двух вращающихся стержней, отстоящих на расстоянии $2a$ друг от друга, равна

$$F = 2iA \ln (z^2 - a^2) = \psi + i\chi, \\ \psi = -2A \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} \right], \quad (10.2.24) \\ \chi = A \ln [(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4],$$

если оба стержня вращаются в одном направлении. Вектор скорости равен

$$-\bar{F}' = \frac{4izA}{z^2 - a^2} = -4A \left[\frac{y(x^2 + y^2 - a^2) - ix(x^2 + y^2 + a^2)}{(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4} \right] \simeq \\ \simeq (2iA/\rho) e^{i\theta} \quad \text{для } z = a + \rho e^{i\theta}, \quad \rho \rightarrow 0,$$

причем этот предел должен равняться скорости $i\rho\omega e^{i\theta}$ поверхности стержня. На поверхности одного из стержней ($z = a + \rho e^{i\theta}$) сила, вызванная вязкостью

[как это следует из (10.2.14)], получится, если положить $\bar{z} = a + \rho e^{-i\theta}$ в формуле $-2i\eta\bar{F}' = 8\eta A (\bar{z}^2 + a^2)/(\bar{z}^2 - a^2)^2$. С точностью до членов первого порядка относительно ρ/a эта величина равна $-(4i\eta A/\rho) e^{i\theta} d\theta$, так что результирующий тормозящий момент, приходящийся на единицу длины стержня, равен $8\pi\eta A = 4\pi\rho^2\eta\omega$.

Если оба источника заключены внутрь кругового цилиндра радиуса $b > a$, то мы можем вновь использовать метод изображений, располагая изображения на расстоянии b^2/a от начала. Например, магнитное поле, возникающее вокруг двух помещенных внутрь железного цилиндра проводов, по которым текут равные по силе, но противоположно направленные токи, описывается функцией

$$\begin{aligned} F &= -2q \ln \left\{ \frac{[z-a][z-b^2/a]}{[z+a][z+b^2/a]} \right\} = \psi + i\chi, \\ \psi &= 2q \ln \left\{ \frac{[x+a]^2 + y^2 [x+b^2/a]^2 + y^2}{[x-a]^2 + y^2 [x-b^2/a]^2 + y^2} \right\}, \\ \chi &= 2q \left\{ \arctg \left[\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right] + \arctg \left[\frac{2b^2y/a}{x^2 + y^2 - b^4/a^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.2.25)$$

Магнитный потенциал χ обращается в нуль на окружности $x^2 + y^2 = b^2$, и на этой поверхности ($z = be^{i\varphi}$) магнитная напряженность равна вектору

$$H = i\bar{F}' = 8aq \frac{(a^2 + b^2) \sin \varphi}{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \varphi} e^{i\varphi},$$

всюду нормальному к этой поверхности. Эта напряженность достигает наибольшей величины в точке $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, где она имеет значение $8aq(a^2 + b^2)/(b^2 - a^2)^2$. Если бы при $r = b$ не было железного цилиндра, то напряженность в той же точке имела бы значение $4aq/(a^2 + b^2)$, значительно меньшее предыдущего.

Подобным же образом можно построить функцию, описывающую поток тепла в цилиндре с D-образным поперечным сечением, образованным осью y и правой половиной окружности радиуса b . Если цилиндр нагревается трубкой небольшого радиуса ρ с осью, проходящей через точку $z = a$ ($0 < a < b$), каждая единица длины которой излучает q единиц тепла в единицу времени, то температура внутри цилиндра равна вещественной части функции

$$\begin{aligned} F &= -\frac{q}{2\pi K} \ln \left\{ \frac{[z-a][z+b^2/a]}{[z+a][z-b^2/a]} \right\} = \psi + i\chi, \\ \psi &= \frac{q}{2\pi K} \ln \left\{ \frac{[x+a]^2 + y^2 [x-b^2/a]^2 + y^2}{[x-a]^2 + y^2 [x+b^2/a]^2 + y^2} \right\}, \\ \chi &= \frac{q}{2\pi K} \left\{ \arctg \left[\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right] - \arctg \left[\frac{2b^2y/a}{x^2 + y^2 - b^4/a^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10.2.26)$$

где K — теплопроводность материала внутри цилиндра. При этом предполагается, что на D-образной границе цилиндра температура $T = 0$.

На поверхности нагревающей трубки ($z = a + \rho e^{i\theta}$) функция F равна

$$F = -\frac{q}{2\pi K} \ln \left\{ \frac{\rho e^{i\theta}}{2a + \rho e^{i\theta}} \frac{a^2 + b^2 + a\rho e^{i\theta}}{a^2 - b^2 + a\rho e^{i\theta}} \right\} \simeq \frac{q}{2\pi K} \left\{ \ln \left[\frac{2a(b^2 - a^2)}{\rho(b^2 + a^2)} \right] - i\theta \right\}, \quad \frac{\rho}{2a} \rightarrow 0.$$

Полный поток тепла равен приращению χ при изменении θ от 0 до 2π , умноженному на теплопроводность K , т. е. равен q (как и должно быть). Температура поверхности нагревающей трубки равна

$$(q/2\pi K) \ln [2a(b^2 - a^2)/\rho(b^2 + a^2)]$$

и оказывается тем меньше, чем меньше расстояние от трубки до поверхности цилиндра (a мало, либо $b - a$ мало) или чем больше теплопроводность цилиндра, и тем больше, чем меньше радиус нагревающей трубки.

Потенциалы сеток и коэффициенты усиления. Интересное распределение потенциала связано с триодной вакуумной радиолампой, состоящей из анода — полого, проводящего цилиндра с внутренним радиусом b , расположенной коаксиально внутри него проволочной сетки, отстоящей на величину a ($a < b$) от оси цилиндра, и катода в виде проволоки, расположенной по оси цилиндра. Если сетка состоит из n проволок, оси которых параллельны катоду, то можно считать, что первая проходит через точку $z = a$, вторая через точку $ae^{i2\pi/n}$ и т. д., т. е. координата z , характеризующая положение проволок, принимает значения всех корней уравнения $z^n - a^n = 0$. Тогда потенциал, создаваемый одновременно всеми n проволоками, заряженными одинаково, равен $-(2q_g/n) \ln(z^n - a^n)$, где q_g есть суммарный заряд, приходящийся на единицу длины всех n проволок. Потенциал, порожденный комбинированным воздействием заряда $-q_c$ на катоде и заряда $-q_g$ на сетке, в предположении, что на аноде поддерживается нулевой потенциал, равен вещественной части функции

$$F = 2q_c \ln \left[\frac{z}{b} \right] + \frac{2}{n} q_g \ln \left[\frac{z^n - a^n}{z^n - (b^2/a)^n} \right]. \quad (10.2.27)$$

Если радиус катода равен ρ_c , то с точностью до членов первого порядка относительно ρ_c/a его потенциал равен

$$-2q_c \ln(b/\rho_c) - 4q_g \ln(b/a),$$

а если радиус каждой проволоки сетки равен ρ_g , то потенциал сетки приближенно равен

$$-2q_c \ln(b/a) + (2q_g/n) \ln[n\rho_g a^{2n-1}/(b^{2n} - a^{2n})].$$

Предположим теперь, что потенциалы подобраны так, что катод заземлен, потенциал сетки равен V_g , а потенциал анода V_a . На основании предыдущих выражений заключаем, что

$$V_a \simeq 2q_c \ln(b/\rho_c) + 4q_g \ln(b/a),$$

$$V_g \simeq 2q_c \ln(a/\rho_c) + (2q_g/n) \ln \left[\frac{n\rho_g/a}{1 - (a/b)^{2n}} \right]$$

или

$$q_c \simeq \frac{1}{2} \frac{V_g \ln(b/a) + (V_a/2n) \ln \{ (a/n\rho_g) [1 - (a/b)^{2n}] \}}{\ln(a/\rho_c) \ln(b/a) + (1/2n) \ln(b/\rho_c) \ln \{ (a/n\rho_g) [1 - (a/b)^{2n}] \}},$$

$$q_g \simeq \frac{1}{4} \frac{V_a \ln(a/\rho_c) - V_g \ln(b/\rho_c)}{\ln(a/\rho_c) \ln(b/a) + (1/2n) \ln(b/\rho_c) \ln \{ (a/n\rho_g) [1 - (a/b)^{2n}] \}}. \quad (10.2.28)$$

Из этих формул можно вывести несколько свойств этой системы электродов. Если положить $V_g = V_a$, то емкость катода относительно сетки и анода будет равна отношению q_c к V_a ; если $V_a = 0$, то емкость сетки относительно анода и катода равна отношению q_g к V_g и т. п.

Напряженность электрического поля у поверхности катода ($z = \rho_c e^{i\theta}$) равна с точностью до членов первого порядка относительно малых величин ρ_c/a и $(a/b)^{2n}$

$$E \simeq \frac{2q_c}{\rho_c} \simeq \frac{1}{\rho_c} \frac{V_g \ln(b/a) + V_a (1/2n) [\ln(a/n\rho_g) - (a/b)^{2n}]}{\ln(a/\rho_c) \ln(b/a) + (1/2n) \ln(b/\rho_c) [\ln(a/n\rho_g) - (a/b)^{2n}]}.$$

Если n достаточно велико (4 или больше), то коэффициент при V_a в этом выражении оказывается значительно меньшим коэффициента при V_g . Это означает, что сетка *экранирует* катод, так что воздействие на E , оказы-

ваемое некоторым изменением V_a , значительно меньше воздействия, оказываемого таким же изменением V_g . Отношение воздействия сетки на поле у катода к воздействию анода называется *коэффициентом усиления* вакуумной радиолампы. В нашем простом случае этот коэффициент равен

$$\mu \simeq \frac{2n \ln(b/a)}{\ln(a/n\rho_0) - (a/b)^{2n}}. \quad (10.2.29)$$

Одномерные системы линейных источников. Пусть имеется бесконечное множество равных параллельных линейных источников, расположенных вдоль оси x на расстоянии a один от другого. Распределение потенциала можно получить, взяв логарифм функции, которая в точках $0, \pm a, \pm 2a, \dots$ обращается в нуль как функции $[z - (na)]$ соответственно. Такой

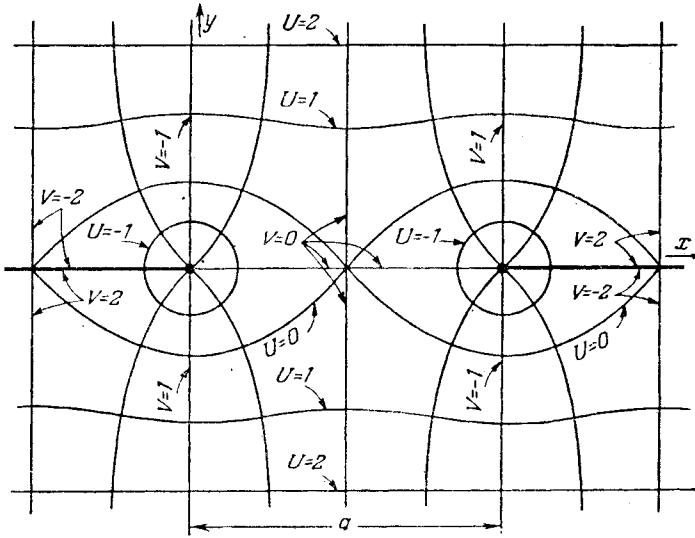


Рис. 10.15. Эквипотенциальные линии и линии тока около сетки из заряженных параллельных проволок: $\pi U = \psi - \ln 4$ и $\pi V = \chi$, где ψ и χ определяются выражениями (10.2.30).

функцией, очевидно, является $A \sin(\pi z/a)$. Поэтому потенциал, порожденный однородной сеткой из одинаковых линейных источников, расположенных вдоль оси x на расстоянии a один от другого, равен вещественной части функции

$$\begin{aligned} F_s &= -2 \ln [2 \sin(\pi z/a)] = \psi_s + i\chi_s \simeq \pm [(2\pi i/a)z - i\pi], \quad |y| \rightarrow \infty, \\ \psi_s &= -\ln 4 [\sin^2(\pi x/a) + \text{sh}^2(\pi y/a)] \simeq -(2\pi/a)|y|, \quad |y| \rightarrow \infty, \\ \chi_s &= -2 \text{arc tg} [\text{ctg}(\pi x/a) \text{th}(\pi y/a)] \simeq \pm [(2\pi/a)x - \pi], \quad |y| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (10.2.30)$$

где знак плюс для предельных значений соответствует положительным значениям y , а знак минус — отрицательным и большим по абсолютной величине значениям y .

На большом расстоянии от сетки (при больших значениях $|y|$) поле однородно, как если бы оно было образовано заряженной плоскостью с постоянной поверхностной плотностью заряда, равной $1/a$. На малом расстоянии ρ от какого-нибудь из зарядов (например, в точках $z = \rho e^{i\theta}$) функция F_s приближенно равна

$$F_s \simeq -2 \ln(2\pi\rho e^{i\theta}/a) = 2 \ln(a/2\pi\rho) - 2i\theta.$$

В случае, когда знаки источников чередуются, потенциал можно получить при помощи функции

$$\begin{aligned} F_a &= -2 \ln [\operatorname{tg} (\pi z/a)] = 2 \ln [\operatorname{ctg} (\pi z/a)] \simeq \mp i\pi, \quad |y| \rightarrow \infty, \\ \psi_a &= \ln \left[\frac{\operatorname{ch} (2\pi y/a) + \cos (2\pi x/a)}{\operatorname{ch} (2\pi y/a) - \cos (2\pi x/a)} \right] \simeq 0, \quad |y| \rightarrow \infty, \\ \chi_a &= -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{sh} (2\pi y/a)}{\sin (2\pi x/a)} \right] \simeq \mp \pi, \quad |y| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (10.2.31)$$

Если однородно заряженная сетка из параллельных проволок расположена на расстоянии b от заземленной проводящей плоскости, то потенциал можно получить при помощи функции

$$F = -2a\sigma \ln \left\{ \frac{\sin [(\pi/a)(z-ib)]}{\sin [(\pi/a)(z+ib)]} \right\}, \quad (10.2.32)$$

где a — расстояние между проволоками, σ — заряд сетки, приходящийся на единицу площади (так что $a\sigma$ есть величина заряда, приходящаяся на единицу длины каждой отдельной проволоки); заземленная пластина расположена вдоль оси x , сетка — вдоль прямой $y = b$, а изображение сетки — вдоль прямой $y = -b$.

Потенциал проволок сетки (например, в точке $z = ib + \rho e^{i\theta}$) приближенно равен

$$V \simeq 2a\sigma \ln (a/2\pi\rho) + 4\pi\sigma b, \quad \rho \ll a \ll b.$$

Поэтому емкость, рассчитанная на единицу площади, для системы из сетки и пластины равна

$$C = \frac{\sigma}{V} = \frac{1}{4\pi b + 2a \ln (a/2\pi\rho)}.$$

Предположим, что сетка заземлена, а пластина, расположенная вдоль оси $y = 0$, имеет потенциал $-V$; тогда потенциал в точке (x, y) равен

$$\psi = \frac{V}{2 \ln (a/2\pi\rho) + 4\pi b/a} \ln \left\{ \frac{\sin^2 [\pi x/a] + \operatorname{sh}^2 [(\pi/a)(y+b)]}{\sin^2 [\pi x/a] + \operatorname{sh}^2 [(\pi/a)(y-b)]} \right\} - V. \quad (10.2.33)$$

Над сеткой асимптотическое значение потенциала имеет вид

$$\psi \simeq -\frac{2 \ln (a/2\pi\rho)}{4\pi b/a + 2 \ln (a/2\pi\rho)} V, \quad y \gg b,$$

что указывает на экранирующее действие сетки. Если бы сетка была совершенным экраном, то асимптотический потенциал равнялся бы нулю. Если расстояние между проволоками сетки a существенно меньше расстояния b от сетки до пластины, то полученное асимптотическое выражение потенциала весьма мало, хотя и отлично от нуля.

Для случая конечной последовательности одинаково расположенных и одинаково заряженных проволок можно воспользоваться свойствами гамма-функции. Например, для последовательности из $N+1$ проволок, расположенных в точках $z = 0, -a, -2a, \dots, -Na$ и несущих заряд σa на единицу длины каждой проволоки (если бы плоскость, нормальная оси y , была заряжена с поверхностной плотностью σ , то на каждый прямоугольный участок этой плоскости, имеющий высоту единица и ограниченный двумя соседними проволоками, приходился бы заряд $a\sigma$), имеем

$$F = -2\sigma a \ln [z(z+a) \dots (z+Na)] = 2\sigma a \ln \left[a^{-N-1} \frac{\Gamma(z/a)}{\Gamma\left(\frac{z}{a} + N + 1\right)} \right]. \quad (10.2.34)$$

Если N мало, то для получения соответствующих результатов можно использовать представление F в виде произведения, как мы это делали раньше, но если N достаточно велико, то лучше пользоваться свойствами гамма-функции. Согласно гл. 4, мы имеем следующие свойства гамма-функции:

$$\begin{aligned} \ln[\Gamma(\omega)] &= -\gamma\omega - \ln \omega - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{\omega}{n} \right) - \frac{\omega}{n} \right] \simeq \\ &\simeq \left(\omega - \frac{1}{2} \right) \ln \omega - \omega + \ln \sqrt{2\pi} \quad \text{при } |\omega| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (10.2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \ln[\Gamma(\omega)] &= -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\omega} \right] = \psi(\omega) \simeq \\ &\simeq \ln \omega \quad \text{при } |\omega| \rightarrow \infty, \quad \gamma = 0,5772 \dots, \end{aligned}$$

причем обе асимптотические формулы перестают быть верными для вещественных отрицательных значений ω .

Например, если источниками являются провода, по которым текут токи (и $ca = I$ есть ток, текущий по каждому из проводов), то напряженность магнитного поля в точке z равна

$$\begin{aligned} H = i\bar{F}' &= \frac{2iI}{a} \left[\bar{\psi} \left(\frac{z}{a} \right) - \bar{\psi} \left(\frac{z}{a} + N + 1 \right) \right] = -2iI \sum_{n=0}^N \frac{1}{z + an} \simeq \\ &\simeq -i \frac{2I}{a} \ln \left[1 + \frac{a(N+1)}{z} \right]. \end{aligned}$$

Для вещественных и положительных z это поле направлено вниз, в то время как для z с большой мнимой частью поле горизонтально. Если $z = Re^{i\theta}$ и $R \gg Na$, то напряженность стремится к величине

$$H \simeq [2(N+1)I/R](-ie^{i\theta}),$$

соответствующей полю, порожденному одним единственным проводом, по которому течет ток $(N+1)I$.

Двумерная система линейных источников. Наконец, мы должны изучить распределение потенциала, создаваемого системой линейных источников, размещенных по всей плоскости x, y в некотором определенном порядке. Мы получим этот потенциал, взяв логарифм от эллиптической функции (см. § 4.5), поскольку нули и полюсы такой функции размещены на комплексной плоскости в определенном порядке. Как мы видели выше, эта система периодична, состоит из бесконечно повторяющихся *основных ячеек*, являющихся параллелограммами или, в большинстве приложений, прямоугольниками со сторонами a (параллельными оси x) и b (параллельными оси y). Эллиптические функции двойко-периодичны, вновь и вновь повторяют одни и те же значения; для каждой конгруэнтной точки, в каждой основной ячейке, эти значения те же самые.

Как мы установили [см. уравнение (4.5.66)], в основной ячейке число нулей эллиптической функции равно числу ее простых полюсов. Это соответствует требованию, чтобы суммарный заряд в основной ячейке равнялся нулю, так как иначе потенциал был бы всюду бесконечным. Выбор той или иной эллиптической функции определяется распределением линейных зарядов в отдельной ячейке.

Например, функция $\operatorname{sn}(u, k)$ имеет простые нули в точках $u = 2mK + 2inK'$ (где $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и простые полюсы в точках

$2mK + i(2n + 1)K'$; в последовательности нулей, расположенных по вещественной оси, расстояние между двумя соседними нулями равно $2K$, последовательность полюсов расположена вдоль линии $y = K'$, причем каждый полюс лежит над нулем из предыдущей последовательности, и т. д. Следовательно, потенциал, порожденный множеством линейных источников, показанных на рис. 10.16, а, равен вещественной части функции

$$F_a = 2q \ln \left\{ \operatorname{sn} \left[\frac{K}{a} z, k \right] \operatorname{sn} \left[\frac{K}{a} (z + a), k \right] \right\} = 2q \ln \{ \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k) / \operatorname{dn}(u, k) \}, \quad u = Kz/a, \quad (10.2.36)$$

где k выбрано так, что $K'/K = b/a$ из таблицы на стр. 463 тома I.

Эта таблица содержит лишь те случаи, когда $K' \geq K$ (т. е. $b \geq a$). Для случаев, когда $b < a$, можно повернуть всю картину на 90° и поменять ролями a и b (а следовательно, и K и K' , k и k'). Тогда, используя преобразования $\operatorname{sn}(iu, k') = i \operatorname{sn}(u, k) / \operatorname{cn}(u, k)$ и т. д., получим потенциал в виде вещественной части функции

$$F'_a = 2q \ln \{ \operatorname{sn}(u, k) / \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \}, \quad u = Kz/a, \quad (10.2.37)$$

где новое b уже не меньше нового a , как это было раньше. [Или же можно поменять ролями a и b , K и K' , k и k' в таблице и опять воспользоваться формулой (10.2.36).]

Далее, если распределение источников имеет вид, изображенный на рис. 10.16, б, то потенциал равен вещественной части функции

$$F_b = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{sn}(u + K, k)} \right\} = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)} \right\}. \quad (10.2.38)$$

Наконец, если распределение источников имеет вид, указанный на рис. 10.16, в, мы можем использовать функцию $\operatorname{cn}(u, k)$, имеющую нули в точках $(2m + 1)K + 2inK'$ и полюсы в точках $2mK + i(2n + 1)K'$. Потенциал в этом случае определяется вещественной частью функции

$$F_c = 2q \ln [\operatorname{cn}(u, k)], \quad u = Kz/a. \quad (10.2.39)$$

В случае (а) (см. рис. 10.16) потенциал на поверхности проволоки $z = \rho e^{i\theta}$ ($\rho \ll a$) можно получить, исходя из свойств эллиптических функций

$$\operatorname{sn}(u, k) \simeq u, \quad \operatorname{cn}(u, k) \simeq 1, \quad \operatorname{dn}(u, k) \simeq 1 \quad \text{при } u \rightarrow 0.$$

Поэтому потенциал отрицательно заряженных проволок приближенно равен $-2q \ln(a/K\rho)$. Для вычисления потенциала на поверхности $z = iK' + \varepsilon e^{i\theta}$ положительно заряженной проволоки мы используем соотношения

$$\operatorname{sn}(u + iK', k) \simeq \frac{1}{ku}, \quad \operatorname{cn}(u + iK', k) \simeq \frac{1}{iku}, \quad \operatorname{dn}(u + iK', k) \simeq \frac{1}{iu} \quad \text{при } u \rightarrow 0.$$

Следовательно, приближенное выражение для разности потенциалов между положительно и отрицательно заряженными проволоками в случае а

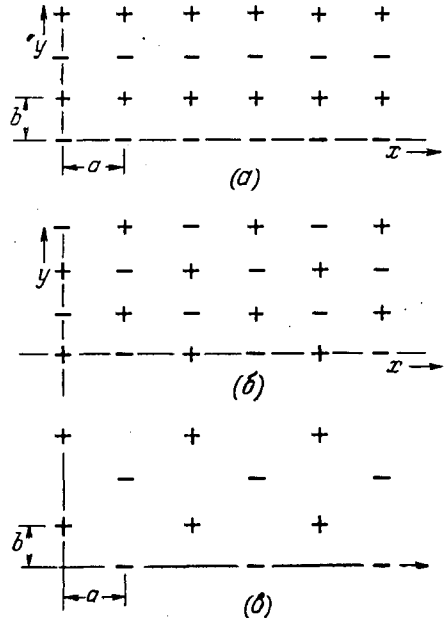


Рис. 10.16. Распределения параллельных линейных источников, соответствующие различным эллиптическим функциям.

имеет вид

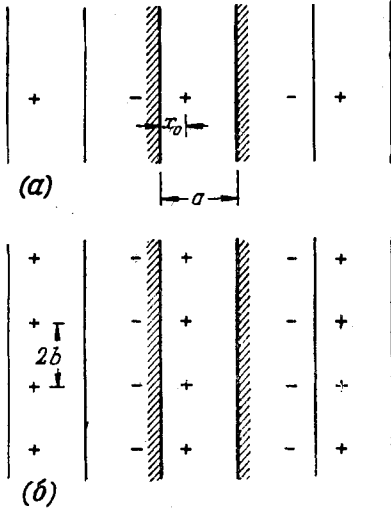
$$V_a = 2a \ln(a^2/k^2 K^2 \varepsilon \rho). \quad (10.2.40)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что соответствующие разности потенциалов в случаях (б) и (в), изображенных на рис. 10.16, имеют вид

$$V_b = 2q \ln(a^2/K^2 \varepsilon \rho), \quad V_v = 2q \ln(a^2/kk' K^2 \varepsilon \rho). \quad (10.2.41)$$

Изучая рис. 10.16, легко понять, почему $V_a > V_v > V_b$, если $b > a$.

Периодические распределения изображений. Пусть линейные заряды расположены между двумя проводящими плоскостями, параллельными друг другу и линиям, несущим заряды. Тогда изображение каждого линейного заряда в одной из плоскостей порождает изображение в другой



плоскости и т. д. до тех пор, пока мы, стремясь полностью удовлетворить обоим граничным условиям, не построим бесконечную последовательность симметрично расположенных изображений. Например, если две параллельные плоскости перпендикулярны оси x , причем одна из них проходит через начало, а другая через точку $x = a$, и если линейный заряд расположен в точке $x = x_0$ ($x_0 < a$), то должна существовать последовательность изображений, находящихся в точках $x = x_0 + 2ma$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$), причем все изображения должны иметь тот же знак, что и действительный источник, и еще одна последовательность изображений противоположного знака, расположенных в точках $x = -x_0 + 2na$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), как это показано на рис. 10.17,а.

Потенциал, соответствующий такому расположению линейного заряда и изображений, равен вещественной части логарифма от функции, имеющей полюсы в точках $x = x_0 + 2ma$ и нули в точках $x = -x_0 + 2na$, а именно

$$F = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{ctg} [\pi x_0/a] + \operatorname{ctg} [(\pi/2a)(z-x_0)]}{\operatorname{ctg} [\pi x_0/a] - \operatorname{ctg} [\pi x_0/2a]} \right\} = \\ = 2q \ln \left\{ \frac{\sin [(\pi/2a)(x_0+z)]}{\sin [(\pi/2a)(x_0-z)]} \right\}, \quad (10.2.42)$$

подобранной так, чтобы выражение в скобках равнялось единице в точке $x = 0$ (следовательно, в силу периодичности, оно равно ± 1 при $x = na$). Поэтому потенциал обеих пластин равен нулю, а потенциал проволоки радиуса ρ , несущей заряд ($z = x_0 + \rho e^{i\theta}$), приближенно равен

$$V \simeq 2q \ln \left[\frac{\sin (\pi x_0/a)}{\pi \rho/2a} \right], \quad \rho \ll x_0. \quad (10.2.43)$$

Следовательно, емкость системы, состоящей из проволоки и двух пластин, равна

$$\frac{q}{V} \simeq \frac{1}{2 \ln [\sin (\pi x_0/a)/(\pi \rho/2a)]}.$$

Далее, мы можем найти потенциал сетки из параллельных проволок, отстоящих друг от друга на расстоянии $2b$, расположенной между двумя параллельными пластинами, как это показано на рис. 10.17,б. Мы ищем

эллиптическую функцию, имеющую полюсы в точках $x_0 + 2am + 2ibn$; такой функцией оказывается

$$\operatorname{cn} [(K/a)(z - x_0), k] / \operatorname{sn} [(K/a)(z - x_0), k],$$

где k подобрано так, чтобы иметь $K' = K(b/a)$. Но искомая функция должна равняться нулю в точках $-x_0 + 2am + 2ibn$, являющихся изображениями указанных выше точек. Функцией, удовлетворяющей этим условиям, является аналог выражения $\operatorname{ctg} [\pi x_0/a] + \operatorname{ctg} [(\pi/2a)(z - x_0)]$, и, следовательно, искомый потенциал равен вещественной части функции

$$F = 2q \ln \left\{ \frac{\frac{\operatorname{cn}(2Kx_0/a)}{\operatorname{sn}(2Kx_0/a)} - \frac{\operatorname{cn}[(K/a)(x_0 - z)]}{\operatorname{sn}[(K/a)(x_0 - z)]}}{\frac{\operatorname{cn}(2Kx_0/a)}{\operatorname{sn}(2Kx_0/a)} - \frac{\operatorname{cn}(Kx_0/a)}{\operatorname{sn}(Kx_0/a)}}} \right\}, \quad (10.2.44)$$

подобранной таким образом, чтобы потенциал пластин равнялся нулю.

На поверхности проводника $z = x_0 + \rho e^{i\theta}$ этот потенциал приближенно равен

$$V \simeq 2q \ln \left\{ \frac{-a/K\rho}{\frac{\operatorname{cn}(2Kx_0/a)}{\operatorname{sn}(2Kx_0/a)} - \frac{\operatorname{cn}(Kx_0/a)}{\operatorname{sn}(Kx_0/a)}}} \right\} = \\ = 2q \ln \left\{ \frac{(2a/K\rho) \operatorname{sn}(\alpha, k) \operatorname{cn}(\alpha, k) \operatorname{dn}(\alpha, k)}{\operatorname{cn}^2(\alpha, k) [2 \operatorname{dn}(\alpha, k) - 1] + \operatorname{sn}^2(\alpha, k) \operatorname{dn}^2(\alpha, k)} \right\},$$

где $\alpha = Kx_0/a$. Исходя из этого выражения для потенциала, мы можем вычислить емкость системы сетка-пластины, приходящуюся на одну проволоку. Заметим, что когда расстояние $2b$ между проволоками сетки делается много бóльшим, чем расстояние a между пластинами, параметр k стремится к нулю и выражение для V сводится к (10.2.43), так как при $k \rightarrow 0$ имеем

$$\operatorname{sn}(u, k) \simeq \sin(\pi u/2K), \quad \operatorname{cn}(u, k) \simeq \cos(\pi u/2K), \quad \operatorname{dn}(u, k) \simeq 1.$$

Конечно, мы не показали, что потенциал, определяемый формулой (10.2.44), равен нулю всюду на прямых $x=0$ и $x=a$. Однако, как мы видели на стр. 405 тома I, выбор характера и расположения нулей и полюсов эллиптической функции внутри основной ячейки определяет эллиптическую функцию единственным образом с точностью до постоянного множителя. Подобно этому мы знаем, что раз мы определили положение и величину действительных и фиктивных линейных зарядов, мы единственным образом определим потенциальное поле. Следовательно, функция, соответствующая всем фиктивным зарядам, должна удовлетворять тем граничным условиям, в связи с которыми появились эти фиктивные заряды. Этому соответствует следующее математическое утверждение: для $z = iy$ ($x=0$) функция

$$\frac{\operatorname{cn}(2Kx_0/a, k)}{\operatorname{sn}(2Kx_0/a, k)} - \frac{\operatorname{cn}[(K/a)(x_0 - z), k]}{\operatorname{sn}[(K/a)(x_0 - z), k]} = Ae^{i\theta} \quad (10.2.45)$$

имеет постоянную амплитуду (т. е. A не зависит от y , когда $x=0$). Для доказательства этого утверждения потребовался бы целый ряд утомительных операций.

Теперь можно применить преобразование

$$z = r_1 e^w, \quad w = \ln(z/r_1)$$

для того, чтобы перейти от распределения, показанного на рис. 10.17,б (теперь будем считать, что на нем изображена плоскость w), к распределению рис. 10.18, соответствующему сетке из n проволок, расположенной между двумя цилиндрами, внутренним с радиусом r_1 и внешним с радиусом r_2 .

Для определения k, K и K' мы требуем, чтобы $r_2 = r_1 e^a$ и чтобы $r_0 e^{2\pi i/n}$ соответствовало $w = x_0 + 2ib$. Поэтому

$$a = \ln(r_2/r_1), \quad x_0 = \ln(r_0/r_1), \quad b = \pi/n.$$

Потенциал равен вещественной части функции

$$F = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{cn} [2\gamma \ln(r_0/r_1)]}{\operatorname{sn} [2\gamma \ln(r_0/r_1)]} - \frac{\operatorname{cn} [\gamma \ln(r_0/z)]}{\operatorname{sn} [\gamma \ln(r_0/z)]} \right\}, \quad (10.2.46)$$

где $\gamma = K/a = K/\ln(r_2/r_1)$ и где K, K' и k выбраны так, что $K'/K = b/a = \pi/n \ln(r_2/r_1)$.

Наконец, если внутри прямоугольной призмы, поверхность которой имеет нулевой потенциал, расположен только один линейный заряд, то,

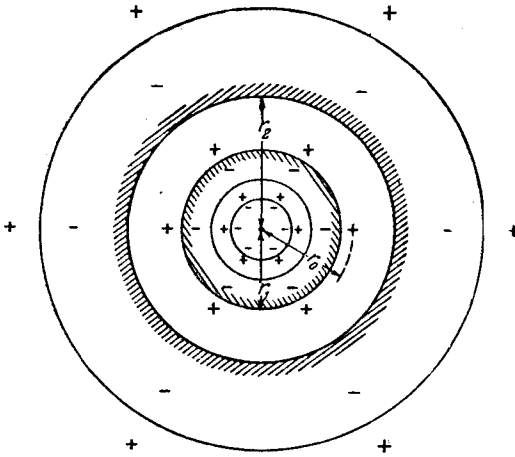


Рис. 10.18. Распределение изображений линейных источников, расположенных между концентрическими цилиндрами.

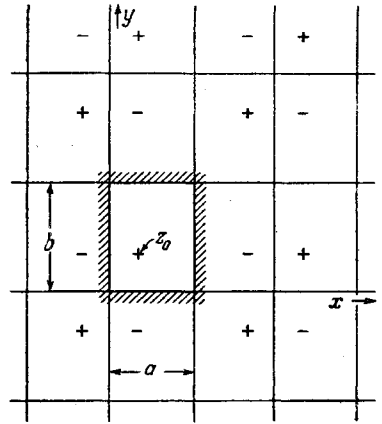


Рис. 10.19. Распределение изображений линейного источника, расположенного внутри прямоугольной призмы с размерами a и b .

как показано на рис. 10.19, изображения этого заряда повторяются двояко-периодическим образом по всей плоскости z . На основании уже проделанного нетрудно убедиться, что внутри области $0 < x < a, 0 < y < b$ этот потенциал определяется вещественной частью функций

$$F = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{cn} (2Kx_0/a)}{\operatorname{sn} (2Kx_0/a)} - \frac{\operatorname{cn} [(K/a)(z_0 - z)]}{\operatorname{sn} [(K/a)(z_0 - z)]} \right\}, \quad (10.2.47)$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$, а $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$.

При помощи последней формулы можно вычислить емкость проволоки внутри прямоугольного волновода или же распределение температуры в прямоугольном брусе, внутри которого источники тепла распределены произвольным образом.

Потенциал в случае призматических границ. В качестве заключительного примера применения функций комплексного переменного к решению двумерного уравнения Лапласа рассмотрим распределение потенциала

в случае призматических граничных поверхностей, сечение которых плоскостью x, y есть многоугольник — обычный или вырожденный — и которые простираются неограниченно в направлении, перпендикулярном плоскости x, y .

Для решения этих задач нужно решить соответствующую задачу для верхней полуплоскости ω , а затем преобразованием Кристоффеля — Шварца перевести вещественную ось плоскости ω в границу заданного многоугольника на плоскости z .

Как мы видели в § 4.6, если многоугольник имеет внешние углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ в последовательно расположенных вершинах, соответствующих точкам $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, \infty$, лежащим на вещественной оси плоскости ω , то преобразование, переводящее верхнюю полуплоскость плоскости ω во внутреннюю область данного многоугольника в плоскости z , определяется при помощи дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dw} = \prod_{n=1}^{N-1} \frac{A}{(w - a_n)^{\alpha_n/\pi}}. \quad (10.2.48)$$

Внутренняя область многоугольника, остающаяся слева при обходе периметра, отображается на верхнюю полуплоскость ω , а α_n есть угол поворота налево (против часовой стрелки) вокруг n -й вершины.

Обычно величины $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, A$ и появляющаяся при интегрировании произвольная постоянная z_0 подбираются, после того как интегрирование завершено, такими, чтобы вершины многоугольника были нужным образом расположены в плоскости z . Это преобразование и некоторые его применения рассматривались в § 4.6; здесь мы для выяснения некоторых вопросов рассмотрим еще несколько примеров.

Вырожденная призма изображена на рис. 10.20. Точка A , лежащая в $z = -\infty$, соответствует $\omega = -\infty$. В точке B ($z = ia$, $\omega = -1$) внешний угол равен $\alpha_1 = -\pi$, в точке C ($z = -\infty$, $\omega = 0$) соответствующий угол равен $\alpha_2 = +\pi$ и в D ($z = 0$, $\omega = +1$) угол также равен $-\pi$. Поэтому преобразование задается формулой

$$z - z_0 = A \int \frac{\omega^2 - 1}{\omega} d\omega = A \left[\frac{1}{2} \omega^2 - \ln \omega \right].$$

Обходя в выбранном направлении «многоугольник» $ABCD A$, мы получим в качестве его «внутренней области» всю плоскость z (с разрезами), которая, следовательно, соответствует верхней полуплоскости плоскости ω .

Для того чтобы точка $\omega = 1$ соответствовала точке $z = 0$, мы положим $z_0 = -\frac{1}{2} A$. Для того чтобы точка $\omega = -1 = e^{i\pi}$ соответствовала $z = ia$,

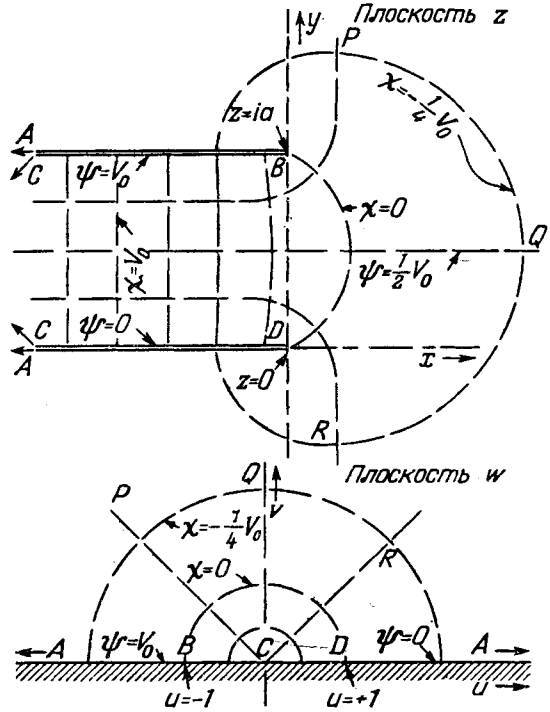


Рис. 10.20. Преобразование Кристоффеля — Шварца для конденсатора с параллельными пластинами $ABC - CDA$.

требуется, чтобы $-i\pi A = ia$, или $A = -a/\pi$. Поэтому окончательно искомое преобразование имеет вид

$$z = \frac{a}{\pi} \left[\ln w + \frac{1}{2} (1 - w^2) \right], \quad \frac{dz}{dw} = \frac{a}{\pi} \left(\frac{1}{w} - w \right). \quad (10.2.49)$$

Конденсатор с параллельными пластинами. Теперь найдем дальнейшие преобразования плоскости w , приводящие к интересующим нас распределениям потенциала. Например, функция

$$F = \psi + i\chi = (V_0/i\pi) \ln w, \quad w = e^{i\pi F/V_0}$$

определяет потенциал ψ , который на положительной вещественной полуоси плоскости w равен нулю, а на отрицательной V_0 . Выполним отображение на плоскость z . Тогда линии $\psi = \text{const}$ соответствуют эквипотенциальным линиям в поле конденсатора, образованном двумя параллельными полубесконечными пластинами, нижняя из которых имеет нулевой потенциал, а верхняя потенциал V_0 . Соотношение между z и $F = \psi + i\chi$ имеет вид

$$\begin{aligned} z &= \frac{a}{\pi} \left[\frac{i\pi}{V_0} F + \frac{1}{2} (1 - e^{2\pi i F/V_0}) \right], \quad \frac{dz}{dF} = i \frac{a}{V_0} (1 - e^{2\pi i F/V_0}), \\ x &= -\frac{a}{V_0} \chi + \frac{a}{2\pi} [1 - e^{-2\pi\chi/V_0} \cos(2\pi\psi/V_0)], \\ y &= \frac{a}{V_0} \psi - \frac{a}{2\pi} e^{-2\pi\chi/V_0} \sin(2\pi\psi/V_0) \end{aligned} \quad (10.2.50)$$

и дает возможность записать уравнения эквипотенциальных и силовых линий в параметрической форме.

Область, где $|\omega| < 1$, задается неравенством $\chi > 0$ и соответствует области между пластинами. Здесь экспоненциальный член мал и электрическая напряженность (\bar{F}') приближенно равна iV_0/a , т. е. постоянному вектору, направленному от нижней пластины к верхней. Величина электрической напряженности в точке, соответствующей заданным значениям ψ, χ , равна

$$\left| \frac{dF}{dz} \right| = \frac{V_0/a}{\sqrt{1 + e^{-4\pi\chi/V_0} - 2e^{-2\pi\chi/V_0} \cos(2\pi\psi/V_0)}}, \quad (10.2.51)$$

а плотность заряда на нижней пластине ($\psi = 0$) равна

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{dF}{dz} \right|_{\psi=0} = \left| \frac{V_0/4\pi a}{1 - e^{-2\pi\chi/V_0}} \right|, \quad x = -\frac{a\chi}{V_0} + \frac{a}{2\pi} [1 - e^{-2\pi\chi/V_0}].$$

Область, где $\chi > 0$, есть верхняя сторона этой пластины, а на нижней стороне $\chi < 0$.

Для положительных χ (во внутренней, заключенной между пластинами области) плотность заряда с увеличением χ делается равной величине $V_0/4\pi a$, не зависящей от x . Для отрицательных χ наружная плотность σ при уменьшении χ делается равной $(V_0/4\pi a) e^{2\pi\chi/V_0} \simeq -V_0/2x$ — величине, быстро убывающей с удалением от края пластины, где $x = 0$. На краю пластины конденсатора плотность заряда бесконечна.

Вспомним, что, используя функцию тока χ , можно вычислить полный заряд на проводящей поверхности. Действительно, заряд (приходящийся на единицу длины конденсатора в направлении, перпендикулярном плоскости x, y) между точкой, где $\chi = \chi_1$, и точкой, где $\chi = \chi_2$, в точности равен $(\chi_2 - \chi_1)/4\pi$. Для того чтобы найти полный заряд, расположенный на внутренней и внешней сторонах одной из пластин на участке ширины l ,

считая от края пластины, достаточно найти значения χ для $x = -l$ на внутренней и на внешней стороне этой пластины. Если l больше, чем a , то это сделать нетрудно. Из выражений (10.2.50) мы видим, что для внутренней стороны, т. е. для положительных χ , хорошим приближением служит $\chi_2 \simeq V_0 l/a + V_0/2\pi$, в то время как для внешней стороны, т. е. для отрицательных χ , $\chi_1 \simeq -(V_0/2\pi) \ln(2\pi l/a)$.

Следовательно, полный заряд полосы единичной длины, имеющей ширину l , равен

$$Q \simeq \frac{V_0 l}{4\pi a} \left[1 + \frac{a}{2\pi l} \ln \left(\frac{2\pi e l}{a} \right) \right], \quad \ln(e) = 1.$$

Второй член является «краевой поправкой», соответствующей дополнительному заряду, сосредоточенному вблизи края пластины. Таким образом, емкость пары длинных полос ширины $2l$, отстоящих друг от друга на расстояние a , рассчитанная на единицу длины полосы, приближенно равняется

$$C \simeq \frac{l}{2\pi a} \left[1 + \frac{a}{2\pi l} \ln \left(\frac{2\pi e l}{a} \right) \right].$$

Чем больше l по сравнению с a , тем меньше поправочный член.

Между пластинами (где χ положительно) вдоль эквипотенциальной линии, проходящей вблизи нижней пластины (ψ мало), электрическая напряженность постоянна. Она возрастает до максимального значения, достигаемого у края пластины (где χ равно нулю), а затем быстро падает при отрицательных значениях χ . Для эквипотенциальных поверхностей, лежащих между $\psi = \frac{1}{4} V_0$ и $\psi = \frac{3}{4} V_0$, не существует максимального значения напряженности, $|dF/dz|$ является монотонно убывающей функцией χ для χ , изменяющегося от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, если проводящие поверхности расположены вдоль линий $\psi = \frac{1}{4} V_0$ и $\psi = \frac{3}{4} V_0$, как показано на рис. 10.20 (линии CR и CP), то на них нет точки, где напряженность максимальна и где мог бы произойти пробой конденсатора благодаря искрообразованию. Благодаря уменьшению расстояния разность потенциалов между такими проводниками равна лишь половине разности потенциалов между полубесконечными тонкими пластинами при той же средней напряженности между пластинами. Однако максимальная поверхностная напряженность у острого края в случае тонких пластин значительно превосходит среднюю напряженность, что способствует пробоем такого конденсатора. Поэтому если проводник закруглен, то пробоем произойдет при более высокой разности потенциалов.

Возможны также иные преобразования, соответствующие другим граничным условиям. Например, функция Грина для линейного источника в точке $\omega = u_0 + iv_0$ равна

$$F = -2q \ln \left[\frac{\omega - u_0 - iv_0}{\omega - u_0 + iv_0} \right] = -4iq \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\omega - u_0}{v_0} \right] = \psi + i\chi,$$

$$\omega = u_0 + iv_0 \operatorname{th} \left(\frac{F}{4q} \right), \quad \frac{dF}{d\omega} = \frac{-4iqv_0}{(\omega - u_0)^2 + v_0^2}. \quad (10.2.52)$$

Окончательный вид преобразования от ψ, χ к x, y может быть получен при помощи подстановки только что найденного выражения для ω в равенство (10.2.49). Источник перейдет в точку z_0 , лежащую в плоскости z и получающуюся при подстановке $\omega_0 = u_0 + iv_0$ в равенство (10.2.49).

Вблизи точки z_0 соотношение между z и F имеет вид

$$\begin{aligned} z &= z_0 + \left(\frac{dz}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \dots = \\ &= z_0 + \frac{a}{\pi} \left(\frac{1}{\omega_0} - \omega_0 \right) [-2iV_0 e^{-F/2q}] + \dots \end{aligned}$$

или приближенно

$$F = \psi + i\chi \simeq -2q \ln \left[\frac{\pi\omega_0(z-z_0)}{a(1-\omega_0^2)} \right], \quad z \rightarrow z_0.$$

Например, если $\omega_0 = i$, то $z_0 = a/\pi + \frac{1}{2}ia$. Если проволока радиуса ρ ($\rho \ll a$), проходящая через эту точку, заряжена с линейной плотностью q , то потенциал ее поверхности приближенно равен

$$V \simeq 2q \ln(2a/\pi\rho),$$

а потенциал обеих пластин, очевидно, равен нулю. Плотность заряда, индуцированного на одной из пластин, в точке, соответствующей точке ω (на вещественной оси плоскости ω), равна

$$\frac{1}{4\pi} \left| \frac{dF}{d\omega} \right| \left| \frac{d\omega}{dz} \right| = \frac{qV_0/a}{(\omega-u_0)^2 + v_0^2} \left| \frac{\omega}{1-\omega^2} \right|.$$

Эта плотность равна нулю на бесконечно удаленном конце пластины ($\omega = 0$ или $\omega = \pm \infty$); она возрастает до максимума у края пластины (ω равно $+1$ или -1), ближайшего к линейному заряду. Эта плотность, вообще говоря, меньше вне пластин (при $|\omega| > 1$), чем между ними (при $|\omega| < 1$).

Переменный конденсатор. Другим случаем вырожденной призмы являются две бесконечные пластины, между которыми (посередине) помещена полубесконечная пластина, как это показано на рис. 10.21. Мы должны отобразить область, заключенную между пластинами, на верхнюю полуплоскость плоскости ω . Начиная обход границы с точки A , получим, что углы многоугольника соответственно равны $+\pi$ в точке B , $+\pi$ в точке C и $-\pi$ в точке D . Поэтому формула, задающая преобразование, имеет вид

$$z - z_0 = A \int \frac{(u-1) du}{u(u+1)} = A \left[2 \ln \left(\frac{\omega+1}{2} \right) - \ln(\omega) \right].$$

Так как $z = 0$ при $\omega = 1$, то z_0 оказывается равным нулю. Так как при $0 > \omega > -1$, z должно равняться $-ia +$ (вещественное число), то мы получим $A = a/\pi$. Поэтому

$$z = \frac{a}{\pi} \ln \left[\frac{\omega}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega} \right] = \frac{2a}{\pi} \ln \left[\frac{1}{2} \sqrt{\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right]. \quad (10.2.53)$$

Задачу о распределении потенциала у края пластины в переменном конденсаторе можно решить, добившись такого соотношения между F и ω , чтобы пластина ADC имела нулевой потенциал, а пластины AB и BC имели потенциал V_0 . Для этого положим

$$\omega = e^{\pi i F / V_0}, \quad \frac{dF}{d\omega} = \frac{V_0}{i\pi\omega},$$

что в конечном счете дает

$$z = \frac{2a}{\pi} \ln \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\pi i F}{2V_0} \right) \right], \quad F = \frac{2V_0}{\pi i} \operatorname{Arch} [e^{\pi z/2a}],$$

$$x = \frac{a}{\pi} \ln \left[\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi \chi}{2V_0} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi \psi}{2V_0} \right) + \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\pi \chi}{2V_0} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi \psi}{2V_0} \right) \right], \quad (10.2.54)$$

$$y = -\frac{2a}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi \psi}{2V_0} \right) \operatorname{th} \left(\frac{\pi \chi}{2V_0} \right) \right].$$

Эквипотенциальные линии показаны на рис. 10.21; мы вновь замечаем, что поле однородно в областях, близких к A и C , что оно быстро исчезает, когда мы идем от D к B и что напряженность поля неограниченно

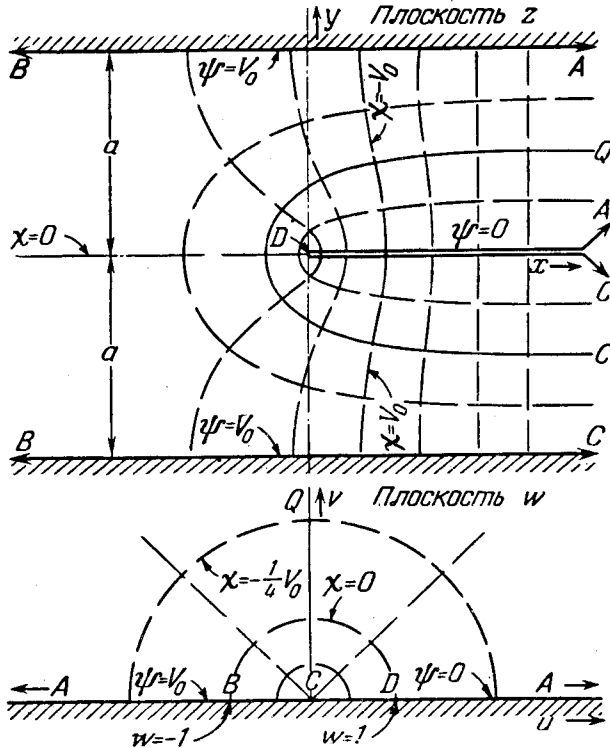


Рис. 10.21. Преобразование Кристоффеля—Шварца для конденсатора $AB-BC-CDA$. Наилучшая форма внутреннего проводника показана сплошной линией

$$CQ \left(\psi = \frac{1}{2} V_0 \right).$$

возрастает у края D внутренней пластины. Ясно, что величина электрической напряженности равна

$$\left| \frac{dF}{dz} \right| = \frac{V_0/a}{\sqrt{1 + e^{-2\pi x/a} - 2e^{-\pi x/a} \cos(\pi y/a)}} = \frac{V_0}{a} \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi F}{aV_0} \right) \right|, \quad (10.2.55)$$

что вновь подчеркивает те же свойства поля: для положительных x $|dF/dz| \simeq (V_0/a)$ при $x \rightarrow \infty$, а для отрицательных x $|dF/dz| \simeq (V_0/a) e^{\pi x/a}$ при $x \rightarrow -\infty$, причем последняя величина быстро стремится к нулю.

Плотность заряда на средней пластине ($y=0$) равна (учитывая обе стороны).

$$\frac{2}{4\pi} \left| \frac{dF}{dz} \right|_{y=0} = \frac{V_0/2\pi a}{1 - e^{-\pi x/a}}.$$

Для бесконечно тонкой пластины, расположенной вдоль вещественной оси плоскости z , напряженность поля на ее поверхности равна V_0/a вдали от края и возрастает до бесконечности у края. У пластины конечной толщины с контуром, соответствующим кривой $\psi = \psi_0$ ($\psi_0 < V_0$), край закругленный, а не острый. На некотором расстоянии от края (для больших $|\chi|$) толщина ее равна $2\psi_0 a/V_0$, так что воздушный промежуток равен величине $a[1 - \psi_0/V_0]$, а не a . Напряженность поля у этой поверхности равна

$$\left| \frac{dF}{dz} \right|_{\psi=\psi_0} = \frac{V_0}{a} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2(\pi\chi/2V_0) - \sin^2(\pi\psi_0/2V_0)}{\operatorname{sh}^2(\pi\chi/2V_0) + \sin^2(\pi\psi_0/2V_0)}}. \quad (10.2.56)$$

На некотором расстоянии от края (для больших $|\chi|$) эта величина равна V_0/a , а при $\psi_0 < \frac{1}{2} V_0$ она достигает максимального значения $(V_0/a) \operatorname{ctg}(\pi\psi_0/2V_0)$ у края $\chi = 0$. Если мы желаем выбрать внутреннюю пластину конденса-

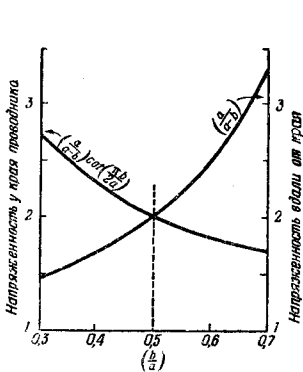


Рис. 10.22. Определение наилучшей формы пластины конденсатора.

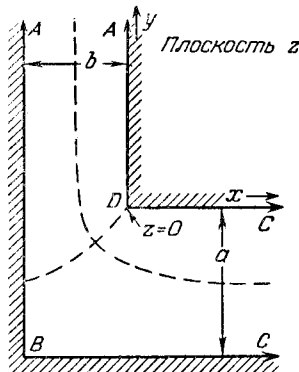
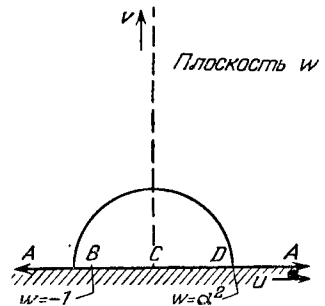


Рис. 10.23. Преобразование Кристоффеля—Шварца для «коленообразного изгиба».



тора так, чтобы вероятность пробоя диэлектрика была наименьшей, то нужно подобрать ψ_0 так, чтобы напряженность у края была не больше, чем вдали от него.

Предположим, что мы испытываем пластины различной формы, соответствующие различным значениям ψ_0 [толщина каждой пластины асимптотически равна $2b = 2\psi_0 a/V_0$], с тем чтобы максимальное значение напряженности на всей пластине было так мало, как это только возможно. Подберем V_0 — потенциал внешних плоскостей — так, чтобы разность потенциалов $V_0 - \psi_0$ была для всех пластин равна одной и той же величине V .

Имеем $\psi_0 = V_0 b/a$, и поэтому $V_0 = aV/(a - b)$, где $a - b$ есть асимптотическое значение ширины промежутка между средним проводником и верхней или нижней пластиной. Напряженность у края среднего проводника ($\chi = 0$) равна $[V/(a - b)] \operatorname{ctg}(\pi b/2a)$, в то время как асимптотическое значение напряженности на поверхности (для больших $|\chi|$) равно $V/(a - b)$. На рис. 10.22 показаны эти две предельные напряженности как функции от b/a , т. е. от величины отношения толщины средней пластины к ширине промежутка. Мы видим, что если средняя пластина очень тонкая, то поле у края слишком интенсивное, если же толщина этой пластины велика, то слишком интенсивным оказывается «асимптотическое» поле. Но если пластина заполняет точно половину промежутка, т. е. если $\psi_0 = \frac{1}{2} V_0$, то оба поля одинаковы и напряженность равна $2V/a$ всюду на поверхности центральной

пластины. Это оптимальное сечение показано на рис. 10.21. При такой конфигурации сводится до минимума возможность пробоя диэлектрика.

Другие прямоугольные границы. Другой «многоугольник», встречающийся при расчетах элементов волноводов (например, «колен» волноводов), показан на рис. 10.23. Начиная обход от точки A и имея, как всегда, «внутреннюю область» слева, получим, что углы соответственно равны $\pi/2$ при $\omega = -1$, π при $\omega = 0$, $-\frac{1}{2}\pi$ при $\omega = \alpha^2$. Тогда преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} z - z_0 &= A \int \sqrt{\frac{\alpha^2 - \omega}{1 + \omega}} \frac{d\omega}{\omega} = 2A \int \left[\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - t^2} \right] dt = \\ &= -2A \alpha \operatorname{Ar th} \sqrt{\frac{\alpha^2 - \omega}{\alpha^2 + \alpha^2 \omega}} + 2A \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{\alpha^2 - \omega}{1 + \omega}}, \end{aligned}$$

где $t = \sqrt{(\alpha^2 - \omega)/(\omega + 1)}$. Подставив сюда $\omega = \alpha^2$, убеждаемся, что $z_0 = 0$. При движении по вещественной оси плоскости ω влево от α^2 гиперболический аретангенс принимает вещественные значения и возрастает, стремясь при $\omega \rightarrow 0$ к значению $\operatorname{Ar th}(1) = \infty$. При переходе через точку $\omega = 0$ мнимая часть гиперболического аретангенса скачком изменится от 0 до $-\frac{1}{2}i\pi$, а вещественная часть вновь начинает убывать, и при $\omega = -1$ эта функция стремится к значению $\operatorname{Ar th}(\infty) = -\frac{1}{2}i\pi$, а $\operatorname{arc tg}(\infty) = \frac{1}{2}\pi$. Следовательно, в точке $\omega = 1$, которая предполагается соответствующей точке $z = -b - ia$, имеем $z = i\pi A\alpha + \pi A$. Поэтому $A = -b/\pi$ и $A\alpha = -a/\pi$, и наше преобразование имеет вид

$$z = \frac{2a}{\pi} \operatorname{Ar th} \sqrt{\frac{a^2 - \omega b^2}{a^2(1 + \omega)}} - \frac{2b}{\pi} \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{a^2 - \omega b^2}{b^2(1 + \omega)}}, \quad (10.2.57)$$

$$\frac{dz}{d\omega} = -\frac{1}{\pi\omega} \sqrt{\frac{a^2 - \omega b^2}{1 + \omega}}.$$

Выполним теперь преобразование

$$\omega = e^{\pi i F/V_0}, \quad F = \psi + i\chi = \frac{V_0}{\pi i} \ln \omega, \quad \frac{dF}{d\omega} = \frac{V_0}{\pi i \omega},$$

соответствующее такому распределению потенциала, при котором поверхность ADC имеет нулевой потенциал, а поверхность ABC — потенциал V_0 . Напряженность поля у этой поверхности равна (ω берется вещественными)

$$\left| \frac{dF}{dz} \right| = \left| \frac{dF/d\omega}{dz/d\omega} \right| = V_0 \left| \sqrt{\frac{1 + \omega}{a^2 - b^2 \omega}} \right|.$$

Например, на достаточном расстоянии от вершины угла в сторону C плотность заряда равна $V_0/4\pi a$, а в сторону A она равна $V_0/4\pi b$. При $\omega = a^2/b^2 = \alpha^2$ плотность заряда делается бесконечной, а при $\omega = -1$ (точка B) плотность заряда равна нулю.

Для безвихревого потока несжимаемой жидкости внутри описанного канала мы применим вспомогательное преобразование

$$\omega = e^{\pi F/Q}, \quad F = \psi + i\chi = (Q/\pi) \ln \omega,$$

где Q есть полный поток жидкости между граничными поверхностями,

ψ — потенциал скоростей, χ — функция тока. Для случая $a = b$ имеем

$$z = \frac{2a}{\pi} \left[\operatorname{Ar} \operatorname{th} \frac{\pi}{\sqrt{\operatorname{th}(\pi F/2Q)}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{th}(\pi F/2Q)} \right], \quad (10.2.58)$$

а величина скорости в точке, соответствующей значению $F = \psi + i\chi$, равна

$$v = (Q/a) \left| \sqrt{\operatorname{cth}(\pi F/2Q)} \right|.$$

Другие физические задачи, связанные с подобными границами, также могут быть решены, если основное преобразование (10.2.57) известно.

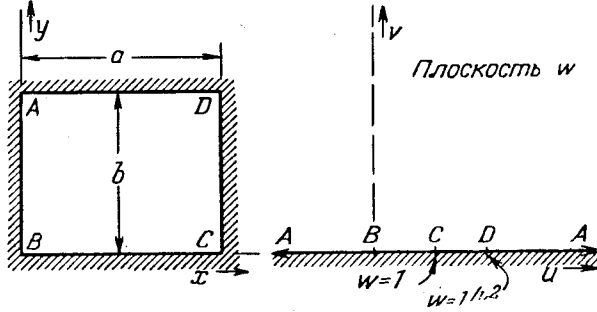


Рис. 10.24. Преобразование Кристоффеля — Шварца для внутренней прямоугольника.

Наконец, мы можем применить эллиптические функции Якоби, чтобы получить преобразование внутренней области прямоугольника на верхнюю полуплоскость плоскости w . В соответствии с рисунком 10.24 мы видим, что

$$z - z_0 = kA \int \frac{dw}{\sqrt{w(1-w)(1-k^2w)}} = 2kA\Phi(\sqrt{w}, k)^1.$$

Величина z_0 равна нулю, так как, согласно сказанному на стр. 464 тома I, эллиптический синус равен нулю, когда w равно нулю. Таким же образом, если $w = 1$, Φ равна K , а z предполагается равным a , следовательно, $A = a/2kK$, и преобразование можно записать в виде

$$w = [\operatorname{sn}(Kz/a, k)]^2 \quad (10.2.59)$$

При $z = a + ib$ w должно быть равным i/k^2 , но $\operatorname{sn}(K + iK', k) = 1/k$, а следовательно, k должно быть подобрано так, чтобы иметь $Kb/a = K'$, или $K'/K = b/a$, как это дается в таблице, приведенной на стр. 463 тома I.

Как и выше, распределение потенциала внутри прямоугольника в случае, когда часть AB его границы имеет потенциал V_0 , а остальная часть границы — нулевой потенциал, задается соотношениями

$$w = e^{\pi i F/V_0}, \quad F = \psi + i\chi = -\frac{2V_0}{\pi i} \ln [\operatorname{sn}(Kz/a, k)]. \quad (10.2.60)$$

Силовые линии в этой задаче совпадают с эквипотенциальными линиями в задаче, когда линейные заряды противоположного знака помещены в углах A и B . Между прочим, это решение следует сравнить с формулой (10.1.7).

Далее, потенциал, создаваемый линейным зарядом, находящимся в точке z_0 , лежащей внутри прямоугольника, вся граница которого имеет нулевой потенциал, можно получить при помощи вещественной части

¹⁾ Φ обозначает функцию, обратную эллиптическому синусу. — Прим. ред.

функции

$$F = 2q \ln \left(\frac{\omega - \bar{\omega}_0}{\omega - \omega_0} \right) = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{sn}^2(Kz/a, k) - \operatorname{sn}^2(K\bar{z}_0/a, k)}{\operatorname{sn}^2(Kz/a, k) - \operatorname{sn}^2(Kz_0/a, k)} \right\}. \quad (10.2.61)$$

Эту функцию следует сравнить с выражением (10.2.47).

На этом мы закончим интересный экскурс в область специальных методов решения двумерных задач теории потенциала. Мы должны вернуться к основному предмету обсуждения — к получению представимых через собственные функции решений, связанных с различными системами координат, и к решению частных задач при помощи соответствующих рядов по этим собственным функциям.

10.3. Решения в трехмерном пространстве

С некоторым сожалением обращаемся мы теперь к решению уравнений Лапласа и Пуассона в трехмерном случае. Тот необычайно удобный путь, которым мы благодаря свойствам функций комплексного переменного получали решения в двумерном случае, был, возможно, слишком легким введением к задачам, стоящим перед нами теперь. Для многих измерений и для других уравнений решения почти всегда будут представляться бесконечными рядами или интегралами, которые лишь в очень редких случаях хорошо сходятся, да и наши задачи, вообще говоря, будут более трудными. Как мы видели в гл. 5, даже уравнение Лапласа допускает разделение переменных только в некоторых трехмерных системах координат, и в большинстве случаев получение решения, дающего численный ответ, ограничено выбором этих систем.

В случае трехмерного уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

разделение переменных осуществимо для всех тех систем координат, перечисленных на стр. 614—620 тома I, для которых допускает разделение волновое уравнение, а также для циклидных координат, среди которых наиболее употребительны бисферические и тороидальные. Эти системы распадаются на три основных класса: цилиндрические координаты, вращательные координаты и третий класс, состоящий из менее симметричных систем. Цилиндрические координаты получают параллельным переносом двумерной системы координат в плоскости x, y вдоль оси z . Таким образом возникают цилиндрические поверхности с осями, параллельными оси z . Не зависящие от z частные решения для таких систем были изучены в первых двух параграфах этой главы; можно построить и более общие решения для таких систем, но они лишены особого интереса. Поэтому мы ограничимся решениями для декартовых и круговых цилиндрических координат, а прочими системами будем заниматься в дальнейшем в связи с волновым уравнением, для которого они имеют большее значение.

Вращательные координаты образуются вращением проходящей через ось z плоскости, в которой построена двумерная система координат, вокруг этой оси. Круговые цилиндрические координаты (единственная система, являющаяся одновременно и цилиндрической и вращательной) образованы вращением прямоугольных координат, сферические — вращением полярных, сфероидальные — вращением эллиптических и т. п. Тороидальные и бисферические координаты также могут быть включены в этот класс.

Третий, более общий класс, образуют параболоидальные и эллипсоидальные координаты, не имеющие ни цилиндрической, ни осевой симметрии.