

функции

$$F = 2q \ln \left( \frac{\omega - \bar{\omega}_0}{\omega - \omega_0} \right) = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{sn}^2(Kz/a, k) - \operatorname{sn}^2(K\bar{z}_0/a, k)}{\operatorname{sn}^2(Kz/a, k) - \operatorname{sn}^2(Kz_0/a, k)} \right\}. \quad (10.2.61)$$

Эту функцию следует сравнить с выражением (10.2.47).

На этом мы закончим интересный экскурс в область специальных методов решения двумерных задач теории потенциала. Мы должны вернуться к основному предмету обсуждения — к получению представимых через собственные функции решений, связанных с различными системами координат, и к решению частных задач при помощи соответствующих рядов по этим собственным функциям.

### 10.3. Решения в трехмерном пространстве

С некоторым сожалением обращаемся мы теперь к решению уравнений Лапласа и Пуассона в трехмерном случае. Тот необычайно удобный путь, которым мы благодаря свойствам функций комплексного переменного получали решения в двумерном случае, был, возможно, слишком легким введением к задачам, стоящим перед нами теперь. Для многих измерений и для других уравнений решения почти всегда будут представляться бесконечными рядами или интегралами, которые лишь в очень редких случаях хорошо сходятся, да и наши задачи, вообще говоря, будут более трудными. Как мы видели в гл. 5, даже уравнение Лапласа допускает разделение переменных только в некоторых трехмерных системах координат, и в большинстве случаев получение решения, дающего численный ответ, ограничено выбором этих систем.

В случае трехмерного уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

разделение переменных осуществимо для всех тех систем координат, перечисленных на стр. 614—620 тома I, для которых допускает разделение волновое уравнение, а также для циклидных координат, среди которых наиболее употребительны бисферические и тороидальные. Эти системы распадаются на три основных класса: цилиндрические координаты, вращательные координаты и третий класс, состоящий из менее симметричных систем. Цилиндрические координаты получают параллельным переносом двумерной системы координат в плоскости  $x, y$  вдоль оси  $z$ . Таким образом возникают цилиндрические поверхности с осями, параллельными оси  $z$ . Не зависящие от  $z$  частные решения для таких систем были изучены в первых двух параграфах этой главы; можно построить и более общие решения для таких систем, но они лишены особого интереса. Поэтому мы ограничимся решениями для декартовых и круговых цилиндрических координат, а прочими системами будем заниматься в дальнейшем в связи с волновым уравнением, для которого они имеют большее значение.

Вращательные координаты образуются вращением проходящей через ось  $z$  плоскости, в которой построена двумерная система координат, вокруг этой оси. Круговые цилиндрические координаты (единственная система, являющаяся одновременно и цилиндрической и вращательной) образованы вращением прямоугольных координат, сферические — вращением полярных, сфероидальные — вращением эллиптических и т. п. Тороидальные и бисферические координаты также могут быть включены в этот класс.

Третий, более общий класс, образуют параболоидальные и эллипсоидальные координаты, не имеющие ни цилиндрической, ни осевой симметрии.

Мы будем, насколько это возможно, придерживаться комплексных переменных, приносящих большую пользу. Например, каждая функция комплексного переменного  $X$ , соответствующего плоскости, параллельной оси  $z$  и образующей угол  $u$  с осью  $x$ ,

$$X = z + i(x \cos u + y \sin u) \quad (10.3.1)$$

является решением уравнения Лапласа, а также и любая комбинация таких решений

$$\psi(x, y, z) = \int_0^{2\pi} F(X)f(u) du. \quad (10.3.2)$$

Мы могли бы, очевидно, испробовать различные функции в качестве  $F$  и  $f$  и выяснить, какого вида решения при этом получаются. Однако мы попытаемся избежать этого процесса нахождения решения, так сказать, «обратным ходом», вместо этого мы будем получать решения для различных координат, позволяющих разделить переменные, решая соответствующие уравнения с меньшим числом переменных. Во многих случаях мы найдем, что окончательное решение можно представить интегралом вида (10.3.2), и это интегральное представление окажется весьма полезным для суммирования рядов по собственным функциям и для выражения собственных функций одной системы через другие.

Интегральная форма (10.3.2) является обобщением интегрального представления, обсуждавшегося в § 5.3, и является столь же общим аппаратом. Эта форма особенно проста и полезна в случае вращательных координатных систем, когда функция  $f(u)$  оказывается равной либо  $\cos(mu)$ , либо  $\sin(mu)$  с целым  $m$ .

В этом случае функции  $F$ , соответствующие множеству собственных функций, связанных с данной координатной системой, образуют последовательность, удобную для разложения в ряды, как, например, последовательность степеней  $X$  или последовательность одномерных собственных функций от  $X$  и т. д. При помощи соотношений между функциями  $F$ , соответствующих различным координатным системам, можно установить зависимости между решениями для различных координат.

**Интегральная форма функции Грина.** В качестве примера применения интегрального представления (10.3.2), а также для получения нескольких формул, которые будут нужны нам на всем протяжении этого параграфа, мы подвергнем некоторым преобразованиям функцию Грина для уравнения Лапласа в неограниченном трехмерном пространстве. В гл. 7 было показано, что для этого случая функция Грина имеет вид

$$G(x, y, z | x_0, y_0, z_0) = 1/R, \quad R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \quad (10.3.3)$$

Однако эта форма весьма неудобна для различных разложений  $G$  в ряды по собственным функциям.

В гл. 7 были уже развиты общие методы получения разложения функции Грина по собственным функциям, и, следовательно, искомые ряды можно было бы получить, просто запустив в ход алгебраическую машину. Возможно, что полезнее всего в данном простом (и довольно частном) случае снова обратиться к этому «сложному агрегату», в особенности потому, что здесь мы сможем стать на точку зрения, отличную от изложенной в гл. 7.

Начнем с решения уравнения

$$\nabla^2 \psi = -4\pi\epsilon (x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (10.3.4)$$

в прямоугольном параллелепипеде с ребрами конечной длины, равными соответственно  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Если краевые условия состоят лишь в том, что собственные функции должны быть периодичными на границах (т. е. чтобы значения  $\psi$  на одной из граней, перпендикулярных оси  $x$ , равнялись соответствующим значениям  $\psi$  на другой параллельной грани и т. д.), то собственные функции представимы в виде

$$\psi = \sum_{l,m,n} A_{lmn} e^{2\pi i \Omega_{lmn}}, \quad \Omega_{lmn} = \frac{lx}{a} + \frac{my}{b} + \frac{nz}{c},$$

где коэффициенты  $A$  должны быть выбраны так, чтобы  $\psi$  удовлетворяло уравнению (10.3.4)

Для вычисления коэффициентов  $A$  сначала подставим этот ряд в уравнение:

$$\begin{aligned} -4\pi^2 \sum_{\lambda,\mu,\nu} A_{\lambda\mu\nu} \left[ \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{b}\right)^2 + \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \right] e^{2\pi i \Omega_{\lambda\mu\nu}} = \\ = -4\pi \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0). \end{aligned}$$

Умножая обе части равенства на  $\exp(-2\pi i \Omega_{lmn})$  и интегрируя по объему параллелепипеда, получим

$$-4\pi^2 abc A_{lmn} \left[ \left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2 \right] = -4\pi e^{-2i\pi \Omega'_{lmn}},$$

где  $\Omega'_{lmn} = lx_0/a + my_0/b + nz_0/c$ . Поэтому решение уравнения (10.3.4), удовлетворяющее требованию периодичности граничных значений, равно

$$\begin{aligned} \psi = \sum_{l,m,n} \frac{1/\pi abc}{(l/a)^2 + (m/b)^2 + (n/c)^2} \exp \left\{ 2\pi i \left[ \frac{l}{a}(x-x_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m}{b}(y-y_0) + \frac{n}{c}(z-z_0) \right] \right\}. \quad (10.3.5) \end{aligned}$$

Подробным рассмотрением этого решения для конечного параллелепипеда мы займемся несколько позже, теперь же устремим  $a$ ,  $b$  и  $c$  к бесконечности. Положим  $2\pi l/a = k_x$ ,  $2\pi m/b = k_y$ ,  $2\pi n/c = k_z$ . Так как  $a$ ,  $b$  и  $c$  стремятся к бесконечности, то число целых значений  $l$ , соответствующих элементарному промежутку от  $k_x$  до  $k_x + dk_x$ , равно в среднем  $(a/2\pi) dk_x$ , аналогично дело обстоит с  $dk_y$  и  $dk_z$ . Следовательно, в пределе суммы, входящие в выражение функции Грина (10.3.5), переходят в интеграл

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i[k_x(x-x_0) + k_y(y-y_0) + k_z(z-z_0)]}}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right\} dk_z. \quad (10.3.6)$$

Это вполне удовлетворительное интегральное представление для  $1/R$ , но значительно более полезные выражения можно получить, выполняя некоторые из интегрирований в « $k$ -пространстве». Например,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  можно считать компонентами вектора  $\mathbf{K}$ , а  $(x-x_0)$  и т. д. — компонентами вектора  $\mathbf{R}$ . Тогда величина, заключенная в скобки, равна  $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}/K^2}$ , а элемент объема равен  $K^2 dK \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ , где  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{K}$  ( $\mathbf{K}\cdot\mathbf{R} = KR \cos \vartheta$ ). Интегрируя по углу  $\varphi$ , получим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dK \int_{-1}^1 e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} d\omega = \frac{2}{\pi R} \int_0^{\infty} \sin(KR) \frac{dK}{K} = \frac{1}{R}, \quad \omega = \cos \vartheta. \quad (10.3.7)$$

Еще более интересное представление получается применением круговых цилиндрических координат в « $k$ -пространстве», если положить

$k_x = k \cos u$  и  $k_y = k \sin u$  и проинтегрировать по  $k_z$ . Интегрируемая функция

$$\frac{1/\pi}{k^2 + k_z^2} e^{ikG + ik_z(z-z_0)}, \quad G = (x-x_0) \cos u + (y-y_0) \sin u,$$

имеет простые полюсы в точках  $k_z = \pm ik$  с вычетами  $(1/2\pi ik) e^{ikG - k(z-z_0)}$  в точке  $k_z = ik$  и  $-(1/2\pi ik) e^{ikG + k(z-z_0)}$  в точке  $k_z = -ik$ . Интеграл по  $k_z$  с бесконечными пределами можно обычным способом заменить интегралом по контуру, охватывающему  $ik$ , если разность  $z - z_0$  положительна, или  $-ik$  (в отрицательном направлении), если  $z - z_0$  отрицательна (см. стр. 392 тома I). Следовательно, другим интегральным представлением для функции Грина будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{k} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{-h|z-z_0| + ik[(x-x_0)\cos u + (y-y_0)\sin u]} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} du \int_0^{\infty} dk e^{-k[X_0 - X]} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{X_0 - X}, \end{aligned}$$

$$k_x = k \cos u, \quad k_y = k \sin u, \quad (10.3.8)$$

где  $X = z + i(x \cos u + y \sin u)$ ,  $X_0 = z_0 + i(x_0 \cos u + y_0 \sin u)$ , если  $z < z_0$ , и  $X = -z + i(x \cos u + y \sin u)$ ,  $X_0 = -z_0 + i(x_0 \cos u + y_0 \sin u)$ , если  $z > z_0$ .

В том, что последний интеграл равен  $1/R$ , можно убедиться, осуществляя интегрирование по  $u$ . В действительности мы могли бы с таким же успехом получить выражение (10.3.8) удачной догадкой, просматривая таблицу интегралов, но много полезнее получить эти результаты путем последовательных рассуждений. Мы могли бы, очевидно, получить первую строку в равенстве (10.3.8), применяя общие формулы гл. 7. в частности, формулу (7.2.42), но для выяснения вопроса, быть может, было более полезно повторить еще раз весь вывод в этом особенно важном случае.

Так или иначе мы показали, что функцию Грина  $1/R$  можно представить в виде (10.3.2) при помощи величин типа (10.3.4). Интеграл (10.3.8) будет полезен для разложений функции  $1/R$  в ряды по собственным функциям, соответствующим различным системам координат.

**Решения в прямоугольных координатах.** Частные решения, соответствующие декартовым координатам, имеют обычный вид:  $e^{-hx} \sin(\pi y/a) \times \sin(\pi z/b)$ ,  $\sin(\pi x/a) \operatorname{sh}(ky) \sin(\pi z/b)$  и т. д., где  $k^2 = (\pi/a)^2 + (\pi/b)^2$ . Например, потенциал внутри прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , у которого грань  $z=0$  имеет потенциал  $\phi_0(x_0, y_0)$ , а остальные пять граней — нулевой потенциал, равен

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{4}{ab} \sum_{m,n} \left[ \int_0^a dx_0 \int_0^b \phi_0 \sin\left(\frac{\pi m x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right) dy_0 \right] \times \\ &\quad \times \frac{\operatorname{sh}[k_{mn}(c-z)]}{\operatorname{sh}[k_{mn}c]} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right), \end{aligned} \quad (10.3.9)$$

где  $k_{mn}^2 = (\pi/a)^2 + (\pi/b)^2$ . Для сравнения с формулой (10.1.7) проведем расчет в случае  $\phi_0 = 1$  (на нижней грани поддерживается единичный потенциал, на остальных — нулевой):

$$\psi = \frac{16}{\pi^2} \sum_{m,n} \frac{\operatorname{sh}[k_{mn}(c-z)]}{\operatorname{sh}[k_{mn}c]} \frac{\sin\left[\frac{\pi x}{a}(2m+1)\right] \sin\left[\frac{\pi y}{b}(2n+1)\right]}{(2m+1)(2n+1)}, \quad (10.3.10)$$

где, на этот раз,  $k_{mn} = (\pi/a)^2(2m+1)^2 + (\pi/b)^2(2n+1)^2$ . Наконец, если  $c$

намного больше, чем  $a$  и  $b$ , то этот ряд сводится к ряду

$$\psi = \frac{16}{\pi^2} \sum_{m,n} \exp \left[ -z \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (2m+1)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 (2n+1)^2} \right] \times \\ \times \frac{\sin [(\pi x/a)(2m+1)] \sin [(\pi y/b)(2n+1)]}{(2m+1)(2n+1)}, \quad (10.3.11)$$

описывающему распределение температуры в длинном брусе прямоугольного поперечного сечения, на торце которого поддерживается единичная температура, а на боковых гранях — нулевая. Благодаря наличию экспоненциального множителя каждый член убывает и стремится к нулю с ростом  $z$ , т. е. с удалением от нагретого конца. Члены, соответствующие большим значениям  $m$  и  $n$ , убывают много быстрее, и для достаточно больших значений  $z$  температура приближенно равна

$$\psi \simeq (16/\pi^2) e^{-\pi z \sqrt{a^2+b^2}} \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b).$$

Ряд (10.3.11) следует сравнить с аналогичным двумерным рядом, входящим в формулу (10.1.8). В двумерном случае ряд можно просуммировать и получить решение в замкнутой форме. В трехмерном случае благодаря наличию квадратного корня в показателе ряд не представляет никакой известной простой функции от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Другой пример решения, достаточно просто выражающегося в прямоугольных координатах, можно получить, рассчитывая установившееся течение идеальной жидкости в трубе с прямоугольным сечением. Установившийся поток, имеющий скорость  $v_0$  (направленную параллельно оси трубы), определяется потенциалом скоростей

$$\psi = -v_{\text{ср.}} z.$$

Однако распределение скоростей может быть неоднородным у начала трубы ( $z=0$ ) и мы должны так исправить формулу для однородного потока, чтобы эта начальная неоднородность потока была учтена.

Предположим, что составляющая скорости по оси  $z$  при  $z=0$  равна  $v_0(x, y)$  и является функцией точки  $(x, y)$  в плоскости начального поперечного сечения. Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \psi}{\partial z} &= v_0(x, y) \quad \text{при } z=0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x=0, x=a, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y=0, y=b, \\ -\frac{\partial \psi}{\partial z} &\simeq v_{\text{ср.}} \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

представляется рядом по собственным функциям

$$\psi = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \exp \left[ -\pi z \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \right], \quad (10.3.12)$$

где член, соответствующий  $m=n=0$ , равен в точности  $-A_{00}z$ . Этот ряд удовлетворяет всем граничным условиям, за исключением условия при  $z=0$ . Чтобы удовлетворить и этому условию, полагаем

$$A_{00} = v_{\text{ср.}} = \frac{1}{ab} \int_0^a dx \int_0^b v_0(x, y) dy,$$

$$A_{m0} = \frac{2}{\pi m b} \int_0^a \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) dx \int_0^b v_0(x, y) dy,$$

$$A_{mn} = \frac{4/\pi a b}{V(m/a)^2 + (n/b)^2} \int_0^a \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) dx \int_0^b \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) v_0(x, y) dy, \quad (10.3.13)$$

причем формула для  $A_{0n}$  получается из формулы для  $A_{m0}$  заменой  $x$  на  $y$  и  $m$  на  $n$ .

Мы замечаем, что все дополнительные члены, соответствующие значениям  $m \neq 0$  или  $n \neq 0$ , содержат экспоненциальный множитель, благодаря которому они стремятся к нулю, когда  $z$  стремится к бесконечности. Таким образом, неоднородности в потоке, вызванные условиями у начала трубы, постепенно «сглаживаются», так что вдали от начала поток в трубе делается однородным, имеющим среднюю скорость  $v_{\text{ср}}$ .

Например, если воздух пропускается в трубу через отверстие в пластинке, закрывающей конец трубы  $z=0$ , причем отверстие расположено в точке  $(x_0, y_0)$  пластинки, то  $v_0 = Q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$  и

$$A_{00} = \frac{Q}{ab}, \quad A_{m0} = \frac{2Q}{\pi m b} \cos\left(\frac{\pi m x_0}{a}\right),$$

$$A_{mn} = \frac{4Q/\pi a b}{V(m/a)^2 + (n/b)^2} \cos\left(\frac{\pi m x_0}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right).$$

В тех случаях, когда две трубы разных размеров соединятся при  $z=0$  (или поперек трубы при  $z=0$  помещена диафрагма, снабженная отверстием произвольной формы), задачу можно решить, записав разложение в ряд для потока при  $z < 0$  и при  $z > 0$  и потребовав, чтобы эти ряды совпадали при  $z=0$ . Мы откладываем обсуждение такого рода задач на сопряжение до главы, посвященной распространению колебаний, в которой мы встретимся с подобными проблемами.

Функция Грина для внутренней области прямоугольного параллелепипеда с нулевым граничным условием на гранях является трехмерным аналогом эллиптической функции. Ее выражение в виде ряда можно получить точно так же, как был получен ряд (10.3.5), только здесь используются синусы:

$$G(x, y, z | x_0, y_0, z_0) = \sum_{l, m, n} \frac{8/\pi a b c}{(l/a)^2 + (m/b)^2 + (n/c)^2} \sin\left(\frac{\pi l x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y_0}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n z_0}{c}\right) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi l x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{c}\right). \quad (10.3.14)$$

Рассмотрим сплошной прямоугольный параллелепипед из металла, по всей внутренней области которого равномерно распределены источники тепла, а на поверхности поддерживается нулевая температура. Тогда функция, описывающая распределение температуры, будет пропорциональна функции  $G$ , проинтегрированной по всей внутренней области параллелепипеда (по переменным  $x_0, y_0, z_0$ ). Окончательный результат имеет вид

$$\sum_{\substack{l, m, n \\ \text{нечетные}}} \frac{64/\pi^4 l m n}{(l/a)^2 + (m/b)^2 + (n/c)^2} \sin\left(\frac{\pi l x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{c}\right),$$

причем ряд сходится настолько быстро, что значение этой функции можно подсчитать без особых затруднений (в сумму входят только нечетные значения  $l, m, n$ ).

**Решения в круговых цилиндрических координатах.** В координатах  $r, \varphi, z$  уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

При разделении переменных получаем

$$\begin{aligned} \psi &= \Phi(\varphi) R(r) Z(z), \quad (d^2\Phi/d\varphi^2) + m^2\Phi = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R &= 0, \quad \frac{d^2Z}{dz^2} - k^2Z = 0. \end{aligned}$$

Решение первого уравнения, т. е. множитель, зависящий от  $\varphi$ , есть либо  $\sin m\varphi$ , либо  $\cos m\varphi$ . Если отсутствуют границы, на которых  $\varphi = \text{const}$ , и  $\varphi$  может изменяться от 0 до  $2\pi$ , то  $m$  должно быть либо нулем, либо целым числом. Решения уравнения для  $Z$  также выражаются через тригонометрические или гиперболические функции в зависимости от того, является ли  $k$  вещественным или мнимым числом. Если на обеих граничных поверхностях, перпендикулярных оси  $z$  (на основаниях цилиндра), заданы однородные граничные условия (например, нулевые значения функции или ее нормальной производной) и требуется удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности цилиндра, то  $k$  должно быть мнимым числом. Если же граничные условия на одном или обоих основаниях цилиндра неоднородны, то  $k$  должно быть вещественным числом, так как в этом случае множитель, зависящий от  $Z$ , оказывается гиперболической функцией.

Уравнение для  $R$  есть уравнение Бесселя. При вещественном  $k$  его решениями являются функции  $J_m(kr)$  и  $N_m(kr)$  [см. формулы (5.3.63) и (5.3.76), а также стр. 302]. Функция Бесселя  $J_m$  конечна в начале, и потому ее следует применять в тех случаях, когда ось  $z$  находится внутри области, охватываемой граничной поверхностью, т. е. области, в которой расположено искомое поле. Функция Неймана  $N_m$  является вторым решением этого уравнения и обращается в бесконечность в начале.

Гиперболические функции Бесселя  $K_m$  и  $I_m$  (см. стр. 303) применяются в случае, когда  $k$  — мнимое число. Функция  $I_m$  конечна в начале, но бесконечна на бесконечности. Функция  $K_m$  бесконечна в начале и равна нулю на бесконечности.

В качестве примера на применение этих решений рассмотрим задачу о стационарном распределении температуры внутри цилиндрического бруса, на основаниях которого ( $z=0$  и  $z=l$ ) поддерживается нулевая температура, а на боковой поверхности ( $r=a$ ) задана температура  $T_a(z)$ . Представление этого решения в виде ряда выглядит так:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{I_0(\pi nr/l)}{I_0(\pi na/l)} \sin\left(\frac{\pi nz}{l}\right), \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l T_a(z) \sin\left(\frac{\pi nz}{l}\right) dz.$$

Если температура на поверхности зависит от  $\varphi$  и  $z$ , то ряд содержит положительные значения  $m$  и в выражения коэффициентов входят как интегралы по  $\varphi$ , так и интегралы по  $z$ .

Если на боковой поверхности ( $r=a$ ) поддерживается нулевая температура, а хотя бы на одном из оснований ( $z=0, z=l$ ) заданы переменные граничные условия, то следует применять функции Бесселя с вещественными значениями  $k$ . Решая уравнение  $J_m(ka) = 0$  при фиксированном  $m$ , мы находим соответствующую ортогональную систему собственных функций. Собственные значения, т. е. корни уравнения  $J_m(\pi\beta) = 0$  записываются в виде  $\beta_{mn}$ . Первый индекс указывает порядок функции Бесселя, а второй — номер корня, так что наименьший корень соответствует значе-

нию  $n = 1$  и  $\beta_{m, n+1} > \beta_{mn}$ . На стр. 523 даны значения нескольких первых корней.

Последовательность  $J_m(\pi\beta_{mn}r/a)$  для различных  $n$  образует полную систему собственных функций, обладающую всеми соответствующими свойствами: ортогональностью и т. п. Например, так как  $J_m(\pi\beta_{mn}) = 0$ , то в силу формул стр. 302

$$\int_0^a J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn}r}{a}\right) J_m\left(\frac{\pi\beta_{ms}r}{a}\right) r dr = \begin{cases} 0, & s \neq n, \\ -\frac{1}{2} a^2 J_{m-1}(\pi\beta_{mn}) J_{m+1}(\pi\beta_{mn}) = \\ = \frac{1}{2} a^2 [J_{m+1}(\pi\beta_{mn})]^2, & s = n. \end{cases} \quad (10.3.15)$$

Поэтому любую функцию  $\psi_0(r, \varphi)$ , заданную в круге ( $0 \leq r \leq a$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), можно представить в виде ряда

$$\psi_0(r, \varphi) = \sum_{m, n} \frac{\varepsilon_m}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi - \theta)] d\theta \int_0^a u \psi_0(u, \theta) J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn}u}{a}\right) du \right\} \times \\ \times [a J_{m+1}(\pi\beta_{mn})]^{-2} J_m(\pi\beta_{mn}r/a),$$

где  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_m = 2$  для  $m = 1, 2, 3, \dots$ .

Следовательно, потенциал внутри цилиндра радиуса  $a$  и высоты  $l$ , равный нулю на всей поверхности, за исключением основания  $z = 0$ , где он равен  $\psi_0(r, \varphi)$ , представляется двойным рядом

$$\psi(r, \varphi, z) = \sum_{m, n} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi - \theta)] d\theta \int_0^a \psi_0(u, \theta) J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn}u}{a}\right) u du \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\varepsilon_m \operatorname{sh}[(\pi\beta_{mn}/a)(l-z)]}{\pi [a J_{m+1}(\pi\beta_{mn})]^2 \operatorname{sh}[\pi\beta_{mn}l/a]} \right\} J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn}r}{a}\right). \quad (10.3.16)$$

Если  $r$  устремить к бесконечности, то этот ряд превратится в интеграл, как это было показано на стр. 710 тома I. Часто употребляется интеграл Фурье — Бесселя

$$F(r) = \int_0^\infty u du \int_0^\infty F(w) J_m(ur) J_m(uw) w dw, \quad (10.3.17)$$

а также его обобщение на случай полярных координат  $(r, \varphi)$ , получающееся при помощи (5.3.66):

$$\psi_0(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u du \int_0^\infty w dw \int_0^{2\pi} \psi_0(w, \theta) J_0(uR) d\theta, \quad (10.3.18)$$

где

$$R^2 = r^2 + w^2 - 2rw \cos(\varphi - \theta).$$

Пусть, например, на плоскости  $z = 0$  потенциал равен нулю всюду вне круговой области ( $0 \leq r < a$ ), где он равен  $V_0$ . Тогда потенциал над этой плоскостью равен

$$\psi(r, \varphi, z) = V_0 \int_0^\infty e^{-uz} du \int_0^a J_0(ur) J_0(uw) w dw = V_0 a \int_0^\infty e^{-uz} J_1(ua) J_0(ur) du. \quad (10.3.19)$$



Используя первые члены разложений для  $J_0$  и  $J_1$ , можно получить приближенное выражение для функции  $\psi$  при больших значениях  $z$ :

$$\psi \simeq \frac{1}{2} V_0 a^2 \int_0^\infty e^{-uz} u du = \frac{1}{2} V_0 \frac{a^2}{z^2}, \quad z \gg r, a.$$

При помощи формул

$$\int_0^\infty e^{-uz} J_0(ur) du = \frac{1}{V \sqrt{z^2 + r^2}}, \quad \int_0^\infty e^{-uz} J_0(ur) u du = \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (10.3.20)$$

можно получить более общее выражение, дающее хорошее приближение при  $z \gg a$  и при любых значениях  $r$ . Первая из этих формул получена из интегрального представления функции  $J_0$ , а вторая — дифференцированием первой по  $z$ . Используя вторую формулу, можно показать, что

$$\psi \simeq z V_0 a^2 / 2 (z^2 + r^2)^{3/2}, \quad z \gg a.$$

Решение задачи о безвихревом течении несжимаемой жидкости в круглой трубе радиуса  $a$  сводится к решению задачи Неймана. Для однородного потока решение, очевидно, имеет вид  $\psi = -v_0 z$ . Для неоднородного потока в такой трубе решения имеют вид

$$e^{\pm \pi \alpha_{mn} z/a} \cos(m\varphi) J_m(\pi \alpha_{mn} r/a),$$

где  $\alpha_{mn}$  есть  $n$ -й корень уравнения

$$(d/dx) [J_m(\pi x)] = 0.$$

Первые несколько значений  $\alpha$  даны на стр. 524. Мы видим, что  $\alpha_{0n} = \beta_{1n}$ , но все прочие  $\alpha$  отличаются от всех прочих  $\beta$ .

Если поток начинается у конца трубы  $z=0$ , где составляющая скорости по  $z$  равна  $v_0(r, \varphi)$ , то потенциал скоростей вдоль трубы для  $z > 0$  равен

$$\psi = \psi_{00} + \sum_{m,n} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi - \theta)] d\theta \int_0^a v_0(u, \theta) J_m\left(\frac{\pi \alpha_{mn} u}{a}\right) u du \right\} \times \\ \times \frac{\varepsilon_m \exp[-(\pi \alpha_{mn} z/a)]}{\pi^2 \alpha_{mn} [J_m(\pi \alpha_{mn})]^2} J_m\left(\frac{\pi \alpha_{mn} r}{a}\right). \quad (10.3.21)$$

Эту формулу следует сравнить с выражением (10.3.16). Для больших значений  $z$  все члены, за исключением члена, соответствующего значению  $m=0$  и  $n=0$ , оказываются пренебрежимо малыми:

$$\psi \simeq \psi_{00} = -\frac{z}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a v_0(u, \theta) u du.$$

Например, если весь поток втекает в трубу через малое отверстие, расположенное в центре пластинки, помещенной при  $z=0$ , то ряд имеет вид

$$\psi = -\frac{zQ}{\pi a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q}{\pi^2 \alpha_{0n}} e^{-\pi \alpha_{0n} z/a} [J_0(\pi \alpha_{0n})]^{-2} J_0\left(\frac{\pi \alpha_{0n} r}{a}\right).$$

Количество жидкости, протекающее в единицу времени через любое поперечное сечение трубы, равно  $Q$ , так как каждый член ряда для  $n > 0$  ортогонален собственной функции наимизшего порядка  $J_0(0) = 1$ , и поэтому полный поток, представленный рядом, равен нулю независимо от значения  $z$ .

**Интегральное представление собственных функций.** Так как собственные функции  $\cos(m\varphi) e^{kz} J_m(kr)$  являются частными решениями уравнения Лапласа, то их можно выразить при помощи интеграла вида (10.3.2). Формула (5.3.65) и рассуждения, приведенные на стр. 238, подсказывают, каким должен быть общий вид функций  $F(X)$  и  $f(u)$ . Мы имеем

$$\int_0^{2\pi} e^{ikr \cos u} \cos(mu) du = 2\pi i^m J_m(kr).$$

После замены  $u = \omega - \varphi$  и умножения обеих частей равенства на  $e^{kz}$  показатель подинтегрального выражения станет равным

$$k[z + ir \cos(\omega - \varphi)] = k[z + i(x \cos \omega + y \sin \omega)] = kX$$

в соответствии с (10.3.1). Поэтому получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{kX} \cos(mu) du &= e^{kz} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \omega} [\cos m\omega \cos m\varphi + \sin m\omega \sin m\varphi] d\omega = \\ &= 2\pi i^m e^{kz} \cos(m\varphi) J_m(kr); \end{aligned} \quad (10.3.22)$$

интеграл, содержащий  $\sin(m\omega)$ , равен нулю в силу нечетности синуса. Аналогично имеет место равенство

$$\int_0^{2\pi} e^{kX} \sin(mu) du = 2\pi i^m e^{kz} \sin(m\varphi) J_m(kr),$$

где в обоих случаях

$$X = z + i(x \cos u + y \sin u).$$

Эти выражения оказываются чрезвычайно полезными, так как при их помощи можно выразить через цилиндрические функции все остальные элементарные решения. Например, в соответствии с формулой (10.3.8) функция Грина

$$1/R = [(z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^{-1/2}$$

равна

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} e^{-k|z-z_0| + ik[r \cos(u-\varphi) - r_0 \cos(u-\varphi_0)]} du.$$

Эта функция должна разлагаться в ряд Фурье по  $\cos[m(\varphi - \varphi_0)]$  с коэффициентами

$$A_m = \frac{\varepsilon_m}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{2\pi} \cos(mt) e^{-k|z-z_0| + ik[r \cos \omega - r_0 \cos(t+\omega)]} dt,$$

где  $\omega = u - \varphi$  и  $t = \varphi - \varphi_0$ . Далее, полагая  $t + \omega = v$ , получаем

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{\varepsilon_m}{4\pi^2} \int_0^\infty e^{-k|z-z_0|} dk \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \omega} \cos(m\omega) d\omega \int_0^{2\pi} e^{-ikr_0 \cos v} \cos(mv) dv = \\ &= \varepsilon_m i^{2m} \int_0^\infty e^{-k|z-z_0|} J_m(kr) (-1)^m J_m(kr_0) dk. \end{aligned}$$

Итак, окончательно ряд для функции Грина оказывается равным

$$\frac{1}{R} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \int_0^{\infty} J_m(kr) J_m(kr_0) e^{-k|z-z_0|} dk. \quad (10.3.23)$$

Это выражение оказывается полезным при расчетах полей, расположенных вне цилиндра.

**Функция Грина для внутреннего поля.** Функция Грина внутри цилиндра представляется рядом, аналогичным ряду (10.3.14), т. е. представленным в виде ряда решением уравнения  $\nabla^2 \psi = -4\pi\delta$ , где функция  $\delta$  равна нулю всюду внутри цилиндра, за исключением точки  $(r_0, \varphi_0, z_0)$ , а интеграл от нее равен 1. Мы положим

$$\psi = \sum_{m,n,s} A_{mns} \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \sin \left( \frac{\pi n z}{l} \right) J_m \left( \frac{\pi \beta_{ms} r}{a} \right).$$

Этот ряд обращается в нуль при  $z=0$ ,  $z=l$ ,  $r=a$ , т. е. на границах цилиндра. Подставляя этот ряд в уравнение для  $\psi$ , получим

$$\pi^2 \sum A_{mns} \left[ \left( \frac{n}{l} \right)^2 + \left( \frac{\beta_{ms}}{a} \right)^2 \right] \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \sin \left( \frac{\pi n z}{l} \right) J_m \left( \frac{\pi \beta_{ms} r}{a} \right) = 4\pi\delta.$$

Умножая на одну из собственных функций и интегрируя по объему цилиндра обе части этого уравнения, получим выражение для внутренней функции Грина

$$G(r, \varphi, z | r_0, \varphi_0, z_0) = \sum_{mns} \frac{(8\varepsilon_m / \pi^2 l a^2) \cos [m(\varphi - \varphi_0)]}{J_{m+1}^2(\pi \beta_{ms}) [(n/l)^2 + (\beta_{ms}/a)^2]} \times \\ \times \sin \left( \frac{\pi n z}{l} \right) \sin \left( \frac{\pi n z_0}{l} \right) J_m \left( \frac{\pi \beta_{ms} r}{a} \right) J_m \left( \frac{\pi \beta_{ms} r_0}{a} \right). \quad (10.3.24)$$

Потенциал поля заземленного цилиндра, внутри которого равномерно распределен заряд единичной плотности, получается при помощи интегрирования этого выражения по объему цилиндра по переменным  $r_0, \varphi_0, z_0$ :

$$\psi = \sum_{n,s} \frac{32/\pi^2 \beta_{0s} (2n+1)}{J_1(\pi \beta_{0s}) \{[(2n+1)/l]^2 + (\beta_{0s}/a)^2\}} \sin \left[ \frac{\pi z}{l} (2n+1) \right] J_0 \left[ \frac{\pi \beta_{0s} r}{a} \right].$$

Этот ряд пропорционален также распределению температуры внутри уранового цилиндра с равномерным распределением источников распада, на поверхности которого поддерживается нулевая температура.

**Решения в сферических координатах.** Сферические координаты

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arctg [(1/z) \sqrt{x^2 + y^2}], \quad \varphi = \arctg (y/x)$$

являются весьма удобной системой и вполне заслуживают детального изучения. В уравнении Лапласа

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0$$

переменные разделяются следующим образом [ $\psi = R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi)$ ]:

$$d^2 \Phi / d\varphi^2 + m^2 \Phi = 0, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] \Theta = 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0.$$

Решениями первого уравнения являются функции  $\cos(m\varphi)$  и  $\sin(m\varphi)$ , и если ни одна из плоскостей  $\varphi = \text{const}$  не является граничной поверхностью, то из условий непрерывности и периодичности функции  $\Phi$  следует, что  $m$  должно быть нулем или целым числом. Решениями второго уравнения являются функции Лежандра

$${}^m(\cos \vartheta) = \sin^m \vartheta T_{n-m}^m(\cos \vartheta),$$

о которых говорилось на стр. 564 и 726 тома I. Было показано, что эти функции, ограничены на отрезке  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  только для целых  $n$ , больших или равных  $m$ . Решениями третьего уравнения являются функции  $r^n$  или  $1/r^{n+1}$ . Поэтому частными решениями уравнения Лапласа в сферических координатах служат

$$r^n Y_{mn}^e, \quad r^n Y_{mn}^o, \quad r^{-n-1} Y_{mn}^e, \quad r^{-n-1} Y_{mn}^o,$$

где

$$Y_{mn}^e = \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta), \quad Y_{mn}^o = \sin(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta). \quad (10.3.25)$$

Функции  $Y$  называются *сферическими гармониками*. При этом функции, соответствующие значению  $m=0$ , называются *зональными гармониками* (так как эти функции зависят только от  $\vartheta$  и их узловые линии делят сферу на зоны); если же  $m$  равно  $n$ , то мы получаем *секториальные гармониками*, так как эти функции зависят только от  $\varphi$  и их узловые линии делят сферу на «секторы» (сферические двуугольники, образованные меридианами). Остальные функции, соответствующие значениям  $0 < m < n$ , называются *тессеральными гармониками*. Эти функции, являющиеся собственными функциями оператора Лапласа на поверхности сферы, взаимно ортогональны и их норма равна

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi [Y_{mn}(\vartheta, \varphi)]^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{4\pi}{\varepsilon_m (2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

где верхний индекс у  $Y$  может быть либо  $e$  (четная), либо  $o$  (нечетная) (исключение составляет  $Y_{0n}^o$ , не существующая вовсе) и где (как и раньше)  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_n = 2$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Следовательно, каждая функция  $V_0(\varphi, \vartheta)$ , заданная на поверхности сферы, может быть представлена рядом

$$V_0(\varphi, \vartheta) = \sum_{m,n} [A_{mn} Y_{mn}^e(\vartheta, \varphi) + B_{mn} Y_{mn}^o(\vartheta, \varphi)],$$

$$A_{mn} = \frac{(2n+1)\varepsilon_m}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi V_0 Y_{mn}^e \sin \vartheta d\vartheta, \quad (10.3.26)$$

где коэффициенты  $B_{mn}$  выражаются подобно коэффициентам  $A_{mn}$  с той только разницей, что под интегралом функции  $Y_{mn}^e$  заменены функциями  $Y_{mn}^o$ , а члены, соответствующие  $m=0$ , опущены.

Мы видим, следовательно, что если на поверхности сферы радиуса  $a$  потенциал равен  $V_0(\varphi, \vartheta)$ , то внутри сферы он представляется рядом

$$\phi = \sum_{m,n} [A_{mn} Y_{mn}^e(\vartheta, \varphi) + B_{mn} Y_{mn}^o(\vartheta, \varphi)] \left(\frac{r}{a}\right)^n, \quad (10.3.27)$$

где коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются по формулам (10.3.26). Члены ряда, соответствующие большим значениям  $n$ , выражают «тонкие детали» изменения функции  $V_0(\varphi, \vartheta)$  в зависимости от углов; эти члены велики только вблизи  $r=a$ . У центра сферы потенциал почти постоянен и равен приближенно

первому члену

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} V_0(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = V_{\text{ср.}}$$

представляющему среднее значение функции  $V_0$  по поверхности сферы.

Например, если сферическая поверхность имеет потенциал  $V$  для значений  $\vartheta$ , заключенных между 0 и  $\vartheta_0$ , и нулевой потенциал для значений  $\vartheta$  между  $\vartheta_0$  и  $\pi$ , то мы применим формулу для интеграла от функции  $P_n$ , данную на стр. 307. Все коэффициенты  $B$ , а также все коэффициенты  $A$ , за исключением  $A_{0n} = A_n$ , равны нулю. Коэффициенты  $A_n$  равны

$$A_n = \frac{1}{2} (2n+1) \int_{\cos \vartheta_0}^1 V P_n(x) dx = \frac{1}{2} V [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)],$$

где для  $n=0$  мы положим  $P_{-1} = 1$ . Поэтому потенциал внутри сферы равен

$$\psi = \frac{1}{2} V \sum_{n=0}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)] P_n(\cos \vartheta) \left(\frac{r}{a}\right)^n.$$

Потенциал вне сферы радиуса  $a$ , на поверхности которой он равен  $V_0(\varphi, \vartheta)$ , представляется рядом, аналогичным ряду (10.3.27) и отличающимся от него лишь тем, что множители  $(r/a)^n$  заменены множителями  $(a/r)^{n+1}$ , откуда следует, что потенциал стремится к нулю, когда  $r$  стремится к бесконечности. Отметим, что на очень большом расстоянии от сферы ( $r \gg a$ ) потенциал пропорционален  $1/r$  (кулоновское поле), причем множитель пропорциональности равен радиусу сферы  $a$ , умноженному на средний потенциал по поверхности сферы  $V_{\text{ср.}}$ . Рассматриваемая с достаточно большого расстояния, сфера действует так, как если бы она имела суммарный заряд, равный ее емкости  $a$  (в электростатических единицах), умноженной на средний потенциал.

**Поля заряженных дисков и витков тока.** Однородное поле, направленное по оси  $z$ , имеет потенциал, пропорциональный  $-z = -rP_1(\cos \vartheta)$ . Если это поле возмущено присутствием сферы радиуса  $a$  с центром в начале координат, то к этому потенциалу следует добавить член  $(1/r^2)P_1(\cos \vartheta)$  для того, чтобы удовлетворить граничным условиям при  $r = a$ . Например, если поле представляет поток идеальной несжимаемой жидкости, то граничные условия заключаются в том, что  $\partial\psi/\partial r = 0$  при  $r = a$ . В результате потенциал скоростей равен

$$\psi = -vP_1(\cos \vartheta) \left[ r + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^2} \right]. \quad (10.3.28)$$

Скорость у поверхности сферы имеет  $\vartheta$ -направление и равна

$$-\frac{1}{a} \left( \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \right)_a = -\frac{3}{2} v \sin \vartheta.$$

Знак минус указывает на то, что скорость направлена в сторону *убывания*  $\vartheta$ . Таким образом, наибольшая скорость жидкости достигается у экватора сферы и равна  $3/2$  скорости однородного невозмущенного потока. Если жидкость пребывает в покое на бесконечности, а сфера движется сквозь жидкость со скоростью  $v$ , то жидкость непосредственно перед сферой будет двигаться вместе с ней со скоростью  $v$ , в то время как жидкость у экватора будет двигаться в противоположном направлении со скоростью  $(1/2)v$ , так что вытесняемая жидкость обтекает сферу. Очевидно, что

наличие вязкости видоизменило бы эту картину. Мы изучим действие вязкости в последней главе.

Если имеется однородное электрическое поле напряженности  $E$ , в которое вносится диэлектрическая сфера с диэлектрической постоянной  $\varepsilon$ , то потенциал следует выбрать так, чтобы его предельные значения изнутри поверхности сферы совпадали бы с его предельными значениями извне, а его нормальная производная извне равнялась бы нормальной производной изнутри, умноженной на  $\varepsilon$ . При помощи несложных алгебраических операций можно показать, что искомая пара функций имеет вид

$$\psi = \begin{cases} -[3E/(2+\varepsilon)]r \cos \vartheta, & r < a, \\ -Er \cos \vartheta + E[(\varepsilon-1)/(\varepsilon+2)](a^3/r^2) \cos \vartheta, & r > a. \end{cases}$$

Эти выражения показывают, что поле однородно на бесконечности, а также внутри сферы и что напряженность внутри сферы меньше, чем предельное значение напряженности на бесконечности, если диэлектрическая постоянная больше единицы.

Далее мы определим поле плоского однородно заряженного диска радиуса  $a$ , полный заряд которого равен  $Q$ , а плотность заряда  $Q/\pi a^2$ . Поместим центр диска в начало координат, а поверхность диска расположим перпендикулярно оси  $z$ .

В точке оси  $z$ , отстоящей от поверхности диска на расстояние  $r$ , потенциал равен

$$\begin{aligned} \psi_{\vartheta=0} &= \frac{Q}{\pi a^2} 2\pi \int_0^a \frac{y dy}{\sqrt{r^2+y^2}} = \frac{2Q}{a^2} [V a^2+r^2 - r] = \\ &= \begin{cases} \frac{2Q}{a} \left[ 1 - \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{r}{a} \right)^4 + \frac{1}{16} \left( \frac{r}{a} \right)^6 - \dots \right], & r < a, \\ \frac{2Q}{a} \left[ \frac{1}{2} \frac{a}{r} - \frac{1}{8} \left( \frac{a}{r} \right)^3 + \frac{1}{16} \left( \frac{a}{r} \right)^5 - \dots \right], & r > a. \end{cases} \end{aligned}$$

Мы знаем, что потенциал симметричен относительно оси  $z$ , и поэтому его можно разложить в ряд по зональным гармоникам  $r^n P_n(\cos \vartheta)$  или  $r^{-n-1} P_n(\cos \vartheta)$  для значений  $\vartheta$ , отличных от нуля (т. е. вне оси  $z$ ). Мы знаем также, что  $P_n(1) = 1$ . Из всего сказанного можно заключить, что разложение потенциала диска в точке  $(r, \vartheta, \varphi)$  имеет вид

$$\psi = \begin{cases} \frac{2Q}{a} \left[ 1 - \frac{r}{a} |P_1(\cos \vartheta)| + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^2 P_2(\cos \vartheta) - \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{8} \left( \frac{r}{a} \right)^4 P_4(\cos \vartheta) + \dots \right], & r < a, \\ \frac{2Q}{a} \left[ \frac{1}{2} \frac{a}{r} - \frac{1}{8} \left( \frac{a}{r} \right)^3 P_2(\cos \vartheta) + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{16} \left( \frac{a}{r} \right)^5 P_4(\cos \vartheta) - \dots \right], & r > a. \end{cases} \quad (10.3.29)$$

Этот потенциал, как и следовало ожидать, не зависит от  $\varphi$ . На очень больших расстояниях искомый потенциал сводится к функции  $Q/r$ , как это и должно быть. Мы замечаем, что имеет место скачок градиента у поверхности диска, вызванный наличием члена  $(2Q/a^2)r |\cos \vartheta| = (2Q/a^2)|z|$ . Поэтому скачок нормальной производной равен  $4Q/a^2 = 4\pi\sigma$ , где  $\sigma = Q/\pi a^2$  есть поверхностная плотность заряда на диске. Вспоминая, что оба ряда должны совпадать при  $r = a$ , мы замечаем также, что

$$|\cos \vartheta| = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} P_2(\cos \vartheta) - \frac{3}{16} P_4(\cos \vartheta) + \frac{13}{128} P_6(\cos \vartheta) - \dots$$

Чтобы найти потенциал двойного слоя, расположенного на диске радиуса  $a$  с центром в начале, перпендикулярном оси  $z$ , напомним, что, согласно элементарной теории электромагнетизма, магнитный потенциал, порожденный витком тока силы  $I$ , равен магнитному потенциалу поверхности, границей которой служит эта проволока и на которой распределен магнитный двойной слой с плотностью диполей, равной  $I$ . Следовательно, потенциал диска, несущего двойной слой, равен магнитному потенциалу кругового витка тока, совпадающего с краем диска. Он равен также телесному углу, под которым виден диск из данной точки, умноженному на  $I$ . Магнитная напряженность в точке, лежащей на оси диска и отстоящей от его поверхности на расстояние  $r$ , равна

$$H = I 2\pi a \frac{1}{r^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} = 2\pi I \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя это выражение в пределах от  $r$  до бесконечности, получим магнитный потенциал вдоль оси  $z$

$$\psi = \begin{cases} 2\pi I \left[ 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right] = 2\pi I \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^2 - \frac{1.3}{2.4} \left( \frac{r}{a} \right)^4 + \right. \\ \left. + \frac{1.3.5}{2.4.6} \left( \frac{r}{a} \right)^6 - \dots \right], & r > a, \\ 2\pi I \left[ 1 - \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^3 - \frac{1.3}{2.4} \left( \frac{r}{a} \right)^5 + \right. \\ \left. + \frac{1.3.5}{2.4.6} \left( \frac{r}{a} \right)^7 - \dots \right], & r < a. \end{cases}$$

Потенциал на отрицательной полуоси  $z$  отличается от написанного только знаком.

Вновь строя ряд по сферическим гармоникам, соответствующий записанному степенному ряду, мы найдем, что магнитный потенциал, порожденный круговым током силы  $I$ , или потенциал диска радиуса  $a$  с поверхностной плотностью диполей  $I$ , равен

$$\psi = \begin{cases} 2\pi I \left[ \frac{\cos \vartheta}{|\cos \vartheta|} - \frac{r}{a} P_1(\cos \vartheta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^3 P_3(\cos \vartheta) - \dots \right], & r < a, \\ 2\pi I \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_1(\cos \vartheta) - \right. \\ \left. - \frac{1.3}{2.4} \left( \frac{a}{r} \right)^4 P_3(\cos \vartheta) + \dots \right], & r > a. \end{cases} \quad (10.3.30)$$

Первый член в первой скобке представляет собой разрывную функцию, равную  $+1$  для  $\vartheta < \pi/2$  и  $-1$  для  $\vartheta > \pi/2$ . Этот разрыв при переходе через диск (когда  $\vartheta$  переходит от  $\pi/2 - \varepsilon$  к  $\pi/2 + \varepsilon$  при  $r < a$ ) влечет за собой разрыв потенциала  $\psi$  со скачком  $4\pi I$ . Это как раз тот скачок, которого следовало ожидать для диска с плотностью диполей  $I$ . Причиной этого разрыва магнитного потенциала витка тока является тот факт, что ток в витке порождает вихри в поле вблизи провода, и поэтому любая попытка представить поле с вихрями при помощи потенциальной функции приводит к разрывному потенциалу (см. рассуждение на стр. 215, 216 о циркуляции вокруг цилиндра).

Из формулы (10.3.30) следует, что на больших расстояниях от диска (или витка тока) потенциал сводится к функции  $\pi a^2 I (1/r^2) \cos \vartheta$ , которая, как мы покажем ниже в этом же параграфе, является потенциалом простого диполя, «сила» которого равна  $\pi a^2 I$ . Мы замечаем также, что

разрывная ступенчатая функция  $\cos \vartheta / |\cos \vartheta|$  выражается рядом

$$\frac{3}{2} P_1(\cos \vartheta) - \frac{7}{8} P_3(\cos \vartheta) + \frac{11}{16} P_5(\cos \vartheta) - \dots = \begin{cases} 1, & 0 < \vartheta < \frac{1}{2} \pi, \\ -1, & \frac{1}{2} \pi < \vartheta < \pi. \end{cases}$$

**Поля заряженных сферических сегментов.** Как показывает предыдущий пример, при переходе через поверхность двойного слоя с плотностью диполей  $I$  потенциал претерпевает разрыв со скачком, равным  $4\pi I$ , но его нормальная производная остается непрерывной. Используя этот факт, мы можем вычислить потенциал двойного слоя, расположенного на поверхности сферы радиуса  $a$ . Например, функция

$$\psi_n(r, \vartheta) = \begin{cases} -\frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \vartheta), & r < a, \\ \frac{n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \vartheta), & r > a, \end{cases}$$

всюду конечна и претерпевает скачок, равный  $P_n(\cos \vartheta)$  при  $r = a$ , а ее нормальная производная при этом остается непрерывной. Чтобы найти потенциал произвольного поверхностного распределения диполей по поверхности  $r = a$ , мы строим ряд из функций  $\psi_n$ , соответствующий данному распределению плотности.

Например, двойной слой может покрывать сферический сегмент. Пусть плотность диполей на поверхности сферы радиуса  $a$  равна  $I$  для значений  $\vartheta$ , лежащих между  $0$  и  $\vartheta_0$ , и  $0$  для  $\vartheta$ , лежащих между  $\vartheta_0$  и  $\pi$ . Потенциал такого распределения зарядов должен равняться  $\sum A_n P_n(\cos \vartheta)$ , где

$$A_n = 4\pi I \frac{2n+1}{2} \int_0^{\vartheta_0} \psi_n(r, \vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta;$$

поэтому

$$\psi = 2\pi I \sum_{n=0}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)] P_n(\cos \vartheta) \times \begin{cases} -\frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^n, & r < a, \\ \frac{n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, & r > a, \end{cases} \quad (10.3.31)$$

является потенциалом двойного слоя с постоянной поверхностной плотностью  $I$ , распределенного на сферическом сегменте с угловым радиусом  $\vartheta_0$ . Эта же функция  $\psi$  является магнитным потенциалом витка тока силы  $I$ , расположенного по окружности  $r = a$ ,  $\vartheta = \vartheta_0$ . Здесь мы заменили виток тока сферической оболочкой, несущей двойной слой, а не плоским диском того же периметра, как это было сделано при выводе формулы (10.3.30). Обе формулы должны совпадать (различие будет только в положении поверхности разрыва), когда виток лежит в экваториальной плоскости, т. е. когда  $\vartheta_0 = \pi/2$ . В этом случае, применяя одну из формул, приведенных на стр. 306, получим

$$\psi = \begin{cases} 2\pi I \left[ -1 - \frac{r}{a} P_1(\cos \vartheta) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos \vartheta) - \right. \\ \quad \left. - \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos \vartheta) + \dots \right], & r < a, \\ 2\pi I \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1(\cos \vartheta) - \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3(\cos \vartheta) + \dots \right], & r > a. \end{cases} \quad (10.3.32)$$



Заметим, что этот ряд при  $r > a$  совпадает с соответствующим рядом из (10.3.30), в то время как ряды для  $r < a$  эквивалентны, но отличаются тем, что мы переместили поверхность разрыва с экваториальной плоскости  $\vartheta = \pi/2$  на сферическую поверхность  $r = a$ ,  $\vartheta < \pi/2$ . Так как поверхностный заряд порождает скачок не функции  $\psi$ , а ее нормальной производной, то соответствующий ряд для потенциала одномерно заряженного сферического сегмента

$$\psi = 2\pi\sigma a \sum_{n=0}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)] P_n(\cos \vartheta) \times \begin{cases} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^n, & r < a, \\ \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, & r > a, \end{cases} \quad (10.3.33)$$

соответствует (но не эквивалентен) ряду (10.3.29).

**Интегральное представление решений.** Прежде чем приступить к рассмотрению других задач, мы займемся разысканием важного для нас интегрального представления вида (10.3.2) для решений, выражающихся через собственные функции в сферических координатах. Так как

$$X = z + ix \cos u + iy \sin u = r [\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos(u - \varphi)],$$

то следует ожидать, что решение, содержащее степень  $r$ , может быть выражено при помощи интеграла, в котором функция  $F(X)$  является простой степенью  $X$ . Мы рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} X^n \cos(mu) du &= \\ &= r^n \int_0^{2\pi} [\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \omega]^n \cos[m(\omega + \varphi)] d\omega = \\ &= r^n \cos(m\varphi) \int_0^{2\pi} [\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \omega]^n e^{im\omega} d\omega = \\ &= 2^{-n} i^{m-1} \sin^m \vartheta \left[ \oint (t^2 - 1)^n (t - \cos \vartheta)^{-n-m-1} dt \right] r^n \cos(m\varphi) = \\ &= 2\pi i^m \frac{r^n n!}{(n+m)!} \cos(m\varphi) \sin^m \vartheta T_{n-m}^m(\cos \vartheta) = \frac{2\pi i^m n!}{(n+m)!} r^n Y_{mn}^e(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (10.3.34)$$

где мы положили  $t = \cos \vartheta + i \sin \vartheta e^{i\omega}$  и использовали формулу (5.3.37). Подобным же образом находим

$$\int_0^{2\pi} X^n \sin(mu) du = \frac{2\pi i^m n!}{(n+m)!} r^n Y_{mn}^o(\vartheta, \varphi).$$

Аналогичными методами легко показать, что

$$\int_0^{2\pi} X^{-n-1} \frac{\cos}{\sin}(mu) du = 2\pi i^{-m} \frac{(n-m)!}{n!} r^{-n-1} \begin{cases} Y_{mn}^e(\vartheta, \varphi), \\ Y_{mn}^o(\vartheta, \varphi). \end{cases} \quad (10.3.35)$$

Эти формулы окажутся чрезвычайно полезными в наших дальнейших исследованиях. Благодаря им мы сможем относительно легко переходить от сферических координат к другим системам. Например, выражая  $X$

через  $x, y, z$  и затем осуществляя интегрирование, находим, что

$$\begin{aligned}
 Y_{00} &= 1, & Y_{01} &= \frac{z}{r}, & Y_{02} &= \frac{1}{2r^2}(2z^2 - x^2 - y^2), & Y_{03} &= \frac{z}{2r^3}(2z^2 - 3x^2 - 3y^2); \\
 Y_{11}^e &= \frac{x}{r}, & Y_{12}^e &= 3\frac{xz}{r^2}, & Y_{13}^e &= \frac{3}{2}\frac{x}{r^3}(4z^2 - x^2 - y^2); \\
 Y_{11}^o &= \frac{y}{r}, & Y_{12}^o &= 3\frac{yz}{r^2}, & Y_{13}^o &= \frac{3}{2}\frac{y}{r^3}(4z^2 - x^2 - y^2); \\
 Y_{22}^e &= 3\frac{x^2 - y^2}{r^2}, & Y_{23}^e &= 15\frac{x^2 - y^2}{r}z; \\
 Y_{22}^o &= 6\frac{xy}{r^2}, & Y_{23}^o &= 30\frac{xyz}{r^3}; & Y_{33}^e &= 15x\frac{x^2 - 3y^2}{r^3}; & Y_{33}^o &= 15y\frac{3x^2 - y^2}{r^3};
 \end{aligned} \tag{10.3.36}$$

Здесь  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Отсюда нетрудно усмотреть, что все  $2n + 1$  функций

$$r^n Y_{0n}, \quad r^n Y_{1n}^e, \dots, r^n Y_{nn}^e, \quad r^n Y_{1n}^o, \dots, r^n Y_{nn}^o$$

являются однородными рациональными полиномами от  $x, y, z$  степени  $n$ , а также что все они являются решениями уравнения Лапласа. Оказывается, что все возможные однородные полиномы степени  $n$  от  $x, y, z$ , являющиеся решениями уравнения Лапласа, могут быть образованы при помощи линейных комбинаций  $2n + 1$  построенных таким образом независимых полиномов. Они образуют полное подмножество во всем множестве решений. С точки зрения теории групп они являются представлениями  $n$ -кратной группы вращений (для  $n = 0$  полная симметрия вращения вокруг любой оси; для  $n = 1$  трехкратная симметрия вращения на  $90^\circ$  вокруг трех декартовых осей; для  $n = 2$  симметрия вращения на  $45^\circ$  вокруг соответствующих осей и т. д.).

Те же самые функции степени  $n$  после деления на  $r^{2n+1}$  дают новое множество функций, также являющихся решениями уравнения Лапласа.

Решения, определяемые по формуле (10.3.34), могут быть выражены через решения, соответствующие новому началу координат, при помощи интегрального представления. Например, одно из решений, соответствующее центру в точке  $(0, 0, a)$ , может быть выражено через решения, соответствующие центру в точке  $(0, 0, 0)$ , следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (r')^n Y_{mn}^e(\vartheta', \varphi) &= \frac{(n+m)!}{2\pi i^{mn} n!} \int_0^{2\pi} (X-a)^n \cos(mu) du = \\
 &= \frac{(n+m)!}{2\pi i^{mn} n!} \int_0^{2\pi} \left[ X^n - naX^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)a^2X^{n-2} - \dots \right] \cos(mu) du = \\
 &= a^n \sum_{s=m}^n \frac{(-1)^{n-s} (n+m)!}{(n-s)! (m+s)!} \left(\frac{r}{a}\right)^s Y_{ms}^e(\vartheta, \varphi).
 \end{aligned}$$

Для решений, содержащих отрицательные степени  $r$ , мы, разлагая  $(X-a)^{-n-1}$ , получим бесконечные ряды, и, чтобы добиться сходимости,

надо пользоваться различными разложениями в зависимости от того, будет ли  $r$  больше или меньше  $a$ . Для  $r$ , большего  $a$ , мы получим

$$\begin{aligned} (r')^{-n-1} Y_{mn}^e(\vartheta', \varphi) &= \frac{n! i^m}{2\pi (n-m)!} \int_0^{2\pi} (X-a)^{-n-1} \cos(mu) du = \\ &= \frac{i^m n!}{2\pi (n-m)!} \int_0^{2\pi} \frac{1}{X^{n+1}} \left[ 1 + (n+1) \frac{a}{X} + \frac{(n+1)(n+2)}{2!} \left(\frac{a}{X}\right)^2 + \dots \right] \cos(mu) du = \\ &= a^{-n-1} \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(s-m)!}{(n-m)!(s-n)!} \left(\frac{a}{r}\right)^{s+1} Y_{ms}^e(\vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

Формулы, выражающие потенциал в координатах  $r, \vartheta, \varphi$  через координаты  $r', \vartheta', \varphi$ , получаются заменой в этих уравнениях  $a$  на  $-a$ .

Например, можно получить приближенное решение следующей задачи. Заземленная сфера с внешним радиусом  $b$  помещена внутрь сферы с внутренним радиусом  $c$  ( $c > b$ ), имеющей потенциал  $V$ . Найти распределение потенциала между сферами, если центр внутренней сферы отстоит от центра внешней сферы на расстояние  $a$  ( $a < c - b$ ). Предположим, что линия центров лежит на оси  $z$ , что координаты, связанные с большей сферой, суть  $r, \vartheta, \varphi$ , а координаты, связанные с малой сферой (с центром в точке  $r = a, \vartheta = 0$ ), суть  $r', \vartheta', \varphi$ .

Так как потенциал при  $r' = b$  должен равняться 0, то наиболее общее выражение его должно иметь вид

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[ \left(\frac{r'}{b}\right)^n - \left(\frac{b}{r'}\right)^{n+1} \right] P_n(\cos \vartheta'),$$

где мы использовали только гармоники, соответствующие значению  $m = 0$ , так как вся картина симметрична относительно оси  $z$ . Заметим, что  $A_0 b$  равно полному заряду  $Q$ , расположенному на внутренней сфере (можете ли вы это доказать?). Используя вышеприведенное разложение и меняя порядок суммирования, найдем, что тот же потенциал, выраженный в координатах  $r, \vartheta$ , соответствующих большей сфере, равен

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^s \sum_{n=s}^{\infty} A_n \left(\frac{a}{b}\right)^n \frac{(-1)^{n-s} n!}{s! (n-s)!} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{a}{r}\right)^{s+1} \sum_{n=0}^s A_n \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} \frac{s!}{n! (s-n)!} \right\} P_s(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Так как ббльшая сфера при  $r = c$  должна иметь постоянный потенциал 1, то уравнения для коэффициентов  $A$  имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{-a}{b}\right)^n - \frac{b}{c} A_0 &= V, \\ \sum_{n=0}^s A_n \left(\frac{b}{a}\right)^n \frac{s!}{n! (s-n)!} - \left(\frac{c}{a}\right)^{2s+1} \sum_{n=s}^{\infty} A_n \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} \frac{(-1)^{n-s} n!}{s! (n-s)!} &= 0, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Если  $a$  мало по сравнению с  $b$  или  $c$ , то эта система уравнений может быть решена методом последовательных приближений. Мы положим  $A_n = (a/b)^n B_n$ , где  $B_n$  не является ни слишком большим, ни слишком малым. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{c-b}{c} B_0 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 B_1 + \left(\frac{a}{b}\right)^4 B_2 - \dots = V, \\ & B_0 + sB_1 + \frac{s(s-1)}{2} B_2 + \dots + sB_{s-1} + B_s - \\ & - \left(\frac{c}{b}\right)^{2s+1} \left[ B_s - (s+1) \left(\frac{a}{b}\right)^2 B_{s+1} + \frac{(s+1)(s+2)}{2!} \left(\frac{a}{b}\right)^4 B_{s+2} - \dots \right] = 0. \end{aligned}$$

Если отношение  $a/b$  мало, то, решая уравнения при  $s > 0$ , получим

$$B_1 \approx \frac{b^3}{c^3 - b^3} B_0, \quad B_2 \approx \frac{b^5(c^3 + b^3)}{(c^5 - b^5)(c^3 - b^3)} B_0, \dots$$

Значение  $B_0$  получается из первого уравнения. Если  $b$  много меньше, чем  $c$ , то следует сохранить только  $B_1$ , а коэффициентами  $B$  с более высокими индексами можно пренебречь. В этом случае

$$B_0 = A_0 \approx \frac{cV}{c-b} \left[ 1 - \frac{ca^4/b}{(c^3 - b^3)(c-b)} \right],$$

и емкость данной конфигурации проводников в этом приближении равна

$$C = \frac{bA_0}{V} \approx \frac{cb}{c-b} \left[ 1 - \frac{ca^4/b}{(c^3 - b^3)(c-b)} \right].$$

Более удобные пути исследования этой проблемы будут обсуждаться ниже.

**Разложение функции Грина.** Решение  $1/r$  является функцией Грина для источника, расположенного в начале координат. Если источник находится в точке  $r = r_0$ ,  $\vartheta = 0$ , то функция Грина равна

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \vartheta}} = \frac{1}{r_0} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{s+1} P_s(\cos \vartheta), \quad r > r_0,$$

как это можно показать, исходя из формулы (5.3.28). Если источник находится в произвольной точке  $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ , то лучше всего получить разложение, исходя из общей формулы (7.2.63).

Нормированные собственные функции, зависящие от  $\vartheta$ , имеют вид

$$\sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \vartheta).$$

Нормированные собственные функции, зависящие от  $\varphi$ , имеют вид либо

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\varphi},$$

либо  $\sqrt{\varepsilon_m/2\pi} \cos(m\varphi)$  и  $\sqrt{\varepsilon_m/2\pi} \sin(m\varphi)$ ; из-за вырождения приходится использовать обе эти функции для каждого значения  $m$ . Радиальные функции не являются собственными функциями, но производная функции

$$L = \frac{1}{2n+1} \begin{cases} r^n/r_0^{n+1}, & r < r_0, \\ r_0^n/r^{n+1}, & r > r_0, \end{cases}$$

имеет скачок  $1/r_0^2$  при  $r = r_0$ . Поэтому данная функция является функцией Грина от переменной  $r$  (см. стр. 770 тома I). Следовательно, соответ-

ствующие ряды для функции Грина трехмерного уравнения Лапласа в сферических координатах имеют вид

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \omega) \cdot \begin{cases} r^n/r_0^{n+1}, & r_0 > r, \\ r_0^n/r^{n+1}, & r_0 < r, \end{cases} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \times \\ \times \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \cdot \begin{cases} r^n/r_0^{n+1}, & r_0 > r, \\ r_0^n/r^{n+1}, & r_0 < r, \end{cases} \end{cases} \quad (10.3.37)$$

где  $R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \omega$ , а

$$\cos \omega = \cos \vartheta_0 \cos \vartheta + \sin \vartheta_0 \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0);$$

углы  $\omega$ ,  $\vartheta$  и  $\vartheta_0$  образуют три стороны сферического треугольника.

Благодаря этим формулам мы можем получить некоторые полезные формулы, представляющие функцию Лежандра от угла  $\omega$  через функции от сторон сферического треугольника  $\vartheta$  и  $\vartheta_0$  и заключенного между ними угла  $\varphi - \varphi_0$ . Например, приравнявая коэффициенты при  $r^n/r_0^{n+1}$  в обоих рядах, мы получим *теорему сложения* для сферических гармоник

$$P_n(\cos \omega) = \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos [m(\varphi - \varphi_0)], \quad (10.3.38)$$

где  $\varepsilon_m$  — множитель Неймана:  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_n = 2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Но мы могли бы получить первый из рядов формулы (10.3.37), используя соотношения (10.3.8). Если  $r_0 > r$ , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{X_0 - X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{X^n}{X_0^{n+1}} du = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos(\varphi - u)]^n}{[\cos \vartheta_0 + i \sin \vartheta_0 \cos(\varphi_0 - u)]^{n+1}} du. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем интегральное представление для полинома Лежандра от  $\omega$ :

$$P_n(\cos \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos(\varphi - u)]^n}{[\cos \vartheta_0 + i \sin \vartheta_0 \cos(\varphi_0 - u)]^{n+1}} du, \quad (10.3.39)$$

которое следует сравнить с выражениями (10.3.34) и (10.3.35). Интегральные представления для  $P_n(\cos \vartheta)$  или  $P_n(\cos \vartheta_0)$  можно получить, положив в формуле (10.3.39) либо  $\vartheta = 0$ , либо  $\vartheta_0 = 0$ .

Функция Грина для внутренней задачи, когда единичный заряд находится в точке  $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$  внутри заземленной сферы радиуса  $a$  ( $a > r_0$ ), имеет вид

$$\begin{aligned} G_i(r, \vartheta, \varphi | r_0, \vartheta_0, \varphi_0) &= \\ &= \frac{1}{R} - \sum_{n,m} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}}, \end{aligned} \quad (10.3.40)$$

где разложение для  $1/R$  дано равенствами (10.3.37).

Предположим, что однородно заряженная проволока натянута вдоль оси  $z$  от  $+a$  до  $0$  и помещена внутрь полый заземленной сферы. Для положительных  $z$  потенциал элемента проволоки длины  $dz$  равен

$$q \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta) \left[ A_n(z, r) - \frac{z^n r^n}{a^{2n+1}} \right] dz, \quad A_n = \begin{cases} \frac{r^n}{z^{n+1}}, & r < z, \\ \frac{z^n}{r^{n+1}}, & r > z, \end{cases}$$

где  $q$  есть заряд, приходящийся на единицу длины. Ряд для отрицательных значений  $z$  содержит дополнительный множитель  $(-1)^n$  при  $n$ -м члене [равный  $P_n(-1)$ ]. Поэтому потенциал в точке  $(r, \vartheta, \varphi)$  внутри заземленной сферы, создаваемый заряженной проволокой, равен

$$\begin{aligned} q \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta) \left\{ \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^r z^n dz + r^n \int_r^a \frac{dz}{z^{n+1}} - \frac{r^n}{a^{2n+1}} \int_0^a z^n dz \right\} = \\ = q \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{r^n}{na^n} - \frac{r^n}{(n+1)a^n} \right\} P_n(\cos \vartheta) = \\ = q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^n \right] P_n(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Первые члены сходятся плохо из-за разрыва потенциала при  $r = a, \vartheta = 0, \pi$ .

Функция Грина для внешней задачи, т. е. потенциал заряда, находящегося в точке  $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$  в присутствии заземленной сферы радиуса  $a$  ( $a < r_0$ ), имеет вид

$$G_0(r, \vartheta, \varphi | r_0, \vartheta_0, \varphi_0) = \frac{1}{R} - \sum_{m,n} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}}. \quad (10.3.41)$$

Второй дополнительный член, благодаря которому потенциал обращается в  $0$  при  $r = a$ , совпадает с тем членом, который возник бы от фиктивного заряда величины  $a/r_0$ , помещенного в точке  $r = a^2/r_0, \vartheta = \vartheta_0, \varphi = \varphi_0$ . Сравнение с формулой (10.3.40) показывает, что изображением точечного заряда  $q$ , находящегося в точке  $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$  заземленной сферической поверхности  $r = a$  (где  $a$  либо больше, либо меньше  $r_0$ ), является заряд  $qa/r_0$  в точке  $(a^2/r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ . Если заряд находится вне поверхности ( $r_0 > a$ ), то изображение лежит внутри поверхности и меньше оригинала; если же заряд лежит внутри, то изображение лежит вне поверхности и больше оригинала.

**Диполи, квадруполь и мультиполи.** Потенциал, порожденный зарядом, распределенным внутри сферы  $r = a$  с объемной плотностью  $\rho(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ , в точке, лежащей вне этой сферы, определяется рядом

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} Y_{nm}^e(\vartheta, \varphi) + B_{nm} Y_{nm}^o(\vartheta, \varphi)] \frac{1}{r^{n+1}}, \quad (10.3.42)$$

где

$$A_{nm} = \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi_0) d\varphi_0 \int_0^{\pi} P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \int_0^a \rho(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) r_0^{n+2} dr_0,$$

а коэффициент  $B_{nn}$  выражается аналогичным объемным интегралом, в котором  $\cos(m\varphi_0)$  заменен на  $\sin(m\varphi_0)$  ( $B_{n0} = 0$ ).

Мы замечаем, что коэффициент  $A_{00}$  равен полному заряду, находящемуся внутри сферы  $r = a$ , другими словами, вне сферы, в пространстве, свободном от зарядов, величина коэффициента при  $1/r$  в (10.3.42) в точности равна полному заряду внутри сферы независимо от его распределения. Каждый из остальных членов ряда является определенной характеристикой распределения заряда, как это показывает соответствующий интеграл.

Однако существует иной путь для вычисления этого потенциала. В соответствии с формулой (1.4.8) потенциал в точке  $(x, y, z)$  равен

$$\psi = \iiint_V \frac{\rho(x_0, y_0, z_0)}{R} dx_0 dy_0 dz_0,$$

где  $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$  и интегрирование производится по объему, заключенному внутри сферы  $r = a$ , где, по предположению, размещен весь заряд. Если  $r$  больше, чем  $a$ , мы можем получить достаточно хорошо сходящийся ряд для интеграла, разлагая  $1/R$  в ряд Тейлора по переменным  $x_0, y_0, z_0$ , которые никогда не превосходят  $a$ .

Нетрудно видеть, что мы можем символически записать

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[ x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z} \right]^n \left( \frac{1}{r} \right),$$

где  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Поэтому мы можем разложить  $1/R$  в ряд, каждый член которого является произведением  $x_0^{\lambda} y_0^{\mu} z_0^{\nu}$  на некоторый численный множитель и на множитель  $(\partial^{\lambda+\mu+\nu}/\partial x^{\lambda}\partial y^{\mu}\partial z^{\nu})(1/r)$ , являющийся функцией от  $x, y, z$  (либо от  $r, \vartheta, \varphi$ ). Первый из этих сомножителей, умноженный на  $\rho(x_0, y_0, z_0)$ , следует проинтегрировать по внутренней области сферы  $r_0 = a$ , чтобы получить окончательный числовой коэффициент при функции от  $x, y, z$ .

Используя формулу для  $n$ -й степени трехчлена

$$(x + y + z)^n = \sum_{\lambda, \mu, \nu} \frac{n!}{\lambda! \mu! \nu!} x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu}$$

(где суммирование распространяется на все возможные значения  $\lambda, \mu, \nu$ , для которых  $\lambda + \mu + \nu = n$ ), мы можем выписать разложение для  $\psi$  в явном виде:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} \frac{(-1)^n}{l! k! (n-l-k)!} \left\{ \iiint \rho(x_0, y_0, z_0) x_0^l y_0^k z_0^{n-l-k} dx_0 dy_0 dz_0 \right\} \times \frac{\partial^n}{\partial x^l \partial y^k \partial z^{n-l-k}} \left( \frac{1}{r} \right) \quad \text{для } r > a, \quad (10.3.43)$$

где плотность  $\rho$  (и все ее производные) равна 0 на сфере радиуса  $a$  и вне этой сферы. Это согласуется с положениями предыдущего параграфа. Мы можем, если захотим, взять по частям интеграл в скобках, заменив, таким образом, множитель, содержащий степени  $x_0, y_0, z_0$ , производными от  $\rho$  по переменным  $x_0, y_0, z_0$ .

Этот ряд (в той или иной его форме) показывает, что, производя измерения потенциала *вне сферы*, мы можем найти только те характеристики распределения заряда  $\rho$  внутри сферы радиуса  $a$ , которые выражаются через значения интегралов

$$\frac{(-1)^n}{l! k! (n-l-k)!} \iiint x_0^l y_0^k z_0^{n-l-k} \rho dx_0 dy_0 dz_0 \quad (10.3.44)$$

либо

$$\iiint \frac{\partial^n}{\partial x_0^l \partial y_0^k \partial z_0^{n-l-k}} [\rho(x_0, y_0, z_0)] dx_0 dy_0 dz_0$$

в зависимости от того, каким из видов интеграла мы пользуемся при расчете. В самом деле, если перераспределить  $\rho$  внутри сферы любым сколь угодно сложным образом, *лишь бы значения интегралов (10.3.44) не изменились*, то мы не смогли бы, находясь вне сферы, обнаружить, что произведено перераспределение. Конечно, при ближайшем рассмотрении требование, чтобы все интегралы оставались неизменными, теоретически оказывается достаточно жестким ограничением на произвол перераспределения  $\rho$ . Действительно, из второй формы интегралов, казалось бы, следует, что, потребовав, чтобы  $\rho$  выражалось сходящимся степенным рядом по  $x_0, y_0, z_0$  внутри сферы, мы сделали перераспределение теоретически невозможным, так как, фиксируя значения интегралов, мы тем самым фиксируем все коэффициенты этого степенного ряда. Однако, как мы сейчас увидим, вопрос решается не так просто.

На практике, кроме того, мы обладаем значительной свободой перераспределения, ибо если  $r$  существенно больше, чем  $a$ , то потенциалы (заданные при помощи производных от  $1/r$ ) для больших значений  $n$  оказываются столь малыми, что не поддаются измерению, и мы можем получить только значение интегралов (10.3.44) для  $n$ , меньших некоторого конечного числа, которое будет тем меньше, чем больше  $r$ , т. е. чем больше расстояние, на котором мы измеряем потенциал.

Например, для весьма больших  $r$  мы можем измерить только коэффициент при члене  $1/r$ , соответствующем значению  $n=0$ . Величина этого коэффициента в точности равна *полному заряду*  $q$ . Эта величина останется неизменной, если мы сосредоточим весь заряд в начале, т. е. если мы заменим фактическое распределение  $\rho$  распределением вида  $q\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ . Для несколько меньших  $r$  мы смогли бы измерить также величины  $D_x = \iiint x_0 \rho dx_0 dy_0 dz_0$  и выражаемые аналогичными интегралами  $D_y$  и  $D_z$ . Вектор с компонентами  $D_x, D_y$  и  $D_z$  называется *дипольным моментом* для распределения заряда  $\rho$ . Его величина останется неизменной, если мы заменим  $\rho$  *диполем*, символически обозначаемым при помощи производных дельта-функции

$$-[D_x \delta'(x)\delta(y)\delta(z) + D_y \delta(x)\delta'(y)\delta(z) + D_z \delta(x)\delta(y)\delta'(z)]$$

(см. стр. 775 тома I) и соответствующим заряду  $+D/\varepsilon$  ( $D^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$ ) в точке  $x = \varepsilon D_x/2D, y = \varepsilon D_y/2D, z = \varepsilon D_z/2D$  и заряду  $-D/\varepsilon$ , расположенному по другую сторону от начала, где  $\varepsilon$  исчезающе мало. Распределение столь простого вида даст, конечно, только три члена, соответствующие значению  $n=1$  в ряде (10.3.43). Все остальные члены будут равны нулю.

Простейшее распределение зарядов, порождающее потенциалы второго порядка, содержит комбинации из трех или четырех точечных зарядов. Например, интеграл

$$\iiint x_0 y_0 \rho dx_0 dy_0 dz_0 = Q_{xy}$$

может быть истолкован при помощи «диполя из диполей», т. е. диполя, расположенного вдоль оси  $x$ , элементами которого служат диполи, расположенные параллельно оси  $y$ , с зарядами  $+Q_{xy}/\varepsilon^2$  в точках  $x=y=$   
 $= \pm \frac{1}{2}\varepsilon, z=0$  и зарядами  $-Q_{xy}/\varepsilon^2$  в точках  $x=-y= \pm \frac{1}{2}\varepsilon, z=0$ , где  $\varepsilon$  исчезающе мало. При помощи дельта-функций это можно записать в виде

$$Q_{xy} \delta'(x)\delta'(y)\delta(z).$$



Далее, интеграл

$$\iiint z_0^2 \rho \, dx_0 \, dy_0 \, dz_0 = Q_{zz}$$

соответствует тройке зарядов: заряду  $-2Q_{zz}/\varepsilon^2$ , помещенному в начале координат, заряду  $+Q_{zz}/\varepsilon^2$  в точке  $x=y=0$ ,  $z=\varepsilon$  и заряду  $+Q_{zz}/\varepsilon^2$  в точке  $x=y=0$ ,  $z=-\varepsilon$ , причем опять  $\varepsilon$  стремится к нулю. При помощи дельта-функции это запишется в виде

$$Q_{zz} \delta(x) \delta(y) \delta''(z).$$

Только что описанные распределения трех или четырех зарядов называются *квадрупольями*<sup>1)</sup>. Мы видим, что потенциалы второго порядка можно с успехом заменить, подобрав соответствующим образом симметричные *квадрупольные аффиноры* с компонентами  $Q_{xx}$ ,  $Q_{xy} = Q_{yx}$  и т. д., определяемыми шестью интегралами второго порядка.

Мы можем здесь сказать «и так далее». Следующее простейшее распределение зарядов называется *октуполем*, а все последующие просто мультиполями. Теперь мы можем подтвердить положение, высказанное на стр. 260. *Значение потенциала вне сферы радиуса  $a$  не изменится, если заменить действительное распределение заряда  $\rho$  (находящегося внутри сферы) нижеследующим «упрощенным» распределением:*

точечный заряд величины  $q$ , помещенный в начале координат;

диполь, помещенный в начале, величина и направление которого задаются при помощи компонент  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_z$ ;

квадруполь, находящийся в начале, с компонентами  $Q_{xx}$ ,  $Q_{xy}$  и т. д.

Поскольку речь идет о значении потенциала вне заряженной части пространства, *любое распределение заряда можно заменить подходящим набором мультиполей.*

Возможно, в этом месте читатель будет удивлен тем, что мы занимались разложением по сферическим гармоникам, в то время как разложение по мультиполям значительно более «наглядно», и тем, что мы занимались рядом (10.3.42), когда имеется ряд (10.3.43). В ответ заметим, что, во-первых, ряд по мультиполям содержит излишние члены и, во-вторых, если оставить в стороне наличие излишних членов, разница между этими рядами не очень велика.

Сравнивая ряды (10.3.43) и (10.3.42), мы замечаем, что разложение в ряд Тейлора содержит  $(n+1)(n+2)/2$  членов  $n$ -го порядка, в то время как ряд по сферическим гармоникам содержит  $2n+1$  членов  $n$ -го порядка. Оба ряда имеют по одному члену «нулевого» порядка и по три члена первого порядка. Но ряд Тейлора имеет шесть членов второго порядка, в то время как ряд по сферическим гармоникам — только пять<sup>2)</sup>. Содержит ли ряд Тейлора излишние члены, или, наоборот, в ряд по сферическим гармоникам не включена одна «степень свободы» распределения заряда  $\rho$ , или имеет место и то, и другое?

<sup>1)</sup> Для квадруполя характерно наличие четырех зарядов. Случай трех зарядов является вырожденным и соответствует слиянию двух одноименных зарядов. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Обычно аффинор квадрупольного момента записывается в виде

$$Q_{ik} = \int \left( x_i x_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ik} \right) \rho \, dx \, dy \, dz.$$

При этом след аффинора  $\sum_{i=1}^3 Q_{ii} \equiv 0$ , так что имеется только пять независимых компонент аффинора. Следовательно, и в разложении Тейлора имеется только пять независимых членов второго порядка. [Добавленные члены  $\left( -\frac{1}{3} \delta_{ik} \int r^2 \rho \, dx \, dy \, dz \right)$  не изменяют потенциала, так как соответствующий член в ряде Тейлора пропорционален  $\nabla^2 \frac{1}{r} \equiv 0$ .] — Прим. ред.

Правильным ответом будет «и то, и другое». Существует «степень свободы» в распределении заряда, включенная в ряд Тейлора, при которой не создается потенциала вне сферы и которая опускается в ряде по сферическим гармоникам именно потому, что она не создает потенциала. Симметричное распределение заряда, при котором  $Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = Q$  и  $Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$ , согласно (10.3.43), порождает потенциал

$$Q \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left( \frac{1}{r} \right) = Q \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right),$$

равный нулю, так как  $1/r$  является решением уравнения Лапласа при  $r > 0$ . Это распределение соответствует помещенному в начало отрицательному заряду, окруженному симметричной сферической оболочкой, несущей такой же положительный заряд. При этом результирующий потенциал равен нулю. Ряд по сферическим гармоникам не включает члена, соответствующего такому распределению, и поэтому имеет на один член второго порядка меньше, чем ряд Тейлора.

Дополнительному требованию, чтобы опускались те из «степеней свободы» в распределении плотности заряда, которые не создают потенциала вне сферы, значительно легче удовлетворить, если в формуле (10.3.43) переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  заменить переменными  $\omega = x + iy$ ,  $\bar{\omega} = x - iy$  и  $z$  (см стр. 333 тома I). Тогда членами второго порядка будут

$$\frac{1}{2} \iiint \rho(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \left\{ \omega_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} + \bar{\omega}_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\omega}^2} + z_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\omega_0 \bar{\omega}_0 \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} + 2\omega_0 z_0 \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial z} + 2\bar{\omega}_0 z_0 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\omega} \partial z} \right\} \left( \frac{1}{r} \right),$$

где  $r^2 = \omega \bar{\omega} + z^2$ . Однако непосредственное дифференцирование показывает, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{1}{r} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right), \end{aligned}$$

так как  $1/r$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому четвертый член создает тот же самый потенциал, что и третий. И мы можем записать это выражение в виде

$$\frac{1}{2} \iiint \rho(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \left\{ \omega_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} + \bar{\omega}_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\omega}^2} + \left( z_0^2 - \frac{1}{2} \omega_0 \bar{\omega}_0 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\omega_0 z_0 \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial z} + 2\bar{\omega}_0 z_0 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\omega} \partial z} \right\} \left( \frac{1}{r} \right).$$

Выполнив все дифференцирования и сравнив полученные выражения с представлениями сферических гармоник, данными в (10.3.36), видим, что рассматриваемый интеграл в точности равен

$$\begin{aligned} \iiint \rho(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \frac{r_0^2}{r^3} \left\{ Y_{02}(\vartheta_0, \varphi_0) Y_{02}(\vartheta, \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} Y_{12}^e(\vartheta_0, \varphi_0) Y_{12}^e(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{3} Y_{12}^o(\vartheta_0, \varphi_0) Y_{12}^o(\vartheta, \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} Y_{22}^e(\vartheta_0, \varphi_0) Y_{22}^e(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{12} Y_{22}^o(\vartheta_0, \varphi_0) Y_{22}^o(\vartheta, \varphi) \right\}, \end{aligned}$$

что и является совокупностью членов второго порядка в ряде по сферическим гармоникам.

Чтобы показать весьма тесную связь между обоими рядами для всех порядков, мы воспользуемся формулой (10.3.35), из которой получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}} \left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{2^m}{2\pi} \frac{\partial^n}{\partial \bar{w}^m \partial z^{n-m}} \int_0^{2\pi} \frac{du}{X} = \\ &= \frac{(-1)^{n-m}}{2\pi} n! \int_0^{2\pi} \frac{e^{imu} du}{X^{n+1}} = (-1)^n (n-m)! e^{im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta) r^{-n-1} = \\ &= (-1)^n (n-m)! r^{-n-1} [Y_{mn}^e(\vartheta, \varphi) + iY_{mn}^o(\vartheta, \varphi)], \end{aligned} \quad (10.3.45)$$

где  $X = z + i(x \cos u + y \sin u) = z + \frac{1}{2} i(\omega e^{-iu} + \bar{\omega} e^{iu})$ . Эта формула совместно с формулой для смешанных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+l} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^l \frac{\partial^{n-m-2l}}{\partial z^{n-m-2l}} \left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^l \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}} \left(\frac{1}{r}\right)$$

дает возможность после довольно громоздких алгебраических преобразований показать, что ряд (10.3.43) в точности равен ряду (10.3.42). Таким

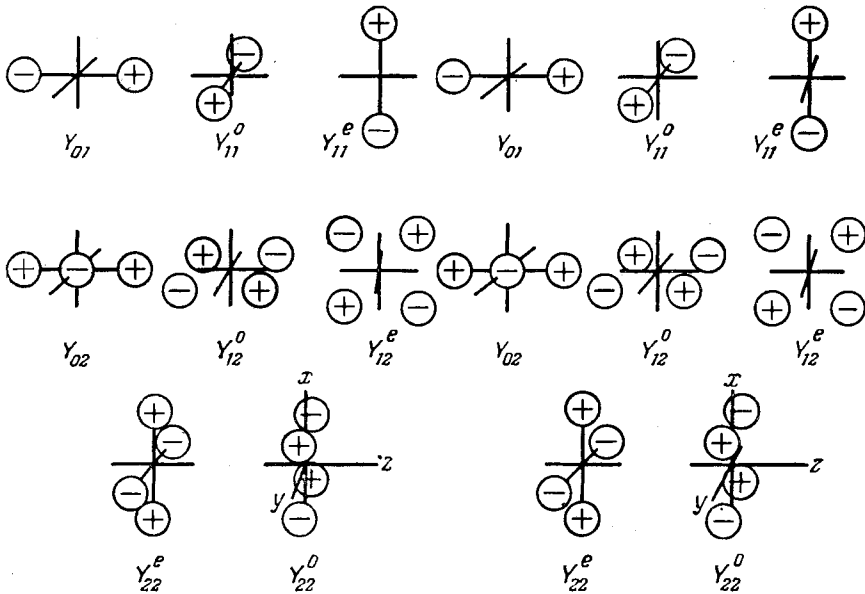


Рис. 10.25. Расположение диполей и квадруполь, создающих поля, соответствующие указанным сферическим гармоникам.

образом, оправдывается утверждение, высказанное на стр. 261, и, следовательно, мы можем связать потенциалы мультиполей и сферические гармоники. Рис. 10.25 показывает распределение диполей и квадруполь, соответствующее сферическим гармоникам первых двух порядков.

Теперь мы можем вернуться к вопросу о том, в какой мере можно судить о распределении плотности заряда  $\rho(x_0, y_0, z_0)$  внутри сферы  $r = a$ , по измерениям порожденного этим распределением потенциала вне сферы  $r = a$ . Коэффициенты при сферических гармониках  $n$ -го порядка в ряде (10.3.42) являются интегралами, взятыми по объему, ограниченному сферой, от той же  $n$ -й сферической гармоники с переменными  $\vartheta_0, \varphi_0$ , умноженной на  $r_0^n$  и на  $\rho$ .

Каждое видоизменение распределения  $\rho$ , при котором эти коэффициенты остаются неизменными, создает тот же потенциал вне сферы

$r = a$ . В частности, мы можем прибавить или вычесть из  $\rho$  распределение заряда вида  $\chi_n(r_0) Y_{mn}(\vartheta_0, \varphi_0)$  с любым постоянным множителем, если только выполнено условие

$$\int_0^a \chi_n(r_0) r_0^{n+2} dr_0 = 0,$$

так как легко видеть, что любое такое распределение заряда дает нулевой потенциал вне сферы  $r = a$ .

При этом удобно пользоваться следующим разложением для  $\rho$ :

$$\rho(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) = \sum_{m,n} [\rho_{mn}^e(r_0) Y_{mn}^e(\vartheta_0, \varphi_0) + \rho_{mn}^o(r_0) Y_{mn}^o(\vartheta_0, \varphi_0)],$$

где

$$\rho_{mn}^e(r_0) = \frac{\varepsilon_m (2n+1)}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^\pi \sin \vartheta_0 \rho(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) Y_{mn}^e(\vartheta_0, \varphi_0) d\vartheta_0$$

и  $\rho^o$  выражено аналогичным образом. Ввиду полноты системы сферических гармоник этот ряд полностью соответствует самой функции  $\rho$ , т. е. сходится к ней в среднем в соответствии с определением § 6.3. Отметим, что  $\rho_{00}$  представляет полный заряд внутри сферы  $r = a$  и что всем остальным  $\rho Y$  соответствует полный заряд, равный нулю.

Но, получив радиальные распределения  $\rho_{mn}$ , мы можем теперь изменить  $\rho$ , не меняя потенциала  $\psi$ , путем произвольного изменения любого  $\rho_{mn}$ . Для этого надо, чтобы интеграл от измененного  $\rho_{mn}$ , умноженного на  $r_0^{n+2}$ , не отличался от такого же интеграла от первоначального  $\rho_{mn}$ . В частности, мы можем заменить каждое  $\rho_{mn}$  (за исключением случая  $m = n = 0$ ) следующим выражением:

$$q_{mn}^e(r_0) = \varepsilon^{-n-3} \rho_{mn}^e(r_0/\varepsilon), \quad q_{mn}^o(r_0) = \varepsilon^{-n-3} \rho_{mn}^o(r_0/\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

поскольку тогда

$$\int_0^{a\varepsilon} q_{mn}^e(r_0) r_0^{n+2} dr_0 = \varepsilon^{-n-3} \int_0^{a\varepsilon} \rho_{mn}^e(r_0/\varepsilon) r_0^{n+2} dr_0 = \int_0^a \rho_{mn}^e(x) x^{n+2} dx = \frac{2n+1}{4\pi} A_{mn};$$

аналогичное равенство имеет место для  $q^o$ . Таким образом, мы можем концентрировать каждое частичное распределение  $\rho_{mn}$  во все меньшей и меньшей сфере радиуса  $a\varepsilon$  ( $\varepsilon$  стремится к 0), увеличивая в то же время величину заряда при помощи соответствующего множителя  $1/\varepsilon^{n+3}$  и несколько не меняя потенциала вне сферы  $r = a$ . В пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  эквивалентное распределение заряда сводится к последовательности мультиполей, причем мультиполю порядка  $n$  соответствует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \sum_{m=0}^n (q_{mn}^e Y_{mn}^e + q_{mn}^o Y_{mn}^o) \right].$$

Компонентами этих мультиполей действительно ограничиваются все характеристики распределения  $\rho$ , которые можно определить, измеряя потенциал  $\psi$  вне сферы  $r = a$ .

**Сферическая оболочка с отверстием.** Построив функции Грина, мы можем теперь найти потенциал вокруг металлической сферической оболочки, в которой имеется круглое отверстие. При этом будет использован тот же метод, которым была получена формула (10.1.22) в случае цилиндра

со щелью. Предположим, что поверхность  $r = a$ ,  $\vartheta_1 < \vartheta < \pi$  сделана из металла, а область  $0 < \vartheta < \vartheta_1$  представляет собой отверстие в этой поверхности. Мы хотим найти потенциал внутри и вне этой поверхности, считая, что разность потенциала металлической оболочки и потенциала на бесконечности равна  $V$ . Положим потенциал на бесконечности равным  $-V$ , тогда потенциал оболочки будет равен нулю.

Если бы не существовало отверстия ( $\vartheta_1 = 0$ ), то потенциал вне оболочки равнялся бы  $\psi_0^0 = -V + Va/r$ , а внутри оболочки равнялся бы  $\psi_1^0 = 0$ . При этом разность между нормальными производными при  $r = a$  равна  $V/a$ . Интегральное представление потенциала при наличии отверстия в первом приближении выражается формулой (см. стр. 747 тома I)

$$\psi(r, \vartheta) \approx \frac{Va}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{\vartheta_1}^{\pi} G(r, \vartheta, \varphi | a, \vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 - V \simeq \begin{cases} -\frac{1}{2} V \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \vartheta), & r < a, \\ -V + \frac{Va}{r} - \frac{1}{2} V \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \vartheta), & r > a, \end{cases}$$

где  $G$  есть ряд для  $1/R$ , заданный формулой (10.3.37), а

$$A_n = \int_0^{\vartheta_1} P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2n+1} [P_{n-1}(\cos \vartheta_1) - P_{n+1}(\cos \vartheta_1)]$$

(для  $n=0$   $A_0 = 1 - \cos \vartheta_1$ ).

Это выражение, очевидно, равно взятому с обратным знаком потенциалу, создаваемому той частью сферы, после удаления которой образовалось отверстие. Оно не равно в точности нулю на металлической оболочке, но остается непрерывным вместе с первыми производными при переходе через отверстие. Лучшим приближением является то, для которого

$$\psi(a, \vartheta) \simeq \begin{cases} -\frac{1}{2} V \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta), & 0 < \vartheta < \vartheta_1, \\ 0, & \vartheta_1 < \vartheta < \pi. \end{cases}$$

Этот потенциал легко вычислить. Он равен

$$\psi(r, \vartheta) \simeq \begin{cases} -\frac{1}{4} V \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} A_{0m} A_{nm} \right] P_n(\cos \vartheta) \left(\frac{r}{a}\right)^n, & r < a, \\ -V + \frac{Va}{r} - \frac{1}{4} V \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} A_{0m} A_{nm} \right] P_n(\cos \vartheta) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}. & r > a, \end{cases}$$

где

$$A_{nm} = (2n+1) \int_{\cos \vartheta_1}^1 P_n(x) P_m(x) dx.$$

Ясно, что производные этого потенциала уже не остаются непрерывными при переходе через отверстие, но в остальном он хорошо удовлетворяет

граничным условиям. Потенциал в центре сферы при этом равен

$$\psi(0) \approx -\frac{1}{4} V \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} [P_{n-1}(\cos \vartheta_1) - P_{n+1}(\cos \vartheta_1)]^2.$$

Эта величина весьма мала, если  $\vartheta_1$  мало, и равна  $-V$ , если  $\vartheta_1 = \pi$  (т. е. если вообще не существует металлической оболочки).

Мы могли бы использовать также метод, данный на стр. 195, 196, для вычисления потенциала в случае, когда его значения в отверстии известны.

**Вытянутые сфероидальные координаты.** Сферические координаты образованы вращением полярных координат вокруг оси; вытянутые сфероидальные координаты образуются при вращении эллиптических координат, описанных на стр. 185, вокруг большой оси эллипса. Предположим, что фокусы сфероида расположены в точках  $x=y=0$ ,  $z = \pm \frac{1}{2} a$ , тогда расстояния от точки  $(x, y, z)$  до этих фокусов равны

$$r_1 = \sqrt{\left(z + \frac{1}{2} a\right)^2 + x^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{\left(z - \frac{1}{2} a\right)^2 + x^2 + y^2}.$$

Система вытянутых сфероидальных координат  $\xi, \eta, \varphi$  определяется следующим образом:

$$\xi = (r_1 + r_2)/a, \quad \eta = (r_1 - r_2)/a, \quad \varphi = \arctg(y/x),$$

$$z = \frac{1}{2} a \xi \eta, \quad x = \frac{1}{2} a \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi,$$

$$y = \frac{1}{2} a \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi,$$

$$h_\xi = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_\eta = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_\varphi = \frac{1}{2} a \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)},$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{4}{a^2 (\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\xi^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] + \frac{\xi^2 - 1 + 1 - \eta^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\}, \quad (10.3.46)$$

где  $\xi$  изменяется от 1 до  $\infty$ ,  $\eta$  изменяется от  $-1$  до  $+1$ , а  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ . Поверхность  $\xi = \text{const}$  является вытянутым сфероидом с фокусным расстоянием  $a$ , большой осью  $\frac{1}{2} \xi a$  и малой осью  $\frac{1}{2} a \sqrt{\xi^2 - 1}$ . Поверхность  $\eta = \text{const}$  является двуполостным гиперболоидом вращения с фокусами в точках  $z = \pm \frac{1}{2} a$ , образующая асимптотического конуса которого составляет с осью  $z$  угол  $\vartheta = \arccos \eta$ . Поверхность  $\varphi = \text{const}$  является плоскостью, проходящей через ось  $z$  и образующей угол  $\varphi$  с плоскостью  $x, z$ .

Положив  $\psi = \Phi(\varphi) X(\xi) H(\eta)$ , мы после разделения переменных в уравнении Лапласа получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi,$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{dH}{d\eta} \right] + n(n+1)H - \frac{m^2}{1 - \eta^2} H = 0,$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right] + n(n+1)X - \frac{m^2}{1 - \xi^2} X = 0.$$

Допустимыми решениями первого уравнения для граничных условий, периодических по  $\varphi$ , будут  $\cos(m\varphi)$ ,  $\sin(m\varphi)$ , где  $m$  есть нуль или целое число.

Решениями второго и третьего уравнений служат сферические гармоники  $P_n^m$ , а их вторыми решениями являются функции  $Q_n^m$  (см. стр. 308). Во втором уравнении переменная  $\eta$  изменяется от значения  $-1$  (на отрицательной части оси  $z$ ) до значения  $+1$  (на положительной части оси  $z$ ). Для того чтобы  $H$  была конечной в этом промежутке изменения  $\eta$ , постоянная разделения  $n$  должна быть нулем или целым положительным числом. При этом  $H$  пропорциональна присоединенной функции Лежандра первого рода  $P_n^m(\eta)$ . Переменная  $\xi$  изменяется от  $+1$  (вдоль линии, соединяющей фокусы) до бесконечности. Для большинства значений  $m$  и  $n$  не существует решений, остающихся конечными во всем этом промежутке изменения  $\xi$ , поэтому приходится представлять решение такими комбинациями  $P_n^m(\xi)$  и  $Q_n^m(\xi)$ , которые остаются конечными внутри области изменения  $\xi$ , определенной условиями задачи.

Например, если на вытянутой сфероидальной поверхности  $\xi = \xi_0$  задан потенциал  $\psi_0(\eta, \varphi)$ , то вне этой поверхности распределение потенциала имеет вид

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)] P_n^m(\eta) \frac{Q_n^m(\xi)}{Q_n^m(\xi_0)}, \quad (10.3.47)$$

где

$$\left. \begin{matrix} A_{mn} \\ B_{mn} \end{matrix} \right\} = \frac{\varepsilon_m}{4\pi} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi \int_{-1}^1 \psi_0(\eta, \varphi) P_n^m(\eta) d\eta.$$

Если  $\psi_0$  равен постоянной на этой поверхности, то предыдущая формула принимает вид

$$\psi = \frac{\psi_0}{Q_0(\xi_0)} Q_0(\xi) = \psi_0 \frac{\ln [(\xi+1)/(\xi-1)]}{\ln [(\xi_0+1)/(\xi_0-1)]}.$$

На больших расстояниях от сфероида  $\xi = \xi_0$  координата  $\xi$  стремится к  $2r/a$ , где  $r$  — расстояние от центра сфероида. Поэтому выражение потенциала на большом расстоянии от вытянутого сфероида  $\xi = \xi_0$ , имеющего постоянный потенциал  $\psi_0$ , имеет вид

$$\psi \simeq \frac{\psi_0}{\ln [(\xi_0+1)/(\xi_0-1)]} \frac{a}{r}, \quad r \gg a,$$

т. е. потенциал вдали от сфероида обратно пропорционален расстоянию от его центра. При помощи этого выражения можно вычислить заряд на сфероиде, а следовательно, и его емкость.

Пусть заземленный проводящий сфероид  $\xi = \xi_0$  находится в однородном поле, вектор напряженности которого на большом расстоянии от сфероида имеет величину  $E$ , лежит в плоскости  $x, z$  и образует угол  $\theta$  с направлением оси  $z$ . Тогда в выражение потенциала должны входить слабые, соответствующие однородному полю,

$$\begin{aligned} -Ex \sin \theta - Ez \cos \theta &= -\frac{1}{2} aE [\xi \eta \cos \theta + \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi \sin \theta] = \\ &= -\frac{1}{2} aE [P_1^0(\xi) P_1^0(\eta) \cos \theta + iP_1^1(\xi) P_1^1(\eta) \cos \varphi \sin \theta], \end{aligned}$$

а также исчезающее на бесконечности решение, за счет которого суммарный потенциал равен 0 при  $\xi = \xi_0$ . Окончательное выражение потенциала

имеет вид

$$\psi = \frac{1}{2} aE \left\{ \cos \theta P_1^0(\eta) \left[ \frac{P_1^0(\xi_0)}{Q_1^0(\xi_0)} Q_1^0(\xi) - P_1^0(\xi) \right] + \right. \\ \left. + i \sin \theta \cos \varphi P_1^1(\eta) \left[ \frac{P_1^1(\xi_0)}{Q_1^1(\xi_0)} Q_1^1(\xi) - P_1^1(\xi) \right] \right\}. \quad (10.3.48)$$

Мы должны были ввести множитель  $i$ , так как нами выбрано такое определение сферической гармоник

$$P_n^m(z) = (1 - z^2)^{m/2} T_{n-m}^m(z),$$

что она остается вещественной для  $z < 1$  (эти гармоники обычно называют *сферическими гармониками Феррера*). Для переменной  $\xi$ , которая всегда больше единицы, нам, быть может, следовало бы дать новое определение этой функции в виде

$$P_n^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} T_{n-m}^m(z) = e^{im\pi/2} P_n^m(z)$$

(эти функции обычно называют *сферическими гармониками Гобсона*), с тем чтобы избавиться от мнимых величин в формулах. Однако, вместо того чтобы вводить новые символы, мы можем просто запомнить, что

$$i^m P_n^m(\xi) = (\xi^2 - 1)^{m/2} T_{n-m}^m(\xi)$$

есть вещественная функция от  $\xi$  для  $\xi > 1$ .

Вторые решения

$$Q_n^m(\xi) = (-1)^m (\xi^2 - 1)^{m/2} V_{n-m}^m(\xi)$$

(см. определение  $V$  на стр. 565, 566 тома I) тоже можно определить так, чтобы они были вещественными при  $\xi > 1$ , так как они используются только для координаты  $\xi$ .

Плотность распределения заряда, индуцированного на поверхности сфероида этим полем, равна

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} = -\frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 - \eta^2}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0}$$

Так как в знаменателе имеется множитель  $\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}$ , поверхностная плотность  $\sigma$  стремится стать у обеих вершин сфероида ( $\eta = \pm 1$ ) наибольшей.

Представляет интерес задача о полусфероиде ( $\xi = \xi_0$  при  $0 \leq \eta \leq 1$ ), потенциал которого по сравнению с заземленной плоскостью ( $\eta = 0$  для  $\xi_0 \leq \xi$ ) равняется  $V_0$ . В пределе, когда значение  $\xi_0$  стремится к единице, этой задаче соответствует случай вертикальной антенны или трубы зонда, погруженной в грунт для того, чтобы служить источником (или стоком) тока или фильтрующихся вод. Чтобы удовлетворить граничным условиям при  $\eta = 0$ , мы должны использовать зональные гармоники нечетного порядка, имеющие узлы при  $\eta = 0$ . Выпишем ряд

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_{2n+1}(\eta) \frac{Q_{2n+1}(\xi)}{Q_{2n+1}(\xi_0)},$$

где функции  $P_{2n+1}$  образуют полное семейство на отрезке  $0 \leq \eta \leq 1$ . На основании таблицы, приведенной в конце этой главы, можно заключить, что для выполнения условия  $\psi = V_0$  при  $\xi = \xi_0$  и положительных



значениях  $\eta$  коэффициенты ряда должны определяться по формуле

$$A_n = (4n + 3) \int_0^1 V_0 P_{2n+1}(\eta) d\eta = V_0 [P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0)] = \\ = \frac{(-1)^n (2n)! (4n+3)}{2^{2n+1} n! (n+1)!} V_0.$$

Следовательно,

$$\psi = V_0 \left\{ \frac{3}{2} P_1(\eta) \frac{Q_1(\xi)}{Q_1(\xi_0)} - \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 4} P_3(\eta) \frac{Q_3(\xi)}{Q_3(\xi_0)} + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} P_5(\eta) \frac{Q_5(\xi)}{Q_5(\xi_0)} - \dots \right\}. \quad (10.3.49)$$

На больших расстояниях основным является первый член, и

$$Q_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi \ln \left( \frac{\xi+1}{\xi-1} \right) - 1 \simeq \frac{1}{3\xi^2}, \quad \xi \gg 1,$$

так что

$$\psi \simeq \frac{1}{8} V_0 \frac{a^2}{r^2 Q_1(\xi_0)} \cos \vartheta, \quad r \gg a,$$

где  $r$  — радиус-вектор, идущий от начала координат к точке, где измеряется  $\psi$ , а  $\vartheta$  — угол между  $r$  и осью полусфероида.

Если полусфероид весьма длинный и узкий, то его высота над заземленной плоскостью приблизительно равна  $\frac{1}{2}a$ , т. е. половине фокусного расстояния. Если его радиус у земли ( $\eta = 0$ ) равен  $\rho$ , то  $\rho = \frac{1}{2}a \sqrt{\xi_0^2 - 1}$ , или  $\xi_0^2 = 1 + (2\rho/a)^2$ . Так как

$$Q_n(\xi) \simeq \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\xi+1}{\xi-1} \right) \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\xi} Q_n(\xi) \simeq \frac{-1}{\xi^2 - 1},$$

когда  $\xi$  приближается к единице, то на поверхности полусфероида потенциал и плотность заряда соответственно равны

$$\psi = V_0 \left[ \frac{3}{2} P_1(\eta) - \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 4} P_3(\eta) + \dots \right] = V_0, \quad \eta > 0, \\ \sigma = -\frac{2/a}{4\pi} \sqrt{\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 - \eta^2}} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_0} \simeq \\ \simeq \frac{1}{2\pi a} \frac{2\rho}{a} \frac{V_0}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{(a/2\rho)^2}{\ln(a/\rho)} \left[ \frac{3}{2} P_1(\eta) - \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 4} P_3(\eta) + \dots \right] \simeq \\ \simeq \frac{1}{4\pi\rho} \frac{V_0}{\ln(a/\rho)} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad \text{когда} \quad \xi_0^2 = 1 + \left( \frac{2\rho}{a} \right)^2 \rightarrow 1, \quad \eta > 0.$$

Полный заряд на поверхности полусфероида в этом предельном случае равен

$$Q = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sigma \frac{a^2}{4} \sqrt{(\xi_0^2 - 1)(1 - \eta^2)} d\eta \simeq \frac{V_0 a}{4 \ln(a/\rho)}, \\ \xi_0^2 = 1 + \left( \frac{2\rho}{a} \right)^2 \rightarrow 1.$$

Следовательно, емкость этого длинного полусфероида по отношению к заземленной плоскости равна  $a/4 \ln(a/\rho)$ , что равно емкости цилиндра радиуса  $\rho$  высотой  $\frac{1}{2}a$  по отношению к заземленному концентрическому цилиндру радиуса  $a$  (см. стр. 174).

**Интегральные представления решений в сфероидальных координатах.** Выражение для  $X$  в вытянутых сфероидальных координатах имеет вид

$$X = z + i(x \cos u + y \sin u) = \frac{1}{2} a [\eta \xi - \sqrt{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)} \cos(u - \varphi)].$$

Возвращаясь к формуле (10.3.39), видим, что

$$P_n [\eta \xi - \sqrt{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)} \cos(\theta)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \cos(\theta - \omega)]^n}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cos(\omega)]^{n+1}} d\omega,$$

а также что

$$\begin{aligned} P_n^m(\eta) &= \frac{n!}{2\pi i^m (n-m)!} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mu) du}{[\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \cos(u)]^{n+1}} = \\ &= \frac{i^m (n+m)!}{2\pi n!} \int_0^{2\pi} \cos(mu) [\eta^2 + \sqrt{\eta^2 - 1} \cos u]^n du. \end{aligned}$$

Отсюда легко показать, что интегральное представление для решений первого рода имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P_n \left( \frac{2X}{a} \right) \frac{\cos(mu)}{\sin(mu)} du &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(mu) du \int_0^{2\pi} \frac{[\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \cos(u - \varphi - \omega)]^n}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cos(\omega)]^{n+1}} d\omega = \\ &= 2\pi i^{-m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\varphi) [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{m/2} T_{n-m}^m(\xi) T_{n-m}^m(\eta) = \\ &= 2\pi \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\cos(m\varphi)}{\sin(m\varphi)} P_n^m(\xi) P_n^m(\eta). \end{aligned} \quad (10.3.50)$$

Методами, аналогичными использованным при выводе формул (10.3.34) и (10.3.39), мы можем также получить

$$Q_n^m(\xi) = \frac{i n!}{(n-m)!} \int_0^{i\infty} \frac{\cos(mu) du}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cos(u)]^{n+1}}$$

и

$$Q_n [\xi \eta - \sqrt{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)} \cos \theta] = i \int_0^{i\infty} \frac{[\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \cos(\theta - \omega)]^n}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cos(\omega)]^{n+1}} d\omega.$$

Поэтому интегральное представление для решений второго рода имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} Q_n \left( \frac{2X}{a} \right) \frac{\cos(mu)}{\sin(mu)} du &= 2\pi \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\varphi) P_n^m(\eta) Q_n^m(\xi) = \\ &= 2\pi (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\varphi) [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{m/2} T_{n-m}^m(\eta) V_{n-m}^m(\xi). \end{aligned} \quad (10.3.51)$$

Эти интегральные представления дают возможность вычислить распределение потенциала вне вытянутого сфероида с фокусным расстоянием  $a$ , большой полуосью  $\frac{1}{2} a \xi_0$  и малой полуосью  $\frac{1}{2} a \sqrt{\xi_0^2 - 1} = \rho$ , имею-

щего потенциал  $V_0$  и помещенного внутрь имеющей тот же центр полой заземленной сферы с внутренним диаметром  $2c$ , бóльшим чем  $a\xi_0$ . В качестве «нулевого» приближения для потенциала вблизи сфероида имеем

$$V_0 \frac{Q_0(\xi)}{Q_0(\xi_0)} = \frac{V_0}{\ln \left[ \frac{\sqrt{1+(2\rho/a)^2+1}}{\sqrt{1+(2\rho/a)^2-1}} \right]} \ln \left[ \frac{\xi+1}{\xi-1} \right] = \frac{V_0}{2\pi Q_0(\xi_0)} \int_0^{2\pi} Q_0\left(\frac{2X}{a}\right) du.$$

Но для  $|X|$ , бóльших чем  $a$ , имеем

$$Q_0\left(\frac{2X}{a}\right) = \frac{a}{2X} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2X}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{2X}\right)^4 + \dots \right].$$

Следовательно, используя формулу (10.3.35), мы можем записать нулевое приближение для  $r$ , бóльших чем  $\frac{1}{2}a$ , в виде

$$V_0 \frac{Q_0(\xi)}{Q_0(\xi_0)} = \frac{V_0}{Q_0(\xi_0)} \left[ \frac{a}{2r} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2r}\right)^3 P_2(\cos \vartheta) + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{2r}\right)^5 P_4(\cos \vartheta) + \dots \right],$$

где  $r$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$  являются сферическими координатами с центром, лежащим в центре сфероида (и сферы).

На внутренней поверхности сферы ( $r=c$ ) потенциал должен равняться нулю. С точностью до членов второго порядка относительно величины  $a/2c$ , которую мы предполагаем меньшей чем единица, мы можем добиться этого, вычитая решение уравнения Лапласа

$$\frac{V_0}{Q_0(\xi_0)} \left[ \frac{a}{2c} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2c}\right)^3 \left(\frac{r}{c}\right)^2 P_2(\cos \vartheta) \right],$$

которое взаимно уничтожается с первыми двумя членами нулевого приближения при  $r=c$ . Мы могли бы также заменить постоянную  $V_0/Q_0(\xi_0)$  неопределенным множителем  $A$ , который затем можно было бы подобрать так, чтобы поверхность сфероида имела потенциал  $V_0$ .

Следовательно, если  $a/2c < \frac{1}{2}$ , то довольно хорошим приближением к точному решению вблизи сферической поверхности является выражение

$$\psi \simeq A \left\{ \left[ \frac{a}{2r} - \frac{a}{2c} \right] + \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{a}{2r}\right)^3 - \left(\frac{a}{2c}\right)^3 \left(\frac{r}{c}\right)^2 \right] P_2(\cos \vartheta) \right\},$$

равное нулю при  $r=c$  и постоянное с точностью до членов второго порядка относительно  $a/2c$  при  $\xi = \xi_0$ .

Вблизи сфероидальной поверхности нам нужно вновь вернуться к сфероидальным решениям. Используя формулу (10.3.34), мы получим

$$r^2 P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X^2 du, \text{ а в силу (6.3.40)}$$

$$\left(\frac{2X}{a}\right)^2 = \frac{2}{3} P_2\left(\frac{2X}{a}\right) + \frac{1}{3} P_0\left(\frac{2X}{a}\right),$$

и мы можем выразить слагаемое  $r^2 P_2$  через сфероидальные решения при помощи формулы (10.3.50):

$$\begin{aligned} r^2 P_2(\cos \vartheta) &= \frac{a^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{2}{3} P_2\left(\frac{2X}{a}\right) + \frac{1}{3} P_0\left(\frac{2X}{a}\right) \right] du = \\ &= \left[ \frac{2}{3} P_2(\eta) P_2(\xi) + \frac{1}{3} \right] \left(\frac{a}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Поэтому потенциал вблизи сфероида приближенно равен

$$\psi \simeq A \left\{ Q_0(\xi) - \frac{a}{2c} - \left( \frac{a}{2c} \right)^5 \left[ \frac{2}{3} P_2(\eta) P_2(\xi) + \frac{1}{3} \right] \right\}.$$

Это выражение при  $\xi = \xi_0$  отличается от постоянной на величину пятого порядка относительно малой величины  $a/2c$ . Для того чтобы  $\psi$  совпадало с  $V_0$  при  $\xi = \xi_0$  с точностью до членов четвертого порядка, мы выберем

$$A = V_0 / [Q_0(\xi_0) - a/2c].$$

Следовательно, если диаметр сфероида в его среднем сечении (равный  $2\rho$ ) значительно меньше его длины, приближенно равной  $a$ , и если  $a$  меньше радиуса полой заземленной сферы, то потенциал между сфероидом и сферой с точностью до членов четвертого порядка относительно  $a/2c$  равен

$$\psi \simeq V_0 \frac{\ln [(\xi-1)/(\xi+1)] - a/c}{\ln [(\xi_0-1)/(\xi_0+1)] - a/c}, \quad \xi_0^2 = 1 + (2\rho/a)^2, \quad (10.3.52)$$

$$\psi \simeq \frac{2V_0}{\ln [(\xi_0+1)/(\xi_0-1)] - a/c} \left\{ \frac{a}{2r} - \frac{a}{2c} + \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{a}{2r} \right)^3 - \left( \frac{a}{2c} \right)^3 \left( \frac{r}{c} \right)^2 \right] P_2(\cos \vartheta) \right\}.$$

Полный заряд на внутренней поверхности полой сферы [плотность равна  $-(1/4\pi)(\partial\psi/\partial r)$  при  $r=c$ ] оказывается равным

$$Q \simeq \frac{aV_0}{\ln [(\xi_0+1)/(\xi_0-1)] - a/c} \simeq \frac{aV_0}{2 \ln(a/\rho) + (\rho/a)^2 - a/c}, \quad \rho \ll a.$$

Емкость этой системы, очевидно, равна  $Q/V_0$ .

**Функция Грина для вытянутого сфероида.** При помощи выражения (6.3.44) можно получить разложение, удобное для представления функции Грина. Используя формулу (10.3.8), получим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{X - X_0} = \frac{1}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^{2\pi} P_n\left(\frac{2X_0}{a}\right) Q_n\left(\frac{2X}{a}\right) du, \quad r > r_0.$$

Каждый член этого ряда в свою очередь является рядом Фурье по  $\cos(\varphi - \varphi_0)$ . При вычислении коэффициентов этого разложения мы можем воспользоваться равенствами (10.3.50) и (10.3.51). Окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n \varepsilon_m i^m \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times P_n^m(\eta_0) P_n^m(\eta) \cdot \begin{cases} P_n^m(\xi_0) Q_n^m(\xi), & \xi > \xi_0, \\ P_n^m(\xi) Q_n^m(\xi_0), & \xi < \xi_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.3.53)$$

Потенциал, создаваемый зарядом  $Q$ , находящимся в точке  $(\xi_0, \eta_0, \varphi_0)$  вне заземленного проводящего сфероида  $\xi = \xi_1$  равен

$$\begin{aligned} \phi = \frac{2Q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n \varepsilon_m i^m \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times P_n^m(\eta_0) P_n^m(\eta) \cdot \left[ \frac{P_n^m(\xi_0) Q_n^m(\xi)}{P_n^m(\xi) Q_n^m(\xi_0)} - \frac{Q_n^m(\xi_0)}{Q_n^m(\xi_1)} P_n^m(\xi_1) Q_n^m(\xi) \right], \end{aligned} \quad (10.3.54)$$

где верхний член в скобках используется, когда  $\xi > \xi_0$ , а нижний когда  $\xi < \xi_0$ .

Плотность заряда, индуцированного на сфероиде, равна

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{-1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\xi_1^2 - 1}{\xi_1^2 - \eta^2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \psi \right]_{\xi = \xi_1} = \\ &= -\frac{Q}{2\pi a} \sqrt{\frac{\xi_1^2 - 1}{\xi_1^2 - \eta^2}} \sum_{n,m} (2n+1) i^{m \varepsilon_m} \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ &\quad \times P_n^m(\eta_0) P_n^m(\eta) [Q_n^m(\xi_0)/Q_n^m(\xi_1)] \Delta(P_n^m, Q_n^m) = \\ &= \frac{Q}{\pi a^2 V(\xi_1^2 - 1)(\xi_1^2 - \eta^2)} \sum_{n,m} (2n+1) (-1)^{m \varepsilon_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\ &\quad \times P_n^m(\eta_0) \frac{Q_n^m(\xi_0)}{Q_n^m(\xi_1)} P_n^m(\eta) \cos [m(\varphi - \varphi_0)], \end{aligned}$$

где  $\Delta$  — определитель Вронского функций  $P$  и  $Q$ , который легко привести к простому виду. Интеграл от  $ch_\eta h_\varphi d\eta d\varphi$  по поверхности  $\xi = \xi_1$ , очевидно, в точности равен величине  $Q$ .

**Сплюснутые сфероиды.** Вращая софокусные эллиптические координаты вокруг их малой оси, мы получим сплюснутые сфероидальные координаты:

$$\begin{aligned} z &= a\xi\eta, \quad x = a\sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \\ y &= a\sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \\ h_\xi &= a\sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 + 1}}, \quad h_\eta = a\sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \eta^2}}, \\ h_\varphi &= a\sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)}, \end{aligned} \tag{10.3.55}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{a^2(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\xi^2 + 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] + \frac{\xi^2 + 1 - 1 + \eta^2}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\},$$

где  $\xi$  изменяется от нуля до бесконечности, а  $\eta$  от  $-1$  до  $+1$ . Поверхностью  $\xi = 0$  является диск радиуса  $a$  с центром в начале координат, расположенный в плоскости  $x, y$ . Поверхность  $\eta = 1$  есть положительная полуось  $z$ , поверхность  $\eta = -1$  — отрицательная полуось  $z$ , а поверхность  $\eta = 0$  — плоскость  $x, y$ , за исключением ее части, расположенной внутри круга радиуса  $a$  с центром в начале (эта часть есть поверхность  $\xi = 0$ ). Поверхности  $\xi = \text{const}$  являются сплюснутыми сфероидами, у которых длина оси вращения равна  $2\xi a$ , а радиус в экваториальной плоскости равен  $a\sqrt{\xi^2 + 1}$ . Поверхность  $\eta = \text{const}$  является однополостным гиперболоидом вращения, осью которого является ось  $z$ , а образующая асимптотического конуса наклонена под углом  $\arccos \eta$  к этой оси.

После разделения переменных уравнения относительно  $\varphi$  и  $\eta$  получаются такими же, что и для вытянутых сфероидальных координат, причем сомножители, на которые распадается решение, равны

$$\sin(m\varphi), \quad \cos(m\varphi) \text{ и } P_n^m(\eta),$$

где  $m$  и  $n$  — целые положительные числа (или нуль). Уравнению для сомножителя, зависящего от  $\xi$ , удовлетворяют функции

$$P_n^m(i\xi) \text{ и } Q_n^m(i\xi).$$

Если диск радиуса  $a$  ( $\xi = 0$ ) имеет потенциал  $V_0$  по сравнению с бесконечностью, то потенциал соответствующего поля равен

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{V_0}{Q_0(0)} Q_0(i\xi) = \frac{V_0}{\ln(-1)} \ln \left( \frac{i\xi + 1}{i\xi - 1} \right) = \\ &= \frac{iV_0}{\pi} \frac{2}{i} \arctg \left( \frac{1}{\xi} \right) = \frac{2V_0}{\pi} \arctg \left( \frac{1}{\xi} \right). \end{aligned} \tag{10.3.56}$$

Если  $\xi$  очень велико, то она становится приближенно равной  $r/a$ , где  $r$  — расстояние от центра диска. Поэтому асимптотическим выражением этого потенциала является  $2V_0 a/\pi r$ , откуда явствует, что полный заряд диска радиуса  $a$  равен  $2V_0 a/\pi$ , а емкость его в точности равна  $2a/\pi$ .

Потенциал скоростей установившегося потока, направленного перпендикулярно к оси  $y$  и под углом  $\theta$  к оси  $z$ , равен

$$\begin{aligned}\psi &= -v_0(z \cos \theta + x \sin \theta) = \\ &= -av_0[\xi \eta \cos \theta + \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi \sin \theta] = \\ &= ia v_0[\cos \theta P_1^0(\eta) P_1^0(i\xi) + i \sin \theta \cos \varphi P_1^1(\eta) P_1^1(i\xi)].\end{aligned}$$

Если теперь поместить в этот поток сплюснутый сфероид  $\xi = \xi_0$  и потребовать, чтобы поток на его границе был направлен по касательной к поверхности, то к первоначальному потенциалу следует прибавить члены вида

$$AP_1^0(\eta) Q_1^0(i\xi) + BP_1^1(\eta) Q_1^1(i\xi);$$

$A$  и  $B$  подбираются так, чтобы производная от всей суммы по  $\xi$  равнялась нулю при  $\xi = \xi_0$ . Для случая плоского диска,  $\xi_0 = 0$ , мы имеем  $A = 2av_0/\pi$  и  $B = 0$ , откуда

$$\begin{aligned}\psi &= -av_0 \left\{ \eta \cos \theta \left[ \xi + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \xi \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\xi} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \cos \varphi \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \right\}. \quad (10.3.57)\end{aligned}$$

На поверхности этого диска в точке  $(\xi = 0, \eta, \varphi)$  компоненты скорости равны соответственно

$$v_\eta = \frac{2v_0}{\pi|\eta|} \sqrt{1 - \eta^2} \cos \theta - v_0 \frac{|\eta|}{\eta} \sin \theta \cos \varphi, \quad v_\varphi = -v_0 \sin \theta \sin \varphi,$$

а избыточное давление, появляющееся за счет движения жидкости, равно

$$-\frac{1}{2} \rho v^2 = -\frac{1}{2} \rho v_0^2 \left[ \frac{4}{\pi^2} \cos^2 \theta \frac{1 - \eta^2}{\eta^2} + \sin^2 \theta - \frac{4}{\pi \eta} \sqrt{1 - \eta^2} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \right].$$

Оно, очевидно, равно отрицательной бесконечности у острого края диска ( $\eta = 0$ ). Не удивительно также, что если  $\theta = 90^\circ$ , т. е. если поток параллелен плоскости тонкого диска, то избыточное давление в точности равно  $-\frac{1}{2} \rho v_0^2$ , т. е. той же величине, что и в случае отсутствия диска. Мы замечаем также, что скорость потока равна нулю на поверхности диска ( $\xi = 0$ ) в точке

$$\varphi = 0, \quad \eta = \sqrt{1 + (\pi/4)^2 \operatorname{tg}^2 \theta} - (\pi/4) \operatorname{tg} \theta,$$

соответствующей

$$z = y = 0, \quad x = a \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \theta \left[ 1 + \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \theta \right]^{-1/2}$$

на стороне диска, обращенной к положительной полуоси  $z$ , и в точке

$$\varphi = \pi, \quad \eta = -[\sqrt{1 + (\pi/4)^2 \operatorname{tg}^2 \theta} - (\pi/4) \operatorname{tg} \theta],$$

соответствующей

$$z = y = 0, \quad x = -a \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \theta \left[ 1 + \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \theta \right]^{-1/2}$$

на отрицательной стороне диска.

Мы пока не станем рассматривать трехмерный завихренный поток и потому не будем вычислять циркуляцию вокруг диска, компенсирующую бесконечную скорость у заднего края в смысле стр. 190. Следовательно, мы не можем обсуждать также вопрос о результирующей силе, действующей на диск.

**Поток через отверстие.** Другая проблема касается установившегося бивихревого потока через круглое отверстие радиуса  $a$ . Границей здесь служит поверхность  $\eta = 0$ . Решение должно быть непрерывным при  $\xi = 0$ . Благодаря наличию осевой симметрии мы пользуемся только решениями, соответствующими  $n = 0$ . Множитель, зависящий от  $\eta$ , в точности равен  $P_0(\eta) = 1$ , в то время как множитель, зависящий от  $\xi$ , является комбинацией функций  $P_0(i\xi)$  и  $Q_0(i\xi)$ . Тогда решение равно

$$\psi = \begin{cases} -\frac{1}{4a} \dot{Q} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \left( \frac{1}{\xi} \right) \right], & 1 \geq \eta > 0, \\ \frac{1}{4a} \dot{Q} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \left( \frac{1}{\xi} \right) \right], & 0 > \eta \geq -1. \end{cases} \quad (10.3.58)$$

Эта функция равна нулю при  $\xi = 0$ , а производные ее непрерывны при переходе через эту поверхность. На больших расстояниях от отверстия  $\xi \rightarrow r/a$  и потенциал становится равным

$$\psi \simeq \begin{cases} -\dot{Q}/4a + \dot{Q}/2\pi r, & \eta > 0, \\ +\dot{Q}/4a - \dot{Q}/2\pi r, & \eta < 0. \end{cases}$$

Скорость всюду перпендикулярна поверхности  $\xi = \text{const}$  и равна

$$v_\xi = \begin{cases} \frac{\dot{Q}/2\pi a^2}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)(\xi^2 + 1)}}, & \eta > 0, \\ \frac{-\dot{Q}/2\pi a^2}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)(\xi^2 + 1)}}, & \eta < 0. \end{cases}$$

Количество жидкости в кубических сантиметрах, притекающей за секунду к отверстию (оно равно количеству жидкости, вытекающей из отверстия), равно

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 v_\xi h_\eta h_\varphi d\eta = \iint v_\xi dS = \dot{Q}.$$

Этим и объясняется, очевидно, наш выбор постоянной  $\dot{Q}$  в формуле (10.3.58).

Если  $\xi_0$  выбрано достаточно большим, то кинетическая энергия жидкости вне поверхности  $\xi = \xi_0$  ничтожно мала, и чтобы вычислить полную кинетическую энергию жидкости, достаточно взять интеграл по объему, ограниченному этой поверхностью, от функции  $\frac{1}{2} \rho v^2$ :  $T = \frac{1}{2} \rho \iiint |\text{grad } \psi|^2 dv$ . Его можно вычислить непосредственно, но можно использовать и теорему Грина и заменить его поверхностным интегралом по поверхности  $S$ , которая является поверхностью  $\xi = \xi_0$  для  $\eta > 0$ , и по поверхности  $S'$ , которая является поверхностью  $\xi = \xi_0$  для  $\eta < 0$ . Таким образом, имеем

$$T = \frac{1}{2} \rho \left[ \iint_S \psi \text{grad } \psi dS - \iint_{S'} \psi \text{grad } \psi dS \right].$$

Так как поверхности  $S$  и  $S'$  достаточно удалены от отверстия, то потенциал  $\psi$  практически постоянен на этих поверхностях, и кинетическая энергия в силу (10.3.58) оказывается равной

$$T = \frac{1}{2} \rho \left[ \psi_S \iint_S v_\xi dS - \psi_{S'} \iint_{S'} v_\xi dS' \right] = \frac{1}{2} \rho (\psi_{S'} - \psi_S) \dot{Q} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{2a} \dot{Q}^2. \quad (10.3.59)$$

Потенциальная энергия потока, протекающего через отверстие, в случае несжимаемой жидкости может быть выражена при помощи разности давлений  $\Delta P$  на поверхностях  $S$  и  $S'$ . Если весь объем  $dQ$  см<sup>3</sup> жидкости прогоняется через отверстие с преодолением этой разности давлений, то изменение потенциальной энергии равно

$$dV = -\Delta P dQ.$$

Используя уравнения Лагранжа (3.2.4), мы получим для ускорения потока выражение

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} \right) = \frac{\rho}{2a} \ddot{Q} = -\frac{\partial V}{\partial Q} = \Delta P.$$

Отношение падения давления в отверстии к ускорению потока, проходящего через отверстие  $\rho/2a$ , может быть названо *коэффициентом инерции* (inertance) отверстия. Эта величина связана с эффективной массой той «пробки» жидкости внутри отверстия и вблизи от него, которая получает ускорение за счет падения давления.

Так как  $\dot{Q}$  есть полный поток, то  $Q/\pi a^2$  есть выраженное в сантиметрах среднее перемещение жидкости через отверстие, а  $\pi a^2 \Delta P$  есть выраженная в динах средняя сила, действующая в отверстии. Поэтому уравнение

$$\frac{1}{2} \pi^2 a^3 \rho \frac{\ddot{Q}}{\pi a^2} = \pi a^2 \Delta P$$

аналогично уравнению Ньютона, а величина

$$M = \frac{1}{2} \pi^2 a^3 \rho \quad (10.3.60)$$

является эффективной массой той «пробки» жидкости, которая получает ускорение, когда мы направляем поток через круглое отверстие в плоскости. Это выражение окажется полезным, когда мы в следующей главе начнем изучать прохождение волн через отверстие.

**Интегральные представления и функции Грина.** Нетрудно видоизменить формулы (10.3.50) и (10.3.51) так, чтобы получить соответствующие выражения для сплюснутых сфероидальных координат. Новое выражение для  $X$  имеет вид

$$X = a [\xi \eta - \sqrt{(\xi^2 + 1)(\eta^2 - 1)} \cos(u - \varphi)],$$

а интегральные представления таковы:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P_n \left( \frac{X}{a} \right) \cos(mu) du &= \\ &= \frac{i^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(mu) du \int_0^{2\pi} \frac{[\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \cos(u - \varphi - \omega)]^n}{[i\xi + \sqrt{-\xi^2 - 1} \cos(\omega)]^{n+1}} d\omega = \\ &= 2\pi i^{n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\varphi) [(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)]^{m/2} T_{n-m}^m(i\xi) T_{n-m}^m(\eta) = \\ &= 2\pi i^{n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\varphi) P_n^m(\eta) P_n^m(i\xi) \end{aligned} \quad (10.3.61)$$

и для второго решения

$$\int_0^{2\pi} Q_n \left( \frac{X}{a} \right) \cos(mu) du = 2\pi i^{n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\varphi) P_n^m(\eta) Q_n^m(i\xi). \quad (10.3.62)$$



Подобным же образом сравнивая наш результат с выражением (10.3.54), мы получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n \varepsilon_m i^{m+1} \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times P_n^m(\eta_0) P_n^m(\eta) \cdot \begin{cases} P_n^m(i\xi_0) Q_n^m(i\xi), & \xi > \xi_0, \\ P_n^m(i\xi) Q_n^m(i\xi_0), & \xi_0 > \xi, \end{cases} \end{aligned} \quad (10.3.63)$$

при помощи которого можно решать уравнение Пуассона в этих координатах.

**Параболические координаты.** Система координат, образованная вращением двумерных параболических координат вокруг их оси, также называется параболической:

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2), \quad x = \lambda\mu \cos \varphi, \quad y = \lambda\mu \sin \varphi, \quad r = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2), \\ h_\lambda = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = h_\mu, \quad h_\varphi = \lambda\mu, \quad (10.3.64) \\ \nabla^2 \psi = \frac{1}{\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda\mu} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right) \right], \end{aligned}$$

где  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , а  $\lambda$  и  $\mu$  от 0 до  $\infty$ . Разделяя переменные,  $\psi = L(\lambda)M(\mu)\Phi(\varphi)$ , получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\lambda} \left( \lambda \frac{dL}{d\lambda} \right) - \frac{m^2}{\lambda^2} L = -k^2 L, \\ \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\mu} \left( \mu \frac{dM}{d\mu} \right) - \frac{m^2}{\mu^2} M = k^2 M. \end{aligned}$$

Если  $\varphi$  может изменяться от 0 до  $2\pi$ , то  $m$  должно быть нулем или целым числом, причем  $\Phi$  является либо синусом, либо косинусом  $m\varphi$ . Уравнениям для  $L$  и  $M$  удовлетворяют функции Бесселя  $m$ -го порядка (см. стр. 579 тома I). При этом уравнению для  $L$  удовлетворяют функции Бесселя вещественного аргумента, а уравнению для  $M$  — функции Бесселя мнимого аргумента. Эти функции

$$\begin{aligned} I_m(z) = (-i)^m J_m(iz) \simeq e^z / \sqrt{2\pi z}, \\ K_m(z) = (\pi/2)(i)^{m+1} H_m(iz) \simeq (\sqrt{\pi/2z}) e^{-z} \end{aligned}$$

приведены в таблице в конце этой главы и там же указаны некоторые их свойства. Соотношения между этими функциями и обычными функциями Бесселя аналогичны соотношениям между гиперболическими функциями  $\text{sh}(z)$ ,  $e^{-z}$  и тригонометрическими функциями  $\sin(z)$ ,  $e^{iz}$ .

Типичным решением уравнения Лапласа в параболических координатах является выражение

$$\frac{\cos}{\sin}(m\varphi) J_m(k\lambda) [a_m(k) I_m(k\mu) + b_m(k) K_m(k\mu)],$$

где мы взяли гиперболические функции Бесселя от  $k\mu$ , так как мы предполагаем, что граничные условия заданы на поверхности  $\mu = \text{const}$ .

Например, если на поверхности  $\mu = \mu_0$  задано осесимметричное распределение потенциала  $\psi = \psi_0(\lambda)$  и если предполагается, что потенциал стремится к нулю при  $\mu \rightarrow \infty$ , то, используя интеграл Фурье — Бесселя, получим

$$\psi(\lambda, \mu) = \int_0^\infty J_0(k\lambda) [K_0(k\mu)/K_0(k\mu_0)] \left[ \int_0^\infty \psi_0(u) J_0(ku) u du \right] k dk. \quad (10.3.65)$$

Если граничной поверхностью служит  $\lambda = \lambda_0$ , то мы просто должны поменять ролями  $\mu$  и  $\lambda$  в этом выражении.

Если речь идет о внутренней задаче, то вместо функций  $K$  мы используем функции  $I$ . Функции  $I$  равны нулю при  $z = 0$ , за исключением функции  $I_0$ , которая равна единице, а производная ее равна нулю. Например, если областью решения задачи является часть пространства, ограниченная двумя параболоидами  $\mu = \mu_0$  и  $\lambda = \lambda_0$  с граничными потенциалами соответственно  $\psi_0(\lambda)$  на  $\mu_0$  и  $\psi_1(\mu)$  на  $\lambda_0$ , то, используя ряд Фурье — Бесселя (стр. 710 тома I), получим

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{\lambda_0^2 J_1^2(\pi\beta_{0n})} \int_0^{\lambda_0} \psi_0(u) J_0\left(\frac{\pi\beta_{0n}u}{\lambda_0}\right) u du \right] J_0\left(\frac{\pi\beta_{0n}\lambda}{\lambda_0}\right) \frac{I_0(\pi\beta_{0n}\mu/\lambda_0)}{I_0(\pi\beta_{0n}\mu_0/\lambda_0)} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{\mu_0^2 J_1^2(\pi\beta_{0n})} \int_0^{\mu_0} \psi_1(w) J_0\left(\frac{\pi\beta_{0n}w}{\mu_0}\right) w dw \right] J_0\left(\frac{\pi\beta_{0n}\mu}{\mu_0}\right) \frac{I_0(\pi\beta_{0n}\lambda/\mu_0)}{I_0(\pi\beta_{0n}\lambda_0/\mu_0)}. \end{aligned} \quad (10.3.66)$$

Получить для этих решений интегральное представление прямым путем нелегко. Так как координаты  $\lambda, \mu$  имеют размерность квадратных корней из длины, а решениями служат функции Бесселя, то можно ожидать, что подинтегральное выражение в формуле (10.3.2) равно функции  $J_n(k\sqrt{2X})$ , умноженной на  $\cos(mu)$  или  $\sin(mu)$ . Опуская длинный ряд второстепенных алгебраических преобразований, мы можем указать на следующие основные этапы вывода: используя соотношение (5.3.65), имеем

$$J_0(k\sqrt{2X}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{ik \cos v \sqrt{[\lambda \cos(u-\varphi) + i\mu]^2 + \lambda^2 \sin^2(u-\varphi)}\} dv.$$

Но

$$\sqrt{[\lambda \cos(u-\varphi) + i\mu]^2 + \lambda^2 \sin^2(u-\varphi)} \cos v = \lambda \cos(u-t-\varphi) + i\mu \cos t,$$

где

$$t = v + \arctg \left[ \frac{\lambda \sin(u-\varphi)}{\lambda \cos(u-\varphi) + i\mu} \right].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} J_0(k\sqrt{2X}) \frac{\cos(mu)}{\sin(mu)} du &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{2\pi} e^{ik \lambda \cos \omega - k\mu \cos t} \frac{\cos}{\sin} [m(\omega + t + \varphi)] dt = \\ &= 2\pi i^{-m} \frac{\cos}{\sin}(m\varphi) J_m(k\lambda) I_m(k\mu). \end{aligned} \quad (10.3.67)$$

Интегральное представление, содержащее функции  $K_m(k\mu)$  вместо функций  $I_m(k\mu)$ , имеет под интегралом функцию  $H_0(k\sqrt{2X})$  вместо функции  $J_0(k\sqrt{2X})$ .

Чтобы найти выражение для функции Грина, мы используем интеграл Фурье — Бесселя и приведенное на стр. 304 интегральное представление функции

$$K_0(-iz) = \frac{i\pi}{2} H_0(z).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{X-X_0} &= \int_0^{\infty} J_0(k\sqrt{2X}) k dk \int_0^{\infty} \frac{J_0(ky)}{y^2-2X_0} y dy = \\ &= 2\pi^2 i \int_0^{\infty} J_0(k\sqrt{2X}) H_0(k\sqrt{2X_0}) k dk \end{aligned}$$

и окончательно

$$\frac{1}{R} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \int_0^{\infty} J_m(k\lambda) J_m(k\lambda_0) I_m(k\mu) K_m(k\mu_0) k dk, \quad (10.3.68)$$

$\mu_0 > \mu.$

Более детальный разбор этой системы координат не является целесообразным.

**Бисферические координаты.** Больше применений находит система координат, получающаяся при вращении биполярной системы вокруг прямой, соединяющей полюсы:

$$\begin{aligned} z &= \frac{a \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, & x &= \frac{a \sin \eta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \\ y &= \frac{a \sin \eta \sin \varphi}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, & h_\mu = h_\eta &= \frac{a}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \\ h_\varphi &= \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, & r &= a \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \mu + \cos \eta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}}, \end{aligned} \quad (10.3.69)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_\mu^3} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu} \left( h_\mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h_\mu \sin \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{h_\mu}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right],$$

где  $\mu$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ ,  $\eta$  изменяется от 0 до  $\pi$ , а  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ . Поверхность  $\mu = \mu_0$  есть сфера с центром в точке  $(z = a \operatorname{cth} \mu_0, x = y = 0)$  радиуса  $a/|\operatorname{sh} \mu_0|$ .

Полюсы получаются при  $\mu = \pm \infty$  ( $z = \pm a, x = y = 0$ ), а центральная плоскость  $z = 0$  есть поверхность  $\mu = 0$ . Поверхность  $\eta = \eta_0$  является поверхностью четвертого порядка, образованной вращением вокруг оси  $Oz$  дуги окружности с центром в точке  $(z = 0, x = a \operatorname{ctg} \eta_0)$  радиуса  $a \operatorname{cosec} \eta_0$ , лежащей в первом и четвертом квадрантах плоскости  $\eta, z$ . Все эти поверхности, на которых  $\eta$  постоянна, проходят через оба полюса. Те из них, на которых  $\eta < \frac{\pi}{2}$ , имеют в каждом полюсе «впадину», те же, для которых  $\eta > \frac{\pi}{2}$ , имеют в полюсах точки заострения. Поверхность  $\eta = 0$  состоит из частей оси  $z$ , где  $|z| > a$ , и бесконечно удаленной сферы, поверхность  $\eta = \frac{1}{2}\pi$  есть сфера радиуса  $a$  с центром в начале координат, а поверхность  $\eta = \pi$  есть та часть оси  $z$ , где  $|z| < a$ .

Как было указано на стр. 621 тома I, переменные в уравнении Лапласа разделяются только после замены  $\psi = \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} F$ . Тогда уравнение  $\nabla^2 \psi = 0$  преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sin \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{4} F = 0,$$

допускающему разделение на три уравнения  $[F = M(\mu) H(\eta) \Phi(\varphi)]$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} &= -m^2 \Phi, & \frac{d^2 M}{d\mu^2} &= \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 M, \\ \frac{1}{\sin \eta} \frac{d}{d\eta} \left( \sin \eta \frac{dH}{d\eta} \right) &- \frac{m^2 H}{\sin^2 \eta} &= -n(n+1) H. \end{aligned}$$

Мы уже знакомы со всеми этими уравнениями. Для того чтобы  $\Phi$  была непрерывной, когда  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ ,  $m$  должно равняться нулю или целому числу. Для того чтобы  $H$  была конечной как при  $\eta=0$ , так и при  $\eta=\pi$ ,  $n$  должно быть целым числом, не меньшим  $m$ . Поэтому типичными являются решения

$$e^{-(n+\frac{1}{2})\mu} P_n^m(\cos \eta) \cos(m\varphi) \quad \text{sh} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \mu \right] P_n^m(\cos \eta) \sin(m\varphi) \text{ и т. д.,}$$

а типичными решениями исходного уравнения Лапласа служат функции

$$\sqrt{\text{ch} \mu - \cos \eta} e^{\pm(n+\frac{1}{2})\mu} P_n^m(\cos \eta) \frac{\cos}{\sin}(m\varphi) \text{ и т. д.}$$

Множитель  $\sqrt{\text{ch} \mu - \cos \eta}$  порождает некоторые осложнения при необходимости удовлетворить граничным условиям. Например, для того чтобы вычислить потенциал вне сферы радиуса  $\rho$  с центром, находящимся на расстоянии  $b$  от начала [сфера  $\mu = \mu_0 = \text{Ar ch}(b/\rho)$ , если расстояние между полюсами  $2a = 2\sqrt{b^2 - \rho^2}$ ], имеющей постоянный потенциал  $V_0$ , мы должны найти коэффициенты ряда

$$\sqrt{\text{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n e^{(n+\frac{1}{2})\mu} + B_n e^{-(n+\frac{1}{2})\mu}] P_n(\cos \eta),$$

который должен сводиться к постоянной  $V_0$  при  $\mu = \mu_0$ . Другими словами, мы должны записать разложение для  $(\text{ch} \mu - \cos \eta)^{-1/2}$  по зональным гармоникам от  $\cos \eta$ . Это можно осуществить, подставив  $h = e^{-\mu}$  в разложение  $(1 + h^2 - 2h \cos \eta)^{-1/2}$ , фигурирующее в формуле (5.3.27). Окончательно получим

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ch} \mu - \cos \eta}} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})|\mu|} P_n(\cos \eta). \quad (10.3.70)$$

При помощи этого результата нетрудно показать, что распределение потенциала между имеющей потенциал  $V_0$  сферой  $\mu = \mu_0$  [радиус  $\rho = a/\text{sh} \mu_0$ , центр в точке  $(x=y=0, z=b=a \text{cth} \mu_0)$ ] и заземленной плоскостью  $\mu = 0$  ( $z=0$ ) представляется рядом

$$\psi = \sqrt{2} V_0 \sqrt{\text{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\mu_0}}{\text{sh} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \mu_0 \right]} \text{sh} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \mu \right] P_n(\cos \eta). \quad (10.3.71)$$

Поверхностная плотность заряда на плоскости  $\mu = 0$  равна

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{1 - \cos \eta}{4\pi a} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} = \\ &= -\frac{V_0}{\sqrt{8}\pi a} (1 - \cos \eta)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\mu_0}}{\text{sh} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \mu_0 \right]} P_n(\cos \eta), \end{aligned}$$

а полный заряд, индуцированный на этой плоскости, равен

$$\begin{aligned} \iint \frac{\sigma a^2 \sin \eta d\eta d\varphi}{(1 - \cos \eta)^2} &= \\ &= -\frac{aV_0}{\sqrt{8}\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sum_n \frac{n + \frac{1}{2}}{V \sqrt{1 - \cos \eta}} \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\mu_0}}{\text{sh} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \mu_0 \right]} P_n(\cos \eta) \sin \eta d\eta. \end{aligned}$$

Вновь используя разложение (10.3.70), получим двойную сумму произведений зональных гармоник и, наконец, используя свойства ортогональности этих функций, найдем

$$Q = -aV_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{e^{(2n+1)\mu_0} - 1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2V_0 V \sqrt{b^2 - \rho^2}}{[b/\rho + V(b/\rho)^2 - 1]^{2n+1} - 1}. \quad (10.3.72)$$

При помощи этого равенства можно вычислить емкость сферы радиуса  $\rho$  по отношению к плоскости, удаленной от ее центра на расстояние  $b$ .

Дифференцируя выражение (10.3.70) по  $\mu$  или по  $\eta$ , получим выражения для  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$|z| = \frac{a \operatorname{sh} |\mu|}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} = \sqrt{2a} V \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-(n+\frac{1}{2})|\mu|} P_n(\cos \eta), \quad (10.3.73)$$

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} = \begin{cases} \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \cos \varphi \\ \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \sin \varphi \end{cases} = \sqrt{8a} V \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})|\mu|} P_n^1(\cos \eta) \begin{cases} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{cases}.$$

Конечно, эти ряды не сходятся при  $\mu=0$ , что явствует из наличия в них  $|\mu|$ . Исходя из этих формул, можно показать, что потенциал вокруг двух заземленных проводящих сфер  $\mu = \pm \mu_0$ , помещенных в однородное поле с напряженностью  $E$ , направленной вдоль оси  $z$ , равен

$$\psi = -Ez + \sqrt{2}Ea V \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) e^{-(n+\frac{1}{2})\mu_0}}{\operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2}\right) \mu_0} \operatorname{sh} \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \mu \right] P_n(\cos \eta).$$

Эта формула сохраняет силу как для положительных, так и для отрицательных значений  $\mu$ , для которых  $|\mu| \leq \mu_0$ .

Функцию Грина в этой системе координат можно получить общим методом, указанным на стр. 825 тома I. Нормированные собственные функции от  $\eta$  и  $\varphi$  имеют вид

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_m}{4\pi}} \frac{2n+1}{(n+m)!} \frac{(n-m)!}{(n-m)!} P_n^m(\cos \eta) \frac{\cos(m\varphi)}{\sin \eta} = \Psi_{nm}(\varphi, \eta).$$

Уравнение, подлежащее решению, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sin \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{4} F = \\ = -4\pi \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}}{a \sin \eta} \delta(\mu - \mu_0) \delta(\eta - \eta_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

Подставляя в это уравнение ряд

$$F = \sum_{n,m} A_{nm} e^{-(n+\frac{1}{2})|\mu-\mu_0|} \Psi_{nm}(\varphi, \eta), \quad G = \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} F$$

[производная по  $\mu$  члена этого ряда с индексами  $n, m$  терпит при  $\mu = \mu_0$  разрыв, причем скачок равен значению этого же члена при  $\mu = \mu_0$ , умноженному на  $2n+1$ ], умножая обе части на  $\Psi_{nm} \sin \eta$  и интегрируя по  $\varphi$

и  $\eta$ , получим

$$A_{nm} = \frac{1}{a} \sqrt{\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \eta_0} \frac{4\pi}{2n+1} Y_{nm}(\varphi_0, \eta_0).$$

Следовательно, функция Грина равна

$$G = \frac{1}{a} \sqrt{(\operatorname{ch} \mu - \cos \eta)(\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \eta_0)} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos [m(\varphi - \varphi_0)] P_n^m(\cos \eta_0) P_n^m(\cos \eta) e^{-(n+\frac{1}{2})|\mu - \mu_0|} \quad (10.3.74)$$

Это выражение используется при решении многих задач.

**Тороидальные координаты.** Вращая биполярную систему координат вокруг перпендикуляра, проходящего через середину отрезка, соединяющего полюсы, получим тороидальные координаты:

$$z = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \quad x = \frac{a \operatorname{sh} \mu \cos \varphi}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \mu \sin \varphi}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \\ h_\mu = h_\eta = \frac{a}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \quad h_\varphi = \frac{a \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \quad (10.3.75)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_\mu^3} \left[ \frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( h_\mu \operatorname{sh} \mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h_\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{h_\mu}{\operatorname{sh}^2 \mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right],$$

где  $\mu$  изменяется от 0 до  $\infty$ ,  $\eta$  от 0 до  $2\pi$  и  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ . Поверхность  $\mu = \mu_0$  есть тор, осевая окружность которого лежит в плоскости  $x, y$ , имеет центр в начале координат и радиус  $a \operatorname{cth} \mu_0$ , а круговое поперечное сечение имеет радиус  $a/\operatorname{sh} \mu_0$ . Поверхность  $\eta = \eta_0$  (при  $\eta_0 < \pi$ ) является той частью сферы радиуса  $a \operatorname{cosec} \eta_0$  с центром в точке  $(x = y = 0, z = a \operatorname{ctg} \eta_0)$ , которая расположена выше плоскости  $x, y$ . Остальная часть той же сферы, расположенная ниже плоскости  $x, y$ , образует поверхность  $\eta = 2\pi - \eta_0$ . Разделяющая их линия есть окружность радиуса  $a$ , лежащая в плоскости  $x, y$ , с центром в начале координат. Этой окружности соответствует  $\mu = \infty$ . Ось  $z$  соответствует значению  $\mu = 0$ . Та часть плоскости  $x, y$ , которая лежит внутри окружности  $\mu = \infty$ , соответствует значению  $\eta = \pi$ , а остальная часть плоскости  $x, y$ , лежащая вне этой окружности, — значению  $\eta = 0$  или  $\eta = 2\pi$ .

Мы вновь положим

$$\psi = \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} F(\mu, \eta, \varphi)$$

и найдем, что уравнение Лапласа приводится к виду

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \operatorname{sh} \mu \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4} F = 0.$$

Множитель, зависящий от  $\varphi$ , есть  $\cos(m\varphi)$ , или  $\sin(m\varphi)$ , и так как  $\varphi$  является периодической координатой, то из требования непрерывности следует, что  $m$  равно нулю или целому числу. Координата  $\eta$  также является периодической. Следовательно, множитель, зависящий от  $\eta$ , также равняется  $\cos(n\eta)$  либо  $\sin(n\eta)$ , где  $n$  — нуль или натуральное число. Далее, множитель, зависящий от  $\mu$ , удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \frac{d}{d\mu} \left( \operatorname{sh} \mu \frac{dM}{d\mu} \right) - \frac{m^2 M}{\operatorname{sh}^2 \mu} - \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) M = 0,$$

а решением его являются сферические гармоники полуцелого порядка, т. е. либо

$$\begin{aligned}
 P_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) &= i^m \operatorname{sh}^m \mu F_{n-m-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) = \\
 &= \frac{i^m \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^m m! \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \operatorname{sh}^m \mu F\left(m-n+\frac{1}{2}, m+n+\frac{3}{2} \mid m+1 \mid -\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \mu\right) = \\
 &= \frac{i^m \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^m m! \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \operatorname{ch}^{n-\frac{1}{2}} \mu \operatorname{th}^m \mu F\left(\frac{m-n+\frac{1}{2}}{2}, \frac{m-n+\frac{3}{2}}{2} \mid m+1 \mid \operatorname{th}^2 \mu\right) = \\
 &= \frac{i^m \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^m m! \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \frac{\operatorname{th}^m(\mu)}{\operatorname{ch}^{n+\frac{1}{2}}(\mu)} F\left(\frac{m+n+\frac{1}{2}}{2}, \frac{m+n+\frac{3}{2}}{2} \mid m+1 \mid \operatorname{th}^2 \mu\right)
 \end{aligned} \tag{10.3.76}$$

[где использованы формулы (5.2.52), (5.3.17) и соотношения, указанные на стр. 623 тома I], либо

$$\begin{aligned}
 Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) &= (-1)^m \operatorname{sh}^m \mu V_{n-m-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) = \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right) \operatorname{th}^m \mu}{\Gamma(n+1) 2^{\frac{n+\frac{1}{2}}{2}} \operatorname{ch}^{\frac{n+\frac{1}{2}}{2}} \mu} F\left(\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}, \frac{n+m+\frac{3}{2}}{2} \mid n+1 \mid \operatorname{sech}^2 \mu\right).
 \end{aligned} \tag{10.3.77}$$

Так как оба числа  $m+1$  и  $n+1$  являются целыми, то, согласно сказанному на стр. 561 тома I и на стр. 309, 310,  $P$  имеет логарифмическую особенность при  $\mu \rightarrow \infty$ , а  $Q$  имеет такую же особенность при  $\mu \rightarrow 0$ . Например, для изучения поведения функции  $Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu)$  при  $\mu \rightarrow 0$  следует вычислить эту функцию для малых значений  $m$ , а затем устремить  $m$  к нулю. Для значений  $m$ , малых по сравнению с единицей, на основании (5.2.49) и (10.3.77) имеем

$$\begin{aligned}
 Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) &= \frac{V \bar{\pi} \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^{\frac{n+\frac{1}{2}}{2}} m} \times \\
 &\times \frac{\Gamma(1+m) \Gamma(1-m) \operatorname{ch}^{-\frac{1}{2}} \mu}{\Gamma\left(\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m+\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+m+\frac{3}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m+\frac{3}{2}}{2}\right)} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ e^{-m \ln [\operatorname{th} \mu]} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}m + s\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}m + s\right)}{s! \Gamma(s+1-m)} [\operatorname{th}^2 \mu]^s - \right. \\
& \left. - e^{m \ln [\operatorname{th} \mu]} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}m + s\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}m + s\right)}{s! \Gamma(s+1+m)} [\operatorname{th}^2 \mu]^s \right\} \simeq \\
& \simeq - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^{\frac{1}{2}} \mu} \left\{ 2 \ln [\operatorname{th} \mu] F\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \mid 1 \mid \operatorname{th}^2 \mu\right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2^n}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}\right)}{[s!]^2} \times \right. \\
& \left. \times \operatorname{th}^{2s}(\mu) \left[ \psi\left(s + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right) + \psi\left(s + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}\right) - 2\psi(s+1) \right] \right\} \simeq \\
& \simeq - \ln \mu, \quad \mu \rightarrow 0, \tag{10.3.78}
\end{aligned}$$

где  $\psi$  — логарифмическая производная от  $\Gamma$ , определенная в (4.5.43). Аналогичные выражения применяются для исследования поведения функции  $P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu)$  при  $\mu \rightarrow 0$  (см. таблицу в конце этой главы).

Следовательно, решение уравнения Лапласа в тороидальных координатах запишется в виде ряда

$$\begin{aligned}
\psi &= \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi)] \times \\
& \quad \times [c_n \cos(n\eta) + d_n \sin(n\eta)] [A_{mn} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) + B_{mn} Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu)].
\end{aligned}$$

Как и в случае бисферических координат, нам нужно получить разложение  $[\operatorname{ch} \mu - \cos \eta]^{-1/2}$ . Его можно вывести из интегрального представления для сферических гармоник второго рода. Исходя из формулы (5.3.29), после длинного ряда интегрирований по частям можно показать, что

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu) &= e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\mu} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} \theta d\theta}{(1-2e^{-\mu} \cos \theta + e^{-2\mu})^{n+\frac{1}{2}}} = \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta) e^{-\frac{1}{2}\mu} d\theta}{\sqrt{1-2e^{-\mu} \cos \theta + e^{-2\mu}}} = \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta) d\theta}{\sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu) \cos(n\eta). \tag{10.3.79}$$

Поэтому для потенциала вне тора  $\mu = \mu_0$  (с осевой окружностью радиуса  $a \operatorname{cth} \mu_0$  и радиусом поперечного сечения  $a \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_0}$ ), имеющего постоянный потенциал  $V_0$ , получаем следующий ряд:

$$\psi = \frac{V_0}{\pi} \sqrt{2(\operatorname{ch} \mu - \cos \eta)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \mu_0)}{P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \mu_0)} \right] P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu) \cos(n\eta). \tag{10.3.80}$$



Много других интересных задач можно решить различными, уже знакомыми нам методами. Например, методом гл. 7 мы получим разложение функции Грина:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\pi} V \sqrt{(\operatorname{ch} \mu - \cos \eta)(\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \eta_0)} \sum_{m, n=0}^{\infty} \varepsilon_m \varepsilon_n (-i)^m \frac{\Gamma\left(n - m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + m + \frac{1}{2}\right)} \times \\ \times \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \cos [n(\eta - \eta_0)] \cdot \begin{cases} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu_0), & \mu_0 > \mu, \\ P_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu_0) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu), & \mu_0 < \mu. \end{cases} \quad (10.3.81)$$

При помощи этого ряда можно удовлетворить граничным условиям, а также получить потенциал, создаваемый зарядом, распределенным на торе.

**Эллипсоидальные координаты.** Наконец, мы переходим к наиболее общим координатам, позволяющим разделить переменные (наиболее общим для разделения переменных в волновом уравнении; для уравнения Лапласа общие циклидные координаты являются более общими, но значительно менее употребительными), — к эллипсоидальным координатам, для которых основные формулы приведены на стр. 484 и 619 тома I. Координата  $\xi_1$  изменяется от  $a$  до  $\infty$ . Промежуток изменения  $\xi_2$  — от  $b$  до  $a$  ( $b < a$ ), а для  $\xi_3$  — от  $-b$  до  $+b$ . Поверхностями  $\xi_1 = \text{const}$  являются эллипсоиды, приближающиеся к сферам для больших значений  $\xi_1$ ; при этом  $\xi_1$  стремится к  $r$ . Поверхности  $\xi_2 = \text{const}$  являются однополостными гиперboloидами, а поверхности  $\xi_3 = \text{const}$  — двуполостными гиперboloидами.

При разделении переменных в уравнении Лапласа отсутствует множитель, приводивший к осложнениям в случае бисферических или тороидальных координат:

$$\psi = F(\xi_1) G(\xi_2) H(\xi_3).$$

Уравнения для всех сомножителей оказываются подобными во всем, за исключением знаков подкоренных выражений:

$$\sqrt{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)} \frac{d}{d\xi_1} \left[ \sqrt{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)} \frac{dF}{d\xi_1} \right] = [m(m+1)\xi_1^2 - \chi] F, \\ \sqrt{(a^2 - \xi_2^2)(\xi_2^2 - b^2)} \frac{d}{d\xi_2} \left[ \sqrt{(a^2 - \xi_2^2)(\xi_2^2 - b^2)} \frac{dG}{d\xi_2} \right] = -[m(m+1)\xi_2^2 - \chi] G, \\ \sqrt{(a^2 - \xi_3^2)(b^2 - \xi_3^2)} \frac{d}{d\xi_3} \left[ \sqrt{(a^2 - \xi_3^2)(b^2 - \xi_3^2)} \frac{dH}{d\xi_3} \right] = [m(m+1)\xi_3^2 - \chi] H. \quad (10.3.82)$$

Эти изменения необходимы для того, чтобы сохранить положительный знак на соответствующем промежутке изменения каждой переменной. Параметры  $m$  и  $\chi$  являются константами разделения. Отметим, что они входят во все три уравнения, следовательно, переменные разделяются, а константы разделения не разделяются (см. стр. 491 и 703 тома I).

Все эти уравнения имеют один и тот же вид

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \left[ \frac{z}{z^2 - a^2} + \frac{z}{z^2 - b^2} \right] \frac{dF}{dz} + \frac{\kappa - m(m+1)z^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} F = 0, \quad (10.3.83)$$

$$[z^4 - (a^2 + b^2)z^2 + a^2 b^2] F'' + z[2z^2 - (a^2 + b^2)] F' + [\kappa - m(m+1)z^2] F = 0.$$

Решения, определенные в области  $z > a$ , соответствуют координате  $\xi_1$ , решения в области  $a > z > b$  — координате  $\xi_2$  и в области  $b > z > -b$  — координате  $\xi_3$ . Это уравнение называется *уравнением Ламе*. Оно имеет следующие регулярные особые точки:

$$z = \pm b \quad \text{с индексами } 0 \text{ и } \frac{1}{2},$$

$$z = \pm a \quad \text{с индексами } 0 \text{ и } \frac{1}{2},$$

$$z = \infty \quad \text{с индексами } m+1 \text{ и } -m.$$

Обращаясь к уравнениям, с которыми нам пришлось столкнуться в этом разделе, заметим, что все они могут быть получены из уравнения Ламе при помощи подходящего совмещения его особых точек.

Для решений, соответствующих граничным условиям, заданным при  $z=0$ , мы пользуемся разложением по степеням  $z$ . Положив  $F = \sum d_n z^n$ , найдем для коэффициентов  $d$  трехчленную рекуррентную формулу:

$$a^2 b^2 n(n-1)d_n = [(n-2)^2(a^2 + b^2) - \kappa]d_{n-2} + [m(m+1) - (n-3)(n-4)]d_{n-4} \quad (10.3.84)$$

(см. стр. 510 тома I), из которой следует, что ряды для  $F$  можно разделить на два рода: содержащие только четные и содержащие только нечетные степени  $z$ . Так как все три сомножителя в решении должны соответствовать одним и тем же значениям  $m$  и  $\kappa$ , то надо выяснить, можем ли мы найти решения, определенные сразу для всей области  $0 < z < \infty$  и применимые для всех трех сомножителей. Для большинства значений  $m$  и  $\kappa$  соответствующие ряды оказываются бесконечными, и, прежде чем ими пользоваться, мы должны проверить, для каких значений  $z$  они сходятся.

Для проверки сходимости найдем предел при  $n \rightarrow \infty$  выражения  $z^2 \gamma_n$ , где  $\gamma_n = \frac{d_n}{d_{n-2}}$ , и выясним, для каких значений  $z$ ,  $m$  и  $\kappa$  это выражение меньше единицы. Разделив обе части выражения (10.3.84) на  $n(n-1)a^2 b^2 d_{n-4}$  и отбросив члены порядка  $1/n^2$  (и меньшие), получим

$$\gamma_n \gamma_{n-2} - \left(1 - \frac{3}{n}\right) \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \gamma_{n-2} + \left(1 - \frac{6}{n}\right) \frac{1}{a^2 b^2} = 0.$$

Так как при  $n$ , стремящемся к бесконечности, по предположению  $\gamma_n \rightarrow \gamma_{n-2} \rightarrow \gamma$ , то для весьма больших значений  $n$  последнее уравнение превращается в квадратное уравнение относительно  $\gamma$ , откуда

$$\gamma \simeq \left(1 - \frac{3}{n}\right) \frac{1}{b^2} \quad \text{или} \quad \gamma \simeq \left(1 - \frac{3}{n}\right) \frac{1}{a^2}.$$

Поэтому  $z^2 \gamma$  меньше единицы для  $z$ , меньших  $b$  или  $a$ , и ряд, если он бесконечен, сходится только до точки  $z=b$  или точки  $z=a$ . Следовательно, из такого ряда, соответствующего произвольным значениям  $\kappa$  и  $m$ ,

можно получить сходящиеся выражения только для двух сомножителей, но не для всех трех одновременно. Если попытаться получить разложение в окрестности любой другой точки, то возникает то же препятствие: можно найти ряд, сходящийся в двух особых точках, но не в трех или более.

Тем не менее для целых значений  $m$  и для некоторых определенных значений  $\kappa$  тот или иной из этих рядов обрывается и дает полиномиальное решение, конечное в четырех особых точках из пяти. Например, из соотношения (10.3.84) явствует, что двумя возможными решениями уравнения (10.3.83) являются

$$\begin{aligned} E_0^0(z) &= 1 \text{ для } m=0, \quad \kappa = \kappa_0 = 0, \quad d_1 = 0, \\ E_1^0(z) &= z \text{ для } m=1, \quad \kappa = \kappa_1 = a^2 + b^2, \quad d_0 = 0. \end{aligned} \quad (10.3.85)$$

Эти решения сходятся всюду.

Поэтому частным решением уравнения Лапласа является постоянная  $E_0^0(\xi_1) E_0^0(\xi_2) E_0^0(\xi_3)$ . Она является одной из двух *эллипсоидальных гармоник первого рода* (вскоре будет сказано и об остальных). Подобным же образом другим решением уравнения Лапласа является функция

$$AE_1^0(\xi_1) E_1^0(\xi_2) E_1^0(\xi_3) = abAz$$

— одна из *эллипсоидальных гармоник второго рода*.

Чтобы получить следующие решения, выражающиеся через степени  $z$ , надо решить квадратное уравнение. Положив  $m=2$  и  $d_1=0$  в соотношении (10.3.84), мы видим, что

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{-\kappa}{2a^2b^2} d_0, \quad d_4 = \frac{4a^2 + 4b^2 - \kappa}{12a^2b^2} d_2 + \frac{1}{2a^2b^2} d_0, \\ d_6 &= \frac{16a^2 + 16b^2 - \kappa}{30a^2b^2} d_4. \end{aligned}$$

Поэтому если положить  $d_1$  равным нулю, то и все  $d_n$  с большими индексами окажутся нулями и решение будет полиномом второго порядка. Для этого мы должны иметь

$$\begin{aligned} [4a^2 + 4b^2 - \kappa] (\kappa/2a^2b^2) &= 6, \quad \text{или} \\ \kappa &= 2 [a^2 + b^2 \mp \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2}], \end{aligned}$$

а соответствующие решения равны

$$\begin{aligned} E_0^2 &= z^2 - \frac{1}{3} [a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2}], \\ E_2^1 &= z^2 - \frac{1}{3} [a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2}]. \end{aligned} \quad (10.3.86)$$

Можно было бы продолжить этот процесс для больших целых значений  $m$ , получая полиномы высших порядков. При этом для определения  $\kappa$  приходится последовательно решать уравнения все более высокого порядка.

Можно также получить решения, содержащие сомножитель  $\sqrt{z^2 - a^2}$ . Положив  $F = \sqrt{z^2 - a^2} B(z)$ , получим из уравнения (10.3.83)

$$\begin{aligned} [z^4 - (a^2 + b^2)z^2 + a^2b^2] B'' + z[4z^2 - (a^2 + 3b^2)] B' - \\ - [\kappa + b^2 + (m+3)(m-1)] B = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет полиномиальные решения, порождающие дальней-

шие виды сходящихся решений уравнения (10.3.83):

$$\begin{aligned} E_1^1(z) &= \sqrt{z^2 - a^2}, \quad m = 1, \quad \kappa = b^2, \\ E_2^2(z) &= z \sqrt{z^2 - a^2}, \quad m = 2, \quad \kappa = a^2 + 4b^2. \end{aligned} \quad (10.3.87)$$

Решение в общем виде

$$CE_1^1(\xi_1) E_1^1(\xi_2) E_1^1(\xi_3) = C \sqrt{a^2(a^2 - b^2)} x$$

является другой эллипсоидальной гармоникой второго рода, в то время как функция

$$DE_2^2(\xi_1) E_2^2(\xi_2) E_2^2(\xi_3) = Dab \sqrt{a^2(a^2 - b^2)} xz$$

есть одна из эллипсоидальных гармоник третьего рода. Заменяя  $a$  на  $b$  в формуле (10.3.87), мы получим решения

$$E_1^2 = \sqrt{z^2 - b^2} \quad \text{и} \quad E_2^3 = z \sqrt{z^2 - b^2}.$$

Наконец, существуют решения в виде полиномов от  $z$ , умноженных на  $\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}$ , первым из которых является

$$E_2^4(z) = \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}, \quad m = 2, \quad \kappa = a^2 + b^2. \quad (10.3.88)$$

Произведение  $E_2^4(\xi_1) E_2^4(\xi_2) E_2^4(\xi_3)$ , пропорциональное  $xy$ , является другой гармоникой третьего рода. Следующее решение  $z \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}$ , соответствующее  $xuz$ , является эллипсоидальной гармоникой четвертого рода.

Все эти решения обращаются в нуль в точках  $0$ ,  $a$  и  $b$  и имеют полюс на бесконечности, причем для больших  $z$  они ведут себя как  $z^m$ . Часто оказываются полезными и вторые решения, ведущие себя при больших  $z$  как  $z^{-m-1}$ . Их можно получить из уже известных решений  $E$  при помощи соотношения (5.2.6). Положим, по определению,

$$F_m^p(z) = (2m + 1) E_m^p(z) \int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)} [E_m^p(x)]^2}. \quad (10.3.89)$$

Функция  $F_m^p(z)$  является решением уравнения (10.3.83) при тех же значениях  $\kappa$  и  $m$ , что и  $E_m^p(z)$ . Эти решения являются эллиптическими интегралами разных родов (см. стр. 408 тома I и след.). Первое из них

$$F_0^0(z) = \int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{a} \Phi\left(\frac{a}{z}, \frac{b}{a}\right)^1. \quad (10.3.90)$$

Например, потенциал вне проводящего эллипсоида  $\xi_1 = c$ , потенциал которого равен  $V_0$ , имеет вид

$$\psi = AE_0^0(\xi_3) E_0^0(\xi_2) F_0^0(\xi_1) = V_0 \left[ \Phi\left(\frac{a}{\xi_1}, \frac{b}{a}\right) / \Phi\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{a}\right) \right]. \quad (10.3.91)$$

Если  $\xi_1$  весьма велико, то  $F_0^0$  стремится к  $1/\xi_1$ , а функция  $\Phi$ , обратная sn, стремится к  $a/\xi_1$ . Следовательно,

$$\psi \simeq V_0 a / \xi_1 \Phi\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{a}\right)$$

и полный заряд эллипсоида оказывается равным  $V_0 a / \Phi$ . Поэтому емкость

1) См. примечание на стр. 236. — Прим. ред.

уединенного эллипсоида  $\xi_1 = c$  с полуосями  $c$ ,  $\sqrt{c^2 - a^2}$ ,  $\sqrt{c^2 - b^2}$  равна

$$C = \frac{a}{\Phi\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{a}\right)}.$$

При  $c = a$  эллипсоид превращается в плоский эллиптический диск с полуосями  $a$  и  $\sqrt{a^2 - b^2}$ , а функция  $\Phi$ , обратная  $\operatorname{sn}$ , сводится к величине  $K(b/a)$ , так что емкость в этом случае равна  $a/K(b/a)$ . Если  $b = 0$ ,  $K$  делается равным  $\frac{1}{2}\pi$  и, следовательно, емкость круглого диска радиуса  $a$  равна  $2a/\pi$ , что согласуется с выводами из (10.3.56).

Применяя эти функции, можно решить и другие, более сложные задачи. Заметим, что произведения  $E_m^p(\xi_2)E_m^p(\xi_3)$  образуют полную систему функций, при помощи которой можно удовлетворить граничным условиям, заданным на поверхности эллипсоида  $\xi_1 = \text{const}$ . Тогда зависимость от  $\xi_1$  будет выражаться при помощи комбинаций функций  $E_m^p(\xi_1)$  и  $F_m^p(\xi_1)$ .

Заметим, наконец, что, переходя от координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  к координатам  $\lambda, \mu, \nu$  по формулам

$$\lambda = a \int_a^{\xi_1} \frac{dt}{V(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}, \quad \mu = a \int_{\xi_2}^a \frac{dt}{V(a^2 - t^2)(t^2 - b^2)}, \quad \nu = a \int_0^{\xi_3} \frac{dt}{V(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)},$$

мы получим уравнения (10.3.82) в особенно простой форме:

$$\frac{d^2 F}{d\lambda^2} = \frac{1}{a^2} [m(m+1)\xi_1^2 - x] F \quad \text{и т. д.}$$

Но, возвращаясь к данному в гл. 4 (или в специальных курсах) изложению теории эллиптических функций, мы видим, что этим уравнениям соответствуют

$$\xi_1 = a \frac{\operatorname{dn}(\lambda, k)}{\operatorname{cn}(\lambda, k)}, \quad \xi_2 = a \operatorname{dn}(\mu, k'), \quad \xi_3 = b \operatorname{sn}(\nu, k), \quad (10.3.92)$$

$$k = b/a, \quad k' = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1 - k^2}.$$

Благодаря этому уравнения записываются несколько проще, но упрощения при вычислениях почти не получается. Можно было бы показать, что интегральные представления функций Ламе содержат в качестве ядер функции Лежандра. Например, имеет место равенство

$$E_m^p[b \operatorname{sn} \nu] = h \int_{-2K}^{2K} P_m[k \operatorname{sn} \nu \operatorname{sn} u] E_m^p[b \operatorname{sn} u] du,$$

эквивалентное (10.3.2). Однако в данном случае это равенство не является интегральным представлением, выражающим функцию  $E$  при помощи более простых, уже известных функций. Оно является интегральным уравнением, представляющим искомую функцию в виде интеграла от этой же функции. Этот частный пример не столь уж интересен для практики, чтобы оправдать дальнейшее изучение вопроса, но ссылка на стр. 593 тома I, где говорится о функциях Матье, и на последующий раздел, посвященный сферидальным волновым функциям, показывает, что даже интегральные уравнения могут быть полезными, хотя и не столь полезными, как простые интегральные представления.