

Волновое уравнение

В гл. 10 имело место известное нарушение логического единства в нашем изложении различных подходов к решению уравнения Лапласа, обусловленное включением специальных методов теории функций комплексного переменного. Эти методы весьма ценны и не могут быть опущены, но их применимость ограничивается двумерным случаем, так что подход к двумерным задачам становится коренным образом отличным от подхода к задачам трехмерным. Определенная связь этих методов устанавливается интегральным представлением (10.3.2).

В настоящей главе логическое единство снова будет несколько нарушено. Специальный случай, когда имеет место простая гармоническая зависимость от времени, настолько важен, что его следует рассмотреть детально. Поскольку, однако, многие методы исследования этого специального случая неприменимы при отыскании решений с более общими временными зависимостями, логическое единство изложения в интересах лучшего понимания сущности явлений будет вновь нарушено. Однако связь между специальным и общим случаем устанавливается при помощи интеграла Фурье.

Простое гармоническое колебание «волновой» среды может возникнуть двояким путем: либо как свободное, либо как вынужденное колебание. Можно так привести в движение систему, сообщив ей в определенных местах соответствующие импульсы, что ее последующее свободное движение будет периодическим, и *обычно* такое периодическое движение оказывается простым гармоническим колебанием. Частоты таких свободных колебаний являются вполне определенными собственными значениями для системы. С другой стороны, чисто гармонический источник или чисто гармоническое краевое условие любой частоты вызовет вынужденное движение системы с той же частотой (если вынуждающая частота равна одной из частот свободных колебаний, то амплитуда этого движения может быть бесконечной).

Во всех случаях, когда имеет место простая гармоническая зависимость от времени, эта временная зависимость может быть выделена: $\Psi = \psi_k(x, y, z) e^{-i\omega t}$, и получающееся уравнение для ψ_k оказывается уравнением Гельмгольца $\nabla^2 \psi_k + k^2 \psi_k = 0$, $k = \omega/c$. Другими словами, если только все части решения всюду гармонически зависят от времени с одной и той же частотой, то можно отделить временной сомножитель и изучать зависящее только от пространственных координат решение уравнения Гельмгольца. Этот пространственный сомножитель, как мы видели, на границе должен удовлетворять однородным краевым условиям Дирихле или Неймана, за исключением тех ее частей, которые служат источниками и на которых имеют место неоднородные условия.

Если однородные краевые условия выполняются на всей конечной замкнутой поверхности, то соответствующие решения ψ_k однородного уравнения Гельмгольца являются собственными функциями, собственные значения k^2 образуют дискретное множество и все свободные дви-

жения системы представимы в виде рядов по собственным функциям. Вынужденные простые гармонические колебания описываются решениями неоднородного уравнения Гельмгольца или решениями однородного уравнения, удовлетворяющими неоднородным краевым условиями (или и теми, и другими); неоднородности соответствуют распределению «источников» в областях, где может происходить обмен энергией между рассматриваемой системой и некоторой «вынуждающей» системой. Такие решения существуют для любого значения k .

Если найдены решения, представляющие собой вынужденные простые гармонические колебания для всех значений $k = \omega/c$, то при помощи интеграла Фурье можно вычислить движение системы, вынуждаемое силами, произвольным образом зависящими от времени.

Поэтому мы в этой главе затратим значительную часть нашего времени на получение решений уравнения Гельмгольца. Отправляясь от этих решений, можно будет найти выражения для свободных колебаний системы либо для реакции, или «отклика» системы (response) на произвольно зависящие от времени воздействия. Глава содержит прежде всего изложение метода собственных функций для решения в одном, двух и трех измерениях. Оказывается, что этот метод наиболее удобен для низких частот (длинные волны). Последние параграфы посвящены методу функции Грина, который оказывается также полезным (если только он применим) в случае предельно высоких частот (очень коротких волн). В первом параграфе будут рассмотрены некоторые интересные видоизменения обычного волнового уравнения.

11.1. Волновое движение, одна пространственная координата

В §§ 2.1 и 6.3 мы рассматривали движение абсолютно гибкой струны, натянутой между жесткими опорами. Здесь мы рассмотрим встречающиеся в физических задачах видоизменения этого простейшего случая. Затем будет исследовано распространение звука в трубах, причем будут отмечены полезные аналогии с электропередающими линиями. В обоих случаях мы будем изучать применение метода преобразования Фурье, связывающего установившуюся реакцию системы с ее свободными колебаниями и с переходным процессом.

Углубляя наше изучение простой струны, мы можем исследовать разнообразные эффекты, отличающие реальную струну от идеализированной. Так, например (что уже было отмечено в § 2.1), силы, действующие на каждый элемент реальной струны, не сводятся только к восстанавливающему действию натяжения, как это было принято в простейшем случае, но зависят и от многих других факторов. Струна колеблется в воздухе или в какой-либо другой среде, которая создает дополнительную нагрузку на струну — как реактивную, так и активную. Реальные струны имеют некоторую жесткость и внутреннее трение, а концы никогда не бывают закреплены абсолютно жестко.

Большей частью дополнительные факторы оказывают по сравнению с натяжением сравнительно малое влияние на движение струны (этим прежде всего и объясняется то, что задача о простой струне представляет интерес). Далее оказывается полезным раздельно изучать эффекты, производимые одним или несколькими из этих усложняющих факторов, ибо эти эффекты в первом приближении аддитивны. В большинстве реальных процессов заметное влияние оказывает одновременно только один или два из этих дополнительных факторов. Поэтому вместо того, чтобы рассматривать без разбора все усложнения одновременно и получать неудобоваримо слож-

ный ответ, мы будем раздельно изучать движения струн *либо* с распределенным трением, *либо* с подвижными закреплениями, *либо* с дополнительной жесткостью и т. д.

Преобразование Фурье. Прежде чем последовательно рассматривать указанные дополнительные усложнения, полезно будет обрисовать связь между вынужденными и простыми гармоническими колебаниями, переходными процессами и свободными колебаниями, устанавливаемую при помощи преобразования Фурье. Силы могут быть приложены к струне (или к мембране, или к упругой среде, или к электромагнитному полю и т. д.) в некоторой области, лежащей внутри граничной поверхности или на этой поверхности. Если сила изменяется по простому гармоническому закону с частотой $\omega/2\pi$, то уравнение, описывающее процесс, оказывается неоднородным вида

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi F_\omega(x, y, z) e^{-i\omega t}$$

с однородными пространственными краевыми условиями в случае сил, приложенных внутри, или же однородным вида

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

в случае сил, приложенных на границе, с неоднородными краевыми условиями $\alpha \Psi(\mathbf{r}^s) + \beta B(\mathbf{r}^s) = F_\omega(\mathbf{r}^s) e^{-i\omega t}$ на соответствующей части границы. (B , как и прежде, означает нормальную к поверхности составляющую градиента Ψ .) В обоих случаях решение, описывающее установившийся режим, можно искать в виде $\Psi = \psi(x, y, z) e^{-i\omega t}$, причем функция ψ должна удовлетворять неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = -4\pi F_\omega, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

с однородными краевыми условиями или однородному уравнению

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

с неоднородными краевыми условиями $\alpha \psi(\mathbf{r}^s) + \beta N(\mathbf{r}^s) = F_\omega(\mathbf{r}^s)$ на части границы ($B = N e^{-i\omega t}$).

При первом обзоре метода нет необходимости останавливаться на всех этих деталях. Достаточно сказать, что сила $F(\omega) e^{-i\omega t}$, имеющая характер простой гармоника, вызывает реакцию системы, «амплитуда» которой равна произведению «амплитуды» $F(\omega)$ вынуждающей силы на функцию $\psi(x, y, z)$, представляющую собой амплитуду реакции системы на «единичную» силу.

Сила $F(\omega) e^{-i\omega t}$ вызывает установившуюся реакцию системы вида

$$F(\omega) \psi(x, y, z | \omega) e^{-i\omega t},$$

где ψ — реакция системы на единичную силу частоты $\omega/2\pi$ — называется по аналогии с теорией электрических цепей *адмитансом* (или *проводимостью*) системы.

Если мы интересуемся только установившимися реакциями системы на чисто гармонические силы, то нет необходимости что-либо добавлять к сказанному. Но мы желаем также вычислить реакцию системы на произвольную непериодическую силу $f(t)$. Естественно, конечно, достигнуть этого, разложив $f(t)$ на ее простые гармоники при помощи интеграла Фурье [см. (4.8.2)]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (11.1.1)$$

Тогда, решив задачу об установившемся процессе и найдя адмитанс системы $\psi(x, y, z | \omega)$, мы собираем отдельные компоненты, соответствующие всем возможным частотам, и получаем реакцию системы на заданную непериодическую силу:

$$\Psi(x, y, z | t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y, z | \omega) F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (11.1.2)$$

Все это вполне ясно, пока интеграл $F(\omega)$, содержащий $f(t)$, абсолютно сходится. Однако может оказаться, если, например, адмитанс $\psi(x, y, z | \omega)$ имеет особенности на действительной оси ω , что интеграл в (11.1.2) не будет абсолютно сходящимся. Можно, конечно, вычислить этот интеграл, рассматривая его как контурный интеграл и установив определенный «обход» особенностей. Однако результаты будут существенно различны в зависимости от того, будем ли мы обходить особенности по дугам окружностей, расположенным выше особенностей (в верхней полуплоскости) или ниже (в нижней полуплоскости). Поэтому мы должны обратиться к физике явления, чтобы пайти правило обхода, соответствующее реальному процессу.

Только недиссипативные системы имеют адмитанс с особенностями на действительной ω -оси. В самом деле, как мы вскоре увидим, полюсы адмитанса, рассматриваемого как функция от комплексной величины $\omega = 2\pi\nu + i\kappa$, определяют частоты ν_n и соответствующие постоянные затухания κ_n свободных колебаний системы. Если учитывается трение, то все полюсы должны быть *ниже* действительной ω -оси ($\omega_n = 2\pi\nu_n - i\kappa_n$), ибо временной множитель для свободных колебаний системы имеет вид $\exp(-i\omega_n t) = \exp(-2\pi i\nu_n t - \kappa_n t)$ и амплитуда должна *уменьшаться* с течением времени. Так как трение не может быть отрицательным, то выше действительной ω -оси полюсов адмитанса быть не может.

Мы видим теперь, почему затруднительно применять формулу (11.1.2), когда адмитанс ψ имеет полюсы на действительной оси. Это может произойти только в том случае, когда в системе нет трения и, следовательно, когда собственные колебания не затухают. В этом случае принципиально нельзя оперировать понятием вынужденного установившегося колебания. В самом деле, под установившимся колебанием понимают процесс, в котором неустановившаяся составляющая свободного колебания затухла и осталось только вынужденное движение; между тем при отсутствии трения эта неустановившаяся составляющая не может затухнуть. В таких случаях следует учесть, что не бывает реальных систем, абсолютно лишенных трения, и даже при исключительно малой постоянной затухания собственные колебания по прошествии достаточно большого времени затухнут, оставив только установившееся колебание. На этом основании мы должны считать и в этом предельном случае полюсы адмитанса немного смещенными *вниз* от действительной ω -оси. Таким образом, контур интегрирования должен проходить *выше* всех полюсов адмитанса ψ .

Чтобы избежать необходимости повторять эти длинные рассуждения каждый раз, когда мы имеем систему с «пренебрежимым» трением, можно просто предположить, что контур интегрирования в формуле (11.1.2) проходит на бесконечно малом расстоянии *выше* действительной ω -оси. При этом можно быть уверенным, что контур пройдет *над* всеми полюсами функции $\psi(x, y, z | \omega)$, даже если предположить, что трением в системе пренебрегли и полюсы расположены на действительной ω -оси. Такое соглашение приводит к сходящимся интегралам только при $t > 0$. Это обстоятельство не всегда является серьезным препятствием, так как вынуждающие силы обычно не имеют бесконечной предыстории и их можно считать равными нулю до определенного момента времени, который следует принять за $t = 0$. Если до момента $t = 0$ система находилась в покое, то такое

упрощающее предположение относительно вынуждающих сил вполне оправдано. На ближайших страницах мы покажем его значение.

Струна с трением. В качестве примера применения нашей процедуры рассмотрим гибкую струну, находящуюся под натяжением T и колеблющуюся в некоторой среде с малым трением. В соответствии с § 2.1 мы находим, что уравнение движения струны имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - R \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (11.1.3)$$

где ρ — масса единицы длины струны, R — сопротивление трения среды на единицу длины при единичной скорости этой части струны. Здесь скорость распространения волны будет равна $c = \sqrt{T/\rho}$. Для реальной среды сопротивление R зависит от частоты, но для упрощения задачи предположим сначала, что оно постоянно.

Если мы приложим в точке $x = x_0$ чисто гармоническую поперечную вынуждающую силу, то нужно будет удовлетворить неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{2x}{c^2} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F(x_0 | \omega) \delta(x - x_0) e^{-i\omega t},$$

где $\kappa = R/2\rho$, $c^2 = T/\rho$, а $F(x_0 | \omega)$ представляет собой отношение амплитуды приложенной силы к натяжению T струны. Чтобы найти установившуюся реакцию струны, полагаем $y(x, t) = \psi(x | \omega) e^{-i\omega t}$ и получаем неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{c^2} (\omega^2 + 2i\kappa\omega) \psi = -F(x_0 | \omega) \delta(x - x_0). \quad (11.1.3')$$

Как мы видели в § 2.1 и 7.2, решение этого уравнения имеет разрыв производной в точке $x = x_0$ со скачком, равным значению функции F .

Предположим, что концы струны закреплены абсолютно жестко и что они находятся в точках $x = 0$ и $x = l$, где l — длина струны. Комбинируя решения однородного уравнения, обращаемые в нуль при $x = 0$ и $x = l$, так, чтобы получить единственный разрыв производной при $x = x_0$, находим функцию Грина

$$G(x | x_0 | \omega) = \begin{cases} \frac{\sin(kx) \sin[k(l - x_0)]}{k \sin(kl)}, & x < x_0, \\ \frac{\sin(kx_0) \sin[k(l - x)]}{k \sin(kl)}, & x > x_0, \end{cases} \quad (11.1.4)$$

где $k = (\omega/c) \sqrt{1 + 2i\kappa/\omega}$. Решение уравнения (11.1.3') будет иметь вид $\psi = F(\omega) G(x | x_0 | \omega)$. Отношение амплитуды смещения к амплитуде силы, $\psi/F = G$, является *адмитансом* струны для пары точек x, x_0 . Как функция от ω он имеет полюсы там, где $\sin(kl)$ обращается в нуль, т. е. при $kl = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), или при $\omega^2 + 2i\kappa\omega - (n\pi c/l)^2 = 0$. Корни этого уравнения

$$\omega_n = 2\pi\nu_n - i\kappa, \quad \nu_n = \frac{nc}{2l} \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa l}{n\pi c}\right)^2} \quad (11.1.5)$$

лежат, как мы и предвидели, ниже действительной оси на расстоянии κ от нее. Увеличение коэффициента сопротивления R увеличивает расстояние полюсов от действительной оси.

Решив задачу об установившихся колебаниях струны для частоты $\omega/2\pi$, мы можем, применяя формулы (11.1.1) и (11.1.2), получить реакцию струны на силу вида $Tf(t)\delta(x - x_0)$, приложенную в точке x_0 .

Пусть, например, сила $Tf(t)$ является односторонним толчком в точке $x = x_0$, так что функция $f(t) = (P_0 a / 2T) e^{-a|t|}$ достигает максимума при $t = 0$ и экспоненциально убывает по обе стороны от точки $t = 0$. Полный поперечный импульс, сообщаемый струне в точке $x = x_0$, составит

$$T \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = P_0 \quad \text{дн.сек}$$

(поскольку F и f даны на единицу натяжения T , мы умножаем на T для получения силы в динах). Преобразование Фурье этой вынуждающей силы дает

$$\begin{aligned} F(x_0 | \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \frac{P_0 a}{2T} \left[\int_{-\infty}^0 e^{at+i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at+i\omega t} dt \right] = \\ &= \frac{P_0 a}{2T} \left[\frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} \right] = \frac{P_0 a^2}{T(\omega^2 + a^2)}. \end{aligned}$$

Эта функция имеет два простых полюса при $\omega = \pm ia$.

Чтобы найти «отклик» струны, мы применяем формулу (11.1.2). Интеграл, подлежащий вычислению, имеет вид

$$\frac{P_0 a^2}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} G(x | x_0 | \omega) \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 + a^2} d\omega.$$

Полюсами подынтегральной функции являются $\omega = \pm ia$ [для $F(x_0 | \omega)$] и $2\pi\nu_n - i\chi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (для G). Интеграл с бесконечными пределами можно заменить интегралом по замкнутому контуру, если подынтегральная функция достаточно быстро стремится к нулю на полуокружности бесконечно большого радиуса, лежащей в верхней или нижней полуплоскости. Подставляя $k = \pm i\omega/c$, $\omega = \pm i\omega$, в формулу (11.1.4), находим, что G экспоненциально стремится к нулю как на верхней, так и на нижней полуокружности, за исключением случая $x = x_0$, когда $G = O(1/2|k|)$ на обеих полуокружностях¹⁾. Экспонента $e^{-i\omega t}$ стремится к нулю на верхней полуокружности (к бесконечности на нижней) при отрицательном t и к нулю на нижней (к бесконечности на верхней) при положительном t . Следовательно, контур интегрирования лежит в верхней полуплоскости ω при отрицательном t (контур пробегается в положительном направлении) и в нижней полуплоскости при положительном t (контур пробегается в отрицательном направлении).

Для отрицательных значений t единственный полюс подынтегральной функции, лежащий внутри контура, находится в точке $\omega = ia$. Вычет в этом полюсе равен

$$\frac{P_0 a^2}{2\pi T} G(x | x_0 | ia) \frac{e^{at}}{2ia} = \frac{P_0 a e^{at}}{4\pi i T k_a} \begin{cases} \frac{\text{sh}(k_a x) \text{sh}[k_a(l-x_0)]}{\text{sh}(k_a l)}, & x < x_0, \\ \frac{(\text{sh} k_a x_0) \text{sh}[k_a(l-x)]}{\text{sh}(k_a l)}, & x > x_0, \end{cases}$$

где $k_a = (a/c)\sqrt{1+2\chi/a}$. Поскольку контурный интеграл (обход против часовой стрелки) равен вычету, умноженному на $2\pi i$, мы получаем сле-

¹⁾ На самом деле функция G имеет на прямой $\text{Im } \omega = -\chi$ полюсы, расположенные сколь угодно далеко от начала, и поэтому нужно брать дискретную последовательность полуокружностей с неограниченно возрастающими радиусами, проходящих между полюсами. Интегралы по таким полуокружностям будут стремиться к нулю. — *Прим. перев.*

дающее выражение для формы струны при $t < 0$:

$$y(x|t) = \frac{P_0 a e^{at}}{2T k_a} \begin{cases} \frac{\text{sh}(k_a x) \text{sh}[k_a(l-x_0)]}{\text{sh}(k_a l)}, & x < x_0, \\ \frac{\text{sh}(k_a x_0) \text{sh}[k_a(l-x)]}{\text{sh}(k_a l)}, & x > x_0. \end{cases} \quad (11.1.6)$$

Для положительных значений t контур лежит в нижней полуплоскости ω и обходит его в отрицательном (по часовой стрелке) направлении. В дополнение к полюсу в точке $-ia$, дающему член, аналогичный (11.1.6), имеется еще последовательность полюсов, лежащих в точках $\omega_n = 2\pi\nu_n - ix$. В n -м из этих полюсов выражение $\sin(kl)$ стремится к нулю как $(-1)^n (kl - n\pi) = (-1)^n (2l^2\nu_n / nc^2) (\omega - \omega_n)$, так что вычет в этом полюсе равен

$$-\frac{P_0 a^2 \sin(\pi n x / l) \sin(\pi n x_0 / l) e^{-2\pi i \nu_n t - xt + 2i\varphi_n}}{2\pi T \frac{2\pi(l\nu_n/c^2)}{2\pi} W_n^2},$$

где

$$\omega_n^2 + a^2 = (2\pi\nu_n)^2 - x^2 + a^2 - 2ix 2\pi\nu_n = W_n^2 e^{-2i\varphi_n}.$$

Каждому полюсу с положительным n соответствует полюс с отрицательным n , причем соответствующие значения ν_n , а значит, и φ_n имеют противоположные знаки. Следовательно, вычеты удобно сложить попарно. Окончательный результат для $t > 0$ имеет вид

$$y = \frac{2P_0 a^2 c^2}{Tl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x / l) \sin(\pi n x_0 / l)}{2\pi\nu_n W_n^2} e^{-xt} \sin(2\pi\nu_n t - 2\varphi_n) + \frac{P_0 a e^{-at}}{2T k'_a} \begin{cases} \frac{\text{sh}(k'_a x) \text{sh}[k'_a(l-x_0)]}{\text{sh}(k'_a l)}, & x < x_0, \\ \frac{\text{sh}(k'_a x_0) \text{sh}[k'_a(l-x)]}{\text{sh}(k'_a l)}, & x > x_0, \end{cases} \quad (11.1.7)$$

где

$$k'_a = (a/c) \sqrt{1 - 2x/a}.$$

Сопоставляя это выражение с полученным ранее для $t < 0$, можно усмотреть интересные свойства, типичные для всех переходных процессов. Решение состоит из члена, ведущего себя так же, как вынуждающая функция (член с $e^{\pm at}$), и ряда, представляющего свободное колебание, «вызванное» скачком вынуждающей функции при $t=0$. Частоты ν_n и постоянная затухания x соответствуют собственной частоте и коэффициенту затухания свободных колебаний струны с трением. Итак, при помощи преобразования Фурье мы использовали выражение установившейся реакции системы для нахождения переходного процесса и для изучения свойств свободных колебаний системы. Поэтому в этой главе нашей первой задачей всегда будет нахождение установившейся реакции системы на единичную простую гармоническую вынуждающую силу. Мы знаем, что из решения этой задачи можно получить выражения для переходного процесса и для свободных колебаний.

Прежде чем покончить с этим примером, мы несколько упростим рассматриваемую процедуру. Полагая a бесконечно большим, мы сводим в пределе вынуждающую функцию к мгновенному импульсу P_0 , действующему в момент $t=0$ в точке x_0 . Реакция системы на импульс $P_0=1$ является двойной функцией Грина для силы, сосредоточенной и во времени и в пространстве. При $a \rightarrow \infty$ второй член исчезает и $W_n^2 \simeq a^2$, $\varphi_n \simeq 0$. «Импульсная

функция» для мгновенного импульса при $t = \tau$, сосредоточенного в точке $x = x_0$, равна

$$g(x|x_0|t-\tau) = \frac{2c^2}{Tl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x/l) \sin(\pi n x_0/l)}{2\pi v_n} e^{-\alpha(t-\tau)} \sin[2\pi v_n(t-\tau)] \quad (11.1.8)$$

при $t > \tau$, где $v_n = (nc/2l) \sqrt{1 - (x_0/\pi nc)^2}$. Если теперь к струне приложена распределенная сила с плотностью $f(x|t)$, произвольно зависящая от времени, то результирующий «отклик» струны можно найти, вычислив двойной интеграл

$$y(x|t) = \int_0^t dx_0 \int_{-\infty}^t f(x_0|\tau) g(x|x_0|t-\tau) d\tau, \quad (11.1.9)$$

представляющий собой сумму «откликов», вызванных приложенными при $t = \tau$ и $x = x_0$ единичными импульсами, умноженными на амплитуду силы при $x = x_0$ и $t = \tau$, для всех τ до момента t .

Эта формула показывает, что решение может быть получено в виде суммы реакций системы на все силы, приложенные до момента t . Результат получается в виде ряда Фурье по x как для членов, представляющих свободное колебание, так и для членов, зависящих от времени как вынуждающая функция $f(t)$. Таким образом, величина, определяемая равенством (11.1.6) и вторым слагаемым равенства (11.1.7), получается в виде ряда Фурье, эквивалентного соответствующей части выражения (11.1.9). Хотя ряд для импульсной функции g сходится только условно, ряд, получаемый интегрированием в формуле (11.1.9), сходится, если функция $f(x|t)$ кусочно непрерывна и если сходится интеграл от $|f|$ по t в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Преобразование Лапласа. В основе предыдущих рассуждений лежали некоторые предположения, на которых мы не останавливались. Так, например, мы предполагали, что если $F(\omega)$ является преобразованием Фурье вынуждающей функции $f(t)$ и $\psi(\omega)$ — установившееся решение для единичной гармонической силы, то $\psi(\omega)F(\omega)$ должно быть преобразованием Фурье реакции системы на силу $f(t)$. Это, несомненно правдоподобное, предположение следует, однако, тщательно исследовать, чтобы выявить пределы применимости формулы и возможные исключения.

Мы проведем доказательство при некоторых ограничениях, которые, однако, не будут служить препятствием при дальнейших расчетах. Именно, предположим, что к рассматриваемой системе на протяжении неограниченного промежутка времени до заданного момента не было приложено никаких сил, т. е. предположим, что система не подвергалась каким-либо воздействиям ранее определенного момента времени. Это, конечно, эквивалентно предположению, что система до этого момента (который может быть принят за момент $t = 0$) была в покое или, в некоторых случаях, что система двигалась с постоянной скоростью. Следовательно, указывая положение и скорость системы в момент $t = 0$ и задавая характер силы, действующей начиная с момента $t = 0$, мы определяем тем самым движение системы.

Коль скоро мы ограничились силой, приложенной при $t > 0$, можно воспользоваться условием, указанным на стр. 315, согласно которому в интеграле Фурье мнимая часть ω больше нуля (или, лучше сказать, аргумент ω больше нуля, но меньше π). Интеграл, преобразую-

щий $f(t)$ в $F(\omega)$, принимает вид

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} f(t) dt, \quad 0 < \arg \omega < \pi,$$

причем отличная от нуля мнимая часть ω обуславливает наличие экспоненциального множителя с действительным отрицательным показателем, обеспечивающим сходимость интеграла¹⁾. В связи с этим в некоторых отношениях удобнее ввести вместо ω параметр p , полагая $\omega = ip$, и записывать интегралы так:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p = -i\omega,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(\omega) d\omega, \quad (11.1.10)$$

причем интегрирование во втором интеграле совершается вдоль прямой, проходящей на расстоянии ε ($\varepsilon > 0$) выше действительной оси ω -плоскости.

Поскольку $f(t)$ равна нулю при $t < 0$, из первого интеграла (11.1.10) видно, что $F(\omega)$ аналитична в полуплоскости, лежащей выше прямой $\text{Im } \omega = \varepsilon > 0$. В большинстве случаев можно затем при помощи аналитического продолжения выяснить поведение $F(\omega)$ в нижней полуплоскости, где F имеет особенности.

Взаимозависимость между F и f , p и ω , задаваемая соотношениями (11.1.10), называется *преобразованием Лапласа* (см. §§ 4.8 и 5.3); функция $F(\omega)$ также называется *преобразованием*, или *трансформантой* Лапласа функции $f(t)$. Пусть выполнены следующие условия: 1) функция $f(t)$ определена для всех действительных значений t и равна нулю для $t < 0$; 2) интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-ct} f(t) dt$$

сходится для всех действительных значений c , не меньших чем некоторое $\varepsilon > 0$; 3) функция $F(\omega)$ аналитична при всех конечных ω , лежащих выше прямой $\text{Im } \omega = \varepsilon$; 4) интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x + ic)| dx$$

сходится для всех действительных значений c , не меньших чем ε . Тогда, если имеет место одно из соотношений (11.1.10), то имеют место оба эти соотношения²⁾. В частности, соотношение, определяющее $F(\omega)$ через интеграл от f по t , дает представление, годное для всех значений $\omega = ip$, для которых $\text{Im } \omega \geq \varepsilon$. В большинстве случаев при помощи аналитического продолжения можно определить характер $F(\omega)$ в нижней ω -полуплоскости, где интегральное представление непригодно.

1) Предполагается, что $f(t)$ возрастает не быстрее некоторой экспоненты. — Прим. перев.

2) Подробнее см., например, в книге Лаврентьева М. А. и Шабата Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2, М.—Л., 1958, стр. 462—469. — Прим. перев.

В дальнейших выкладках будут играть роль некоторые общие формулы, касающиеся преобразования Лапласа. Если f и F связаны между собой так, как указано в (11.1.10) и в предыдущем абзаце, то, интегрируя по частям, мы получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{d}{dt} f(t) dt = [e^{-pt} f(t)]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -f(0) - i\omega F(\omega), \quad p = -i\omega.$$

Следовательно, преобразования Лапласа функций df/dt и d^2f/dt^2 определяются правилами:

$$\begin{aligned} &\text{преобразованием Лапласа } f(t) \text{ является } F(\omega); \\ &\quad \text{»} \quad \quad \quad \text{»} \quad f'(t) \quad \quad \text{»} \quad pF(\omega) - f(0), \quad (11.1.11) \\ &\quad \text{»} \quad \quad \quad \text{»} \quad f''(t) \quad \quad \text{»} \quad p^2F(\omega) - pf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Предполагается, что производные удовлетворяют требованиям сходимости, указанным на стр. 320.

Подобным же образом, меняя порядок интегрирования и полагая затем $t - \tau = u$, получаем [см. (4.8.33)]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-p(t+\tau)} f_2(t - \tau) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pu} f_2(u) du \end{aligned}$$

Следовательно, если

$$\text{преобразованием Лапласа } f_1(t) \text{ является } F_1(\omega)$$

и

$$\text{преобразованием Лапласа } f_2(t) \text{ является } F_2(\omega),$$

то

$$\text{преобразованием Лапласа } \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \text{ является } F_1(\omega) F_2(\omega). \quad (11.1.12)$$

Струна с трением. Теперь применим этот аппарат к описанной на стр. 316 задаче о струне с трением, неподвижно закрепленной на обоих концах. Уравнение колебаний такой струны при силе $Tf(t)$, приложенной в точке $x = x_0$ (где f равно нулю для $t < 0$), согласно (11.1.3), имеет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\kappa \frac{\partial y}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \delta(x - x_0) f(x_0 | t), \quad (11.1.13)$$

где $\kappa = R/2\rho$, $c^2 = T/\rho$, T — натяжение в динах, ρ — масса единицы длины и R — сопротивление среды, рассчитанное на единицу длины струны, причем fT измеряется в динах. Смещение струны является функцией x и t .

Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, умножая их на e^{-pt} и интегрируя по t от 0 до ∞ ; мы получим

$$(p^2 + 2\kappa p) Y - c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = c^2 \delta(x - x_0) F(x_0 | \omega) + (p + 2\kappa) y(0) + y'(0),$$

где $Y(x, \omega)$ — преобразование Лапласа $y(x, t)$, F — преобразование Лапласа $f(t)$, $y(0)$ и $y'(0)$ — начальные смещение и скорость струны (функции от x , но не от t или ω) и $p = -i\omega$. Представляя Y в виде ряда Фурье

$\sum A_n \sin(\pi n x/l)$ и предполагая на время, что струна находилась в покое и равновесии до момента приложения силы, мы найдем, решая полученные уравнения относительно A_n :

$$Y(x, \omega) = \frac{2c^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x_0/l) \sin(\pi n x/l)}{p^2 + 2\kappa p + (\pi n c/l)^2} F(x_0 | \omega).$$

Однако эта не зависящая от времени амплитуда равна амплитуде силы $TF(x_0 | \omega)$, умноженной на функцию Грина для приложенной в точке $x = x_0$ силы единичной амплитуды и частоты $\omega/2\pi$,

$$G(x | x_0 | \omega) = \frac{2c^2}{lT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x_0/l) \sin(\pi n x/l)}{p^2 + 2\kappa p + (\pi n c/l)^2}. \quad (11.1.14)$$

Эта величина представляет собой преобразование Лапласа реакции, или «отклика», струны на единичный импульс, приложенный при $t = 0$ и $x = x_0$. Так как

$$\int_0^{\infty} e^{-pt-bt} \sin(at) dt = \frac{a}{(p+b)^2 + a^2},$$

то мы видим, что G оказывается преобразованием Лапласа определенного в (11.1.8) ряда Фурье функции $g(x | x_0 | t)$. Окончательно получаем, что Y [являющееся произведением $G(x | x_0 | \omega)$ — преобразования Лапласа функции $g(x | x_0 | t)$ — и $F(x_0 | \omega)$ — преобразования Лапласа вынуждающей силы $f(x_0 | t)$] представляет собой преобразование Лапласа функции $y(x | x_0 | t)$ — истинного смещения струны под действием силы $f(x_0 | t)$. Поэтому, согласно (11.1.12),

$$y(x | x_0 | t) = \int_0^t f(x_0 | \tau) g(x | x_0 | t - \tau) d\tau; \quad (11.1.15)$$

если сила распределена вдоль струны, мы получаем выражение (11.1.9) для $y(x | t)$.

Таким образом, метод преобразования Лапласа позволяет сократить исследования сходимости и вычисления. Выигрывая в надежности метода, мы теряем в его гибкости и непосредственности. Чтобы перейти от G к g , мы должны решить обратную задачу, т. е. найти такое g , чтобы интеграл $\int_0^{\infty} e^{-pt} g dt$ был равен G . Эта задача очень похожа на задачу об интегрировании некоторых конкретных функций, которая решается разысканием ответа в таблице интегралов. В настоящее время существуют подобные же таблицы преобразований Лапласа, и нужную функцию часто можно найти в такой таблице. (Краткая таблица преобразований приведена в конце этой главы.) Если этого сделать не удастся, то можно применить второе соотношение (11.1.10) с сопутствующими осложнениями, связанными с контурными интегралами и вычислением вычетов.

Мы можем теперь резюмировать процедуру вычисления реакции системы, находившейся вначале в равновесии, на силу $f(x | t)$, приложенную в точке x_0 (находящуюся внутри системы или на ее границе) при $t > 0$:

Сначала вычисляют функцию Грина $G(x | x_0 | \omega)$ для установившейся реакции системы на силу единичной амплитуды и частоты $\omega/2\pi$, приложенную в точке x_0 , лежащей внутри или на границе. Для

этого решают неоднородное или однородное с неоднородными краевыми условиями уравнение Гельмгольца. Либо по второй формуле (11.1.10), либо обра- щая первую из этих формул, находят импульс- ную функцию $g(x|x_0|t)$, для которой G является преобразованием Лапласа. Реакция системы на силу $f(x|t)$ дается тогда формулой (11.1.16)

Это правило применимо, если система находилась в покое и функция $f(x|t)$ равнялась нулю при $t < 0$. Если система не находилась в покое при $t < 0$, то при вычислении преобразований Лапласа нужно учесть началь- ное положение и скорость, как показано в (11.1.11). В оставшейся части параграфа будет продемонстрирован ряд приложений этого метода. Между прочим, интересно проследить тесную связь между преобразованиями Лап- ласа и Фурье и динамически сопряженными переменными квантовой меха- ники, о которых была речь в § 2.6.

Струна в упругой среде. Чтобы рассмотреть пример системы, возбу- ждаемой на части границы, мы вновь вернемся к случаю гибкой струны в упругой среде, обсуждавшемуся уже в формуле (2.1.27) и далее.

Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - c^2 \mu^2 y, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}, \quad \mu^2 = \frac{K}{T}. \quad (11.1.17)$$

Предположим, что струна бесконечной длины и на нее действует попереч- ная сила, приложенная в ее конце $x=0$. Поперечная составляющая силы натяжения струны, как было показано, равна $-T(\partial y/\partial x)$, где T — натяже- ние струны. Как видно из уравнения (2.1.29), решение, соответствующее простой гармонической волне, бегущей в положительном направлении оси x , далеко от точки приложения вынуждающей силы $x=0$ имеет вид

$$y = A \exp \left[-\frac{x}{c} \sqrt{\mu^2 c^2 - \omega^2} - i\omega t \right].$$

Следовательно, решение уравнения Гельмгольца с неоднородным граничным условием $-T(\partial \psi/\partial x)_0 = 1$ (единичная амплитуда силы в точке $x=0$) имеет вид

$$G(x|0|\omega) = \frac{c}{T \sqrt{p^2 + \mu^2 c^2}} \exp \left[-\frac{x}{c} \sqrt{p^2 + \mu^2 c^2} \right], \quad p = i\omega. \quad (11.1.18)$$

Обращаясь к таблице преобразований Лапласа, помещенной в конце настоящей главы, мы находим импульсную функцию, которая соответствует «отклику» струны на единичный импульс, приложенный поперечно к концу струны $x=0$:

$$g(x|0|t) = \begin{cases} (c/T) J_0 [\mu c \sqrt{t^2 - (x/c)^2}], & t > x/c, \\ 0, & t < x/c. \end{cases} \quad (11.1.19)$$

Форма этой волны показана на рис. 2.7, где она сравнивается с вол- ной, вызванной таким же импульсом для простой струны и для струны с трением. Заметим, что, хотя фронт волны, передвигаясь вперед со скоро- стью c , остается резко выраженным, позади волны остается «след», с тече- нием времени меняющий форму. В нашем случае фронт волны по мере ее продвижения становится заостреннее и уже.

Если на конце струны действует поперечная сила $f(t)$, то форма стру- ны как функция от x и t в соответствии с (11.1.15) выражается инте-

гралом

$$y(x, t) = \frac{c}{T} \int_0^{t-x/c} f(\tau) J_0 \left[\mu c \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right] d\tau. \quad (11.1.20)$$

В случае необходимости это выражение может быть проинтегрировано численно.

Струна с нежестким закреплением. Может показаться, что способ определения свободных колебаний через установившиеся вынужденные колебания несколько сложен и что значительно легче найти свободные колебания непосредственно. Следующий пример покажет, что этот кажущийся обходным путь иногда является наиболее эффективным, а применение метода, кажущегося прямым, влечет за собой значительные трудности.

Предположим, что струна длины l , находящаяся под натяжением T , неподвижно закреплена в точке $x=0$, а ее конец $x=l$ закреплён нежестко. Это последнее закрепление имеет продольную сопротивляемость, достаточную, чтобы выдержать натяжение T , но может несколько сместиться под влиянием поперечного усилия, передаваемого опоре струной. Предположим, что этому смещению препятствуют трение и упругость закрепления. Таким образом, поперечная составляющая $-T(\partial y/\partial x)_l$ силы натяжения струны в точке $x=l$ равна сумме произведения R_s на поперечную скорость $(\partial y/\partial t)_l$ точки закрепления и произведения K_s на смещение $y(l)$ точки закрепления:

$$\begin{aligned} -T \frac{\partial y}{\partial x} &= R_s \frac{\partial y}{\partial t} + K_s y \quad \text{при } x=l, \\ y &= 0 \quad \text{при } x=0. \end{aligned} \quad (11.1.21)$$

Мы могли бы, конечно, предположить, что конец $x=0$ также может смещаться под влиянием поперечной силы, и включить в рассмотрение поперечную инерцию закрепления, однако уже введенных трудностей достаточно, чтобы продемонстрировать используемый метод, не запутывая вместе с тем результат излишними осложнениями; по той же причине мы пренебрегаем реакцией среды, окружающей струну.

Чтобы непосредственно рассчитать свободные колебания этой системы, нужно найти собственные функции

$$y = [A \sin(kx) + B \cos(kx)] e^{-ikt}$$

волнового уравнения, удовлетворяющие граничным условиям (11.1.21). Из этих условий следует, что B равно нулю и, таким образом,

$$y = \sin(kx) e^{-ikt},$$

где

$$-Tk \cos(kl) = -ikcR_s \sin(kl) + K_s \sin(kl),$$

или

$$\operatorname{tg}(kl) = -\frac{Tk}{K_s - ikcR_s}. \quad (11.1.22)$$

Корни этого трансцендентного уравнения для k являются собственными значениями k_n нашей системы. Наименьшее значение $k_0=0$, но его включать не следует, так как соответствующая собственная функция равна

нулю. Остальные корни могут быть с известными трудностями подсчитаны с любой желаемой точностью.

Трудность этой проблемы состоит не в вычислении собственных значений, а в применении собственных функций. Беда в том, что собственные функции *не ортогональны одна другой*. Не ортогональны же они потому, что *красивые условия зависят от собственных значений k* . В гл. 6 мы доказывали ортогональность собственных функций, интегрируя некоторую комбинацию решений, которая в рассматриваемом случае сводится к выражению

$$\left[y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \right]_0^l = [k_1^2 - k_2^2] \int_0^l y_1 y_2 dx.$$

Поскольку обе собственные функции y_1 и y_2 обращаются в нуль при $x=0$, значение скобки слева при $x=0$, как и прежде, равно нулю. Однако, так как при $x=l$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ikcR_s - K_s}{T} y,$$

значение при $x=l$ имеет вид

$$\frac{icR_s}{T} (k_1 - k_2) y_1(l) y_2(l),$$

а это выражение *не* равно нулю при $k_1 \neq k_2$. Следовательно, интеграл справа в рассматриваемом случае не равен нулю при $k_1 \neq k_2$ и собственные функции не ортогональны между собой. (В гл. 6 этот интеграл был равен нулю при $k_1 \neq k_2$, поскольку мы предполагали, что соотношение между y и dy/dx на границе *не зависит от k* .) Это не означает, что собственные функции не образуют полной системы. В действительности эта система полна. Однако в этом случае не очень просто подсчитать коэффициенты в разложении заданной в интервале $0 < x < l$ функции от x по собственным функциям.

Попытаемся подойти к задаче с другой стороны, рассматривая вынужденное установившееся движение. Чтобы вычислить функцию Грина для силы единичной амплитуды и частоты $\omega/2\pi$, приложенной в точке $x=x_0$, мы должны решить уравнение Гельмгольца

$$\frac{d^2G}{dx^2} + k^2G = \frac{-1}{T} \delta(x - x_0), \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (11.1.23)$$

с граничными условиями (11.1.21), причем зависимость G от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$. Следовательно, граничные условия принимают вид

$$G = 0 \text{ при } x = 0, \quad T \frac{dG}{dx} = [ikcR_s - K_s] G \text{ при } x = l, \quad (11.1.24)$$

где $k = \omega/c$ и ω определяется частотой вынуждающей силы.

Мы можем найти решение уравнения (11.1.23) при помощи собственных функций, удовлетворяющих условиям (11.1.24). Эти собственные функции *заведомо* взаимно ортогональны, поскольку k и ω в этом уравнении определены вынуждающей силой и одинаковы для всех собственных функций. С другой стороны, мы можем найти решение уравнения (11.1.23) с соответствующим разрывом при $x=x_0$. Таким образом, методами, уже

применявшимися ранее, мы находим

$$G(x|x_0|\omega) = \begin{cases} \frac{\sin(kx)\sin[k(l-x_0)-\theta]}{kT\sin(kl-\theta)}, & x < x_0, \\ \frac{\sin(kx_0)\sin[k(l-x)-\theta]}{kT\sin(kl-\theta)}, & x > x_0, \end{cases} = \\ = 2\frac{l}{T}c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi\beta_n}{2\pi\beta_n - \sin(2\pi\beta_n)} \frac{\sin\left(\frac{\pi\beta_n x_0}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta_n x}{l}\right)}{(kl)^2 - (\pi\beta_n)^2}, \quad (11.1.25)$$

где $\theta = \arctg [Tk/(ikcR_s - K_s)]$ и $\beta_n(k)$ — n -й корень уравнения

$$\operatorname{tg}(\pi\beta_n) = \frac{\pi\beta_n T}{l(ikcR_s - K_s)}. \quad (11.1.26)$$

Собственные функции $\sin(\pi\beta_n x/l)$ в разложении G взаимно ортогональны, поскольку все они удовлетворяют граничным условиям при $x=l$ для одного и того же значения $k=\omega/c$. Другими словами, граничные условия (11.1.24) не зависят от собственных значений, так что наше доказательство ортогональности, приведенное в гл. 6, остается в силе. Как собственные функции, так и собственные значения β_n , т. е. корни уравнения (11.1.26), являются функциями k или вынуждающей частоты $\omega/2\pi$. См. по этому поводу также рассуждения на стр. 675, 676 тома I.

Для нахождения импульсной функции g , для которой функция G является преобразованием Лапласа, мы должны либо вычислить контурный интеграл, определяемый вторым равенством (11.1.10), либо найти g в таблице преобразований Лапласа. На этот раз мы выберем первый из этих методов:

$$g(x|x_0|t) = \frac{c}{\pi l T} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{2\pi\beta_n}{2\pi\beta_n - \sin(2\pi\beta_n)} \frac{\sin\left(\frac{\pi\beta_n x_0}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta_n x}{l}\right)}{k - \frac{\pi\beta_n}{l}} e^{-ickl} dk.$$

Простые полюсы подинтегрального выражения являются решениями трансцендентного уравнения

$$lk = \pm \pi\beta_n(k) = \mp \arctg \left[\frac{K_s - icR_s}{T} \right],$$

или

$$\frac{K_s}{k} - icR_s + T \operatorname{ctg}(kl) = 0, \quad (11.1.27)$$

которое надлежит сравнить с уравнением (11.1.22). Для каждого значения n в β_n имеется пара корней, расположенных ниже действительной оси и симметрично относительно мнимой k -оси. Для больших значений n приближенные значения корней таковы:

$$\left. \begin{aligned} k_n &\simeq \frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{K_s}{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) T} - i \frac{cR_s}{lT}, \\ k'_n &\simeq -\frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{K_s}{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) T} - i \frac{cR_s}{lT}, \end{aligned} \right\} Tn \gg lK_s, cR_s \gg lT,$$

и для любых значений n и cR_s/lT корни могут быть представлены в виде

$$k_n = \frac{\pi a_n}{l} - i x_n \frac{cR_s}{lT}, \quad k'_n = -\frac{\pi a_n}{l} - i x_n \frac{cR_s}{lT}, \quad (11.1.28)$$

где α_n и x_n — безразмерные числа, получаемые при решении уравнения (11.1.27). Как показано выше, $\alpha_n \simeq n + 1/2$ и $x_n \simeq 1$ для очень больших значений n .

Вычислив вычеты в этих полюсах, получим

$$g(x|x_0|t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -\frac{4c}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\sin(k_n x_0) \sin(k_n x)}{2k_n l - \sin(2k_n l)} e^{-ik_n ct} \right\}, & t > 0, \end{cases} \quad (11.1.29)$$

где k_n — n -й корень уравнения (11.1.27), имеющий вид (11.1.28). Это решение дает форму струны, когда при $t=0$ в точке $x=x_0$ струне сообщается единичный импульс.

Продолжая анализ, можно определить форму струны, когда сила TF_0 внезапно приложена в момент $t=0$ в точке $x=x_0$. Преобразование Лапласа функции $F_0 u(t)$ равно $F_0/p = iF_0/\omega$. Согласно таблице, помещенной в конце главы, если G является преобразованием g , то G/p является преобразованием $\int g dt$. Следовательно, искомая форма струны для силы $TF_0 u(t)$, приложенной при $x=x_0$, имеет вид

$$\psi_u = F_0 T \int_0^t g(x|x_0|\tau) d\tau = 4F_0 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sin(k_n x_0) \sin(k_n x)}{2k_n l - \sin(2k_n l)} \frac{1 - e^{-ik_n ct}}{k_n} \right\}.$$

В этом выражении члены, не зависящие от времени, определяют окончательную форму струны, принимаемую после того, как переходный процесс затухнет. Это соответствует предельной форме при $k \rightarrow 0$ установившегося «отклика» струны, определяемого равенством (11.1.25):

$$TF_0 G(x|x_0|0) = \begin{cases} F_0 \frac{x[l + (T/K_s) - x_0]}{l + (T/K_s)}, & x < x_0, \\ F_0 \frac{x_0[l + (T/K_s) - x]}{l + (T/K_s)}, & x > x_0. \end{cases} \quad (11.1.30)$$

Следовательно, форма струны, оттянутой первоначально в точке $x=x_0$ постоянной силой TF_0 и затем отпущенной при $t=0$, такова:

$$\psi = TF_0 G(x|x_0|0) - \psi_u = 4F_0 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sin(k_n x_0) \sin(k_n x)}{k_n l - \frac{1}{2} \sin(2k_n l)} \frac{e^{-ik_n ct}}{k_n} \right\}. \quad (11.1.31)$$

Этот ряд представляет свободное затухающее колебание струны, вызванное начальным отклонением вида (11.1.30). Это — ряд по собственным функциям $\sin(k_n x)$, которые, как мы указывали на стр. 325, между собой не ортогональны. Однако мы смогли получить этот ряд, отправляясь от ортогональной системы собственных функций $\sin(\pi \beta_n x/l)$ для вынужденного установившегося движения и применяя преобразование Лапласа для вычисления переходного процесса.

Отражение от закрепления с трением. Если $K_s = 0$, то поперечный импеданс закрепления имеет только активную составляющую и величины θ и β_n , фигурирующие в (11.1.25), не зависят от k . В этом случае значительно легче найти импульсную функцию $g(x|x_0|t)$ при помощи таблицы преобразований Лапласа, приведенной в конце настоящей главы. Используя

конечную форму решения при $x < x_0$, мы получаем

$$G(x|x_0|\omega) = c \frac{\text{sh}(px/c) \text{sh}[(p/c)(l-x_0)+b]}{T p \text{sh}[(pl/c)+b]} =$$

$$= \frac{c/4}{pT \text{sh}[(pl/c)+b]} \left\{ e^{(p/c)(l+x-x_0)+b} - e^{(p/c)(l-x-x_0)+b} + \right.$$

$$\left. + e^{(p/c)(x_0-x-l)-b} - e^{(p/c)(x+x_0-l)-b} \right\},$$

где $b = \text{Ar th}(T/cR_s)$. Применяя затем таблицу, находим

$$g(x|x_0|t) = \frac{1}{2} \frac{c}{T} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nb} [u(ct - |x - x_0| - 2nl) - u(ct - x - x_0 - 2nl)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nb} [u(ct + |x - x_0| - 2nl) - u(ct + x + x_0 - 2nl)] \right\}. \quad (11.1.32)$$

Это представление импульсной волны весьма интересно. Член $u(ct - |x - x_0|)$ ($n=0$) соответствует волне с крутым гребнем, распространяющейся от точки удара $x = x_0$ со скоростью c . Член $-u(ct - x - x_0)$ соответствует первому отражению этой волны от неподвижной точки закрепления $x = 0$, происходящему без изменения амплитуды, но с изменением знака. Член $-e^{-2b}u(ct + x + x_0 - 2l)$ соответствует первому отражению от нежесткого закрепления. Здесь амплитуда изменяется, приобретая множитель

$$|e^{-2b}| = |e^{-2\text{Ar th}(T/cR_s)}| = \left| \frac{T - cR_s}{T + cR_s} \right|.$$

При $cR_s > T$ смещение меняет знак (при $cR_s < T$ нет изменения знака). Отражения повторяются с последующими изменениями амплитуды каждый раз, когда волна встречает нежесткое закрепление в точке $x = x_0$.

Если сила, приложенная к струне, распределена по ее длине и по времени, то нужно интегрировать в соответствии с формулой (11.1.9). Интересно отметить, что решение представляется через элементарные решения $f(x - ct)$ и $g(x + ct)$, изображающие основные волны противоположных направлений и их отражения от концов. Для закрепления с трением ($K_s = 0$) отраженная волна претерпевает изменение направления и амплитуды, но остается подобной по форме.

Звуковые волны в трубе. Другим простым примером на одномерное волновое уравнение является распространение звуковых волн внутри трубы (см. § 2.3). Если длина волны $2\pi c/\omega$ значительно больше периметра трубы, то любое волновое движение в такой трубе есть движение вдоль оси. Если поперечное сечение трубы постоянно, то смещение частиц ξ , скорость v , потенциал скоростей ψ и избыточное давление P являются функциями только расстояния x вдоль трубы и времени t . Эти величины связаны следующими соотношениями:

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad P = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (11.1.33)$$

Вместе с потенциалом ψ решениями волнового уравнения являются также ξ , v и P .

Дальний конец трубы, $x = l$, может быть или открыт, или закрыт поршнем, могущим смещаться под влиянием избыточного давления внутри трубы. В последнем случае закрывающий поршень для наших целей может быть полностью охарактеризован заданием его *акустического импеданса*,

т. е. отношения z_l избыточного давления P к направленной из трубы скорости частиц v у поршня при простых гармонических колебаниях давления с частотой $\omega/2\pi$. Следовательно, z_l представляет собой функцию от ω , зависящую от устройства поршня.

Значение комплексной величины z_l определяет положение и относительную величину максимумов и минимумов амплитуды (узлов и пучностей) синусоидальной волны давления, идущей вдоль трубы от $x=l$ до ближайшего конца трубы $x=0$.

Одномерные падающая и отраженная синусоидальные волны одновременно могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} \phi &= A_i e^{i\omega(\frac{x}{c}-t)} + A_r e^{-i\omega(\frac{x}{c}+t)} = A \operatorname{sh} \left[\pi(\alpha - i\beta) + i\frac{\omega x}{c} \right] e^{-i\omega t}, \quad (11.1.34) \\ A &= 2A_i e^{-\pi(\alpha - i\beta)} = -2A_r e^{\pi(\alpha - i\beta)}, \end{aligned}$$

где $|A_i|$ — амплитуда падающей волны, $|A_r|$ — амплитуда отраженной волны, а отношение $A_r/A_i = e^{-\pi(2\alpha - i(2\beta + 1))}$ определяет и отношение амплитуд и разность фаз этих волн. Избыточное давление и скорость частиц на расстоянии x от начала трубы (мы употребляем β_0 для обозначения сдвига фаз при $x=0$) выражаются так:

$$\begin{aligned} P &= -i\rho\omega A \operatorname{sh} \left[\pi(\alpha - i\beta_0) + i\frac{\omega x}{c} \right] e^{-i\omega t}, \\ v &= -i\frac{\omega}{c} A \operatorname{ch} \left[\pi(\alpha - i\beta_0) + i\frac{\omega x}{c} \right] e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

а их отношение —

$$z(x) = \rho c \operatorname{th} \left[\pi(\alpha - i\beta_0) + i\frac{\omega x}{c} \right]. \quad (11.1.35)$$

Итак, ясно, что, задавая значение $z = P/v$ при $x=l$, мы фиксируем значения α и β

$$\alpha - i\beta_l = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arth} \frac{z_l}{\rho c}, \quad \beta_0 = \beta_l + \frac{\omega l}{\pi c},$$

и, следовательно, задаем отношение амплитуд и относительные фазы падающей и отраженной волн в трубе. Если импеданс z_l чисто мнимый (чисто реактивный), то $\alpha=0$ и отражаемая волна имеет ту же амплитуду, что и падающая. Если импеданс z_l действительный (чисто активный) и равен ρc , то $\alpha = \infty$, и отраженной волны вовсе не существует (таков будет, например, конечный импеданс, если к нашей трубе в точке $x=l$ присоединена другая труба такого же диаметра и бесконечной длины). Возвращаясь к формуле для P , мы видим, что амплитуда давления в точке x равна

$$|P| = \rho\omega |A| \sqrt{\operatorname{sh}^2 \pi\alpha + \sin^2 \left[\frac{\omega}{c}(l-x) + \pi\beta_l \right]}.$$

Таким образом, при $(\omega/c)(l-x) = -\pi\beta_l, \pi(1-\beta_l), \pi(2-\beta_l), \dots$ амплитуда давления достигает минимума, равного $\rho\omega |A| \operatorname{sh} \pi\alpha$, а при $(\omega/c)(l-x) = \pi\left(\frac{1}{2} - \beta_l\right), \pi\left(\frac{3}{2} - \beta_l\right), \dots$ она достигает максимума, равного $\rho\omega |A| \operatorname{ch} \pi\alpha$. Положение этих максимумов и минимумов фиксирует значение β_l , а значит, и β_0 , отношение же величины давления в точках минимума и максимума равно $\operatorname{th} \pi\alpha$ и, следовательно, определяет значение α .

Пусть колебания возбуждаются в конце трубы $x=0$. Чтобы измерить возникающий в трубе «отклик» на заданное возбуждение, мы можем представить себе, что этот конец закрыт плоским поршнем с пренебрежимо малым

импедансом, который может двигаться взад и вперед вдоль оси, генерируя волны. Чтобы образовать волну описываемого формулой (11.1.34) типа, смещение, скорость поршня и давление на его поверхности должны быть таковы:

$$\xi_0 = \frac{A}{c} \operatorname{ch}(\pi x - i\pi\beta_0) e^{-i\omega t}, \quad v_0 = -\frac{i\omega}{c} A \operatorname{ch}(\pi\alpha - i\pi\beta_0) e^{-i\omega t},$$

$$P_0 = -i\rho\omega A \operatorname{sh}(\pi\alpha - i\pi\beta_0) e^{-i\omega t}.$$

Если поршень приводится в движение простой гармонической силой единичной амплитуды и частоты $\omega/2\pi$, то амплитуда волны A должна быть такова, чтобы давление на поршень, умноженное на площадь поперечного сечения трубы S , равнялось приложенной силе, т. е. $e^{-i\omega t}$ дин. Следовательно,

$$A = \frac{l}{S\rho\omega \operatorname{sh}\left(\pi\alpha - i\pi\beta_l - i\frac{\omega l}{c}\right)},$$

и результирующий потенциал скоростей, т. е. функция Грина, равен

$$G_f(x|0|\omega) = \frac{i \operatorname{sh}[\pi\alpha - i\pi\beta_l - i(\omega/c)(l-x)]}{S\rho\omega \operatorname{sh}[\pi\alpha - i\pi\beta_l - i(\omega l/c)]}. \quad (11.1.36)$$

Для нахождения «отклика» на единичный импульс, сообщаемый поршню, нужно построить импульсную функцию g , преобразованием Лапласа которой является G .

Если импеданс поршня z_l не зависит от ω , то α и β_l также не зависят от ω , и функцию g легко найти при помощи таблицы преобразований Лапласа:

$$g_f(x|0|t) = \frac{i}{S\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-2\pi n(\alpha - i\beta_l)u} \left[t - \frac{x}{c} - 2n \frac{l}{c} \right] - e^{-2\pi(n+1)(\alpha - i\beta_l)u} \left[t + \frac{x}{c} - 2(n+1) \frac{l}{c} \right] \right\}. \quad (11.1.37)$$

Скорость частиц и давление, будучи производными от g , содержат дельта-функции. Первый член при $n=0$ представляет исходную импульсную волну, движущуюся вперед от поршня, второй член при $n=0$ — первую отраженную волну, возвращающуюся к началу координат с амплитудой, уменьшенной в $e^{-2\pi\alpha}$ раз и, возможно, с обратным знаком (если z_l действительно, то β_l равно либо 0, либо $\pi/2$) и т. д., точно так же, как в формуле (11.1.32) для струны. Как и в формуле для струны, реакция системы на произвольную силу $f(t)$, приложенную к поршню, может быть получена интегрированием. Так, если $f(t)=0$ при $t < 0$, то скорость частиц равна

$$v(x, t) = \frac{1}{S\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-2\pi n(\alpha - i\beta_l)u} f\left(t - \frac{x + 2nl}{c}\right) + e^{-2\pi(n+1)(\alpha - i\beta_l)u} f\left(t + \frac{x - 2(n+1)l}{c}\right) \right\}. \quad (11.1.38)$$

С другой стороны, если смещение поршня $\xi_0(t)$ задано как функция времени, то смещение частиц может быть получено опять-таки по формуле (11.1.35). Если смещение поршня чисто гармоническое с единичной амплитудой, то установившееся смещение частиц равно

$$G_d(x|0|\omega) = \frac{\operatorname{ch}[\pi(\alpha - i\beta_l) - i(\omega/c)(l-x)]}{\operatorname{ch}[\pi(\alpha - i\beta_l) - i(\omega l/c)]},$$

а соответствующая импульсная функция —

$$g_d(x|0|t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ e^{-2\pi n(\alpha - i\beta l)} \delta\left(t - \frac{x+2nl}{c}\right) + e^{-2\pi(n+1)(\alpha - i\beta l)} \delta\left(t + \frac{x-2(n+1)l}{c}\right) \right\}.$$

Наконец, при смещении поршня $\xi_0(t)$ смещение частиц определяется выражением

$$\xi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ e^{-2\pi n(\alpha - i\beta l)} \xi_0\left(t - \frac{x+2nl}{c}\right) + e^{-2\pi(n+1)(\alpha - i\beta l)} \xi_0\left(t + \frac{x-2(n+1)l}{c}\right) \right\}. \quad (11.1.39)$$

Труба с переменным поперечным сечением. Когда площадь поперечного сечения трубы S меняется вместе с расстоянием x вдоль оси, так что \sqrt{S} по-прежнему остается малым по сравнению с длиной звуковой волны, волна по-прежнему будет одномерной в первом приближении сравнительно с отношением \sqrt{S} к длине волны. Уравнение колебаний не будет, конечно, обыкновенным волновым уравнением. В трубе переменного сечения скорости частиц v меняются от точки к точке в соответствии с изменением S . Однако мы должны, разумеется, предположить, что v постоянна на всем поперечном сечении для каждого x .

Видоизменяя в соответствии с нашими теперешними условиями рассуждение § 2.3, находим, что ускорение элемента объема среды, как и ранее, пропорционально градиенту давления:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (11.1.40)$$

Далее, при смещении среды на малую величину ξ относительное изменение объема тонкого слоя среды толщиной dx , расположенного поперек трубы, равно

$$\frac{dV}{V} = \frac{S\xi + dx \frac{\partial}{\partial x}(S\xi) - S\xi}{Sdx} = \frac{1}{S} \frac{\partial(S\xi)}{\partial x}.$$

Из соотношения между упругостью среды и скоростью звука c находим, что $-dV/V = P/\rho c^2$. Дифференцируя по времени, получаем

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x}(Sv) = - \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (11.1.41)$$

Сравнивая это уравнение с (11.1.40), получаем окончательное уравнение для определения избыточного давления и потенциала скоростей

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad P = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (11.1.42)$$

Этому модифицированному волновому уравнению, которое приближенно учитывает изменение величины поперечного сечения в зависимости от x , удовлетворяет как давление, так и скорость. Уравнение дает хорошее приближение, пока величина производной \sqrt{S} по x много меньше единицы (т. е. пока труба остается достаточно гладкой). До тех пор пока это условие выполнено, истинная скорость среды приблизительно параллельна оси x и приблизительно постоянна в поперечном сечении трубы, так что поток среды I через сечение трубы может считаться равным vS .

Нетрудно оценить влияние такого малого изменения поперечного сечения на амплитуду волны. В соответствии с рассуждениями, приведенными на стр. 295 тома I, произведение давления и скорости среды равно плотности потока энергии, или *интенсивности* звуковой волны. Полный поток энергии через трубу, усредненный по времени, для установившейся волны не должен зависеть от расстояния вдоль трубы; в противном случае на некотором участке трубы энергия будет накапливаться и волна не будет установившейся. Общее выражение для установившейся волны имеет следующий вид:

$$\psi = A(x) e^{\pm i\varphi(x) - i\omega t}, \quad (11.1.43)$$

где A — амплитуда волны, а φ обычно называется *фазой* волны. Поскольку P и v пропорциональны A , интенсивность пропорциональна A^2 . Из сказанного выше об общем потоке энергии следует, что SA^2 в нашем случае не зависит от x (с той степенью точности, о которой идет речь), а, значит, A обратно пропорционально \sqrt{S} .

Зависимость A и φ от x легче всего найти, подставив (11.1.43) в уравнение (11.1.42) и приравняв нулю действительную и мнимую части отдельно:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \frac{1}{SA} \frac{d}{dx} \left(S \frac{dA}{dx}\right), \quad \frac{d}{dx} \left(SA^2 \frac{d\varphi}{dx}\right) = 0. \quad (11.1.44)$$

Вспомня, что dS/dx мало по сравнению с \sqrt{S} [без чего уравнение (11.1.42) не имело бы места], мы можем получить решение этих двух уравнений последовательными приближениями. Для «нулевого» приближения принимаем A постоянным и $d\varphi/dx = \omega/c$. При этом мы совершенно не учитываем изменения S и получаем известное решение $Ae^{\pm i(\omega/c)x - i\omega t}$, справедливое для трубы постоянного сечения. Следующее приближение дает $A = C/\sqrt{S}$ и $\varphi = \omega x/c$. При этом второе уравнение удовлетворяется точно, но в первом остается малый член $-(1/\sqrt{S})(d^2\sqrt{S}/dx^2)$.

Второе приближение

$$A = \frac{C}{\sqrt{S}}, \quad \varphi = \int_0^x \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{S}} \frac{d^2\sqrt{S}}{dx^2} \right]^{1/2} dx$$

удовлетворяет первому уравнению, но оставляет малый член во втором и т. д. В этом приближении давление и скорость частиц среды для волн в обоих направлениях приближенно выражаются так:

$$P \simeq - \frac{i\rho\omega}{\sqrt{S}} [C_+ e^{i\varphi(x)} + C_- e^{-i\varphi(x)}] e^{-i\omega t} \simeq - \frac{i\rho\omega}{\sqrt{S}} C \operatorname{sh} [\pi(\alpha - i\beta) + i\varphi(x)] e^{-i\omega t},$$

$$v \simeq - \frac{i\omega}{c\sqrt{S}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{S}} \frac{d^2\sqrt{S}}{dx^2}} [C_+ e^{i\varphi} - C_- e^{-i\varphi}] e^{-i\omega t} \simeq - \frac{i\omega}{c\sqrt{S}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{S}} \frac{d^2\sqrt{S}}{dx^2}} C \operatorname{ch} [\pi(\alpha - i\beta) + i\varphi(x)] e^{-i\omega t}.$$

Случай *экспоненциального рожка* можно проанализировать детально. Здесь $S = S_0 e^{2x/h}$, так что отношение $(1/\sqrt{S})(d^2\sqrt{S}/dx^2) = 1/h^2$ постоянно. В этом случае для волны, распространяющейся в положительном направлении ($C_- = 0$),

$$P \simeq - \frac{i\rho\omega}{\sqrt{S_0}} C_+ \exp \left[ix \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{1}{h}\right)^2} - i\omega t - \frac{x}{h} \right], \quad (11.1.45)$$

$$v \simeq - \frac{i}{\sqrt{S_0}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{1}{h}\right)^2} C_+ \exp \left[ix \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{1}{h}\right)^2} - i\omega t - \frac{x}{h} \right].$$

Амплитуда давления в экспоненциальном рожке при смещении поршня в точке $x=0$ с единичной амплитудой и частотой $\omega/2\pi$ ($\xi = -v/i\omega$) равна

$$G_d(x|0|\omega) = \frac{\rho c p^2}{\sqrt{p^2 + (c/h)^2}} \exp \left[-\frac{x}{h} - \frac{x}{c} \sqrt{p^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2} \right],$$

$$p = -i\omega.$$

Таблица в конце настоящей главы показывает, что волна давления в рожке, порожденная смещением поршня от единичного импульса, имеет вид

$$g_d(x|0|t) = \rho c e^{-x/h} \left(t - \frac{x}{c} \right) \frac{d^2}{dt^2} J_0 \left[\frac{c}{h} \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right]. \quad (11.1.46)$$

Наконец, волна давления, порожденная смещением поршня на величину $\xi_0(t)$ ($t > 0$) внутри бесконечного экспоненциального рожка (т. е. настолько длинного, что волны, отраженные от конца рожка, не возвращаются к месту наблюдения), по формуле (11.1.15) будет иметь вид

$$P(x, t) = \rho c e^{-x/h} \int_{x/c}^t \xi_0(t-\tau) \frac{d^2}{d\tau^2} J_0 \left[\frac{c}{h} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right] d\tau. \quad (11.1.47)$$

Эта формула показывает, что волна меняет свою форму при продвижении вдоль экспоненциальной трубы [формула (11.1.39) показывает, что она не меняет формы в трубе постоянного сечения]. Давление в точке, отстоящей на расстоянии x от поршня, в момент времени t зависит от движения поршня в течение времени, протекшего от начала его движения ($t=0$) до момента $t-x/c$. В трубе постоянного сечения это давление зависело бы только от смещения поршня в момент $t-x/c$. Поскольку производная J_0'' имеет наибольшее значение, когда ее аргумент равен нулю, привнос от смещения поршня при $t-x/c$ больше, чем привносы от смещений в предшествующие моменты времени, особенно когда c/h мало. Однако этой зависимостью от предшествующих моментов времени в рассматриваемом случае пренебрегать нельзя.

Элементы акустической цепи. Обычно уравнения (11.1.44) достаточно точно описывают звуковые волны в трубах, площадь поперечного сечения которых мало меняется при изменении x . Если же S меняется резко (т. е. на промежутке, малом по сравнению с длиной волны), то возникает явление отражения, и отраженную волну можно (приближенно) рассчитать, приравняв давления и полные потоки по обе стороны от места изменения сечения.

Для этого подсчета полезно установить аналогию с явлениями в линиях электропередачи. Давление является аналогом напряжения, а полный поток Sv — аналогом тока (обозначение I будет напоминать об этой аналогии). Сопряжение решений в точке соединения может быть осуществлено введением эквивалентного импеданса

$$Z = \frac{P}{I} = \frac{1}{S} \frac{P}{v} = \frac{z}{S}, \quad (11.1.48)$$

поскольку P и I непрерывны в окрестности точки соединения.

Например, эквивалентный входной импеданс на одном из концов бесконечной трубы постоянного сечения, площадь поперечного сечения которой есть S , равен $\rho c/S$, а входной импеданс на конце $x=0$ трубы постоянного сечения длины l , на другом конце которой имеется эквивалентный импеданс Z_l , равен

$$Z_0 = \frac{\rho c}{S} \operatorname{th} \left[\pi (a - i\beta_l) - i \frac{\omega l}{c} \right], \quad (11.1.49)$$

где

$$\operatorname{th}(\pi\alpha - i\pi\beta_l) = \frac{SZ_l}{\rho c}.$$

Изменение размеров поперечного сечения вызывает отражение. Если площадь поперечного сечения трубы между $x=l$ и $x=\infty$ равна S_l , а между $x=0$ и $x=l$ она равна S_0 , то эквивалентный импеданс (в положительном направлении) равен $\rho c/S_l$, а эквивалентный импеданс при $x=0$ равен

$$\frac{\rho c}{S_0} \operatorname{th} \left[\operatorname{Arth} \frac{S_0}{S_l} - i \frac{\omega l}{c} \right].$$

При помощи этой формулы и предыдущих соотношений легко установить, что отраженная от соединения волна претерпевает изменение знака при $S_l > S_0$, не меняет знак при $S_l < S_0$, а при $S_l = S_0$ отраженной волны вовсе не существует.

Короткий и широкий участок трубы аналогичен емкости в линии передачи. Дополнительный объем V «накапливает» дополнительное смещение среды. Если полный приток в дополнительный объем равен $Q = \int I dt$, то соотношение между Q и P , как обычно, имеет вид $P = \rho c^2 Q/V$ и, таким образом, эквивалентная емкость равна

$$C = \frac{V}{\rho c^2}. \quad (11.1.50)$$

С другой стороны, короткий и узкий участок трубы подобен индуктивности. Разность давлений по обе стороны сужения вызывает ускорение

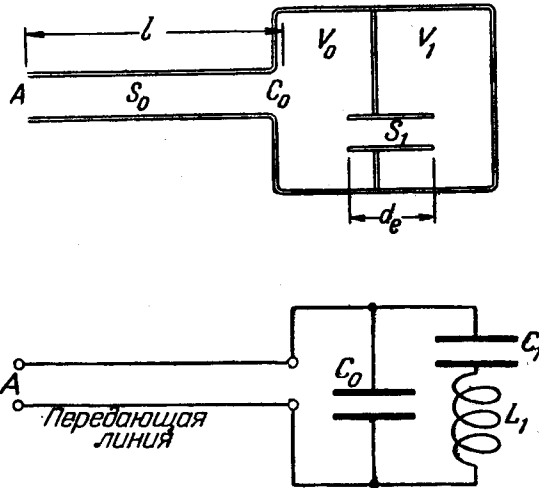


Рис. 11.1. Акустический контур и эквивалентный электрический контур.

течения в этой суженной части, обратно пропорциональное содержащейся в ней массе. Сила, действующая на эту «пробку», равна $(\Delta P)S$, где ΔP — разность давлений, а S — площадь поперечного сечения суженного участка. Ускоряемая масса равна произведению ρ на объем «пробки» Sd_e , где d_e — эффективная длина сужения (мы вскоре определим, что значит «эффективная»). Ускорение равно, конечно, dv/dt , а Sv есть объемный поток I через сужение. Следовательно, уравнение движения среды через

сужение будет иметь вид

$$S \Delta P = \rho S d_e \frac{dv}{dt}, \quad \text{или} \quad \Delta P = \frac{\rho d_e}{S} \frac{dI}{dt},$$

и по аналогии с электрической цепью величину

$$L = \frac{\rho d_e}{S} \quad (11.1.51)$$

можно назвать *эквивалентной индуктивностью*. Такую индуктивность следует ввести в эквивалентный электрический контур, чтобы рассчитать акустический режим. Так, например, акустический контур, изображенный на рис. 11.1, эквивалентен электрическому контуру, изображенному в нижней части этого же рисунка, причем передающая линия от A до C_0 (длины l) имеет характеристический импеданс $\rho c/S_0$, емкость C_0 равна $V_0/\rho c^2$, индуктивность L_1 равна $\rho d_e/S_1$, а емкость C_1 равна $V_1/\rho c^2$. *Акустический импеданс* (отношение давления к скорости) в точке A будет, следовательно, равен

$$-i\rho c \operatorname{tg} \left\{ \frac{\omega l}{c} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{S_0}{\rho c \omega} \left(C_0 + \frac{C_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} \right)^{-1} \right] \right\}.$$

Мы использовали эффективную длину сужения вместо его истинной длины, так как аналогия между влиянием суженной части трубы и индуктивностью только приближенная и можно улучшить это приближение, исправляя длину сужения с учетом «концевого эффекта». Сужение можно рассматривать как индуктивность также и с другой точки зрения. Дело в том, что в самом сужении и вблизи него среда движется быстрее и поэтому там происходит *концентрация кинетической энергии* (точно так же, как в дополнительном объеме концентрируется потенциальная энергия). Если в широкой части (поперечное сечение S_0) среда движется со скоростью v , то в узкой части (поперечное сечение S_1) ее скорость будет $v(S_0/S_1)$. Если отношение S_1/S_0 достаточно мало, то кинетическая энергия на единицу длины в суженной части трубы, равная $(1/2)\rho v^2 S_0(S_0/S_1)$, будет значительно больше, чем в остальной части трубы, где она равна $(1/2)\rho v^2 S_0$.

При наличии индуктивности L в электрической цепи магнитная энергия равна $(1/2)LI^2$. Поэтому в нашем случае эквивалентную индуктивность можно найти, вычисляя полную кинетическую энергию «ускоренной» части среды. Мы видим, что эта энергия равна $(1/2)\rho d_e(v^2 S_0^2/S_1) = (1/2)(\rho d_e/S_1)I^2$, где $I = vS_0$ — полный поток через трубу. Мы снова использовали d_e вместо истинной длины сужения, поскольку среда начинает ускоряться, прежде чем она входит в суженную часть, и не может замедлить движения сразу же по выходе из этого сужения. Таким образом, с повышенной скоростью движется большее количество среды, нежели то, которое помещается в суженной части. Величина d_e равна сумме истинной длины d и поправочного члена, учитывающего наружную (по отношению к сужению) ускоряющуюся и замедляющуюся часть среды на обоих концах сужения.

Можно, конечно, поступить так: методами гл. 10 рассчитать безвихревой стационарный поток через сужение и вычислить дополнительную кинетическую энергию, создаваемую сужением. Если эту энергию представить в виде $(1/2)LI^2$, где I — полный поток через суженную часть, то L и будет эквивалентной индуктивностью. На стр. 275 был проведен такой расчет для круглого отверстия радиуса a в пластине пренебрежимой толщины, и там было показано, что кинетическая энергия равна $(1/2)(8\rho/3\pi^2 a)I^2$. Следовательно, для круглого сужения нулевой «длины» эквивалентный импеданс равен $8\rho/3\pi^2 a$, а «концевая поправка» в формуле (11.1.51) в этом предельном случае будет равна $8a/3\pi$. Мы можем теперь попытаться

использовать эту же поправку для круглого сужения истинной длины d , и равенство (11.1.51) примет вид

$$L = \frac{\rho}{\pi a^2} \left(d + \frac{8a}{3\pi} \right). \quad (11.1.52)$$

Эта формула дает хорошее приближение, пока a мало по сравнению с радиусом поперечного сечения остальной части трубы, а d значительно меньше длины волны. Эти ограничения весьма естественны. Действительно, во-первых, вывод стр. 275 был проведен для случая отверстия в бесконечной пластине, и, значит, остальная часть трубы должна быть достаточно широкой, чтобы можно было считать ее стенки удаленными в бесконечность по сравнению с радиусом a . Во-вторых, концепция цепи с сосредоточенными постоянными как для акустических, так и для электрических контуров вообще теряет смысл, если имеется заметная разность фаз на концах одного элемента.

Изложенный метод сопряжения решений уравнения Лапласа на коротких участках с решениями волнового уравнения для получения приближенных решений, удовлетворяющих краевым условиям, весьма полезен в тех случаях, когда краевые условия слишком сложны, чтобы можно было получить точное решение волнового уравнения (но не настолько сложны, чтобы нельзя было найти решение уравнения Лапласа). В дальнейшем мы будем время от времени прибегать к этому методу.

Представление бегущими волнами. В заключение напомним, что общее решение одномерного волнового уравнения может быть составлено из двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\psi = f(ct - x) + F(ct + x). \quad (11.1.53)$$

Используя бегущие волны, можно также удовлетворить краевым условиям, не обращаясь к решениям, выраженным через собственные функции [см., например, (7.3.18)].

В качестве примера рассмотрим простую струну бесконечной длины, простирающуюся вдоль положительной части оси x от точки $x=0$, где закрепление обладает поперечной упругостью и сопротивлением. Другими словами, поперечное перемещение y_0 точки закрепления связано с поперечным усилием $T(\partial y/\partial x)_0$, передаваемым струной, равенством

$$R_0 \frac{\partial y}{\partial t} + K_0 y = T \frac{\partial y}{\partial x}, \quad x = 0. \quad (11.1.54)$$

Подставляя (11.1.53) в (11.1.54), получаем

$$(cR_0 + T) \frac{d}{dz} f(z) + (cR_0 - T) \frac{d}{dz} F(z) + K_0 f(z) + K_0 F(z) = 0. \quad (11.1.55)$$

Если падающая волна $F(ct + x)$ известна, полученное равенство является уравнением для определения f и его решением будет

$$f(z) = e^{-z_0 z} \int_a^z \left[\gamma_0 \frac{d}{du} F(u) - z_0 F(u) \right] e^{z_0 u} du, \quad (11.1.56)$$

где

$$z_0 = \frac{K_0}{cR_0 + T} \quad \text{и} \quad \gamma_0 = \frac{T - cR_0}{T + cR_0},$$

a — произвольная постоянная. Если $K_0 = 0$, т. е. закрепление обладает только трением, то $f(z) = \gamma_0 F(z)$ и

$$y = F(ct + x) + \frac{T - cR_0}{T + cR_0} F(ct - x). \quad (11.1.57)$$

Отраженная волна при этом тождественна с падающей по форме, но отличается по величине коэффициентом отражения γ_0 . Если R_0 бесконечно, то закрепление жесткое ($\gamma_0 = -1$) и отраженная волна отличается от падающей только знаком; если R_0 равно нулю, то закрепление не имеет поперечного импеданса ($\gamma_0 = 1$) и отраженная волна равна по величине и по знаку падающей.

Чтобы удовлетворить начальным условиям, определим f и F из равенств $y = y_0(x)$ и $\partial y / \partial t = v_0(x)$ при $t = 0$. Это даст

$$y = \frac{1}{2} y_0(x + ct) + \frac{1}{2} y_0(x - ct) + \frac{1}{2} U_0(x + ct) - \frac{1}{2} U_0(x - ct), \quad x > ct;$$

$$y = \frac{1}{2} y_0(x + ct) + \frac{1}{2} U_0(x + ct) + \frac{1}{2} [y_0(0) - U_0(0)] e^{\gamma_0(x-ct)} + \tag{11.1.58}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{\gamma_0(x-ct)} \int_0^{ct-x} \left[\gamma_0 \frac{dy_0(u)}{du} + \frac{\gamma_0}{c} v_0(u) - \gamma_0 y_0(u) - \gamma_0 U_0(u) \right] e^{\gamma_0 u} du, \quad x < ct,$$

где $U_0(z) = \frac{1}{c} \int_0^z v_0(u) du$. Третье слагаемое в выражении для $x < ct$ пред-

ставляет влияние начального смещения в закреплении, а четвертое слагаемое (интеграл) соответствует части волны, отраженной от закрепления.

Этим же методом можно рассчитать колебание струны, закрепленной с двух сторон на перемещающихся опорах, отстоящих друг от друга на расстоянии l . Чтобы избежать излишне сложных формул, мы выпишем решение только для случая закрепления с активным сопротивлением. Коэффициенты сопротивления в закреплении $x = 0$ и $x = l$ пусть будут соответственно R_0 и R_l . Учитывая последовательные отражения от обоих концов, получаем

$$y = f(x - ct) + F(x + ct),$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} [y_0(z) - U_0(z)], & l > z > 0; \\ \frac{1}{2} \gamma_0 [y_0(-z) + U_0(-z)], & 0 > z > -l; \\ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_l [y_0(z - 2l) - U_0(z - 2l)], & -l > z > -2l; \\ \frac{1}{2} \gamma_0^2 \gamma_l [y_0(-z - 2l) + U_0(-z - 2l)], & -2l > z > -3l; \\ \dots \end{cases}$$

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} [y_0(z) + U_0(z)], & 0 < z < l; \\ \frac{1}{2} \gamma_l [y_0(2l - z) - U_0(2l - z)], & l < z < 2l; \\ \frac{1}{2} \gamma_l \gamma_0 [y_0(z + 2l) + U_0(z + 2l)], & 2l < z < 3l; \\ \frac{1}{2} \gamma_l^2 \gamma_0 [y_0(4l - z) - U_0(4l - z)], & 3l < z < 4l; \\ \dots \end{cases}$$

где

$$\gamma_0 = \frac{T - cR_0}{T + cR_0}, \quad \gamma_l = \frac{T - cR_l}{T + cR_l}.$$

Если R_0 и R_l бесконечно велики, то оба закрепления жесткие и, поскольку $\gamma_0 = \gamma_l = -1$, каждое отражение приводит к изменению знака, а движение оказывается периодическим с периодом $2l/c$.

Подвижные закрепления. Еще заслуживает рассмотрения случай, когда одно или оба закрепления допускают конечное продольное перемещение. Как показано на рис. 11.2, а, этот случай может быть реализован,

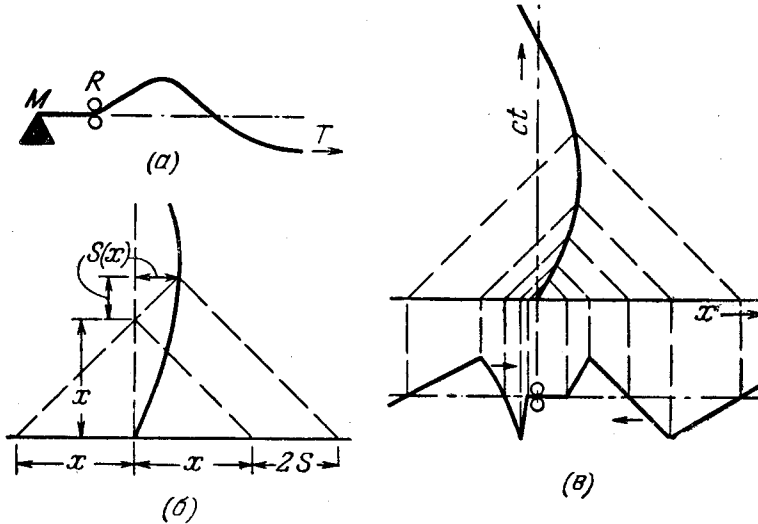


Рис. 11.2. Отражение поперечных волн от подвижного закрепления струны в точке R.

Рис. (б) определяет функцию $S(x)$; рис. (в) показывает, как можно построить отраженную волну.

если струна жестко закреплена в точке M, где создается натяжение, и, кроме того, пропущена через пару роликов R, которые обеспечивают равенство нулю смещения струны в той точке, где они находятся. Предположим, что ролики передвигаются взад и вперед. Соответствующие краевые условия иллюстрируются на рис. 11.2, в, где это движение изображено в (x, ct) -плоскости. Смещение y равно нулю вдоль указанной кривой.

Для решения этой задачи в случае, когда закрепление перемещается по закону $x = A \sin \omega t$, можно использовать функцию $S(x)$, определенную уравнением (см. рис. 11.2, б)

$$S(x) = A \sin k[x + S(x)]. \quad (11.1.59)$$

Для малых значений A функцию $S(x)$ можно выразить в виде ряда по степеням A :

$$S(x) = \left(A - \frac{1}{8} k^2 A^3 + \dots \right) \sin kx + \left(\frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{6} k^3 A^4 + \dots \right) \sin 2kx + \\ + \left(\frac{3}{8} k^2 A^3 - \dots \right) \sin 3kx + \left(\frac{1}{3} k^3 A^4 - \dots \right) \sin 4kx + \dots$$

Изучение рис. 11.2, в показывает, что смещение струны бесконечной длины с закреплением в точке $x = A \sin \omega t$ (натяжение T постоянно),

имеющей начальное смещение $y_0(x)$ и начальную скорость $v_0(x)$, определяется равенством

$$y(x, t) = \frac{1}{2} y_0(x + ct) + \frac{1}{2} y_0(x - ct) + \frac{1}{2} U_0(x + ct) - \frac{1}{2} U_0(x - ct) \quad \text{для } x > ct,$$

$$y(x, t) = \frac{1}{2} y_0(x + ct) + \frac{1}{2} U_0(x + ct) + \frac{1}{2} y_0[ct - x + 2S(ct - x)] -$$

$$- \frac{1}{2} U_0[ct - x + 2S(ct - x)] \quad \text{для } x < ct.$$

Отраженные волны здесь искажены благодаря движению точки закрепления. Заметим, что изложенный анализ применим, если скорость роликов всегда меньше, чем скорость волны c .

Аналогичные формулы могут быть получены для закреплений, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, причем одно или оба закрепления двигаются. Если движение закреплений периодическое, то результирующее движение струны не будет периодическим, за исключением случаев, когда частота колебаний закреплений есть целое кратное частоты $\pi c/l$ свободного колебания струны. Таким же образом можно получить формулы для движения воздуха в трубе, если поршень в точке $x=0$ перемещается на конечное расстояние взад и вперед.

11.2. Волновое движение, две пространственные координаты

Как только мы начинаем рассматривать волны в случае более чем одной пространственной координаты, мы встречаемся с новым явлением, которого не наблюдается у одномерных волн. Решения волнового уравнения с одной пространственной координатой, как было показано в предыдущем параграфе, можно представить общей формулой $f(x - ct) + F(x + ct)$, соответствующей наложению двух волн противоположного направления. Каждая волна движется в одном из двух направлений со скоростью c и не меняет своей формы во время движения. Зависимость от времени, с точностью до коэффициента размерности c , такая же, как зависимость от пространственной координаты, и каждая отдельная волна в последующий момент выглядит так же, как и секунду ранее, но она оказывается сдвинутой на расстояние c . Путь любой точки отдельной волны в плоскости x и t является *характеристикой* $x \pm ct = \text{const}$ (см. стр. 636 тома I).

В случае двух и более пространственных измерений направлений распространения волн бесконечно много. Существуют одномерные решения вида $F(x \cos u + y \sin u - ct)$, которые нам уже известны, но имеются и другие, более сложные процессы, когда волна распространяется одновременно в различных направлениях, меняя свою форму в процессе распространения [см. рассуждения в связи с формулой (6.1.16)]. Эти волны должны быть изучены прежде, чем мы сможем удовлетворить двумерным или трехмерным краевым условиям.

Основываясь на формуле (10.3.2), можно ожидать, что интегральное выражение

$$\phi(x, y, t) = \int_0^{2\pi} F_u(x \cos u + y \sin u - ct) du \quad (11.2.1)$$

пригодно для того, чтобы представить любую волну в случае двух пространственных измерений (всего три измерения). В частности, решение уравнения Гельмгольца $(\nabla^2 + k^2)\phi = 0$ для волн частоты $\omega/2\pi = kc/2\pi$,