имеющей начальное смещение $y_0(x)$ и начальную скорость $v_0(x)$, определяется равенством

$$y(x,\ t)=\frac{1}{2}y_0(x+ct)+\frac{1}{2}y_0(x-ct)+\frac{1}{2}U_0(x+ct)-\frac{1}{2}U_0(x-ct)\ \text{для}\ x>ct,$$

$$y(x,\ t)=\frac{1}{2}y_0(x+ct)+\frac{1}{2}U_0(x+ct)+\frac{1}{2}y_0[ct-x+2S(ct-x)]-$$
$$-\frac{1}{2}U_0[ct-x+2S(ct-x)]\qquad \text{для}\ x<ct.$$

Отраженные волны здесь искажены благодаря движению точки закрепления. Заметим, что изложенный анализ применим, если скорость роликов всегда меньше, чем скорость волны c.

Аналогичные формулы могут быть получены для закреплений, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, причем одно или оба закрепления двигаются. Если движение закреплений периодическое, то результирующее движение струны не будет периодическим, *за исключением* случаев, когда частота колебаний закреплений есть целое кратное частоты $\pi c/l$ свободного колебания струны. Таким же образом можно получить формулы для движения воздуха в трубе, если поршень в точке $x=0$ перемещается на конечное расстояние взад и вперед.

11.2. Волновое движение, две пространственные координаты

Как только мы начинаем рассматривать волны в случае более чем одной пространственной координаты, мы встречаемся с новым явлением, которого не наблюдается у одномерных волн. Решения волнового уравнения с одной пространственной координатой, как было показано в предыдущем параграфе, можно представить общей формулой $f(x-ct)+F(x+ct)$, соответствующей наложению двух волн противоположного направления. Каждая волна движется в одном из двух направлений со скоростью c и не меняет своей формы во время движения. Зависимость от времени, с точностью до коэффициента размерности c, такая же, как зависимость от пространственной координаты, и каждая отдельная волна в последующий момент выглядит так же, как и секунду ранее, но она оказывается сдвинутой на расстояние c. Путь любой точки отдельной волны в плоскости x и t является *характеристикой* $x\pm ct=\text{const}$ (см. стр. 636 тома I).

В случае двух и более пространственных измерений направлений распространения волн бесконечно много. Существуют одномерные решения вида $F(x\cos u+y\sin u-ct)$, которые нам уже известны, но имеются и другие, более сложные процессы, когда волна распространяется одновременно в различных направлениях, меняя свою форму в процессе распространения [см. рассуждения в связи с формулой (6.1.16)]. Эти волны должны быть изучены прежде, чем мы сможем удовлетворить двумерным или трехмерным краевым условиям.

Основываясь на формуле (10.3.2), можно ожидать, что интегральное выражение

$$\psi(x,\ y,\ t)=\int_0^{2\pi}F_u(x\cos u+y\sin u-ct)\,du \tag{11.2.1}$$

пригодно для того, чтобы представить любую волну в случае двух пространственных измерений (всего три измерения). В частности, решение уравнения Гельмгольца $(\nabla^2+k^2)\psi=0$ для волн частоты $\omega/2\pi=kc/2\pi$, имеющих временной множитель $e^{-i\omega t}$, представимо в виде

$$\psi(x, y\,|\,\omega) = \int\limits_0^{2\pi} \Phi(u)\, e^{ik(x\cos u + y\sin u)}\, du, \tag{11.2.2}$$

что является частным случаем общей интегральной формулы (5.8.86).

Показатель в подинтегральном выражении с точностью до множителя i является скалярным произведением двумерного вектора $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ и вектора $\mathbf{k} = k\mathbf{a}_u$, имеющего длину $k = \omega/c$ и образующего угол u с осью x. Волна $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}$ — простая гармоническая, а волна $F_u(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}_u - ct)$ является линейной волной общего вида, движущейся в направлении единичного вектора $\mathbf{a}_u$ (образующего угол u с осью x). Комбинация таких волн, распространяющихся по различным направлениям и с различными амплитудами и фазами для каждого направления, образует наиболее общее решение волнового уравнения (или уравнения Гельмгольца). (При двух пространственных измерениях бывает иногда необходимо распространить интегрирование на комплексные значения u.)

Полезно выразить все собственные функции и функции Грина в этой форме, так как взаимосвязь между ними станет при этом еще нагляднее.

Преобразование Фурье и функция Грина. Полезным введением к этому параграфу будет рассмотрение взаимосвязи между представлением решений в виде интеграла Фурье, функциями Грина и выражениями (11.2.1), (11.2.2). Предположим, что ищется решение неоднородного уравнения

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(x, y, t) \tag{11.2.3}$$

на всей плоскости x,y, причем единственным краевым условием является требование, чтобы излучение на бесконечности было направлено вовне.

Одним из возможных путей решения этой задачи могло бы явиться использование функции Грина уравнения Гельмгольца для единичного источника частоты $\omega/2\pi$, находящегося в точке (x_0, y_0): $G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|\,\omega) = i\pi H_0^{(1)}(kR)$, где $k = \omega/c$ и $R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ [см. (7.2.18)]. Такое установившееся решение для единичного чисто гармонического источника является, согласно правилу (11.1.16), преобразованием Лапласа решения $g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|\,t)$ уравнения (11.2.3) для единичного импульса при $t = 0$ в точке (x_0, y_0), т. е. для $\rho = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(t)$.

Предположим, однако, что сначала выполнено преобразование Фурье уравнения (11.2.3) по всем трем переменным. Всегда имеют место соотношения (предполагая, что ранее сформулированные условия сходимости выполняются)

$$\begin{gathered}\psi(x, y\,|\,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta\,|\,\omega)\, e^{i\xi x + i\eta y - i\omega t}\, d\xi\, d\eta\, d\omega,\\ F(\xi, \eta\,|\,\omega) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y\,|\,t)\, e^{-i\xi x - i\eta y + i\omega t}\, dx\, dy\, dt,\end{gathered} \tag{11.2.4}$$

где F — преобразование Фурье функции ψ. Например, преобразование Фурье правой части уравнения для единичного импульсного источника $-4\pi\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(t-t_0)$ равно $-4\pi e^{-i\xi x_0 - i\eta y_0 + i\omega t_0}$. Подставляя интеграл для ψ в уравнение (11.2.3) и приравнивая подинтегральные выражения в обеих частях, получаем преобразование Фурье решения:

$$F(\xi, \eta\,|\,\omega) = \frac{4\pi e^{-i\xi x_0 - i\eta y_0 + i\omega t_0}}{\xi^2 + \eta^2 - (\omega/c)^2}. \tag{11.2.5}$$

Общее решение уравнения (11.2.3) для неограниченного пространства может быть получено из этого элементарного решения интегрированием. Например, решением неоднородного уравнения Гельмгольца для единичного чисто гармонического линейного источника в точке (x_0, y_0) является преобразование Фурье функции F по пространственным координатам

$$G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|\,\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}}{k^2-(\omega/c)^2}\,d\eta=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}k\,dk\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{e^{ikR\cos(u-\theta)}}{k^2-(\omega/c)^2}\,du,$$

где $\mathbf{k}$ — вектор с компонентами ξ, η, составляющий угол u с осью x, а $\mathbf{R}$ — вектор с компонентами $x-x_0$, $y-y_0$, составляющий угол θ с осью x. Интегрирование по u, как это следует из формулы (5.3.65) или из таблицы в конце гл. 10, приводит к бесселевой функции $2\pi J_0(kR)$. Для интегрирования по k мы используем следующее соотношение:

$$K_0(\alpha R)=\int\limits_0^{\infty}\frac{J_0(kR)}{k^2+\alpha^2}\,k\,dk,\qquad K_0(z)=\frac{1}{2}\pi i H_0^{(1)}(iz),$$

которое может быть получено при помощи интегральных представлений цилиндрических функций и которое приведено в конце предыдущей главы. Полагая $\omega=ip$ (см. стр. 320), в конце концов получаем

$$G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|\,\omega)=2K_0\left(\frac{pR}{c}\right)=i\pi H_0^{(1)}\left(\frac{\omega R}{c}\right),$$

что совпадает с выражением (7.2.18) для функции Грина двумерного уравнения Гельмгольца.

Окончательное выражение решения уравнения (11.2.3) для импульсного источника содержит еще одно интегрирование по ω. Мы можем вместо этого использовать метод стр. 323 и найти функцию, имеющую G своим преобразованием Лапласа. Незначительное видоизменение интегрального представления для функции H_0 дает

$$K_0\left(\frac{pR}{c}\right)=\int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-pRu/c}}{\sqrt{u^2-1}}\,du=\int\limits_{R/c}^{\infty}\frac{e^{-pt}\,dt}{\sqrt{t^2-(R/c)^2}}\,.$$

Следовательно, $2K_0(pR/c)$ является преобразованием Лапласа функции $2/\sqrt{t^2-(R/c)^2}$ при $t>R/c$. Таким образом, решение уравнения (11.2.3) для импульсного источника в точке (x_0, y_0) имеет вид [см. (7.3.15)]

$$g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|\,t)=\begin{cases}0, & t<R/c,\\ 2/\sqrt{t^2-(R/c)^2}\,, & t>R/c.\end{cases}\tag{11.2.6}$$

Поэтому в двумерном случае смещение на расстоянии R от источника импульсного возмущения, происшедшего при $t=0$, равно нулю до момента R/c (время, требующееся для прохождения волновым фронтом расстояния R); после этого момента оно пропорционально $1/\sqrt{t^2-(R/c)^2}$. Эта волна имеет крутой передний фронт, но позади себя оставляет «возмущение», лишь медленно спадающее до нуля, как об этом уже упоминалось в связи с формулой (6.1.16). Поведение волны, порожденной источниками, распределение которых задается функцией $\rho(r, \varphi, t)$ (предполагается, что эта функция равна нулю при $t<0$), легче всего изучить, положив, что точка наблюдения (r, φ) совпадает с началом координат, и пользуясь полярными координатами R, θ для точки источника. Применяя формулу (11.1.15), видим, что решение уравнения (11.2.3) имеет вид

$$\psi(0,\,0,\,t)=2\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{ct}R\,dR\int\limits_{R/c}^{t}\frac{\rho(R,\,\theta,\,t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-(R/c)^2}}d\tau=$$
$$=2c\int\limits_0^{t}d\tau\int\limits_0^{c\tau}R\,dR\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho(R,\,\theta,\,t-\tau)}{\sqrt{c^2\tau^2-R^2}}d\theta. \qquad (11.2.7)$$

Второе выражение показывает, что по прошествии времени t после момента, когда начинает действовать источник, решение ψ зависит только от поведения функции ρ тех источников, расстояние которых от точки наблюдения (начала координат) не превосходит ct. Эффект более далеких источников сказывается лишь по прошествии более продолжительного времени.

Эти формулы следует сравнить с формулой (7.3.19), которая дает решение для специфического начального условия при $t=0$. Взаимосвязь между ними очевидна.

Мы можем представить наше решение также в другой форме, которая подчеркивает связь с формулой (11.2.1). Чтобы написать общую формулу для случая функции плотности источников $\rho(x,\,y,\,t)\,\delta(t-t_0)$, в первую очередь напишем преобразование Фурье этой функции плотности:

$$P\,(\xi,\,\eta\,|\,t_0)\,e^{i\omega t_0},\qquad \text{где}\qquad P=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\rho\,(x,\,y,\,t_0)\,e^{-i\xi x-i\eta y}\,dx\,dy.$$

Уравнение для F — преобразования Фурье функции ψ — получается подстановкой первого из выражений (11.2.4) в (11.2.3) для случая вышеуказанной плотности. В результате получим

$$F=\frac{4\pi P\,(\xi,\,\eta\,|\,t_0)\,e^{i\omega t_0}}{\xi^2+\eta^2-(\omega/c)^2}\,.$$

Преобразование Фурье этого выражения дает

$$\psi\,(\mathbf{r}\,|\,t\,|\,t_0)=\frac{1}{2\pi^2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P\,(\xi,\,\eta\,|\,t_0)}{\xi^2+\eta^2-(\omega/c)^2}\,e^{i\xi x+i\eta y-i\omega(t-t_0)}\,d\xi\,d\eta\,d\omega=$$
$$=-\frac{c^2}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}du\int\limits_0^{\infty}P\,(k,\,u\,|\,t_0)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,k\,dk\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\,(t-t_0)}}{\omega^2-k^2c^2}\,d\omega.$$

Интеграл по ω имеет форму, удобную для перехода к контурному интегрированию. Два полюса подинтегральной функции близки к контуру, и мы должны выбрать путь интегрирования так, чтобы удовлетворить физическим требованиям и краевым условиям. Учитывая вычет в точке $\omega=kc$, приходим к расходящейся волне, которая является решением нашей задачи, но вычет в точке $\omega=-kc$ не нужен, так как он дает сходящуюся волну. Поэтому мы учитываем при $t>t_0$ вычет только в одном полюсе, что приводит к выражению $(\pi i/kc)\,e^{-ikc(t-t_0)}$. Следовательно, выражение для ψ при $t>t_0$ принимает вид

$$\psi\,(\mathbf{r}\,|\,t\,|\,t_0)=\frac{c}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}du\left\{\int\limits_0^{\infty}P\,(k,\,u\,|\,t_0)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-ikc\,(t-t_0)}\,dk\right\},$$

и решением уравнения (11.2.3) для произвольной плотности источников ρ, равной нулю при $t < 0$ и $\rho(x, y, t)$ при $t > 0$, является

$$\psi(x, y, t) = \int_0^\infty dk \left\{ \int_0^{2\pi} \Phi(k, u, t)\, e^{ik(x\cos u + y\sin u - ct)}\, du \right\}, \qquad (11.2.8)$$

где

$$\frac{2\pi i}{c}\Phi(k, u, t) = \int_0^t P(k, u, t_0)\, e^{ikct_0}\, dt_0 =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} dx_0\, dy_0 \int_0^t \rho(x_0, y_0, t_0)\, e^{ik(x_0\cos u + y_0\sin u - ct_0)}\, dt_0.$$

Эта формула представляет ψ в виде интеграла по k от интегрального выражения типа (11.2.2) и одновременно является общей формулой типа (11.2.1).

Прямоугольные координаты. Когда границы прямоугольные, интегралы в формулах (11.2.1) и (11.2.2) вырождаются в суммы. Например, для гибкой мембраны, которая удерживается с натяжением T *дн/см* на неподвижном каркасе, расположенном на прямых $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, собственными функциями являются $\sin(\pi m x/a)\sin(\pi n y/b)$, где m и n — целые числа; собственные частоты равны $\omega_{mn}/2\pi$, где

$$\omega_{mn}^2 = \pi^2 c^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right].$$

Если краевые условия на том же граничном прямоугольнике таковы, что нормальная составляющая градиента должна быть равна нулю, то собственными функциями являются $\cos(\pi m x/a)\cos(\pi n y/b)$, а собственные значения остаются те же, что и в предыдущем случае, и добавляется $\omega_{00} = 0$.

Функция Грина для чисто гармонической вынуждающей силы, которая сосредоточена в точке (x_0, y_0), лежащей внутри области, может быть найдена теперь хорошо известными методами:

$$G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|\,\omega) = \frac{16}{\pi a b}\sum_{m,\,n} \frac{\sin\left(\dfrac{\pi m x_0}{a}\right)\sin\left(\dfrac{\pi m x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{\pi n y_0}{b}\right)\sin\left(\dfrac{\pi n y}{b}\right)}{(m/a)^2 + (n/b)^2 - (\omega/\pi c)^2}. \qquad (11.2.9)$$

Отсюда, применяя метод преобразования Лапласа, мы можем получить выражение для решений при любом распределении источников и при любой зависимости от времени. Импульсная функция, соответствующая единичному импульсу, приложенному в точке (x_0, y_0) при $t_0 = 0$, такова:

$$g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|\,t) = \frac{16c^2}{ab}\sum_{m,\,n} \frac{\sin\left(\dfrac{\pi m x_0}{a}\right)\sin\left(\dfrac{\pi m x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{\pi n y_0}{b}\right)\sin\left(\dfrac{\pi n y}{b}\right)}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}\sin(\omega_{mn} t), \qquad (11.2.10)$$

где $\omega_{mn}^2 = (\pi c m/a)^2 + (\pi c n/b)^2$.

Другую форму стационарной функции Грина G можно получить, применяя, как и выше, ряд Фурье по y и находя решения неоднородных уравнений по x, имеющие вид одного члена с особенностью при $x = x_0$. Полагая

$$G = \sum F_n(x)\sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right),$$

имеем для F_n уравнения

$$\frac{d^2F_n}{dx^2}+k_n^2F_n=-\frac{8\pi}{b}\sin\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right)\delta(x-x_0),$$

где $k_n^2=(\omega/c)^2-(\pi n/b)^2$. Решения этих уравнений, обращающиеся в нуль при $x=0$ и $x=a$, могут быть легко найдены, и мы приходим в конце концов к формуле для функции Грина

$$G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|\,\omega)=\frac{8\pi}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{k_n\sin(k_n a)}\begin{cases}\sin(k_n x_0)\sin[k_n(a-x)], & x>x_0,\\ \sin(k_n x)\sin[k_n(a-x_0)], & x<x_0.\end{cases} \tag{11.2.11}$$

Эта формула эквивалентна, конечно, формуле (11.2.9) и приводит при помощи преобразования Лапласа или Фурье к выражению (11.2.10). Мы можем точно так же получить еще одну формулу для G, заменяя в (11.2.11) x, x_0, a на y, y_0, b.

Другие краевые условия. Последняя форма функции Грина особенно удобна, когда приходится иметь дело с более сложными краевыми условиями. Так, например, сторона $x=a$ может быть закреплена нежестко, допуская смещение, пропорциональное поперечной силе, как это было принято для струны на стр. 324. Поскольку поперечная сила на единицу длины границы равна $T\partial\psi/\partial n$, где n — нормаль к границе в плоскости (x, y) $(-T\partial\psi/\partial x$ для $x=a)$, это условие равносильно требованию, чтобы некоторая линейная комбинация величин ψ, $\dot\psi$, $\ddot\psi$ была пропорциональна производной $\partial\psi/\partial n$ на границе; это последнее требование в свою очередь эквивалентно для простого гармонического колебания общему однородному краевому условию на границе $x=a$:

$$\psi=Y(\mathbf{r}^s,\ \omega)\frac{\partial\psi}{\partial n}=-Y\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Величина Y — комплексное отношение смещения к нормальной производной смещения в точке границы для простого гармонического колебания частоты $\omega/2\pi$ — является функцией ω и рассматриваемой точки границы. Она может быть названа *удельным адмитансом* границы. Для простейшей реакции закрепления, порождаемой инерцией, трением и упругостью, $Y=[-M\omega^2-i\omega R+K]^{-1}$, но во многих случаях зависимость от ω сложнее; однако во всех физически осуществимых случаях мнимая часть Y положительна (поскольку мы принимаем зависимость от времени в виде $e^{-i\omega t}$).

Если адмитанс Y постоянен на линии $x=a$ и равен нулю на остальной части границы (жесткое закрепление), то функция Грина имеет вид

$$G=\frac{8\pi}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n y_0/b)\sin(\pi n y/b)}{k_n\sin(k_n a+\theta_n)}\begin{cases}\sin(k_n x_0)\sin[k_n(a-x)+\theta_n], & x>x_0,\\ \sin(k_n x)\sin[k_n(a-x_0)+\theta_n], & x<x_0,\end{cases} \tag{11.2.12}$$

где $k_n^2=(\omega/c)^2-(\pi n/b)^2$ и $\operatorname{tg}\theta_n=Yk_n$. Фазовый угол θ является функцией от ω; это — комплексная функция, если Y комплексный.

Как было показано в предыдущем параграфе, чтобы определить собственные частоты колебаний системы, нужно применить преобразование Фурье (или Лапласа) к функции Грина и получить реакцию системы на импульс, приложенный при $t=0$. Значения ω, при которых подинтегральная функция имеет полюсы, являются собственными частотами, а форма «стоячих волн», имеющих эти собственные частоты, определяется характером зависимости от x вычетов в этих полюсах. Далее, было показано, что можно рассчитать переходный процесс для системы при любых начальных условиях, даже если собственные функции в получаемых рядах не являются взаимно ортогональными. Собственные частоты — это те значения ω (деленные на 2π), при которых знаменатели различных членов ряда (11.2.12) обращаются в нуль:

$$\sin(k_n a + \theta_n) = 0, \quad k_n a + \operatorname{arc\,tg}(k_n Y) = \pi m, \tag{11.2.13}$$

где m — положительное целое число. Так как k_n и Y — функции ω, то получается трансцендентное уравнение относительно ω, m, n, a, b и тех физических постоянных участка границы $x = a$, которые входят в выражение адмитанса Y. Если адмитанс Y комплексный (т. е. если Y имеет и активную и реактивную составляющие), то корни ω комплексные, и зависимость от времени свободных колебаний, $e^{-i\omega t}$, включает экспоненциальный множитель, обусловливающий затухание. Значение ω, удовлетворяющее уравнению (11.2.13) для данных значений m и n, может быть записано в виде $\omega_{mn} = 2\pi\nu_{mn} - i\varkappa_{mn}$.

Отметим, между прочим, что, зная Y, можно вычислить ω, и, наоборот, можно вычислить Y, если известны различные корни ω_{mn}. Иногда бывает полезно уметь определить краевые условия по измеренным собственным частотам и постоянным затухания.

Переменный адмитанс границы. Функция Грина в форме (11.2.11) может быть использована для определения свободных колебаний также в тех случаях, когда адмитанс Y границы $x = a$ изменяется от точки к точке вдоль этой границы, т. е. когда Y является функцией не только ω, но и y. Чтобы сделать это, обратимся к формуле (7.1.15), связывающей решение ψ краевой задачи с функцией Грина.

В качестве примера мы можем вместо мембраны рассмотреть акустическую задачу. Пусть часть пространства, ограниченная плоскостями $x = 0$ и $x = a$, $y = 0$ и $y = b$, заполнена некоторой средой, колеблющейся только в плоскости x, y. Решение $\psi(x,y,t)$ является потенциалом скоростей, $-\operatorname{grad}\psi$ — скорость частиц среды, $\rho\partial\psi/\partial t$ — избыточное давление. Предположим, что три стенки $x = 0$, $y = 0$, $y = b$ жесткие, т. е. что нормальная составляющая градиента ψ у этих стенок равна нулю. Однако стенка $x = a$ пористая или не совсем жесткая, так что отношение нормальной составляющей скорости к давлению на этой поверхности не равно нулю. Мы определяем *нормальный акустический импеданс* z этой стенки равенством

$$z = \frac{\text{Давление}}{\text{Нормальная составляющая скорости}} = \frac{i\omega\rho\psi}{\partial\psi/\partial x}, \quad x = a,$$

для простого гармонического колебания с частотой $\omega/2\pi$, так что зависимость ψ от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$. Отношение нормальной составляющей градиента к величине ψ при $x = a$ обозначим через $Y(y, \omega)$, т. е. положим

$$Y(y, \omega)\psi(a, y) = \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=a},$$

где $Y = i\omega\rho/z$ может быть названо *отклоняющим адмитансом* стенки. (Он пропорционален отношению нормального смещения к давлению у стенки.)

Для решения этой краевой задачи (нормальная составляющая градиента равна нулю у стенок $x = 0$, $y = 0$, $y = b$ и равна $Y\psi$ при $x = a$) воспользуемся функцией Грина

$$G(x, y \mid x_0, y_0 \mid \omega) = \tag{11.2.14}$$

$$= -\frac{4\pi}{b}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[\frac{\cos(\pi n y_0/b)}{k_n \sin k_n a}\right] \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \begin{cases} \cos(k_n x_0)\cos[k_n(a-x)], & x > x_0, \\ \cos(k_n x)\cos[k_n(a-x_0)], & x < x_0, \end{cases}$$

где, как и выше, $k_n^2 = (\omega/c)^2 - (\pi n/b)^2$. Поскольку нормальная производная этой функции равна нулю на всех граничных поверхностях, формула (7.1.15) дает

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^b G(x, y \mid a, y_0) \left[\frac{\partial}{\partial x_0} \psi(x_0, y_0) \right]_{x_0 = a} dy_0 =$$

$$= -\frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\cos(\pi n y/b) \cos(k_n x)}{k_n \sin(k_n a)} \int_0^b Y(y_0, \omega) \psi(a, y_0) \cos\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right) dy_0. \qquad (11.2.15)$$

На той части границы, где $Y \neq 0$ (т. е. при $x = a$), это равенство представляет собой интегральное уравнение для ψ. Заметим, что функция $G(x, y \mid a, y_0 \mid \omega)$ разрывна на этой части границы.

Всюду, кроме точек разрыва на части границы $x = a$, мы можем представить решение ψ в виде ряда

$$\psi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(x) \cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right) e^{-i\omega t}. \qquad (11.2.16)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (11.2.15), приходим к уравнениям для определения функций F_m

$$F_n(x) = -\frac{\cos(k_n x)}{k_n \sin(k_n a)} \sum_{m=0}^{\infty} Y_{nm} F_m(a), \qquad (11.2.17)$$

где

$$Y_{mn}(\omega) = \frac{\varepsilon_n}{b} \int_0^b Y(y, \omega) \cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) dy$$

— *матричный элемент* Y в базисе собственных функций $\cos(\pi n y/b)$.

Мы до сих пор еще не определили резонансные частоты и коэффициенты затухания системы. В принципе это можно сделать, полагая $x = a$ в уравнении (11.2.17):

$$\sum_{m=0}^{\infty} Y_{mn} F_m(a) + k_n \operatorname{tg}(k_n a) F_n(a) = 0. \qquad (11.2.18)$$

Эта система имеет нетривиальные решения $F_n(a)$, если равен нулю определитель

$$D = \begin{vmatrix} Y_{00} + k_0 \operatorname{tg}(k_0 a) & Y_{10} & Y_{20} & \dots \\ Y_{01} & Y_{11} + k_1 \operatorname{tg}(k_1 a) & Y_{21} & \dots \\ Y_{02} & Y_{12} & Y_{22} + k_2 \operatorname{tg}(k_2 a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Как Y_{mn}, так и $k_n \operatorname{tg}(k_n a)$ являются функциями от ω. Значения ω, для которых этот определитель равен нулю, являются собственными частотами системы, и соответствующие величины k_n и F_n позволяют вычислить собственные функции ψ. Импеданс z, конечно, может быть и комплексным; в этом случае матричные элементы Y_{mn} будут иметь как мнимые, так и действительные части и корни ω будут комплексными. Действительные части корней — это *собственные частоты* (умноженные на 2π; см. стр. 315 и 318), а мнимые части (которые должны быть отрицательными для поглощающей стенки) являются *коэффициентами затухания*.

Процесс решения и связь между различными факторами станут яснее, если мы подсчитаем приближенное решение для случая, когда матричные элементы Y_{mn} малы по сравнению с величиной $1/b$. Когда все Y_{mn} равны нулю, собственные функции имеют простой вид: $\psi^0_{\sigma\tau} = \cos(\pi\sigma x/a)\cos(\pi\tau y/b)$ (σ, τ — целые числа), и собственные значения равны

$$\omega^0_{\sigma\tau} = c\sqrt{\left(\frac{\pi\sigma}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi\tau}{b}\right)^2}.$$

Естественно предположить, что при малых Y_{mn} в найденные значения ψ и ω нужно внести малые поправки и этим можно воспользоваться для расчетов. В гл. 9 указываются детали этого процесса.

Можно, например, положить, что в членах ряда (11.2.16) коэффициент F_τ значительно больше всех прочих F_m. В уравнениях (11.2.18) члены $Y_{mn}F_m(a)$ при $m \neq \tau$ будут меньше, чем $Y_{\tau n}F_\tau(a)$, и они могут быть отброшены как члены второго порядка. Следовательно, приближенно малые F_n выражаются через F_τ таким образом:

$$F_n(a) \approx -\frac{Y_{\tau n}F_\tau(a)}{k_n \operatorname{tg}(k_n a)}, \quad n \neq \tau.$$

Теперь ω определяется из уравнения (11.2.18), соответствующего $n = \tau$:

$$k_\tau \operatorname{tg}(k_\tau a) \approx -Y_{\tau\tau} + \sum_{m\neq\tau} \frac{Y_{\tau m}Y_{m\tau}}{k_m \operatorname{tg}(k_m a)}. \tag{11.2.19}$$

Вспоминая определение k_n и величину предельного собственного значения $\omega^0_{\sigma\tau}$, мы видим, что $k_\tau a$ должно быть равно $\pi\sigma + e_{\sigma\tau}$, где σ — другое целое число и $e_{\sigma\tau}$ мало по сравнению с π. Собственное значение ω определяется, конечно, равенством

$$\omega^2_{\sigma\tau} = \pi^2 c^2\left[\left(\frac{\sigma}{a} + \frac{e_{\sigma\tau}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{b}\right)^2\right],$$

а величины k_m с достаточной точностью могут быть вычислены по формуле

$$k_m \approx \sqrt{\left(\frac{\pi\sigma}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi\tau}{b}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}, \quad m \neq \tau.$$

Поэтому $k_\tau \operatorname{tg}(k_\tau a) \approx (\pi\sigma e_{\sigma\tau}/a) + (e^2_{\sigma\tau}/a)$ и решение уравнения (11.2.19) с точностью до членов второго порядка относительно малых величин Y_{mn} дает

$$e_{0\tau} \approx \sqrt{-aY_{\tau\tau}} + \sqrt{-\frac{a}{4Y_{\tau\tau}}} \sum_{m\neq\tau} \frac{Y_{\tau m}Y_{m\tau}}{k_m \operatorname{tg}(k_m a)},$$

$$e_{\sigma\tau} \approx -\frac{a}{\pi\sigma}Y_{\tau\tau} - \frac{a^2}{(\pi\sigma)^3}Y^2_{\tau\tau} + \frac{a}{\pi\sigma}\sum_{m\neq\tau}\frac{Y_{\tau m}Y_{m\tau}}{k_m \operatorname{tg}(k_m a)}, \quad \sigma \neq 0.$$

Отсюда можно получить собственные значения $\omega_{\sigma\tau}$ с точностью до членов первого или второго порядка. С точностью до членов первого порядка по Y_{mn} собственные функции имеют вид

$$\psi \approx F_\tau(a)\left\{\cos\left[(\pi\sigma + e_{\sigma\tau})\frac{x}{a}\right]\cos\left(\frac{\pi\tau y}{b}\right) - \sum_{n\neq\tau}\frac{Y_{n\tau}\cos(k_n x)}{k_n \sin(k_n a)}\cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)\right\}e^{-i\omega_{\sigma\tau}t}, \tag{11.2.20}$$

где постоянная $F_\tau(a)$ может быть принята равной единице или выбрана из условия нормировки ψ.

Первый член в этом выражении учитывает краевое условие на границе $x=a$, в некотором роде усредняя его; второй член (ряд) учитывает влияние на решение зависимости Y от расстояния y вдоль рассматриваемой стенки. Если стенка имеет однородное покрытие, так что z и Y не зависят от y, то все матричные элементы $Y_{n\tau}\,(n \neq \tau)$ равны нулю вследствие ортогональности $\cos(\pi\tau y/b)$ и $\cos(\pi n y/b)$ и в выражении (11.2.20) остается только первый член.

При низких частотах стенки часто обладают наряду с активным также и реактивным сопротивлением, зависящим от их упругости, так что

$$z(y,\ \omega)=\rho c\left[\gamma(y)+\frac{i}{\omega}\varkappa(y)\right]=\frac{i\omega\rho}{Y},\quad 0<y<b,$$

где ρc — характеристический импеданс среды (см. стр. 298 тома I), а значит γ и $\varkappa/\omega$ безразмерны. Для низких частот $\varkappa$ значительно больше, чем $\gamma\omega$. Следовательно, матричные элементы выражаются так:

$$Y_{mn}\approx\frac{\omega^2}{c}S_{mn}+i\frac{\omega^3}{c}K_{mn},$$

где

$$S_{mn}=\frac{\varepsilon_n}{b}\int\limits_0^b\frac{1}{\varkappa(y)}\cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)dy$$

и

$$K_{mn}=\frac{\varepsilon_n}{b}\int\limits_0^b\frac{\gamma(y)}{\varkappa^2(y)}\cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)dy.$$

Матрица K может быть названа матрицей активной проводимости, или кондуктанса, а S — матрицей реактивной проводимости, или сусептанса.

В первом приближении собственная функция определяется формулой (11.2.20), в которую вместо Y_{mn} нужно подставить полученные значения. Собственные значения $\omega_{\sigma\tau}$ в первом приближении имеют вид

$$\omega_{\sigma\tau}=2\pi\nu_{\sigma\tau}-i\varkappa_{\sigma\tau},\qquad \varkappa_{\sigma\tau}=\frac{\varepsilon_\sigma c}{2a}[\omega^0_{\sigma\tau}]^2K_{\tau\tau},$$

$$2\pi\nu_{\sigma\tau}=\omega^0_{\sigma\tau}\left[1-\frac{\varepsilon_\sigma c}{2a}S_{\tau\tau}\right],\quad [\omega^0_{\sigma\tau}]^2=\pi^2c^2\left[\left(\frac{\sigma}{a}\right)^2+\left(\frac{\tau}{b}\right)^2\right],$$

где $\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\ldots=2$. Каждая собственная частота, таким образом, несколько уменьшается пропорционально эффективной реактивной проводимости. Коэффициенты затухания $\varkappa$, определяющие быстроту затухания стоячей волны, пропорциональны постоянным проводимости K, т. е., как видно из формулы для $K_{\tau\tau}$, пропорциональны проводимости, усредненной по стенке $x=a$ с весом $\cos^2(\pi\tau y/b)$.

Полярные координаты. Волновое уравнение разделяется в полярных координатах r,φ (см. стр. 478 тома I), причем, если положить $\psi=R(r)\Phi(\varphi)e^{-i\omega t}$, разделенные уравнения имеют вид

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2\Phi,\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\left(\frac{m}{r}\right)^2\right]R=0.$$

Решение первого уравнения — это синус или косинус угла $m\varphi$, и если переменная φ периодическая с периодом 2π, то m должно быть целым числом (мы в дальнейшем рассмотрим случай, когда m может не быть целым). Решением второго уравнения является цилиндрическая функция порядка m с аргументом $\omega r/c$, которая может быть представлена в виде линейной комбинации функций $J_m(\omega r/c)$ и $N_m(\omega r/c)$, рассмотренных в § 5.3. Многие из свойств этих функций указаны в таблицах в конце этой главы и гл. 10. Мы напомним, что функции J_m конечны при $r=0$, а функции N_m при $r=0$ имеют особенность.

Соотношение (5.3.65) выражает одно из самых важных свойств функции Бесселя — оно дает ее интегральное представление. Нетрудно видоизменить это представление так, чтобы получить выражение типа (11.2.2) для решения волнового уравнения в полярных координатах:

$$\begin{aligned}\cos(m\varphi)\,J_m(kr)&=\frac{1}{2\pi i^m}\int_0^{2\pi} e^{-ikr\cos(\varphi-u)}\cos(mu)\,du,\\ \sin(m\varphi)\,J_m(kr)&=\frac{1}{2\pi i^m}\int_0^{2\pi} e^{-ikr\cos(\varphi-u)}\sin(mu)\,du,\end{aligned}\qquad(11.2.21)$$

где m — целое число. Эта формула выражает, очевидно, коэффициенты ряда Фурье. Отсюда получаем связь между решением волнового уравнения в виде плоской волны $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}=e^{ikr\cos\varphi}$ и решениями в полярных координатах:

$$e^{ikr\cos\varphi}=e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i^m\cos(m\varphi)\,J_m(kr);$$

эта формула уже обсуждалась (см. стр. 581 тома I). Мы также получили полезную формулу [см. (5.3.66)]

$$J_0(kR)=\sum_{m=0}^{\infty}J_m(kr_0)\,J_m(kr)\cos[m(\varphi-\varphi_0)],$$

где $R^2=r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)$ — расстояние между двумя точками (r,φ) и (r_0,φ_0).

Для расходящихся волн мы используем функцию Ганкеля первого рода

$$H_m^{(1)}(kr)=J_m(kr)+iN_m(kr)=\frac{2}{\pi i^{m+1}}\int_0^{i\infty}e^{ikr\cos u}\cos(mu)\,du.\qquad(11.2.22)$$

(Во многих случаях, когда нет опасности смешения с функцией Ганкеля второго рода $H_m^{(2)}=J_m-iN_m$ для сходящихся волн, мы будем опускать верхний индекс и будем просто писать H_m.) Это интегральное представление отличается от представления для J_m верхним пределом интегрирования (и множителем $2/i$). Следовательно, многие из формул, относящихся к функциям J, могут быть легко преобразованы в формулы для функций H. Например, функция Грина для двумерной неограниченной области (см. стр. 752 тома I) может быть записана при помощи ряда вида (5.3.66) [см. формулы (7.2.51)]

$$G(\mathbf{r}\mid\mathbf{r}_0\mid\omega)=i\pi H_0(kR)=$$

$$=i\pi\sum_{m=0}^{\infty}\cos[m(\varphi-\varphi_0)]\begin{cases}J_m(kr)\,H_m(kr_0), & r<r_0,\\ J_m(kr_0)\,H_m(kr), & r>r_0,\end{cases}\qquad(11.2.23)$$

который, конечно, может быть получен также из общей формулы (7.2.63)

Волны внутри круговой области. Для решения волнового уравнения внутри области, ограниченной окружностью $r=a$, мы пользуемся функциями Бесселя J_m, конечными при $r=0$.

В случае круглой мембраны ($\psi=0$ при $r=a$) воспользуемся комбинациями вида

$$\frac{\cos}{\sin}(m\varphi)\, J_m(\pi\beta_{mn} r/a), \quad J_m(\pi\beta_{mn})=0.$$

Величины некоторых корней β_{mn} приведены в конце главы. Функции $J_m(\pi\beta_{mn}r/a)$ для различных n взаимно ортогональны. Их нормирующая постоянная равна

$$\int_0^a \left[J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn} r}{a}\right)\right]^2 r\,dr=\frac{1}{2}a^2\,[J_{m-1}(\pi\beta_{mn})]^2,$$

причем $J_{-1}(z)=-J_1(z)$ при $m=0$. Функции $\sin(m\varphi)$ и $\cos(m\varphi)$ ортогональны для различных m, так что приведенные выше произведения образуют полную ортогональную систему собственных функций, по которым при $r<a$ может быть разложена любая кусочно гладкая функция r и φ. Например, если круглой мембране, находившейся вначале в покое, при $t=0$ сообщается начальная скорость $v_0(r, \varphi)$, то последующие смещения точек мембраны описываются формулой

$$\psi=\sum_{,\, n}[A_{mn}\cos(m\varphi)+B_{mn}\sin(m\varphi)]\, J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn} r}{a}\right)\sin(\omega_{mn}t),$$

$$\left.\begin{matrix}A_{mn}\\B_{mn}\end{matrix}\right\}=\frac{\varepsilon_m}{\pi^2ac\beta_{mn}\,[J_{m-1}(\pi\beta_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos}{\sin}(m\varphi)\,d\varphi\int_0^a v_0 J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn} r}{a}\right)r\,dr, \tag{11.2.24}$$

$$\omega_{mn}=\left(\frac{\pi c}{a}\right)\beta_{mn}.$$

Функция Грина для чисто гармонического источника единичной амплитуды, расположенного в точке (r_0, φ_0), имеет вид

$$G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|\,\omega)=\frac{c^2}{\pi a^2}\sum_{m,\, n}\frac{\varepsilon_m\cos[m(\varphi-\varphi_0)]}{(\omega_{mn}^2-\omega^2)\,[J_{m-1}(\pi\beta_{mn})]^2}\, J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn} r_0}{a}\right)J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn} r}{a}\right). \tag{11.2.25}$$

Интересно сравнить это выражение с разложением (11.2.23) функции Грина для неограниченного пространства. В рассматриваемом случае функции Ганкеля не применяются, так как граница $r=a$ отражает расходящиеся и создает стоячие волны. Поскольку отражение при $r=a$ учтено в формуле (11.2.25), ее предельная форма при очень больших a дает выражение, *отличное* от ряда (11.2.23). Пользуясь формулой (11.2.25), при помощи преобразования Лапласа можно рассчитать неустановившиеся колебания мембраны.

Если краевое условие при $r=a$ заключается в равенстве нулю нормальной составляющей градиента, как в случае звуковых волн, то решения строятся из произведений

$$\frac{\cos}{\sin}(m\varphi)\, J_m\left(\frac{\pi\alpha_{mn} r}{a}\right), \quad \frac{d}{d\alpha}J_m(\pi\alpha_{mn})=0.$$

Значения α_{mn} также приведены в конце главы. Можно вывести формулы, аналогичные (11.2.24) и (11.2.25) с α_{mn} вместо β_{mn} и с $[1-(m/\pi\alpha_{mn})^2]\times$ $\times[J_m(\pi\alpha_{mn})]^2$ вместо $[J_{m-1}(\pi\beta_{mn})]^2$. Например, импульсную функцию потенциала скоростей ψ, соответствующую единичному импульсу давления, приложенному в момент $t=0$ в точке (r_0, φ_0), можно получить при помощи преобразования Лапласа. Давление, вызванное таким импульсом, описывается функцией, для которой функция G, определяемая формулой (11.2.25), является преобразованием Лапласа (с α вместо β и т. д.). Поскольку преобразованием Лапласа функции $(1/\omega_{mn}) \sin(\omega_{mn} t)$ является $(p^2+\omega_{mn}^2)^{-1}$, где $p=i\omega$, это давление легко подсчитать. Потенциал скоростей равен интегралу давления от $t=0$ до t, умноженному на $-1/\rho$. Поэтому окончательно получаем

$$g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|t) = -\frac{c^2}{\pi a^2}\sum_{m,\,n} \varepsilon_m \frac{\cos[m(\varphi-\varphi_0)]}{\omega_{mn}^2[1-(m/\pi\alpha_{mn})^2][J_m(\pi\alpha_{mn})]^2} J_m\left(\frac{\pi\alpha_{mn} r_0}{a}\right)\times J_m\left(\frac{\pi\alpha_{mn} r}{a}\right)[\cos(\omega_{mn} t)-1],$$

где $\omega_{mn}=(\pi c/a)\,\alpha_{mn}$. Скорость равна градиенту этой функции.

Случай более общего краевого условия $Y(\varphi, \omega)\,\psi = \partial\psi/\partial r$ при $r=a$ может быть изучен способом, продемонстрированным на задаче о прямоугольной области.

Излучение кругового цилиндра. Имея дело с волнами вне кругового цилиндра, мы можем пользоваться функциями Бесселя и Неймана в комбинациях, удовлетворяющих краевым условиям на бесконечности. Например, если поверхность кругового цилиндра является «причиной» волнового движения, то волны должны быть расходящимися и мы должны пользоваться функциями Ганкеля первого рода $H_m(kr) = J_m(kr) + iN_m(kr)$. Верхний индекс у функции H_m опущен, поскольку функцию Ганкеля второго рода $H_m^{(2)}(kr)$ мы не будем употреблять (практически мы никогда не имеем сходящихся волн). Применяя обозначения, поясняемые в конце главы, имеем

$$H_m(z) = -iC_m(z)\,e^{i\delta_m(z)}, \qquad \frac{d}{dz} H_m(z) = iC'_m(z)\,e^{i\delta'_m(z)},$$

и мы можем выразить краевые условия при $r=a$ через функции C и δ.

Предположим, например, что длинный круговой цилиндр колеблется так, что радиальная скорость точек его поверхности равна $V(\varphi)\,e^{-i\omega t}$, где φ — полярный угол [т. е. поверхность в момент t задается уравнением $r = a + (iV/\omega)\,e^{-i\omega t}$, причем V/ω мало по сравнению с a]. Очевидно, что потенциал скоростей точек среды вне цилиндра имеет вид

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m(kr)\cos(m\varphi)\,e^{-i\omega t}, \qquad \omega = kc,$$

если функция $V(\varphi)$ четна по φ, так что $V(2\pi-\varphi) = V(\varphi)$ (в противном случае мы добавили бы еще ряд по синусам). Радиальная скорость на поверхности цилиндра равна радиальной составляющей градиента ψ, и, таким образом, мы получаем выражение V в виде ряда Фурье

$$V(\varphi) = ik\sum_{m=0}^{\infty} A_m C'_m(ka)\,e^{i\delta'_m(ka)}\cos(m\varphi).$$

(Конечно, и здесь следовало бы прибавить ряд по синусам, если бы V

не была четной.) Следовательно, коэффициентами ряда для ψ являются

$$A_m = \frac{V_m e^{-i\delta'_m(ka)}}{ikC'_m(ka)}, \quad V_m = \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\varphi)\cos(m\varphi)\,d\varphi.$$

На большом расстоянии от цилиндра можно применить асимптотические формулы для функций Ганкеля и придать решению следующую простую форму:

$$\psi \simeq \sqrt{\frac{ac^2}{\pi r k^2}}\, e^{ikr-i\omega t} f(\varphi), \quad f(\varphi) = \sqrt{\frac{2k}{iac^2}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m i^{-m} \cos(m\varphi). \qquad (11.2.26)$$

Для чисто гармонической звуковой волны интенсивность звука (см. стр. 332) равна произведению давления на скорость (следует брать и для p и для v действительные части соответствующих комплексных выражений). Средняя интенсивность за один период равна половине действительной части произведения комплексного p на величину, комплексно сопряженную с v. Для больших значений kr поток энергии радиален и определяется формулами

$$S = \frac{\rho c^3 a}{2\pi r} F(\varphi), \quad F(\varphi) = |f(\varphi)|^2, \qquad (11.2.27)$$

$$F(\varphi) = \frac{2}{c^2 ka} \sum_{m,\,n} \frac{V_m V_n}{C'_m C'_n} \cos\left[\delta'_m - \delta'_n + \frac{1}{2}\pi(m-n)\right] \cos(m\varphi)\cos(n\varphi),$$

где у функций C'_m и δ'_m подразумевается аргумент ka. Безразмерная функция $F(\varphi)$ называется *плотностью углового распределения*, ибо она пропорциональна энергии, излучаемой цилиндром в направлении φ. Мы видим, что, за исключением случая, когда только один из коэффициентов V_m отличен от нуля, это распределение весьма сложно. Действительно, легко видеть, что интенсивность имеет одинаковую зависимость от угла для всех значений r, только если распределение радиальной скорости по цилиндру пропорционально линейной комбинации функций $\cos(m\varphi)$ и $\sin(m\varphi)$ с одинаковым целым m.

Общая энергия, излучаемая за секунду единицей длины колеблющегося цилиндра, равна интегралу по φ от Sr:

$$P = \frac{\rho c}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon_m} \left[\frac{V_m}{C'_m}\right]^2,$$

т. е. равна величине $\rho c^2 a$, умноженной на безразмерную функцию от ka, вид которой определяется функцией $V(\varphi)$.

Обращаясь к таблице в конце настоящей главы, мы видим, что если величина $ka = \omega a/c = 2\pi a/\lambda$ очень мала (т. е. если длина излучаемой волны λ значительно больше периметра излучающего цилиндра), то C'_0 и δ'_0 значительно больше, чем C'_m и δ'_m при $m > 0$. Следовательно, в области длинных волн зависимость от угла амплитуды волны, и интенсивности и полная излучаемая мощность даются формулами (11.2.26) и (11.2.27), где

$$f(\varphi) \simeq -\sqrt{\frac{ika}{8c^2}} \int_0^{2\pi} V(\varphi)\,d\varphi, \quad P \simeq \frac{1}{8}\rho\omega a^2 \left[\int_0^{2\pi} V(\varphi)\,d\varphi\right]^2, \quad ka \ll 1,$$

за исключением только случая $V_0 = 0$. Таким образом, в случае низких частот излучение распространяется равномерно по всем направлениям с амплитудой, пропорциональной средней радиальной скорости излучающей поверхности.

Для случая высоких частот величина $ka = 2\pi a/\lambda$ велика и длина волны λ много меньше, чем периметр цилиндра $2\pi a$. Теперь в сумме (11.2.26) для f можно ограничиться числом членов, несколько меньшим чем ka. Для указанных малых значений m мы имеем

$$\delta'_m \simeq ka - \frac{1}{2}\pi\left(m + \frac{1}{2}\right) \text{ и } C'_m \simeq \sqrt{2/\pi ka}.$$

Для значений m, близких к ka, эти соотношения теряют силу, а для значений m, значительно больших чем ka, δ'_m очень мало, а C'_m весьма велико. Следовательно, с довольно хорошим приближением ряд для потенциала скоростей имеет вид

$$\psi \simeq \frac{1}{ik}\sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{ik(r-a)-i\omega t} \sum_{m=0}^{M} V_m \cos(m\varphi), \quad M \simeq ka \gg 1.$$

Радиальная скорость среды на достаточно большом расстоянии от поверхности цилиндра равна

$$v_r = \frac{\partial\psi}{\partial r} \simeq \sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{ik(r-a)-i\omega t} \sum_{m=0}^{M} \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\alpha)\cos(m\alpha)\cos(m\varphi)\, d\alpha.$$

Если $V(\varphi)$ является произвольной функцией от φ (не обязательно четной), то приближенная асимптотическая формула для радиальной скорости в случае коротких волн имеет вид

$$v(r, \varphi) \simeq \sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{ik(r-a)-i\omega t} \int_0^{2\pi} V(\alpha)\left\{\sum_{m=0}^{M} \frac{\varepsilon_m}{2\pi}\cos[m(\alpha-\varphi)]\right\} d\alpha.$$

Как было показано на стр. 694 тома I, это выражение равно

$$\sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{ik(r-a)-i\omega t} \int_0^{2\pi} V(\alpha)\, \frac{\sin\left[\left(M + \frac{1}{2}\right)(\alpha-\varphi)\right]}{2\pi\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)\right]}\, d\alpha, \quad M \simeq ka.$$

Дробь, стоящая под интегралом, стремится к дельта-функции $\delta(\alpha-\varphi)$ при M, стремящемся к бесконечности (т. е. при ka, неограниченно возрастающем). Следовательно, когда длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/k$ исчезающе мала по сравнению с $2\pi a$, скорость среды на большом расстоянии от цилиндра определяется формулой

$$v(r, \varphi) \simeq \sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{ik(r-a)}\left[V(\varphi)\, e^{-i\omega t}\right],$$

где величина в квадратных скобках является радиальной скоростью в точке цилиндрической поверхности, находящейся на одном радиусе с точкой наблюдения.

Следовательно, для очень коротких волн амплитуда скорости среды в точке (r, φ) равна амплитуде скорости точки цилиндрической поверхности (a, φ), уменьшенной в $\sqrt{a/r}$ раз. Если колеблющиеся точки поверхности цилиндра сосредоточены вдоль одной образующей [т. е. если $V = \delta(\varphi - \varphi_0)$], то излучение распространяется от этой линии радиально, и ни в каком другом направлении излучения не будет. Подобную картину можно было бы ожидать скорее при корпускулярном, чем при волновом характере излучения. Если ka велико, но не бесконечно, то дробь, стоящая под интегралом в вышеприведенной формуле, имеет пик при $\alpha = \varphi$, но этот пик уже не бесконечно узкий; его ширина приблизительно равна $\pi/ka = \lambda/2a$. Поэтому фронт волны на некотором расстоянии от поверхности не будет в точности воспроизводить все тончайшие детали распределения скоростей на поверхности цилиндра; здесь будут «смазываться» детали с угловыми размерами, меньшими чем $\lambda/2a$ радиан. Другими словами, становится заметной диффракция.

Таким образом, меняя соотношение между длиной волны и диаметром цилиндра, мы переходим от излучения, равномерного во всех направлениях (очень длинные волны), к излучению, которое воспроизводит распределение скоростей точек излучающей поверхности (весьма короткие волны, геометрическая оптика). В промежуточных случаях, когда λ имеет порядок $2\pi a$, излучаемая волна сложна по форме и вычислять ее нужно при помощи ряда (11.2.27).

Рассеяние плоской волны на цилиндре. Предположим, что волна возбуждается не на нашей цилиндрической поверхности, а имеет какое-либо другое происхождение, цилиндр же влияет на структуру поля только благодаря необходимости соблюдения краевых условий на его поверхности. Простейшим примером этого типа является случай, когда плоская волна, порожденная бесконечно удаленными источниками, рассеивается на цилиндре. Типичная плоская волна, распространяющаяся перпендикулярно оси цилиндра, имеет вид

$$\psi = Ae^{ikx-i\omega t} = Ae^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J_m(kr) \cos(m\varphi).$$

Эта волна сама по себе обычно не удовлетворяет краевым условиям на поверхности цилиндра $r=a$ (если бы она удовлетворяла им, цилиндр был бы «прозрачным»). Поэтому возникает дополнительная волна, обеспечивающая выполнение краевых условий при $r=a$. Эта волна, обусловленная присутствием цилиндра, называется *рассеянной волной*. Она излучается от цилиндра и поэтому должна быть составлена из функций Ганкеля первого рода, представляющих расходящиеся волны.

К каждому члену разложения плоской волны мы должны, следовательно, присоединить другой член вида $B_m H_m(kr) \cos(m\varphi)$ так, чтобы сумма $A\varepsilon_m i^m J_m(kr) + B_m H_m(kr)$ удовлетворяла краевым условиям при $r=a$. Если речь идет о плоской электромагнитной волне с электрическим вектором, параллельным оси цилиндра, и цилиндр представляет собой идеальный проводник, то краевое условие состоит в том, что волновая функция должна быть равна нулю при $r=a$ (см. стр. 212 тома I). Если же параллелен оси магнитный вектор или если речь идет об акустической волне и поверхность цилиндра жесткая, то требуется, чтобы нормальная составляющая градиента была равна нулю при $r=a$. Промежуточные случаи, когда значения функции пропорциональны составляющей градиента, имеют место, если поверхность не является идеальным проводником или, соответственно, не абсолютно жесткая.

Чтобы проиллюстрировать ход расчетов, мы рассмотрим случай, когда волновая функция равна нулю при $r=a$. Выражая функции Бесселя и Ганкеля через их амплитуды и фазовые углы по формулам, приведенным в таблицах в конце этой главы, получаем

$$0 = A\varepsilon_m i^m C_m(ka) \sin[\delta_m(ka)] - iB_m C_m(ka) e^{i\delta_m(ka)},$$

или

$$B_m = A\varepsilon_m i^{m-1} e^{-i\delta_m} \sin\delta_m,$$

причем здесь и в дальнейшем фазовый угол δ_m является функцией аргумента ka. Поэтому совокупное поле, удовлетворяющее обоим требованиям (на далеких расстояниях от цилиндра оно состоит из плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси x, и расходящейся радиальной волны; на поверхности цилиндра оно равно нулю), имеет вид

$$\Psi = Ae^{ikx-i\omega t} + \psi_s(r, \varphi)\, e^{-i\omega t},$$

где

$$\psi_s = -iA \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m e^{\frac{1}{2}m\pi i - i\delta_m} \sin\delta_m H_m(kr)\cos(m\varphi) \tag{11.2.28}$$

— рассеянная волна. Рассеянная волна интерферирует с плоской волной, местами усиливая и местами (как, например, на поверхности цилиндра) ослабляя ее.

Чтобы выделить рассеянную волну, мы должны представить себе «плоскую волну» ограниченной с боков (например, прошедшей через щель) так, что она распространяется только в области между $y = -b$ и $y = b$, покрывая полностью цилиндр, но не занимая все пространство. Конечно, как нам известно из рассуждений стр. 220 тома I, для того чтобы волна, пройдя через щель, осталась плоской с существенно параллельными волновыми фронтами, b должно быть значительно больше длины волны $2\pi/k$. Фактически плоская волна не может быть заключена точно между двумя параллельными линиями $y = \pm b$; она будет слегка расходиться, но угловая ширина пучка, приблизительно равная $\lambda/2b = \pi/kb$, будет мала.

Измерение рассеянной волны ψ_s следует производить в области, лежащей за плоскостями $y = \pm b$, и, таким образом, мы не можем измерить ψ_s для $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, т. е. точно в направлении распространения плоской волны или в противоположном к нему. На достаточно большом расстоянии R от цилиндра угол $\varphi \simeq b/R$, начиная с которого можно отделить ψ_s от плоской волны, сколь угодно мал, но никогда не равен нулю. Следовательно, мы никогда не можем полностью сравнить вычисленное ψ_s с измеренным. Если функция ψ_s меняется при изменении φ вблизи $\varphi = 0$ достаточно медленно, то с разумной достоверностью ее можно экстраполировать для значения $\varphi = 0$, но если ψ_s быстро меняется вблизи $\varphi = 0$, то мы не можем быть уверены, соответствуют ли экстраполированные данные измерения вычисленным величинам.

Для больших значений r, при которых следует измерять рассеянную волну, выражение (11.2.28) имеет следующую асимптотическую форму:

$$\psi_s \simeq -A\sqrt{\frac{2i}{\pi kr}}\, e^{ikr} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m e^{-i\delta_m(ka)} \sin[\delta_m(ka)]\cos(m\varphi), \tag{11.2.29}$$

где ряд выражает зависимость рассеянной волны от угла. Как для электромагнитной, так и для акустической волны интенсивность пропорциональна квадрату модуля волновой функции. Интенсивность плоской волны равна $K|A|^2$ (K — коэффициент пропорциональности) и направлена в положительном направлении оси x. Подобно этому интенсивность рассеянной волны для больших r с точностью до множителя K равна квадрату модуля функции ψ_s, определенной формулой (11.2.29), и направлена в этом случае от центра вдоль радиуса. Следовательно, отношение интенсивности рассеянной волны в точке (r, φ) (r очень велико) к интенсивности падающей плоской волны равно квадрату модуля функции ψ_s, разделенному на $|A|^2$:

$$S(\varphi) = \frac{2}{\pi kr} \sum_{m,n} \varepsilon_m \varepsilon_n \sin\delta_m \sin\delta_n \cos(\delta_m - \delta_n)\cos(m\varphi)\cos(n\varphi). \tag{11.2.30}$$

Истинная интенсивность поля в точке (r, φ) ($kr \gg 1$) равна функции $S(\varphi)$, умноженной на интенсивность падающей плоской волны, и направлена от центра.

Общая энергия, рассеянная за секунду, при единичной интенсивности падающей волны равна, следовательно, интегралу от $S(\varphi)r$ по φ:

$$Q=\int_0^{2\pi} S(\varphi)\,r\,d\varphi=\frac{4}{k}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m \sin^2[\delta_m(ka)]. \tag{11.2.31}$$

Эта величина имеет размерность длины (k имеет размерность, обратную длине), так как она представляет собой отношение потока энергии, излучаемой вовне единицей длины цилиндра, к потоку энергии падающей волны через единицу площади. Чтобы получить истинную энергию, рассеянную за секунду единицей длины цилиндра, мы умножаем Q на интенсивность (поток энергии через единицу площади) падающей волны. Этот результат выглядит так, как если бы энергия, падающая на полосу ширины Q, параллельную оси цилиндра, передавалась от падающей волны к рассеянной. Поэтому Q часто называют *эффективной шириной* цилиндра для рассеяния плоской волны с длиной волны $2\pi/k$.

Рассеянная и отраженная волны. Чтобы понять некоторые аспекты явления рассеяния, полезно еще несколько перегруппировать слагаемые в полученных выражениях. Мы только что показали, что наше разделение решения на чисто плоскую и рассеянную волны может быть сопоставлено с результатами измерений только для тех углов, которые настолько отличаются от 0 и π, что для них имеет место только рассеянная волна. В направлениях, достаточно близких к направлениям 0 и π, мы можем измерить только результат наложения плоской и рассеянной волн. В этих областях указанное наложение вызывает в некоторых местах ослабление, в других же — усиление поля.

Асимптотическое разложение самой плоской волны дает

$$Ae^{ikx-i\omega t}\simeq A\sqrt{\frac{1}{2\pi ikr}}\left\{e^{ikr}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos(m\varphi)+ie^{-ikr}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos[m(\varphi-\pi)]\right\}e^{-i\omega t}.$$

Но мы видели несколькими страницами выше, что

$$\sum_{m=0}^{M}\varepsilon_m\cos(m\varphi)=e^{-iM\varphi}\frac{1-e^{(2M+1)i\varphi}}{1-e^{i\varphi}}=\frac{\sin\left[\left(M+\frac{1}{2}\right)\varphi\right]}{\sin(\varphi/2)},$$

а эта величина при больших M приближается к умноженной на 2π дельта-функции $\delta(\varphi)$. Следовательно, на очень больших расстояниях от начала сходящаяся волна (с e^{-ikr}) целиком приходит слева ($\varphi=\pi$), а расходящаяся волна (с e^{ikr}) целиком уходит вправо ($\varphi=0$). Такой результат для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x, можно было заранее предвидеть.

Посмотрим теперь, как присутствие рассеянной волны влияет на асимптотическое поведение суммарного поля плоской и рассеянной волн. Имеем

$$Ae^{ikx-i\omega t}+\psi_s e^{-i\omega t}\simeq A\sqrt{\frac{1}{2\pi ikr}}\left\{ie^{-ikr-i\omega t}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos[m(\varphi-\pi)]+\right.$$
$$\left.+e^{ikr-i\omega t}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m e^{-2i\delta_m(ka)}\cos(m\varphi)\right\},\quad r\to\infty. \tag{11.2.32}$$

Мы видим, что сходящаяся волна остается той же самой, но расходящаяся волна благодаря появлению множителя $e^{-2i\delta_m}$ в каждом члене изменяется. Поэтому, вообще говоря, разрушается структура плоской волны, и интенсивность поля в направлении оси x уменьшается, а интенсивность в некоторых других направлениях возрастает. Интегралы от квадратов абсолютных величин сумм второго и первого рядов равны (покуда δ_m действительны), так что, за исключением случаев, когда краевые условия обусловливают потери энергии (некоторые δ_m комплексные), энергия расходящейся волны равна энергии сходящейся.

Когда цилиндр становится очень большим, он практически оказывается плоским отражателем, и волна отражается обратно влево. В этом можно убедиться, подставляя во второй ряд (11.2.32) асимптотическое значение $\delta_m(z) \simeq z - (1/2)\pi(m - 1/2)$ для бесконечно больших значений a (a, однако, не так велико, как r!). Мы получаем тогда

$$\frac{A}{i}\sqrt{\frac{1}{2\pi ikr}}\,e^{ik(r-2a)-i\omega t}\lim_{M\to\infty}\left\{\frac{\sin\left[\left(M+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\pi)\right]}{\sin\left[(\varphi-\pi)/2\right]}\right\}.$$

Угловой множитель показывает, что расходящаяся волна уходит целиком влево ($\varphi = \pi$).

Предельные случаи коротких и длинных волн. Когда ka велико, но не бесконечно, не вся падающая волна отражается в обратном направлении: часть ее идет на образование плоской волны, распространяющейся с ослабленной интенсивностью вправо в *области тени* позади цилиндра, а часть ее отражается в других направлениях. Другими словами, в случае волн, длина волны которых мала по сравнению с $2\pi a$, рассеянная волна ψ_s имеет две части: одну, идущую вправо, которая, интерферируя с неизменной плоской волной e^{ikx}, образует тень, и вторую, которая, излучаясь в других направлениях, образует *отраженную волну*.

Это разделение *рассеянной волны* на две части — *отраженную волну и теневобразующую волну* — может быть получено подстановкой асимптотического выражения для $\delta_m(ka)$ в формулы (11.2.31) и (11.2.30). Из формулы (11.2.31) для эффективной ширины рассеяния Q замечаем, что δ_m приближенно равно $ka - (1/2)\pi(m - 1/2)$ для m, меньших ka, и нулю для m, больших ka. Следовательно,

$$Q \simeq \frac{4}{k}\sum_{m=0}^{ka}\varepsilon_m\sin^2\left[ka+\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}m\pi\right] \simeq 4a, \qquad (11.2.33)$$

что равно *удвоенной ширине* ($2a$) *цилиндра*. Этот результат мог бы показаться весьма странным, если бы не наши предыдущие рассмотрения. Чтобы получить рассеянную волну ψ_s, мы отделили абсолютно нетронутую плоскую волну. Такое разделение естественно для больших длин волн, так как в этом случае плоская волна мало меняется; однако в случае коротких волн плоская волна не может считаться неизменной: часть ее позади цилиндра отрезана полностью (тень). Очевидно, часть рассеянной волны используется для того, чтобы, интерферируя с плоской волной, образовать тень, а остаток отражается в других направлениях. Так как при действительных значениях δ_m нет потерь энергии, то половина рассеянной волны должна формировать тень, уничтожая плоскую волну в полосе ширины $2a$ позади цилиндра, а другая половина представляет собой отраженную волну с эффективной шириной, также равной $2a$. Таким образом, то, что было потеряно плоской волной (тень), превращается в отраженную волну.

Чтобы рассчитать детали этого двойственного поведения рассеянной волны, мы должны подставить асимптотические значения величин $\delta_m(ka)$ в формулу (11.2.30). Оказывается, что при этом требуется бóльший порядок точности, чем для подсчета предельной величины эффективной ширины рассеяния Q. Конечный результат

$$S(\varphi) \simeq \frac{a}{2r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2\pi kr}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin^2(ka\sin\varphi) \tag{11.2.34}$$

для $ka \gg 1$ будет получен ниже в этой же главе другим методом. Первый член представляет интенсивность отраженной волны и совпадает с интенсивностью, вычисленной по правилам геометрической оптики при упругом отражении «элементарных волн» от каждого элемента того полуцилиндра, который «освещен» падающей волной. Второй член имеет очень высокий пик в направлении распространения плоской волны ($\varphi = 0$) и очень малую интенсивность в остальных направлениях. Этот член, конечно, соответствует тенеобразующей части рассеянной волны. По степени приближения и исходным геометрическим предположениям ($r \gg a \gg \lambda$) рассмотренная ситуация соответствует так называемой фраунгоферовой диффракции в оптике. Диффракцию Френеля вблизи от цилиндра нужно изучать, используя весь ряд (11.2.28), без перехода к асимптотическим выражениям для функций $J_m(kr)$ или $H_m(kr)$.

Вычисления значительно упрощаются в случае предельно длинных волн $ka \ll 1$. Тогда, в соответствии с формулами, приведенными в конце настоящей главы, $\delta_0 \approx \pi/2\ln(1/ka)$ и δ_m при $m > 0$ стремится к нулю как $(ka)^{2m}$. Следовательно, в рядах (11.2.30) и (11.2.31) должны быть оставлены только первые члены, а потому

$$\begin{aligned} S(\varphi) &\simeq \frac{\pi}{2kr\ln^2(1/ka)}, \\ Q &\simeq \frac{\pi^2 a}{ka\ln^2(1/ka)}, \quad ka \to 0, \end{aligned} \tag{11.2.35}$$

для случая, когда ψ равно нулю на поверхности цилиндра. Здесь рассеянная волна распространяется равномерно по всем направлениям, нет резкого формирующего тень пика вблизи $\varphi = 0$ и всю рассеянную мощность легко сравнить с результатами измерения. Мы видим, что эффективная ширина рассеяния Q велика для больших длин волн. Это происходит вследствие того, что условие $\psi = 0$ при $r = a$ влияет на поле, как бы мало ни было a по сравнению с $\lambda = 2\pi/k$, и диаметр области, где сказывается это воздействие, имеет порядок длины волны.

Если бы мы исходили из краевого условия, состоящего в равенстве нулю нормальной составляющей градиента ψ при $r = a$, то при больших длинах волн влияние цилиндра было бы менее сильным. Решение одной из задач в конце этой главы показывает, что для случая, когда составляющая градиента равна нулю при $r = a$, интенсивность рассеянной волны и эффективная ширина рассеяния Q даются формулами, подобными (11.2.30) и (11.2.31), с заменой величины δ_m на δ'_m. Итак,

$$\begin{aligned} S(\varphi) &\simeq \frac{\pi a}{8r}(ka)^3(1 - 2\cos\varphi)^2, \\ Q &\simeq \frac{3}{4}\pi^2 a(ka)^3, \quad ka \ll 1, \end{aligned} \tag{11.2.36}$$

в случае $\partial\psi/\partial r = 0$ при $r = a$. Здесь интенсивность рассеянной волны не одинакова по различным направлениям и в целом значительно меньше, чем в случае (11.2.35). С другой стороны, рассеяние очень коротких волн для обоих случаев в основном одинаково и приближенно описывается формулами (11.2.33) и (11.2.34). Если, начав с очень длинных волн, постепенно увеличивать частоту (т. е. уменьшать длину волны), то зависимость рассеянной интенсивности S от угла φ постепенно все более усложняется. Постепенно развивается пик, направленный вперед, но вначале он настолько широк, что результаты измерений, произведенных вдали от основного луча, могут быть экстраполированы для $\varphi = 0$ с точностью, достаточной для сравнения значений S и Q с экспериментом. Однако при дальнейшем уменьшении длины волны передний пик все более и более стягивается к направлению $\varphi = 0$, где разделение падающей и рассеянной волн нельзя полностью произвести. Как следствие получаем, что измеренные значения Q имеют тенденцию быть меньше значений, предсказываемых формулой (11.2.31), а в пределе измеренные значения будут скорее соответствовать полной *отраженной* интенсивности, равной $Q/2$, а не полной *рассеянной* интенсивности, поскольку передний пик в S не будет измерен вовсе. Детали этого явления зависят от метода измерения.

Рассеяние плоской волны на крае экрана. Другая задача, при решении которой используются полярные координаты, относится к рассеянию на полуплоскости $x = 0$, $y < 0$. Функциями угла, удовлетворяющими условиям Дирихле или Неймана, являются синус или косинус от $m\varphi/2$, где m — целое число. Таким образом, мы приходим к разложению решений волнового уравнения по тригонометрическим функциям полуцелых кратных полярного угла и по функциям Бесселя с полуцелым индексом. Например, функция, пропорциональная функции Грина,

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos\left[\frac{1}{2} m (\varphi - \varphi_0)\right] \begin{cases} J_{\frac{1}{2}m}(kr)\, H_{\frac{1}{2}m}(kr_0), & r < r_0, \\ J_{\frac{1}{2}m}(kr_0)\, H_{\frac{1}{2}m}(kr), & r > r_0, \end{cases} \qquad (11.2.37)$$

аналогична функции (10.1.40) для уравнения Лапласа. В обоих случаях φ изменяется от 0 до 4π (или, если угодно, от $-\pi/2$ до $7\pi/2$), и мы должны исследовать поведение функции во всей этой области.

Значительно больший интерес представляет разложение «плоской волны», получающееся при $\varphi_0 = 0$, $r_0 \to \infty$:

$$\sqrt{\frac{\pi i k r_0}{2}}\, e^{-ikr_0}\Gamma \simeq \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m/2} \cos\left(\frac{1}{2} m\varphi\right) J_{\frac{1}{2}m}(kr) = u(r, \varphi). \qquad (11.2.38)$$

Эта функция имеет по φ период 4π, а не 2π. Поэтому $u(r, \varphi + 2\pi)$ не обязательно равно $u(r, \varphi)$. Об использовании этого свойства мы уже говорили в связи с формулой (10.1.40). Для экрана, расположенного вдоль отрицательной оси y, область $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ является «действительным пространством», а область $3\pi/2 < \varphi < 7\pi/2$ — «фиктивным пространством», необходимым для того, чтобы удовлетворить краевым условиям при $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$.

Итак, для того чтобы найти решения, удовлетворяющие краевым условиям, при помощи отраженных волн или фиктивных источников, нам нужно «фиктивное пространство» вне области измерения, в которое можно было бы поместить вспомогательные волны или источники. Если границей служит вся ось y и рассматривается область $x > 0$, то область отрицательных x представляет собой «фиктивное пространство», и мы удовлетворяем краевым условиям вдоль оси y, располагая в этом фиктивном пространстве вспомогательные источники так, чтобы обратить в нуль решение (или градиент решения), порождаемое действительными источниками, расположенными в «действительном пространстве». Если границей служит только отрицательная полуось y, то вся область $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ оказывается действительным пространством, и, чтобы разместить вспомогательные источники, следует ввести в качестве «фиктивного пространства» еще область $3\pi/2 < \varphi < 7\pi/2$. Для начала мы, конечно, будем рассматривать плоские волны (источники в бесконечности), но принцип всегда остается тот же. «Действительный» источник находится в бесконечности при $\varphi = 0$, фиктивный источник при $\varphi = 3\pi$.

Нетрудно видеть, что $u(r, \varphi)$ — это нечто отличное от плоской волны. Прежде всего, $u(r, \varphi + 2\pi)$ не равно $u(r, \varphi)$, но сумма их дает в точности плоскую волну:

$$u(r, \varphi) + u(r, \varphi + 2\pi) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m [1 + (-1)^m] (-i)^{m/2} \cos\left(\frac{1}{2} m\varphi\right) J_{\frac{1}{2}m}(kr) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n \cos(n\varphi) J_n(kr) = e^{-ikr\cos\varphi} \qquad (11.2.39)$$

в соответствии с формулой на стр. 349. Теперь находим асимптотическое поведение $u(r, \varphi)$ при $r \to \infty$:

$$u(r, \varphi) \simeq \sqrt{\frac{1}{8\pi ikr}} \left[e^{ikr} F\left(-\frac{1}{2}\pi, \varphi\right) + ie^{-ikr} F(0, \varphi) \right],$$

где

$$F(\alpha, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m e^{im\alpha} \cos\left(\frac{1}{2} m\varphi\right),$$

и асимптотическое поведение $u(r, \varphi) - e^{-ikr\cos\varphi} = -u(r, \varphi + 2\pi)$ таково:

$$u(r, \varphi) - e^{-ikr\cos\varphi} \simeq -\sqrt{\frac{1}{8\pi ikr}} \left[e^{ikr} F\left(\frac{1}{2}\pi, \varphi\right) + ie^{-ikr} F(\pi, \varphi) \right].$$

Ряды по косинусам для $F(\alpha, \varphi)$ в этой формуле не сходятся ни в одной точке; они получаются из асимптотических разложений функций Бесселя и с ними надо обращаться так же осторожно, как с этими последними разложениями. В частности, нужно ожидать, что при изменении φ от 0 до 4π обнаружится нечто вроде явления Стокса (см. стр. 571 тома I). Мы, правда, рассматривали уже несколькими страницами ранее подобные ряды и нашли, что они связаны с дельта-функциями.

Чтобы просуммировать эти ряды, необходимо прежде всего рассмотреть сумму

$$2 \sum_m e^{im\alpha + im\varphi/2} - 1 = \frac{2}{1 - e^{i\alpha + i\varphi/2}} - 1 = \frac{1 + e^{i\alpha + i\varphi/2}}{1 - e^{i\alpha + i\varphi/2}}, \quad \operatorname{Im}\varphi = 0,$$

где мнимая часть α должна быть положительной, чтобы обеспечить сходимость. Комбинируя этот ряд с рядом для отрицательных φ, получаем

$$F(\alpha, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m e^{im\alpha} \cos\left(\frac{1}{2} m\varphi\right) = \frac{-i\sin\alpha}{\cos\alpha - \cos(\varphi/2)}, \quad \operatorname{Im}\alpha > 0. \qquad (11.2.40)$$

Полагая $\alpha = i\delta$ и устремляя δ к нулю, убеждаемся, что $F(0, \varphi)$ пропорциональна периодической дельта-функции, равной нулю всюду, за исключением точек $\varphi = 0, 4\pi, \ldots$. Подобно этому, полагая $\alpha = \pi + i\delta$, убеждаемся, что $F(\pi, \varphi)$ равна нулю всюду, за исключением точек $\varphi = -2\pi, 2\pi$, в которых $F(\pi, \varphi)$ имеет те же особенности, что и дельта-функция.

С другой стороны,

$$F\left(\frac{1}{2}\pi, \varphi\right)=\frac{i}{\cos(\varphi/2)}, \quad F\left(-\frac{1}{2}\pi, \varphi\right)=\frac{-i}{\cos(\varphi/2)}.$$

Возвращаясь к асимптотическим рядам для u, видим, что дельта-функции представляют невозмущенную плоскую волну, так как $u(r, \varphi)$ имеет член, содержащий произведение e^{-ikr} на дельта-функцию с пиком при $\varphi=0$; это соответствует плоской волне e^{-ikx}, приходящей справа вдоль оси x. Мы убеждаемся в этом, замечая, что $u(r, \varphi)$ может быть представлена в виде суммы e^{-ikx} и ряда, не содержащего дельта-функции с особенностью при $\varphi=0$ (но имеющего дельта-функцию с особенностью при $\varphi=2\pi$ и т. д.). Выполнив выкладки во всех деталях, в конце концов найдем, что функция u имеет следующее асимптотическое поведение для различных интервалов φ:

$$u(r, \varphi)\simeq\begin{cases} e^{-ikr\cos\varphi}-\sqrt{\dfrac{i}{8\pi kr}}\,\dfrac{e^{ikr}}{\cos(\varphi/2)}, & -\pi<\varphi<\pi; \\ -\sqrt{\dfrac{i}{8\pi kr}}\,\dfrac{e^{ikr}}{\cos(\varphi/2)}, & \pi<\varphi<3\pi; \\ e^{-ikr\cos\varphi}-\sqrt{\dfrac{i}{8\pi kr}}\,\dfrac{e^{ikr}}{\cos(\varphi/2)}, & 3\pi<\varphi<5\pi; \end{cases} \qquad (11.2.41)$$

и т. д. для $r\to\infty$.

Возвращаясь к точным рядам для $u(r, \varphi)$, мы замечаем, что u само по себе не удовлетворяет краевым условиям при $\varphi=-\pi/2$ и $\varphi=3\pi/2$. Однако, чтобы удовлетворить условиям Неймана или Дирихле где-то между 0 и 3π, можно прибавить или вычесть $u(r, 3\pi-\varphi)$. Так, например, в случае условий Неймана в качестве решения берем сумму, которая имеет равную нулю нормальную составляющую градиента по обеим сторонам преграды, т. е. при $\varphi=-\pi/2$ и $\varphi=3\pi/2$. Асимптотическое поведение этой функции в различных частях «действительного пространства» дается выражением

$$\psi=u(r, \varphi)+u(r, 3\pi-\varphi)\simeq\begin{cases} e^{-ikr\cos\varphi}+e^{ikr\cos\varphi}+f(r, \varphi), & -\frac{1}{2}\pi<\varphi<0; \\ e^{-ikr\cos\varphi}+f(r, \varphi), & 0<\varphi<\pi; \\ f(r, \varphi), & \pi<\varphi<\frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Здесь

$$f(r, \varphi)=\sqrt{\frac{i}{8\pi kr}}\,e^{ikr}\left[\frac{1}{\sin(\varphi/2)}-\frac{1}{\cos(\varphi/2)}\right].$$

Поведение в «фиктивном пространстве», т. е. при $3\pi/2<\varphi<7\pi/2$, хотя оно может быть легко найдено, не представляет для нас интереса.

Функция ψ обладает всеми свойствами, которые можно было предвидеть у решения рассматриваемой физической задачи: плоская волна e^{-ikx} приходит справа и встречает экран; в области $-\pi/2<\varphi<0$ падающая волна отражается от плоскости экрана ($e^{ikr\cos\varphi}$); в области $0<\varphi<\pi$ плоская волна продвигается беспрепятственно влево; в области «тени» $\pi<\varphi<3\pi/2$

нет вовсе плоской волны. В каждой из этих областей, однако, имеется рассеянная волна, излучающаяся от края экрана. Асимптотически ее интенсивность равна произведению выражения

$$S(\varphi)=\frac{1}{8\pi kr}\left[\frac{1}{\sin(\varphi/2)}-\frac{1}{\cos(\varphi/2)}\right]^2, \quad \varphi\neq 0,\ \pi,$$

на интенсивность падающей волны. Это выражение применимо, конечно, только на очень больших расстояниях от края. Оно показывает, что край экрана будет казаться светящимся независимо от того, под каким углом φ он будет рассматриваться (за исключением $\varphi=\pi/2$).

Диффракция Френеля на крае экрана. Лучшее приближение для функции u можно получить, исходя из точных рядов (11.2.38). Дифференцируя по φ, имеем

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{1}{4}k\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m(-i)^{\frac{1}{2}m}\frac{m}{kr}J_{\frac{1}{2}m}(kr)\sin\left(\frac{1}{2}m\varphi\right).$$

Используя формулы

$$(2n/z)J_n(z)=J_{n-1}(z)+J_{n+1}(z),$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{2/\pi z}\cos z, \quad J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{2/\pi z}\sin z,$$

получаем отсюда дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}-ikr\sin\varphi\,u=-\frac{1}{2}kr\sqrt{\frac{2}{\pi ikr}}e^{ikr}\sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right),$$

решением которого является

$$u(r,\varphi)=\frac{e^{-ikr\cos\varphi}}{\sqrt{i\pi}}\Phi\left[\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\right], \tag{11.2.42}$$

где $\Phi(z)=\int\limits_{-\infty}^{z}e^{it^2}\,dt$ — *интеграл Френеля* (точнее, интегралами Френеля называются действительная и мнимая части Φ). Нижний предел интеграла выбран так, чтобы в области тени, где $\cos(\varphi/2)$ отрицателен, u стремилось к нулю при r, стремящемся к бесконечности. Решение, удовлетворяющее условиям Неймана на границе $\varphi=-\pi/2,\ 3\pi/2$, имеет, следовательно, вид

$$\psi=u(r,\varphi)+u(r,3\pi-\varphi)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{i\pi}}\left\{e^{-ikr\cos\varphi}\Phi\left[\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\right]+e^{ikr\cos\varphi}\Phi\left[-\sqrt{2kr}\sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\right]\right\}.$$

Функция $\Phi(z)$ равна нулю при z бесконечно большом и отрицательном; когда z изменяется от $-\infty$ до нуля, эта функция колеблется вокруг нуля, описывая в комплексной плоскости постепенно расширяющуюся спираль, и при $z=0$ переходит на спираль, закручивающуюся вокруг точки $\sqrt{\pi i}$ при z, стремящемся к ∞. Зная поведение функции $\Phi(z)$, определяем область тени и область отраженной волны для любого значения r.

Для $0<\varphi<\pi$ и большого r только первый член велик и $\psi\simeq e^{-ikr\cos\varphi}$. Для $-\pi/2<\varphi<0$ и больших r оба члена велики, и мы имеем как падающую, так и отраженную волны. При изменении φ от $\pi-\delta$ до $\pi+\delta$ первый член убывает от величины, приблизительно равной единице, до величины, близкой к нулю, причем тем быстрее, чем больше kr. Поскольку второй член здесь незначителен, линия $\varphi=\pi$ представляет собой границу области тени, ниже которой интенсивность мала, а выше которой она велика. Вблизи этой линии наблюдаются диффракционные явления.

Формула (11.2.42) иллюстрирует как возможности, так и трудности метода интегральных представлений. Казалось бы, эта замкнутая форма проще всего позволяет получить точное решение волнового уравнения для заданных краевых условий, но эта простота обманчива. Предельное поведение решения, конечно, легче получить из такой замкнутой формы, нежели из выражения в виде ряда (11.2.38). Однако трудно указать, каким образом можно непосредственно найти интегральное представление *искомого* решения (или, вообще, любого решения) волнового уравнения. По-видимому, эта форма решения была первоначально найдена по аналогии с интегралами Френеля, которые возникают при изучении интерференции, к чему мы еще вернемся далее в связи с рассмотрением в параболических координатах. Если интегральное представление найдено, то обычно нетрудно показать, что оно действительно является нужным решением волнового уравнения или доказать его эквивалентность выражению в виде ряда, как это было сделано в разобранном случае. Мы осветим этот вопрос более подробно, когда приступим к систематическому изучению метода интегральных уравнений (функций Грина) для решения задач диффракции.

Рассеяние на цилиндре со щелью. Приближенные решения для волн, рассеянных на цилиндрической поверхности с щелью в ней, могут быть получены методами, использованными при выводе формул (10.1.22) (см. также стр. 195). Предположим, что в цилиндре радиуса a имеется щель между $\varphi = -\Delta/2$ и $\varphi = \Delta/2$ и пусть на поверхности цилиндра $\psi = 0$. Решение вне цилиндра строим в виде комбинации решения для полного цилиндра и ряда, нужного для того чтобы удовлетворить условиям на щели; решение же внутри цилиндра — в виде аналогичного ряда, но только из стоячих волн (функции Бесселя) вместо расходящихся (функции Ганкеля):

$$\psi(r,\varphi) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{J_m(kr)}{J_m(ka)}\left[A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)\right] e^{-i\omega t}, \quad r < a; \\ A \sum\limits_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \left[J_m(kr) - i e^{-i\delta_m} \sin\delta_m \, H_m(kr)\right] \cos\left[m(\varphi - \alpha)\right] e^{-i\omega t} + \\ \qquad + \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{H_m(kr)}{H_m(ka)}\left[A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)\right] e^{-i\omega t}, \quad r > a. \end{cases} \tag{11.2.43}$$

Первый ряд для $r > a$ является суммой плоской и рассеянной волн [см. (11.2.28)], которая равна нулю при $r = a$. Следовательно, выражения для $r < a$ и $r > a$ равны при $r = a$. Так как при $r = a$ решение ψ равно нулю для $\Delta/2 < \varphi < 2\pi - \Delta/2$ и равно $\psi(a, \varphi)$ для $-\Delta/2 < \varphi < \Delta/2$, то коэффициенты A_m, B_m определяются выражениями

$$A_m = \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \psi(a, w) \cos(mw)\, dw, \quad B_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \psi(a, w) \sin(mw)\, dw.$$

В точной постановке эта задача приводится к решению бесконечной последовательности уравнений с неизвестными A_m, B_m, полученными из условий, что ψ и $\partial\psi/\partial r$ непрерывны на щели. Однако такой путь получения точного решения слишком сложен; рассмотрим, поэтому, соответствующий приближенный метод.

На стр. 195 мы решали подобную задачу для уравнения Лапласа. В этом случае мы подставляли *вместо* $\psi(a, \varphi)$ точное решение, полученное для случая щели в плоскости; это приближение оказывалось хорошим для случая щели в цилиндре, так как ширина щели была мала по сравнению с окружностью цилиндра. Дело в том, что при статических условиях поле слабо проникает сквозь щель и не может распространиться очень далеко «по другую сторону» щели (где $r < a$ для цилиндра и $y < 0$ для плоскости).

Применительно к волновому уравнению этот метод нуждается в некоторых изменениях. Новое осложнение состоит в возможности резонанса. Статическое поле всегда слабо проникает в закрытое пространство, быстро затухая по мере удаления от щели. Однако в случае колебаний в закрытом пространстве может возникнуть резонанс; при этом даже весьма слабая «вынуждающая сила» на щели может вызвать стоячую волну большой амплитуды.

Возвращаясь к статическому случаю, напомним, что потенциал в щели был равен $B\sqrt{1-(2\varphi/\Delta)^2}$, где постоянная B определялась из связи с градиентом приложенного поля. Внутри цилиндра потенциал имел вид $\sum A_m (r/a)^m \cos(m\varphi)$, где

$$\begin{gathered} A_m = \frac{\varepsilon_m \Delta}{4\pi} B \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{1}{2}\Delta m u\right)\sqrt{1-u^2}\,du = BD_m, \\ D_0 = \frac{1}{8}\Delta, \quad D_m = \frac{1}{m} J_1\left(\frac{1}{2}m\Delta\right), \quad m > 0. \end{gathered} \tag{11.2.44}$$

Другими словами, мы предполагали известными приближенные отношения между A_m и, таким образом, сводили нашу задачу к определению одной неизвестной величины B. Найденное выражение для потенциала получается из формулы для потенциала в эллиптических координатах. Мы располагали центр щели в точке $\mu = \vartheta = 0$ и предполагали, что цилиндр вблизи щели практически совпадает с плоскостью. Тогда полярные координаты выражаются таким образом:

$$r - a \approx \frac{1}{2} a\Delta \operatorname{sh}\mu \cdot \sin\vartheta, \quad \varphi \approx \frac{1}{2}\Delta \operatorname{ch}\mu \cos\vartheta,$$

где $a\Delta$ — ширина щели.

Потенциал, экспоненциально убывающий при $r < a$ ($\mu < 0$), равен $Be^{\mu}\sin\vartheta$ при $r < a$ и $(4B/a\Delta)(r-a) + Be^{-\mu}\sin\vartheta$ при $r > a$ ($\mu > 0$). Как мы видели выше, сумма ряда $B\sum D_m (r/a)^m \cos(m\varphi)$ равна $Be^{\mu}\sin\vartheta$ в щели, приблизительно равна $Be^{\mu}\sin\vartheta$ непосредственно у щели и удовлетворяет краевому условию $\psi = 0$ при $r = a$ вдали от щели, где решение $Be^{\mu}\sin\vartheta$ не применимо. Этот ряд дает, следовательно, хорошее приближение к истинному решению для статического случая, если только выбор B согласован в щели с радиальной составляющей градиента приложенного поля. Все это было указано на стр. 182.

В рассматриваемом случае мы вновь воспользуемся выражением

$$V\sqrt{1-\left(\frac{2\varphi}{\Delta}\right)^2} = V\sin\vartheta$$

для ψ на щели ($\mu = 0$), но теперь нельзя считать $Ve^{\mu}\sin\vartheta$ близким к решению вне щели. Потенциал может оказаться большим и внутри цилиндра. Другими словами, мы должны предположить, что $\psi = (1/2)(V+R)e^{\mu}\sin\vartheta + (1/2)(V-R)e^{-\mu}\sin\vartheta$. Это выражение также равно $V\sin\vartheta$ при $\mu = 0$. Вне цилиндра на некотором расстоянии от щели это выражение приближенно равно функции $(2/a\Delta)(V+R)(r-a)$, а в точках внутри цилиндра, находящихся не слишком близко к щели, но и не слишком далеко от нее (т. е. на расстояниях, больших чем $a\Delta$, но меньших чем a), — функции $(2/a\Delta)(R-V)(r-a)$.

Два сравниваемых случая можно различить путем вычисления радиальной составляющей градиента потенциала в щели. Для статического случая имеем

$$\frac{2}{a\Delta\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}(Ve^{\mu}\sin\vartheta)\right]_{\mu=0}=\frac{2V}{a\Delta}\approx\frac{V}{a}\sum_m mD_m\cos(m\varphi).$$

Этот ряд получен дифференцированием ряда для ψ при $r<a$; он очень плохо сходится, но нам известно из предыдущего рассмотрения, что его сумма приближенно равна $2V/a\Delta$ для $-\Delta/2<\varphi<\Delta/2$ и нулю для других значений φ.

В исследуемом случае выражение для ψ при $r<a$ содержит, как видно из формулы (11.2.43), не степени r, а функции Бесселя. Радиальная производная ψ при $r=a$ равна

$$-\frac{V}{a}\sum_m D_m\operatorname{tg}\alpha_m\cos(m\varphi),\quad \operatorname{tg}\alpha_m=-\frac{a}{J_m(ka)}\left[\frac{d}{dr}J_m(kr)\right]_{r=a}$$

и отличается от аналогичной величины для статического случая $2V/a\Delta$ суммой

$$-\frac{V}{a}\sum_m D_m[m+\operatorname{tg}\alpha_m]\cos(m\varphi).$$

Таблицы в конце настоящей главы показывают, что $\operatorname{tg}\alpha_m\simeq-m$ для $m\gg ka$, так что этот ряд сходится значительно быстрее, чем ряд для производной ψ. Итак, радиальную производную ψ в щели ($r=a$, $\varphi=0$) удобно выразить таким образом:

$$v_i=\frac{2V}{a\Delta}\left\{1-\frac{1}{2}\Delta\sum_{m=0}^{\infty}D_m[m+\operatorname{tg}\alpha_m]\right\}.$$

Эта величина радиальной производной ψ на щели была получена исходя из решения внутри цилиндра, которое мы обозначим ψ_i. С другой стороны, ее можно, конечно, получить в виде суммы радиальной производной v_f «приложенного к щели» поля плоской и рассеянной волн и производной v_0 последнего ряда формулы (11.2.43). Производная этого приложенного поля в центре щели равна

$$v_f=Ak\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i^m\left[J_m'(ka)-\frac{J_m(ka)}{H_m(ka)}H_m'(ka)\right]\cos(m\alpha),$$

где штрихи обозначают дифференцирование по аргументу ka и где δ_m вновь выражено через J_m и H_m. Этот ряд можно упростить, используя выражение для вронскиана функций Бесселя:

$$\Delta(J_m,H_m)=J_m(ka)H_{m-1}(ka)-J_{m-1}(ka)H_m(ka)=\frac{2i}{\pi ka}.\qquad(11.2.45)$$

Радиальная составляющая градиента приложенного поля в центре щели теперь записывается так:

$$v_f=\frac{2A}{\pi a}F(\alpha),$$

где

$$F(\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i^m\frac{e^{-i\delta_m(ka)}}{C_m(ka)}\cos(m\alpha).\qquad(11.2.46)$$

Отрицательная радиальная составляющая градиента наружного «вынужденного» поля при $r=a$, $\varphi=0$ имеет вид

$$v_0 = -Vk \sum_{m=0}^{\infty} D_m \frac{H'_m(ka)}{H_m(ka)}.$$

Условие, выражающее непрерывность производной в щели: $v_i = v_f - v_0$ или $v_f = v_i + v_0$, служит для определения неизвестной константы V, т. е. значения ψ при $r=a$, $\varphi=0$. Имеем

$$v_i + v_0 = Vk \sum_{m=0}^{\infty} D_m \left[\frac{J'_m(ka)}{J_m(ka)} - \frac{H'_m(ka)}{H_m(ka)} \right] = -Vk \sum_{m=0}^{\infty} D_m \frac{\Delta(J_m, H_m)}{J_m(ka) H_m(ka)} =$$

$$= \frac{2V}{\pi a} \sum_{m=0}^{\infty} D_m \frac{e^{-i\delta_m(ka)}}{[C_m(ka)]^2 \sin[\delta_m(ka)]} = \frac{2V}{\pi a \Delta} Y(\Delta, ka),$$

$$Y(\Delta, ka) = \frac{1}{8} \frac{\Delta^2 e^{-i\delta_0}}{C_0^2 \sin\delta_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta e^{-i\delta_m}}{C_m^2 \sin\delta_m} \frac{J_1(m\Delta/2)}{m}.$$

Этот ряд также сходится плохо. Как видно из таблицы в конце этой главы, при $m \gg ka$ мы получаем

$$\frac{e^{-i\delta_m}}{C_m^2 \sin\delta_m} \simeq \frac{\pi^2 \left(\frac{ka}{2}\right)^{2m} (m!)^2}{[(m-1)!]^2 \pi m \left(\frac{ka}{2}\right)^{2m}} = \pi m,$$

так что предельная форма суммы $v_i + v_0$ имеет вид $\frac{2V}{\pi a} \sum \pi m D_m$. Однако мы видели выше, что $\sum m D_m \simeq \frac{2}{\Delta}$, так что, вычитая и прибавляя $\Delta \sum \pi m D_m$, мы получаем выражение, сходящееся значительно лучше,

$$Y(\Delta, ka) = 2\pi + \Delta^2 \left\{ \frac{1}{8} \frac{e^{-i\delta_0}}{C_0^2 \sin\delta_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-i\delta_m}}{C_m^2 \sin\delta_m} - \pi m \right] \frac{J_1(m\Delta/2)}{m\Delta} \right\}. \quad (11.2.47)$$

Но, для того чтобы обеспечить непрерывность производной в щели, $v_i + v_0$ должна быть равна v_f. Поэтому формула

$$V = A\Delta \frac{F(a)}{Y(\Delta, ka)}$$

выражает амплитуду поля в щели через производную приложенного поля и «адмитанс» (отношение) Y наружного и внутреннего вынужденных полей.

Этот адмитанс становится бесконечным для таких значений ka, при которых $\sin\delta_m$ для некоторых m равен нулю. При этом $J_m(ka) = 0$, т. е. для внутренности цилиндра без щели имел бы место *резонанс*. При таких частотах поле V в щели равно нулю, что и должно быть. Следовательно, при частотах, резонансных для внутренней области, цилиндр ведет себя так, как будто у него *нет щели*. Непосредственно вблизи одной из этих точек резонанса адмитанс Y равен

$$Y \simeq \begin{cases} \dfrac{e^{-i\delta_0}}{C_0} \dfrac{\Delta^2/8}{J_0(ka)}, & J_0(ka) \to 0, \\[2ex] \dfrac{J_1(m\Delta/2)}{m\Delta} \dfrac{e^{-i\delta_m}}{C_m} \dfrac{\Delta^2}{J_m(ka)}, & J_m(ka) \to 0. \end{cases}$$

Таким образом, мы нашли приближенное выражение для $\psi(a, \varphi)$, $V\sqrt{1-(2\varphi/\Delta)^2}$, где V определено равенством (11.2.47). Для подсчета рассеянной волны и поля внутри цилиндра это значение $\psi(a, \varphi)$ следует подставить в (11.2.43). Как видно из (11.2.44), коэффициенты A_m равны VD_m, а коэффициенты B_m равны нулю. Таким образом, потенциал волны в центре цилиндра имеет вид

$$\psi(0) \simeq \frac{A\Delta^2}{8J_0(ka)} \frac{F(\alpha)}{Y(\Delta, ka)} e^{-i\omega t}.$$

Эта величина обычно мала благодаря множителю Δ^2. Если имеется резонанс для стоячих волн типа $m=0$, т. е. если $J_0(ka)=0$, то $\psi(0)$ велико, но не бесконечно, поскольку Y неограниченно возрастает, когда $J_0(ka) \to 0$. В пределе при $J_0(ka)=0$ мы получаем $\psi(0) \simeq iH_0(ka)AF(\alpha)$. Эта величина больше, чем нерезонансная, так как она не содержит множителя Δ^2. При резонансных частотах правильным решением во внешней области будет комбинация плоской и рассеянной волн для цилиндра без щели.

Конечно, если частота такова, что $J_m(ka)=0$, то функция Y становится бесконечной и поскольку при этом $J_0(ka)$ не обращается в нуль, значение потенциала волны при $r=0$ оказывается равным нулю. Это объясняется тем, что все возбуждаемые стоячие волны для $m \neq 0$ имеют нулевую амплитуду при $r=0$; в других точках внутри цилиндра такие волны могут быть обнаружены. При каждой резонансной частоте, т. е. каждый раз, когда $J_m(2\pi\nu a/c)$ обращается в нуль, стоячая волна внутри цилиндра имеет форму определенной собственной функции; остальные стоячие волны при этом отсутствуют.

Рассеянная волна, соответствующая падающей волне единичной амплитуды ($A=1$), имеет вид

$$\psi_s \simeq -\sqrt{\frac{2i}{\pi kr}} e^{ikr-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m e^{-i\delta_m} \Big\{ \sin\delta_m \cos[m(\varphi-\alpha)] - \\ - \frac{\Delta J_1(m\Delta/2)}{2mi^m C_m Y(\Delta, ka)} F(\alpha)\cos(m\varphi) \Big\}, \quad r \to \infty. \qquad (11.2.48)$$

Эту формулу интересно сравнить с (11.2.29). Эффективная ширина рассеяния цилиндра со щелью выражается так:

$$Q = \frac{4}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \Big\{ \sin^2\delta_m - \frac{\sin\delta_m \cos(m\pi/2)\,\Delta J_1(m\Delta/2)}{mC_m Y(\Delta, ka)} F(\alpha)\cos(m\alpha) + \\ + \left[\frac{\Delta J_1(m\Delta/2)}{2mC_m}\right]^2 \frac{F^2(\alpha)}{Y^2(\Delta, ka)} \Big\}, \qquad (11.2.49)$$

где функции $F(\alpha)$ и $Y(\Delta, ka)$ заданы формулами (11.2.46) и (11.2.47). Эти формулы выведены для краевого условия $\psi=0$ при $r=a$, $\Delta/2 < \varphi < 2\pi - \Delta/2$, и для единичной плоской падающей волны, распространяющейся под углом α к оси щели ($\varphi=0$). Мы считаем, что $(\Delta/m)J_1(m\Delta/2) = \Delta^2/4$ при $m=0$.

Подчеркнем еще раз, что при $J_m(ka)=0$ поле внутри цилиндр велико и наружные признаки щели отсутствуют. Мы не получили бесконечных решений, так как приняли во внимание не только резонанс внутри цилиндра, но и излучение вовне, а адмитанс излучения никогда не бывает равным нулю.

Цилиндр со щелью; условия Неймана. Случай, когда нормальная составляющая градиента потенциала равна нулю на цилиндре, отличается от только что рассмотренного нами в основном тем, что при рассмотрении предельного статического поля ($k \to 0$) не получается решения, связанного с проникновением в цилиндр. Условия Неймана соответствуют движению жидкости и случай $k = 0$ — потоку несжимаемой жидкости. Очевидно, установившийся поток несжимаемой жидкости как внутри, так и вне цилиндра не может существовать без того, чтобы не наблюдались сложные вихревые движения, возможность которых мы исключаем, когда собираемся искать решение в виде потенциального потока. Если же рассматривать осциллирующий поток упругой жидкости, то, конечно, возможны движения внутри цилиндра, и может иметь место резонанс. Однако здесь мы лишены возможности найти решение для статического случая.

Тем не менее можно использовать некоторые выводы, полученные при изучении решения уравнения Лапласа в эллиптических координатах. Для щели в плоском экране шириной $a\Delta$ установившийся поток через щель задается потенциалом скоростей $\psi = \varkappa + (a\Delta/2)\, v_0\mu$, где эллиптические координаты μ, ϑ определены на стр. 185.

Потенциал ψ постоянен здесь вдоль щели ($\mu = 0$), но скорость движения жидкости через щель не одинакова вдоль щели:

$$v = \frac{2}{a\Delta \sin\vartheta}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right]_{\mu=0} = \frac{v_0}{\sin\vartheta} = \frac{v_0}{\sqrt{1-(2\varphi/\Delta)^2}}. \qquad (11.2.50)$$

Эта скорость имеет минимальное значение v_0 в середине щели ($\varphi = 0$) и возрастает до бесконечности вблизи обоих концов, где происходит обтекание острых краев. Пока ширина щели мала по сравнению с окружностью цилиндра $2\pi a$ и по сравнению с длиной волны $2\pi/k = 2\pi c/\omega$ можно предположить распределение потенциала ψ и распределение скоростей в щели совпадающими с указанными выражениями, хотя мы не можем ожидать такого совпадения вдали от щели.

Соответственно этому потенциал скоростей для волнового движения можно представить в виде

$$\psi(r, \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \dfrac{J_m(kr)}{kJ'_m(ka)} \cos(m\varphi)\, e^{-i\omega t}, & r < a, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \left[J_m(kr) - \dfrac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} H_m(kr)\right] \cos[m(\varphi-\alpha)]\, e^{-i\omega t} + \\ \quad + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \dfrac{H_m(kr)}{kH'_m(ka)} \cos(m\varphi)\, e^{-i\omega t}, & r > a, \end{cases}$$

$$(11.2.51)$$

где, учитывая принятое распределение скоростей в щели, положено

$$A_m = \frac{v_0\varepsilon_m}{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\cos(mu)\, du}{\sqrt{1-(2u/\Delta)^2}} = \frac{1}{4} v_0 \Delta \varepsilon_m J_0\left(\frac{1}{2} m\Delta\right).$$

Заметим, между прочим, что ряды (11.2.51) можно рассматривать или как ряды по собственным функциям, удовлетворяющим краевым условиям при $r = a$, или как решение, выраженное через функцию Грина и соответствующее условию, что $\partial\psi(r,\varphi)/\partial r$ равна нулю при $r = a$, $\Delta/2 < \varphi < 2\pi - \Delta/2$ и равна $v_0/\sqrt{1-(2\varphi/\Delta)^2}$ при $-\Delta/2 < \varphi < \Delta/2$. Например, для внутренней функции Грина, удовлетворяющей условиям Неймана при $r = a$

из (7.2.51) имеем

$$G(r, \varphi \mid r_0, \varphi_0) =$$
$$= i\pi \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos[m(\varphi - \varphi_0)] J_m(kr) \left\{ H_m(kr_0) - \frac{H'_m(ka) J_m(kr_0)}{J'_m(ka)} \right\}, \qquad r < r_0.$$

Решение внутренней задачи, отвечающее упомянутому условию, в соответствии с (7.2.10) имеет вид

$$\psi(r, \varphi) = \frac{a}{4\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{v_0}{\sqrt{1 - (2\varphi_0/\Delta)^2}} G(r, \varphi \mid a, \varphi_0) \, d\varphi_0,$$

откуда, используя выражение для вронскиана $\Delta(J_m, H_m)$, получаем первую часть формулы (11.2.51). Таким образом, введенное приближение позволяет нам избежать определения бесконечного множества неизвестных A_m и ограничиться определением единственной неизвестной v_0, что является, конечно, более легкой задачей.

Мы находим величину v_0 для заданного A, определяя импедансы. Давление в жидкости связано с потенциалом скоростей ψ соотношением $p = -i\omega\rho\psi$, а скорость равна $-\operatorname{grad}\psi$. Отношение давления к амплитуде скорости называется *акустическим импедансом* (см. стр. 296 тома I и стр. 345). Отношение ψ к v может быть названо *импедансом поля*. При постоянной частоте импеданс поля пропорционален акустическому импедансу, и нам проще употреблять именно эту величину. Амплитуда комбинации плоской и рассеянной волн, построенных для неразрезанного цилиндра, в центре щели имеет значение

$$\psi_f = A \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m [J_m(ka) H'_m(ka) - J'_m(ka) H_m(ka)] \frac{\cos(m\alpha)}{H'_m(ka)} = 2AF'(\alpha),$$

$$F'(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \frac{e^{-i\delta'_m}}{\pi ka C'_m} \cos(m\alpha). \tag{11.2.52}$$

Ее можно рассматривать как «вынуждающую силу», возбуждающую стоячую волну внутри цилиндра, а также дополнительную рассеянную волну вне цилиндра. Для определения амплитуды вынужденного движения (скорости v_0) нам следует в первую очередь найти импеданс поля внутренней и внешней волн.

Импеданс поля внутренней стоячей волны является отношением внутреннего ψ в центре щели к v_0 — соответствующей составляющей скорости в той же точке:

$$z_i = \frac{1}{4} \Delta a \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{J_m(ka)}{ka J'_m(ka)} J_0\left(\frac{1}{2} m\Delta\right) = -\frac{a}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \operatorname{ctg} \alpha_m \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\cos(mu)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2u}{\Delta}\right)^2}} \, du.$$

Этот ряд очень плохо сходится, и требуются некоторые искусственные приемы, чтобы упростить вычисления. Мы усматриваем из таблиц в конце этой главы, что $\operatorname{ctg} \alpha_m \simeq -1/m$ для $m \gg ka$. Но при помощи простой выкладки легко убедиться, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a}{\pi m} \cos(mu) = -\frac{a}{\pi} \operatorname{Re}[\ln(1-e^{iu})] = -\frac{a}{2\pi} \ln[2-2\cos u] \simeq$$

$$\simeq -\frac{a}{\pi} \ln|u| \text{ для } u \ll \pi.$$

Поэтому

$$\frac{a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\cos(mu)}{\sqrt{1-\left(\frac{2u}{\Delta}\right)^2}} du \simeq -\frac{a\Delta}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\ln\left(\frac{1}{2}|w|\Delta\right)}{\sqrt{1-w^2}} dw =$$

$$= -\frac{a\Delta}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\Delta\cos z\right) dz = \frac{1}{2} a\Delta \ln\frac{4}{\Delta}$$

и

$$z_i \simeq \frac{1}{2} a\Delta \left[\ln\frac{4}{\Delta} - \frac{1}{2} f'(\Delta, ka)\right], \tag{11.2.53}$$

где

$$f'(\Delta, ka) = \operatorname{ctg}\alpha_0 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m} + \operatorname{ctg}\alpha_m\right] J_0\left(\frac{1}{2}m\Delta\right),$$

причем ряд для f' сходится довольно быстро. Акустический импеданс равен, конечно, $i\omega\rho z_i$, т. е. является чисто реактивным. Заметим, что f' есть функция не только Δ, но также и ka, поскольку углы α_m являются функциями ka. Эти углы приведены в таблице в конце книги. Благодаря члену $\operatorname{ctg}\alpha_m$ импеданс становится бесконечным для тех частот, для которых $J'_m(ka) = 0$.

Импеданс поля дополнительной внешней волны в центре щели равен величине дополнительного внешнего поля, разделенной на $-v_0$:

$$z_0 = -\frac{a}{2\pi} \sum \varepsilon_m \frac{H_m(ka)}{kaH'_m(ka)} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\cos(mu)}{\sqrt{1-\left(\frac{2u}{\Delta}\right)^2}} du =$$

$$= \frac{1}{2} a\Delta \left\{\ln\frac{4}{\Delta} + \frac{e^{i(\delta_0-\delta'_0)}}{2ka} \frac{C_0}{C'_0} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i(\delta_m-\delta'_m)}}{2ka} \frac{C_m}{C'_m} - \frac{1}{m}\right] J_0\left(\frac{1}{2}m\Delta\right)\right\}.$$

Акустический импеданс $i\omega\rho z_0$ в отличие от $i\omega\rho z_i$ не является чисто мнимым; он имеет некоторую действительную часть — *сопротивление излучения*. Сумма этих двух импедансов представляет собой полный импеданс системы, на которую действует «вынуждающая сила» ψ_f:

$$z_0 + z_i = -\frac{\Delta a}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left[\frac{H_m(ka)}{kaH'_m(ka)} - \frac{J_m(ka)}{kaJ'_m(ka)}\right] J_0\left(\frac{1}{2}m\Delta\right) = 2a\Delta\, Z(\Delta, ka),$$

где

$$Z(\Delta, ka) = -\frac{1}{4\pi(ka)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m e^{-i\delta'_m} J_0(m\Delta/2)}{(C'_m)^2 \sin\delta'_m}.$$

Этот ряд также плохо сходится, и при больших m его члены ведут себя как члены ряда

$$\frac{1}{4\pi (ka)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \frac{4\pi^2 \left(\frac{ka}{2}\right)^{2m+2}}{(m!)^2} \frac{(m!)^2}{\pi m \left(\frac{ka}{2}\right)^{2m}} \frac{2}{\pi\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\cos(mu)\,du}{\sqrt{1-\left(\frac{2u}{\Delta}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos(mu) \frac{du}{\sqrt{1-\left(\frac{2u}{\Delta}\right)^2}} \simeq \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\Delta}.$$

Следовательно, можно написать

$$Z(\Delta, ka) = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\Delta} - \frac{e^{-i\delta_0'}}{4\pi k^2 a^2 (C_0')^2 \sin \delta_0'} -$$

$$- \frac{1}{2(ka)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-i\delta_m'}}{\pi (kaC_m')^2 \sin \delta_m'} + \frac{1}{m} \right] J_0\left(\frac{1}{2} m\Delta\right). \quad (11.2.54)$$

Эта величина пропорциональна импедансу движения среды через щель, включая реактивную нагрузку, создаваемую средой внутри цилиндра, и, частично, активную нагрузку поля излучения вне цилиндра. Сравнение с (11.2.47) показывает, что отношение первого члена к остальным при малом Δ здесь больше, чем в предыдущем случае. Это происходит потому, что условия для проникновения поля через щель много лучше в случае, когда составляющая градиента равна нулю на границе, нежели тогда, когда равен нулю сам потенциал.

Мы можем теперь определить скорость среды в щели:

$$v_0 \simeq \frac{\psi_f}{z_0 + z_i} = \frac{A}{a\Delta} \frac{F'(a)}{Z(\Delta, ka)}.$$

Эту величину можно подставить вновь в (11.2.51), чтобы получить потенциал скоростей внутри и вне цилиндра. Величина потенциала скоростей в щели определяется равенством

$$\psi_i = v_0 z_i = \psi_f \frac{z_i}{z_0 + z_i},$$
$$\psi_i \simeq \frac{AF'(a)}{2Z(\Delta, ka)} \left[\ln \frac{4}{\Delta} - \frac{1}{2} f'(\Delta, ka) \right] \quad (11.2.55)$$

при $-\Delta/2 < \varphi < \Delta/2$.

Если во внутренней области имеет место резонанс, то $J_m'(ka) = 0$ для некоторого m, так что $\sin \delta_m'$ обращается в нуль и z_i бесконечен. Следовательно, скорость течения через щель v_0 равна нулю для резонансных частот (поскольку нет поглощения энергии) и потенциал в щели, конечно, точно равен ψ_f

Выражение для рассеянной волны и эффективной ширины рассеяния цилиндра полностью совпадает с (11.2.49). В этом случае Q также никогда не становится бесконечной, так как $Z(\Delta, ka)$, будучи комплексным, никогда не обращается в нуль, хотя два дополнительных члена в ряде для Q могут обращаться в нуль, когда $Z(\Delta, ka)$ становится бесконечным (при $\sin \delta_m' = 0$).

Соотношение между двумя рассмотренными случаями станет более ясным, если рассмотреть их с другой точки зрения. Значения потенциала в щели можно рассматривать как аналоги напряжений, а нормальные составляющие градиента в щели — как токи. В случае, рассматриваемом в этом пункте, «вынуждающей силой» служит напряжение ψ_f; комбинация плоской и рассеянной волн для неразрезанного цилиндра не имеет нормальной составляющей градиента в щели. Составляющая градиента внутренней функции ψ_i должна быть равна составляющей градиента внешней функции ψ_0 и обе они должны быть равны v_0. В то же время для того, чтобы потенциал был непрерывен, должно иметь место равенство $\psi_i = \psi_f + \psi_0$. Можно рассматривать ψ_i как падение напряжения на внутренней нагрузке и $-\psi_0$ как падение напряжения на наружной нагрузке. Тогда уравнения будут такими же, как при последовательном соединении контуров, и падения напряжения на обеих нагрузках складываются, ток в нагрузках одинаков и вынуждающее напряжение приложено к обеим нагрузкам. Если какая-либо из нагрузок обладает бесконечным импедансом, то ток, естественно, будет равен нулю; но когда импеданс какой-либо нагрузки равен нулю, ток не бесконечен, и он становится бесконечным только в том случае, когда при некоторой частоте импедансы обеих нагрузок взаимно уничтожаются (чего обычно не бывает). Внешняя нагрузка монотонно меняется с изменением частоты, а внутренняя нагрузка заметно колеблется, становясь бесконечной при резонансных частотах и обращаясь в нуль при промежуточных частотах. Максимум величины v_0, а значит, и наибольшая амплитуда дополнительной рассеянной волны достигается при этих промежуточных частотах.

Возвращаясь к ранее рассмотренному случаю условий Дирихле, мы видим противоположную картину. Здесь «вынуждающей силой» является источник постоянного тока v_f. По условию непрерывности внутренняя производная (или ток) v_i должна равняться сумме внешних $v_f - v_0$, так что вынуждающий ток v_f разделяется на две части v_i и v_0. С другой стороны, значения внешнего и внутреннего потенциалов (напряжений) одинаковы на щели и равны V. Ситуация является типичной для параллельного соединения — источник постоянного тока питает параллельно внутреннюю и внешнюю нагрузки. Общий адмитанс равен сумме двух адмитансов, и напряжение V равно отношению v_f к сумме адмитансов. Для резонансных частот внутренней области [т. е. при $J_m(ka) = 0$] V равно нулю и рассеянная волна такая же, как при отсутствии щели. Для других частот дополнительная волна, порожденная движением среды через щель, местами усиливает, а местами ослабляет обычную рассеянную волну.

Различие между рассмотренными двумя случаями легко продемонстрировать на численных примерах. Пусть $ka = 2\pi a/\lambda$ весьма мало; тогда для этих двух случаев получаем следующее.

Случай I ($\psi = 0$ при $r = a$, $\Delta/2 < \varphi < 2\pi - \Delta/2$; амплитуда первичной плоской волны, падающей под углом α, равна A).

Потенциал в щели

$$\psi(a, \varphi) \simeq -\frac{A\Delta}{4\ln(ka)} \sqrt{1 - \left(\frac{2\varphi}{\Delta}\right)^2}, \quad -\Delta/2 < \varphi < \Delta/2.$$

Радиальная составляющая градиента в щели $v_i \simeq -\dfrac{A}{2a\ln(ka)}$.

Потенциал на оси цилиндра $\psi(0) \simeq -\dfrac{A\Delta^2}{32\ln(ka)}$.

Эффективная ширина рассеяния

$$Q \simeq \frac{\pi^2 a}{ka\ln^2(ka)} \left[1 + \frac{\Delta^2}{16\ln(ka)}\right].$$

Случай II ($\partial\psi/\partial r = 0$ при $r = a$, $\Delta/2 < \varphi < 2\pi - \Delta/2$).

Потенциал в щели

$$\psi_i \simeq \frac{\pi k a A}{2\ln(4/\Delta)} \left[\ln\frac{4}{\Delta} - \frac{1}{(ka)^2}\right].$$

Радиальная составляющая градиента в щели

$$v_i \simeq \frac{\pi k a A}{2\Delta a \ln(4/\Delta)} \frac{1}{\sqrt{1-(2\varphi/\Delta)^2}}.$$

Потенциал на оси цилиндра

$$\psi(0) \simeq -\frac{\pi A}{2ka \ln(4/\Delta)}.$$

Эффективная ширина рассеяния

$$Q \simeq \pi^2 (ka)^3 \left[1 - \frac{\pi}{ka \ln(4/\Delta)}\right].$$

Эти величины являются функциями двух малых величин ka и Δ. Как функции от Δ, при Δ, стремящемся к нулю, в случае I все величины стремятся к нулю быстрее, чем в случае II. Это происходит потому, что поле, удовлетворяющее условиям Дирихле, проникает через щель значительно слабее, чем поле, удовлетворяющее условиям Неймана. Потенциал в центре цилиндра $\psi(0)$ во втором случае стремится к бесконечности при ka, стремящемся к нулю, но мы видели, что в этом случае статическая задача имеет свои особенности. При конечном (но малом) ka и малом Δ первый член Q (относящийся к цилиндру без щели) меньше для случая II, чем для случая I, однако второй член в скобках в случае I меньше, чем в случае II. Цилиндр, на поверхности которого составляющие градиента равны нулю, деформирует длинные волны меньше, чем цилиндр, на поверхности которого потенциал равен нулю, но щель в первом случае производит большее изменение в рассеянии, чем во втором.

Задачи подобного типа, где решения должны быть сопряжены на щели в границе, в § 11.4 будут решаться при помощи интегральных уравнений и вариационных методов.

Волновое уравнение в параболических координатах. Возвращаясь к формуле (5.1.10), мы видим, что в параболических координатах

$$x = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2), \quad y = \lambda\mu, \quad h_\mu = h_\nu = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2} = \sqrt{2r},$$

$$\lambda = \sqrt{r + x}, \quad \mu = \sqrt{r - x},$$

а уравнение Гельмгольца $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ разделяется следующим образом $[\psi = M(\mu) L(\lambda)]$:

$$\frac{d^2M}{d\mu^2} + (ka + k^2\mu^2) M = 0,$$

$$\frac{d^2L}{d\lambda^2} + (-ka + k^2\lambda^2) L = 0$$

[см. формулу (10.1.36) и следующие, относящиеся к уравнению Лапласа в этих координатах]. Решения для обоих множителей M и L могут быть выражены через функции $H(a, \mu\sqrt{k})$ и $H(-a, \lambda\sqrt{k})$, где $H(a, x)$ — решение уравнения

$$\frac{d^2H}{dx^2} + (a + x^2) H = 0, \quad x^2 = k(\lambda^2, \mu^2). \tag{11.2.56}$$

Это уравнение имеет иррегулярную особую точку на бесконечности и не имеет особых точек в конечной части плоскости. Особенность на бесконечности, однако, иного рода, чем для простой экспоненты от x. Фундаментальная вблизи $x = 0$ система решений состоит из четной функции

$H_e(a, x)$, представимой рядом по четным (even) степеням x и нечетной функции $H_o(a, x)$, представимой рядом по нечетным (odd) степеням. Производя замену $z=(1/2)x^2$, убеждаемся, что уравнение (11.2.56) переходит в гипергеометрическое уравнение типа (5.3.44). В самом деле,

$$H_e(a, x)=e^{-\frac{1}{2}ix^2}F\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}ia\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\middle|\,ix^2\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{24}(a^2-2)x^4-\frac{1}{720}(a^3-14a)x^6+\ldots,$$
$$H_o(a, x)=xe^{-\frac{1}{2}ix^2}F\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}ia\,\middle|\,\frac{3}{2}\,\middle|\,ix^2\right)=$$
$$=x-\frac{1}{6}ax^3+\frac{1}{120}(a^2-6)x^5-\frac{1}{5040}(a^3-26a)x^7+\ldots. \quad (11.2.57)$$

Хотя в эти выражения, содержащие вырожденные гипергеометрические функции, входят мнимые величины, все коэффициенты при степенях x в рядах для H_e и H_o действительны, так что H_e и H_o действительны при действительном x.

Из (5.3.63) видно, что при $a=0$

$$H_e(0, x)=\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{x}{2}}\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right),\quad H_o(0, x)=\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\sqrt{2x}\,J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right). \quad (11.2.57')$$

Решения для $a\neq 0$ можно получить в виде ряда по функциям Бесселя. Так, например, полагая $H(a, x)=\sqrt{x}\,G(a, z)$, где $z=(1/2)x^2$, находим, что G удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2G}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dG}{dz}+\left[1+\frac{a}{2z}-\frac{1}{16z^2}\right]G=0.$$

Полагая $G_e=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nJ_{n-\frac{1}{4}}(z)$, для четной функции получаем

$$=2z\sum_{n=0}^{\infty}b_nJ_{n-\frac{1}{4}}(z)\left[\frac{1}{2}\frac{a}{z}+\frac{\left(n-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{z^2}\right]=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}b_nJ_{n-\frac{1}{4}}(z)\left[a+\frac{2n\left(n-\frac{1}{2}\right)}{z}\right]=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}J_{n-\frac{1}{4}}(z)\left[\frac{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)}{n-\frac{5}{4}}b_{n-1}+ab_n+\frac{(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n+\frac{3}{4}}b_{n+1}\right].$$

Приравнивая коэффициенты при различных J нулю, находим, что $ab_0+(2/3)b_1=0$, $(12/7)b_2+ab_1=0$, $(30/11)b_3+ab_2+(2/3)b_1=0$ и т. д. Решая последовательно эти рекурсивные соотношения (см. стр. 509 тома I) и выбирая b_0 таким образом, чтобы новый ряд соответствовал ряду

(11.2.57), мы, наконец, получаем

$$H_e(a,\ x)=\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{x}{2}}\left[J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)-\frac{3}{2}aJ_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{7}{8}a^2J_{\frac{7}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)+\frac{11}{30}\left(a-\frac{7}{8}a^3\right)J_{\frac{11}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)+\dots\right].$$

Аналогично

$$H_o(a,\ x)=\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\sqrt{2x}\left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)-\frac{5}{6}aJ_{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8}a^2J_{\frac{9}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)+\frac{13}{42}\left(a-\frac{3}{8}a^3\right)J_{\frac{13}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)+\dots\right]. \quad (11.2.58)$$

Эти ряды удовлетворительно сходятся, когда приблизительно $x^2/2\leqslant 10$ и $a<1/2$.

Собственные функции для внутренних задач. Полученные в предыдущем пункте функции могут быть использованы для определения собственных функций и собственных значений для внутренней области, ограниченной двумя софокусными и соосными параболами. Как только мы приступаем к решению указанной задачи, проявляются некоторые свойства параболических координат, оказывающие значительное влияние на выбор функций. Изучение системы координат (см. рис. 5.1) показывает, что одна из двух координат λ или μ меняется от $-\infty$ до $+\infty$, но не обе координаты одновременно. Если μ принимает как отрицательные, так и положительные значения, то границы изменения λ будут 0 и $+\infty$. Во внешних задачах это обстоятельство не вызывает осложнений; так, например, для области вне параболы $\lambda=\lambda_0$ значения λ лежат между λ_0 и ∞, а значения μ между $-\infty$ и $+\infty$. Но при решении внутренних задач, скажем, для области, заключенной между параболами $\lambda=\lambda_0$ и $\mu=\mu_0$, можно положить, что переменные меняются или в промежутках $0<\lambda<\lambda_0$, $-\mu_0<\mu<\mu_0$ или в промежутках $-\lambda_0<\lambda<$ $<\lambda_0$, $0<\mu<\mu_0$. При этом простое рассмотрение показывает, что если в решении внутренней задачи множитель, зависящий от λ, нечетный, т. е. имеет при отрицательном λ знак, противоположный тому, который он имеет при положительном λ, то множитель, зависящий от μ, должен также быть нечетным, так как он должен обращаться в нуль при $\mu=0$ (и наоборот). Другими словами, если функция имеет узел при $\lambda=0$ (т. е. вдоль отрицательной полуоси x), то тот же узел должен быть и при $\mu=0$ (вдоль положительной полуоси x). Наоборот, если множитель, зависящий от λ, четный и имеет максимум или минимум при $\lambda=0$, то множитель, зависящий от μ, для внутренней задачи также должен быть четным, так что максимум (или минимум) продолжается через $\mu=0$. Такое сочетание множителей во внутренней задаче вызвано симметрией границ $\mu=\mu_0$, $\lambda=\lambda_0$; вся ось x должна быть либо узлом, либо пучностью для соответствующей функции.

Если ограниченная область симметрична также относительно оси y, то $\lambda_0=\mu_0$, и оказывается, что некоторые из собственных функций соответствуют значению постоянной разделения $a=0$. В этих случаях, как видно из (11.2.57′), решения выражаются через функции Бесселя. Некоторые собственные значения k в этом случае выражаются через корни уравнений

$$J_{-\frac{1}{4}}(\gamma_{2m})=0,\quad J_{\frac{1}{4}}(\gamma_{2m+1})=0,\qquad m=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\qquad (11.2.59)$$

если краевое условие требует равенства собственной функции нулю при $\mu=\mu_0=\lambda=\lambda_0$. Четным n соответствуют корни γ_n ($n=0, 2, \ldots$) четных решений, нечетным n — корни γ_n ($n=1, 3, \ldots$) нечетных решений, причем множители, зависящие от λ и от μ, имеют одинаковую форму. Эти решения соответствуют решениям $\sin(\pi n_x x/a)\sin(\pi n_y y/b)$ для квадратной мембраны, у которой $n_x=n_y$. Итак, мы показали, что для симметричного случая при $\mu_0=\lambda_0$ некоторые собственные функции и собственные значения при $n_\mu=n_\lambda=n$ имеют следующую форму:

$$\psi_{nn}(\lambda, \mu)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2\sqrt{\lambda\mu}\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\gamma_n\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\gamma_n\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right), & n \text{ — четное,}\\ 2\left[\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\right]^2\sqrt{\lambda\mu}\,J_{\frac{1}{4}}\left(\gamma_n\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}\right)J_{\frac{1}{4}}\left(\gamma_n\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right), & n \text{ — нечетное;}\end{cases} \tag{11.2.60}$$

$$k_{nn}=2\frac{\gamma_n}{\lambda_0^2}=2\frac{\gamma_n}{\mu_0^2}, \quad a_{nn}=0;$$

$$\gamma_0=2{,}006,\ \gamma_1=2{,}781,\ \gamma_2=5{,}123,\ \gamma_3=5{,}906,\ \ldots;$$

собственные значения γ являются здесь решениями уравнений (11.2.59).

Для случаев $\mu_0\neq\lambda_0$ и для несимметричных решений при $\mu_0=\lambda_0$ постоянная a_{mn} не равна нулю и задача оказывается более трудной. Уравнение $H_e(a, \lambda_0\sqrt{k})=0$ при заданном значении λ_0 определяет семейство кривых, связывающих a и k (задающих k как функцию от a). Ближайшая к оси a кривая может быть снабжена индексом $m=0$, следующая $m=2$ и т. д. Уравнение $H_e(-a, \mu_0\sqrt{k})=0$ определяет другое семейство кривых на плоскости a, k, причем нижняя из них может быть снабжена индексом $n=0$, следующая $n=2$ и т. д. Точка пересечения любых двух кривых, принадлежащих различным семействам, определяет допустимое значение a (обозначаемое a_{mn}) и допустимое значение k (обозначаемое k_{mn}), а следовательно, соответствующую собственную функцию

$$\psi_{mn}=H_e(a_{mn}, \lambda\sqrt{k_{mn}})\,H_e(-a_{mn}, \mu\sqrt{k_{mn}}).$$

Эти функции четные и квантовые числа (n, m) соответственно четные. Для получения нечетной функции мы выполняем ту же процедуру с нечетными функциями H_o. Уравнение $H_o(a, \lambda_0\sqrt{k})=0$ определяет семейство кривых на плоскости a, k, наинизшая из которых соответствует $m=1$, следующая $m=3$ и т. д. Другое семейство кривых для $n=1, 3, \ldots$ получается из уравнения $H_o(-a, \mu_0\sqrt{k})=0$. Пересечения кривых этих двух семейств определяют нечетные функции. Таким путем мы получаем все собственные функции и собственные значения [отсутствие решений с m нечетным и n четным (или наоборот) просто отражает тот факт, что множитель, зависящий от λ, не может быть нечетным, если множитель, зависящий от μ, четный, и наоборот].

Для случая $\lambda_0=\mu_0$ собственные функции, соответствующие наименьшему собственному значению k_{00} и следующему за ним k_{11}, даются равенствами (11.2.60). Последующие функции для k_{02} (и k_{20}, которое в данном случае равно k_{02}) не входят в (11.2.60) и должны быть вычислены методами, изложенными в двух предыдущих пунктах. Собственные функции для значений k_{13} и k_{31} также подлежат вычислению более сложными методами. Собственная функция для шестого собственного значения k_{22} вновь содержится в (11.2.60) и т. д.

В действительности лишь в немногих случаях мы имеем дело с областями, которые достаточно хорошо соответствуют областям с параболическими границами, и поэтому представляется нецелесообразным продолжать дальнейшее рассмотрение вопроса о внутренних решениях. В случае необходимости к решениям H_e и H_o без большого труда могут быть применены общие методы гл. 6 и 7.

Волны вне параболических границ. Больше оснований имеется для продолжения рассмотрения внешней задачи в параболических координатах. Плоский полубесконечный экран можно рассматривать как границу $\lambda=\lambda_0$, где λ_0 стремится к нулю. Полезно будет выразить функцию Грина и ее предел — плоскую волну — через параболические волновые функции. Мы, правда, решили уже задачу о рассеянии плоской волны на полуплоскости при помощи цилиндрических волновых функций (см. стр. 359), но использование новых волновых функций может упростить решение или может позволить представить решение в другой форме.

Прежде всего необходимо изучить асимптотическое поведение H_e и H_o, чтобы выяснить, не будет ли некоторая комбинация этих двух независимых решений более подходящей для решения внешних задач. Возвращаясь к (5.3.51), мы видим, что если $x=|x|e^{i\theta}$ $(x=\sqrt{k}\,\lambda$ или $x=\sqrt{k}\,\mu)$, то асимптотическое поведение функций H для действительных x и a имеет вид

$$\begin{aligned} H_e(a,\ x) &\simeq \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{-\pi a/8}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}ia\right)\right|\sqrt{x}}\cos\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}a\ln x-\frac{1}{8}\pi-\sigma(a)\right], \\ H_o(a,\ x) &\simeq \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)e^{-\pi a/8}}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}ia\right)\right|\sqrt{x}}\cos\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}a\ln x-\frac{3}{8}\pi-\tau(a)\right], \end{aligned} \tag{11.2.61}$$

где

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}ia\right)=\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}ia\right)\right|e^{i\sigma(a)},\quad \Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}ia\right)=\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}ia\right)\right|e^{i\tau(a)}.$$

Эти формулы показывают, что наши функции, несмотря на то, что они действительны при действительных x, с точки зрения их поведения на бесконечности не вполне удовлетворительны. Неудобство заключается в наличии члена $(a/2)\ln x$ в аргументе косинуса. Это обстоятельство не позволяет, по-видимому, привести (11.2.61) к виду обычных асимптотических волновых формул для других координат. Трудность, очевидно, возникает из-за того, что a предполагается действительным; при a мнимом множитель $x^{ia/2}$ был бы действительной степенью x и логарифмический член исчез бы из аргумента косинуса. Конечно, нет никаких оснований для того, чтобы во внешних задачах считать a действительным. При решении внутренних задач a должно быть действительным потому, что функции H_e и H_o действительны. Но при решении внешней задачи нет необходимости, чтобы наши функции были действительными; в полярных координатах мы пользуемся для внешних задач комплексной функцией Ганкеля $H_m(kr)$, предпочитая ее действительным функциям $J_m(kr)$ в связи с ее простым асимптотическим поведением.

Предположим, что a — чисто мнимая величина, и обозначим ее $(2m+1)i$, где m — действительное число, положительное или отрицательное. Разделенными решениями уравнения Гельмгольца тогда будут функции

$$H_e[(2m+1)i,\ \lambda\sqrt{k}]\,H_e[-(2m+1)i,\ \ \mu\sqrt{k}]$$

или

$$H_o[(2m+1)i,\ \lambda\sqrt{k}]\,H_o[-(2m+1)i,\ \ \mu\sqrt{k}],$$

которые выражаются через вырожденные гипергеометрические функции следующим образом:

$$H_e[(2m+1)i,\ x] = e^{-\frac{1}{2}ix^2} F\left(-\frac{1}{2}m \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, ix^2\right), \tag{11.2.62}$$
$$H_o[(2m+1)i,\ x] = xe^{-\frac{1}{2}ix^2} F\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m \,\middle|\, \frac{3}{2} \,\middle|\, ix^2\right).$$

Асимптотическое поведение этих функций опять можно получить, используя (5.3.51). Для действительных x и m имеем

$$H_e[(2m+1)i,\ x] \simeq \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^{-m-1}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}m\right)} e^{\frac{1}{2}ix^2-\frac{1}{4}i\pi(m+1)} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m\right)} e^{-\frac{1}{2}ix^2-\frac{1}{4}i\pi m},$$
$$H_o[(2m+1)i,\ x] \simeq \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)x^{-m-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m\right)} e^{\frac{1}{2}ix^2-\frac{1}{4}i\pi(m+2)} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)x^m}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}m\right)} e^{-\frac{1}{2}ix^2-\frac{1}{4}i\pi(m-1)}.$$

Изучение этих выражений показывает, что для внешней задачи было бы проще вместо комбинаций, представляющих H, выбрать пару решений, которые асимптотически вели бы себя как $x^{-m-1}e^{\frac{1}{2}ix^2}$ и $x^m e^{-\frac{1}{2}ix^2}$. Таким образом, мы приходим к рассмотрению вырожденных гипергеометрических функций третьего рода U_1 и U_2, определенных в (5.3.52). Функция, которую мы используем, называется *функцией Вебера* и определяется следующим образом: для $z=|z|e^{i\varphi}$, $-\pi/2<\varphi<\pi/2$

$$D_m(z) = 2^{\frac{1}{2}m} e^{-\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{2}i\pi m} U_2\left(-\frac{1}{2}m \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{1}{2}z^2\right) \simeq z^m e^{-\frac{1}{4}z^2}, \tag{11.2.63}$$
$$\frac{d^2}{dz^2}D_m(z) + \left[m+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^2\right]D_m(z) = 0.$$

Пара решений, подходящих для внешних задач в параболических координатах, выражается через эти функции так (при действительных x и m):

$$D_m(x\sqrt{2i}) = 2^{\frac{1}{2}m} i^m e^{-\frac{1}{2}ix^2} U_2\left(-\frac{1}{2}m \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, ix^2\right) =$$
$$= 2^{\frac{1}{2}m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m\right)} H_e[(2m+1)i,\ x] -\right.$$
$$\left. - \frac{2\sqrt{i}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}m\right)} H_o[(2m+1)i,\ x]\right\} \simeq (2ix^2)^{\frac{1}{2}m} e^{-\frac{1}{4}ix^2}, \tag{11.2.64}$$

$$D_{-m-1}(x\sqrt{-2i}) = 2^{-\frac{1}{2}(m+1)} i^{m+1} e^{-\frac{1}{4}ix^2} U_1\left(-\frac{1}{2}m \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, ix^2\right) =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{\frac{1}{2}(m+1)}}\left\{\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}m\right)} H_e[(2m+1)i,\ x] +\right.$$
$$\left. + \frac{2i^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m\right)} H_o[(2m+1)i,\ x]\right\} \simeq \frac{e^{\frac{1}{2}ix^2}}{(-2ix^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}.$$

Таким образом, переход от решения с одним поведением на бесконечности к решению с противоположным поведением осуществляется в этих обозначениях заменой m на $-m-1$ и одновременным переходом к комплексно сопряженным величинам. Обе функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2}+[(2m+1)\,i+x^2]\,y=0,$$

которое соответствует уравнению (11.2.56) с $a=(2m+1)\,i$, как это и должно быть. Если решение для множителя, зависящего от λ, является комбинацией $D_m(\lambda\sqrt{2ik})$ и $D_{-m-1}(\lambda\sqrt{-2ik})$ с $a=(2m+1)\,i$, то соответствующее решение для множителя, зависящего от μ, является решением уравнения для $-a$:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+[-(2m+1)\,i+x^2]\,y=0.$$

Это последнее решение представляет собой комбинацию функций, комплексно сопряженных с функциями (11.2.64):

$$\begin{aligned}D_m(x\sqrt{-2i})&=2^{\frac{1}{2}m}\,i^{-m}\,e^{-\frac{1}{2}ix^2}\,U_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\middle|\,ix^2\right)=\\&=2^{\frac{1}{2}m}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m\right)}H_e[-(2m+1)\,i,\ x]-\right.\\&\qquad\left.-\frac{2\sqrt{-i}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}m\right)}H_o[-(2m+1)\,i,\ x]\right\}\simeq(-2ix^2)^{\frac{1}{2}m}\,e^{\frac{1}{2}ix^2},\end{aligned}\tag{11.2.65}$$

$$\begin{aligned}D_{-m-1}(x\sqrt{2i})&=2^{-\frac{1}{2}(m+1)}\,i^{-m-1}\,e^{-\frac{1}{2}ix^2}\,U_2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\middle|\,ix^2\right)=\\&=2^{-\frac{1}{2}(m+1)}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}m\right)}H_e[-(2m+1)\,i,\ x]+\right.\\&\qquad\left.+\frac{2(-i)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m\right)}H_o[-(2m+1)\,i,\ x]\right\}\simeq\frac{e^{-\frac{1}{2}ix^2}}{(2ix^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}.\end{aligned}\tag{11.2.66}$$

Чтобы получить (11.2.65) и (11.2.66), мы произвели соответствующую замену в (11.2.64), применяя (5.2.62) и (11.2.62).

Поскольку мы хотим, чтобы внешнее решение уравнения Гельмгольца в параболических координатах было однозначной функцией на плоскости λ, μ, следует ограничиться целыми m, причем допустимы и положительные и отрицательные целые значения (отрицательные значения соответствуют вторым решениям). Если бы m не было целым, решение было бы многозначным и нужно было бы выделять определенные ветви. Выражение функции Вебера при целом m значительно упрощается. Например, для $m=0$

$$D_0(z)=e^{-\frac{1}{4}z^2}F\left(0\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}z^2\right)=e^{-\frac{1}{4}z^2}.\tag{11.2.67}$$

Используя интегральное представление для U_2 и рекуррентные формулы для вырожденных гипергеометрических функций, убеждаемся, что для любого целого m

$$\frac{dD_m(z)}{dz}=\frac{1}{2}zD_m(z)-D_{m+1}(z)=-\frac{1}{2}zD_m(z)+mD_{m-1}(z),$$

или

$$D_{m+1}(z)=-e^{\frac{1}{4}z^2}\frac{d}{dz}[e^{-\frac{1}{4}z^2}D_m(z)],\quad D_m(z)=e^{\frac{1}{4}z^2}\int\limits_z^{\infty}e^{-\frac{1}{4}u^2}D_{m+1}(u)\,du.$$

Пределы интегрирования здесь выбраны так, чтобы получить надлежащее асимптотическое поведение D.

Следовательно, для целых положительных m имеем

$$\begin{gathered}D_m(z)=(-1)^m e^{\frac{1}{4}z^2}\frac{d^m}{dz^m}(e^{-\frac{1}{2}z^2})=2^{\frac{1}{2}m}e^{-\frac{1}{4}z^2}H_m\left(z\sqrt{\frac{1}{2}}\right),\\ D_{-m-1}(z)=e^{\frac{1}{4}z^2}\int\limits_z^{\infty}du_0\int\limits_{u_0}^{\infty}du_1\ldots\int\limits_{u_{m-1}}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u_m^2}du_m.\end{gathered}\tag{11.2.68}$$

Функция $H_m(z)$ представляет собой полином Эрмита; о нем см. таблицы в конце гл. 6. Заметим также, что

$$D_{-1}(z\sqrt{2i})=e^{\frac{1}{2}iz^2}\int\limits_{z\sqrt{2i}}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u_0^2}du_0.\tag{11.2.69}$$

Это выражение тесно связано с интегралами Френеля, рассмотренными на стр. 362.

Разложения функции Грина и плоской волны. Функцию Грина для свободного пространства двух измерений $i\pi H_0(kR)$ и плоскую волну $e^{ikr\cos(\varphi-u)}$ можно выразить в виде рядов, содержащих функции D_m и D_{-m-1}, введенные для решения внешних задач. Эти ряды можно получить различными способами. Например, применяя общую формулу (7.2.63), имеем

$$\begin{gathered}i\pi H_0(kR)=\frac{\sqrt{8\pi}}{i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^m}{m!}D_m(\lambda_0\sqrt{-2ik})\,D_m(\lambda\sqrt{-2ik})\times\\ \times\begin{cases}D_m(\mu\sqrt{2ik})\,D_{-m-1}(\mu_0\sqrt{-2ik}), & \mu_0>\mu,\\ D_m(\mu_0\sqrt{2ik})\,D_{-m-1}(\mu\sqrt{-2ik}), & \mu>\mu_0,\end{cases}\end{gathered}\tag{11.2.70}$$

что, впрочем, не очень легко получить, так как множители зависят от m и k, притом во многих отношениях одинаковым образом. Чтобы выбрать, какой из множителей является «собственной функцией» и какой — «коэффициентом», следует учесть, что переменная в полиномах Эрмита меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, в формуле (11.2.70) $-\infty<\lambda<+\infty$ и $0<\mu<\infty$. Это значит, что «разрез» сделан вдоль положительной полуоси x. Осложнения возникают, когда мы пересекаем эту линию.

Из формулы (11.2.70) можно получить разложение плоской волны, устремляя источник (λ_0, μ_0) в бесконечность. Но мы можем также получить искомый ряд, обратившись к одной из формул таблицы в конце этой главы, а именно к теореме разложения, которая получается (после преодоления значительных трудностей) из интегрального представления функции D. Искомое разложение имеет вид

$$e^{ik(x\cos u+y\sin u)}=e^{-\frac{1}{2}ik(\lambda^2+\mu^2)+ik\left[\lambda\cos\left(\frac{1}{2}u\right)+\mu\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\right]^2}=$$

$$=\sec\left(\frac{1}{2}u\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^m\operatorname{tg}^m\left(\frac{1}{2}u\right)}{m!}D_m(\lambda\sqrt{-2ik})\,D_m(\mu\sqrt{2ik})=$$

$$(11.2.71)$$

$$=\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}u\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ctg}^m\left(\frac{1}{2}u\right)}{i^m m!}D_m(\lambda\sqrt{2ik})\,D_m(\mu\sqrt{-2ik}),$$

причем первый ряд хорошо сходится для u, близких к нулю, а второй — для u, близких к π.

Когда $u=\pi$, т. е. когда плоская волна распространяется влево параллельно оси x, формула принимает исключительно простой вид:

$$e^{-ikx}=D_0(\lambda\sqrt{2ik})\,D_0(\mu\sqrt{-2ik})=e^{\frac{1}{2}ik(\mu^2-\lambda^2)}. \qquad (11.2.72)$$

Мы выбрали направление $u=\pi$ для того, чтобы «разрез» $\mu=0$ оказался в области падающей волны и не вызывал путаницы при исследовании области тени. Эта простая формула может служить отправным пунктом при расчете диффракции плоской волны на крае экрана, перпендикулярного волновому вектору. Экраном является отрицательная полуось y, или линия $\lambda=-\mu$. Нам нужно к выражению (11.2.72) для плоской волны прибавить еще несколько других решений в параболических координатах так, чтобы образовалась комбинация, обращающаяся в нуль (для условий Дирихле) вдоль линии $\lambda=-\mu$ (и только вдоль этой линии). Это последнее требование несколько затрудняет дело, так как прежде всего приходит в голову мысль использовать разность

$$D_0(\lambda\sqrt{2ik})\,D_0(\mu\sqrt{-2ik})-D_0(\lambda\sqrt{-2ik})\,D_0(\mu\sqrt{2ik}).$$

Но это выражение (оно равно $e^{-ikx}-e^{ikx}$) обращается в нуль также при $\lambda=+\mu$ (положительная полуось y), и, следовательно, оно представляет собой отражение от всей оси y, т. е. не то, что требуется.

Мы поэтому пробуем другие комбинации функций $D_0(\lambda\sqrt{\pm 2ik})$, $D_{-1}(\lambda\sqrt{\pm 2ik})$ и соответствующих множителей, зависящих от μ, используя при дальнейших вычислениях соотношения

$$D_0(-w)=D_0(w),$$

$$(11.2.73)$$

$$D_{-1}(-x\sqrt{-2i})=-D_{-1}(x\sqrt{-2i})+\sqrt{2\pi}\,D_0(x\sqrt{2i}).$$

В конечном счете получаем выражение

$$\psi(\lambda,\mu)=D_0(\lambda\sqrt{2ik})\,D_0(\mu\sqrt{-2ik})-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[D_0(\mu\sqrt{-2ik})\,D_{-1}(\lambda\sqrt{-2ik})+\right.$$

$$\left.+D_0(\lambda\sqrt{-2ik})\,D_{-1}(\mu\sqrt{-2ik})\right], \qquad (11.2.74)$$

которое обращается в нуль при $\lambda=-\mu$, но не при $\lambda=+\mu$, и является, таким образом, нужным решением.

Анализ этого решения ведется в основном так же, как это было только что сделано на стр. 362.

Функция

$$D_{-1}(w\sqrt{-2ik}) = \sqrt{-2ik}\, e^{-\frac{1}{2}ikw^2} \int_{w}^{\infty\sqrt{i}} e^{ikv^2}\, dv \qquad (11.2.75)$$

мала для больших положительных значений w и асимптотически стремится к требуемой функции $e^{\frac{1}{2}ikw^2}/w\sqrt{-2ik}$ при $w \to \infty$. Для w, больших по модулю и отрицательных, D_{-1} не исчезает и имеет асимптотическую форму $\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}ikw^2} - e^{+\frac{1}{2}ikw^2}/w\sqrt{-2ik}$. Для w, близких к нулю, D_{-1} имеет осциллирующий характер, типичный для интеграла Френеля. Функция $D_0(w\sqrt{-2ik})$ при всех w равна просто $e^{\frac{1}{2}ikw^2}$.

Имея в виду эти свойства, выясним, что дает формула (11.2.74) на некотором расстоянии от края экрана, где μ велико, и вблизи края тени, где λ мало. Подставляя выражения функций D_0 через экспоненты и асимптотическое выражение функции $D_{-1}(\mu\sqrt{-2ik})$, получаем

$$\psi \simeq e^{-ikx} - \frac{e^{ikr}}{2\sqrt{-2i\pi kr}} - \frac{e^{\frac{1}{2}ik\mu^2}}{\sqrt{2\pi}} D_{-1}(\lambda\sqrt{-2ik}), \qquad x \to -\infty, \qquad (11.2.76)$$

где $r = (\lambda^2 + \mu^2)/2$ — расстояние от края экрана. Первое слагаемое представляет падающую волну, второе слагаемое — радиально расходящуюся волну, рассеянную на крае экрана, и третье слагаемое — это член, описывающий диффракционную картину и образование тени. Когда λ положительно ($y > 0$), этот член мал и привносит в рассеянную волну малую добавку. С возрастанием λ в отрицательном направлении этот член приближается к $-e^{-ikx} + e^{ikr}/\lambda\sqrt{-2i\pi k}$. Первое слагаемое этой последней суммы уничтожается с падающей волной (образуя тень), а второе слагаемое добавляется к рассеянной волне; для λ, близких к нулю, второе слагаемое осциллирует, порождая диффракционные эффекты.

Эллиптические координаты. Более полезна эллиптическая система координат, определяемая равенствами [см. также (10.1.23)]

$$\begin{gathered} x = \frac{1}{2} a \operatorname{ch}\mu \cos\vartheta, \quad y = \frac{1}{2} a \operatorname{sh}\mu \sin\vartheta, \\ h_\mu = h_\vartheta = \frac{1}{2} a \sqrt{\operatorname{sh}^2\mu + \sin^2\vartheta}, \quad r = \frac{1}{2} a \sqrt{\operatorname{ch}^2\mu - \cos^2\vartheta}, \\ r_1 = \frac{1}{2} a (\operatorname{ch}\mu + \cos\vartheta), \quad r_2 = \frac{1}{2} a (\operatorname{ch}\mu - \cos\vartheta), \end{gathered} \qquad (11.2.77)$$

где r — расстояние точки (x, y) от начала координат, r_2 — ее расстояние от правого фокуса $\left(\frac{1}{2}a, 0\right)$, r_1 — ее расстояние от левого фокуса $\left(-\frac{1}{2}a, 0\right)$. Решения уравнения Лапласа для таких координат были рассмотрены в § 10.1. Система координат изображена на рис. 5.3. Уравнение Гельмгольца в этих координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{4} a^2 k^2 [\operatorname{ch}^2\mu - \cos^2\vartheta]\, \psi = 0. \qquad (11.2.78)$$

В этом уравнении можно разделить переменные, полагая $\psi = M(\mu) H(\vartheta)$, причем

$$\frac{d^2H}{d\vartheta^2} + (b - h^2 \cos^2 \vartheta) H = 0,$$
$$-\frac{d^2M}{d\mu^2} + (b - h^2 \operatorname{ch}^2 \mu) M = 0. \tag{11.2.79}$$

Первое из этих уравнений — это уравнение Матье, рассмотренное в гл. 5 [см. (5.2.67)]. Второе — также уравнение Матье, но для функций мнимого аргумента. Если выбрать в качестве независимого переменного $z = \cos \vartheta$, то интервал $-1 \leqslant z \leqslant 1$ будет соответствовать координате ϑ, а интервал $1 \leqslant z < \infty$ — координате μ. Как указано в (5.2.77) и (5.3.87), для вычисления коэффициентов разложений решений удобнее использовать переменные ϑ, μ, однако для изучения общих математических свойств решений лучше всего воспользоваться переменной

$$z = \begin{cases} \cos \vartheta = \dfrac{1}{a}(r_1 - r_2), & -1 \leqslant z \leqslant 1, \\ \operatorname{ch} \mu = \dfrac{1}{a}(r_1 + r_2), & 1 \leqslant z < \infty. \end{cases} \tag{11.2.80}$$

Если граничной линией является эллипс $\mu = \text{const}$ и ϑ изменяется в пределах от 0 до 2π (как это обычно бывает), то множитель $H(\vartheta)$ должен быть периодическим с периодом π или 2π. Это возможно только для дискретного множества значений b. В результате получаем собственные функции Se, So, называемые *функциями Матье* и определенные на стр. 530 тома I. Когда h обращается в нуль, они сводятся к тригонометрическим функциям, а b становится квадратом целого числа:

$$Se_m(h, \cos \vartheta) \to \cos m\vartheta, \quad So_m(h, \cos \vartheta) \to \sin m\vartheta,$$
$$be_m \to m^2, \quad bo_m \to m^2 \text{ при } h \to 0.$$

Параметр $h = ak/2 = a\omega/2c = \pi a/\lambda$ пропорционален частоте и равен отношению произведения π на фокальное расстояние a к длине волны λ.

В § 5.2 и 5.3 мы обсудили многие свойства этих функций, а в таблицах в конце книги приведены некоторые их численные значения. Для координаты ϑ, если только она может изменяться от 0 до 2π, достаточно этих функций. Для координаты μ нам потребуются вторые решения, непериодические по ϑ, но это обстоятельство не является препятствием, ибо координата μ сама непериодична. Итак, для целей этой главы нам нужны будут периодические собственные функции от ϑ, а также два решения, зависящие от переменной μ: одно — пропорциональное Se, So и второе — линейно независимое от Se, So. Такие решения были определены в (5.3.84) и (5.3.91).

Здесь мы ограничимся тем, что приведем лишь непосредственно необходимые формулы. Однако этот минимум не так уж незначителен. Дело в том, что каждая формула для функций Матье имеет четыре различные формы в зависимости от того, идет ли речь о четных или нечетных функциях (относительно $\vartheta = 0$), а также в зависимости от того, равен ли период π или 2π. Собственные функции для углового множителя таковы:

$$Se_{2m}(h, \cos \vartheta) = \sum_n B^e_{2n}(h, 2m) \cos(2n\vartheta), \qquad \sum_n B^e_{2n} = 1;$$
$$\tag{11.2.81}$$
$$Se_{2m+1}(h, \cos \vartheta) = \sum_n B^e_{2n+1}(h, 2m+1) \cos[(2n+1)\vartheta], \qquad \sum_n B^e_{2n+1} = 1;$$

$$So_{2m}(h, \cos\vartheta) = \sum_n B_{2n}^o(h, 2m)\sin(2n\vartheta), \qquad \sum_n 2n B_{2n}^o = 1;$$

$$So_{2m+1}(h, \cos\vartheta) = \sum_n B_{2n+1}^o(h, 2m+1)\sin[(2n+1)\vartheta], \qquad (11.2.82)$$

$$\sum_n (2n+1) B_{2n+1}^o = 1.$$

Все эти функции при заданном значении h образуют полную систему собственных функций, взаимно ортогональных между собой. Функции Se_m четны по отношению к $\vartheta = 0, \pi$, а функции So_m нечетны. Функции Se четного порядка $2m$ четны относительно $\vartheta = \pi/2$, $3\pi/2$, а функции с нечетным индексом $2m+1$ нечетны. Функции So четного порядка в указанном смысле нечетны, а нечетного — четны. Например, $Se_{2m}(\vartheta) = Se_{2m}(\pi \pm \vartheta) = Se_{2m}(-\vartheta)$ и $So_{2m+1}(\vartheta) = -So_{2m+1}(\pi - \vartheta) = So_{2m+1}(\pi + \vartheta) = -So_{2m+1}(-\vartheta)$ и т. д. Нормирующие постоянные для этих функций таковы:

$$\int_0^{2\pi} [Se_{2m}(h, \cos\vartheta)]^2 d\vartheta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} [B_{2n}^e(h, 2m)]^2 = M_{2m}^e(h),$$

$$\int_0^{2\pi} [Se_{2m+1}]^2 d\vartheta = \pi \sum_{n=0}^{\infty} [B_{2n+1}^e(h, 2m+1)]^2 = M_{2m+1}^e(h),$$

$$\int_0^{2\pi} [So_{2m}]^2 d\vartheta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} [B_{2n}^o(h, 2m)]^2 = M_{2m}^o(h), \qquad (11.2.83)$$

$$\int_0^{2\pi} [So_{2m+1}]^2 d\vartheta = \pi \sum_{n=0}^{\infty} [B_{2n+1}^o(h, 2m+1)]^2 = M_{2m+1}^o(h).$$

Как указано на стр. 531 тома I, мы определили коэффициенты B таким образом, чтобы функция Se и производная от So при $\vartheta = 0$ были равны единице. Это сделано для того, чтобы некоторые наши формулы выглядели проще и чтобы наши функции возможно больше походили на тригонометрические функции, к которым они сводятся при $h \to 0$. Однако вследствие такого выбора получаются некоторые неудобства, так как при увеличении h значение Se_m, например, вблизи $\vartheta = \pi/2$ становится много больше, чем при $\vartheta = 0$.

Другой метод нормирования заключается в том, чтобы сохранить $B_m(h, m)$ равным единице для всех h, что также приводит к соотношению $Se_m \to \cos(m\vartheta)$ при $h \to 0$; но при таком нормировании для некоторых h получается, что $Se_m \to \infty$. Еще один «надежный» способ состоит в том, чтобы определить нормирующую постоянную M так, чтобы интеграл от квадрата Se_m по ϑ от 0 до 2π, так же, как для предельной формы $\cos(m\vartheta)$, равнялся $2\pi/\varepsilon_m$. Это нормирование обеспечивает конечность собственных функций при всех действительных значениях h, но вводит во многие часто применяемые формулы постоянные, равные значениям Se_m при $\vartheta = 0$. Поэтому лучше всего принять $Se_m = 1$ при $\vartheta = 0$ для всех h. В обычно применяемой области значений h затруднений при таком соглашении не возникает. Поскольку нормирующие постоянные M вычислены и внесены в таблицы, легко получить функцию, нормированную к $2\pi/\varepsilon_m$, умножая Se_m на $[2\pi/\varepsilon_m M_m^e(h)]^{1/2}$; аналогично поступают с нечетными функциями So_m.

Все коэффициенты B, постоянные разделения b и нормирующие постоянные M являются функциями h с индексом m и значком e или o, отличающим чётные и нечетные относительно $\vartheta = 0$ решения. Когда нужно подчеркнуть эту зависимость, приходится сохранять в записи все индексы, значки и скобки, как это было сделано в формулах (11.2.82) и (11.2.83); в противном случае мы будем насколько возможно упрощать обозначения, записывая, например, be_m, B_{2m} или M.

Радиальные решения. Возвращаясь к решениям для μ, напомним вновь, что, как это было показано на стр. 594 тома I, коэффициенты разложения в ряд по функциям Бесселя те же, что и коэффициенты разложения в ряд Фурье. Мы могли бы, конечно, в (11.2.82) просто заменить ϑ на $i\mu$ и использовать полученные ряды по гиперболическим функциям. Можно поступить и более изящно, возвратившись к переменной $z = \cos\vartheta = \operatorname{ch}\mu$ и введя соответственно многочлены Чебышева, определенные в (5.3.43) и в таблицах в конце гл. 6. Например, мы имеем

$$So_{2m+1}(h, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}(z^2 - 1)}\ \sum_n B^o_{2n+1} T^{\frac{1}{2}}_{2n}(z),$$

$$Se_{2m}(h,z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n (2n) B^e_{2n} T^{-\frac{1}{2}}_{2n}(z). \tag{11.2.84}$$

Поведение этих рядов можно выяснить, используя аналитические свойства многочленов T, связанных с гипергеометрической функцией.

Но ни один из этих способов не приводит так просто к асимптотическим выражениям для функций Se, So при больших значениях z, как разложение по функциям Бесселя, рассмотренное на стр. 598 тома I и следующих. Формула (5.3.83) показывает, что функция

$$Je_{2m}(h, \operatorname{ch}\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B^e_{2n}(h, 2m) J_{2n}(h \operatorname{ch}\mu)$$

пропорциональна $Se_{2m}(h, \operatorname{ch}\mu)$. Мы могли бы сделать эти две функции равными, подобрав множитель пропорциональности, но лучше оставить найденный выше множитель, поскольку так определенная функция Je_{2m} имеет простую асимптотическую форму при $\mu \to \infty$:

$$Je_{2m} \simeq \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch}\mu}} \cos\left[h \operatorname{ch}\mu - \frac{1}{2}\pi\left(2m + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Таблицы в конце этой главы содержат полный набор формул, определяющих *радиальные функции первого рода* Je, Jo. Заметим только, что, когда h обращается в нуль, эти функции сводятся к функциям Бесселя. Таким образом, предельная форма разделенного решения уравнения Гельмгольца $Se_m(h, \cos\vartheta) Je_m(h, \operatorname{ch}\mu)$ имеет вид $\sqrt{\pi/2}\cos(m\vartheta) J_m(h \operatorname{ch}\mu)$, что и должно быть (в пределе волна сводится к круговой). Отметим также разложения по произведениям функций Бесселя; эти разложения сходятся быстрее, чем приведенные выше ряды. Поскольку Je, Jo и Se, So пропорциональны, они одинаково ведут себя при $z = 1$ ($\mu, \vartheta = 0$); другими словами, значение Jo_m при $\mu = 0$ и производная от Je_m при $\mu = 0$ равны нулю. Значение Je_m и производная Jo_m при $\mu = 0$ могут быть выражены через коэффициенты B, как это указано в формулах в конце этой главы.

Для радиальной координаты μ необходимы также и вторые решения уравнений Матье при значениях b, соответствующих собственным функциям Se, So. Их легче всего получить заменой в выражениях для Je, Jo функций Бесселя J_m на функции Бесселя второго рода N_m. Например, *радиальная функция второго рода*, соответствующая Je_{2m}, имеет вид

$$Ne_{2m}(h, \operatorname{ch}\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n}^{e}(h, 2m) N_{2n}(h \operatorname{ch}\mu).$$

Между функциями Je и Ne имеется, таким образом, весьма простая связь, а асимптотическое поведение Ne при $\mu \to \infty$ таково:

$$Ne_{2m} \simeq \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch}\mu}} \sin\left[h \operatorname{ch}\mu - \frac{1}{2}\pi\left(2m + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Фаза этого выражения на 90° отличается от фазы асимптотического выражения для Je. Приведенный выше ряд сходится не очень хорошо; он ни при каком конечном значении μ не сходится абсолютно. Но эквивалентный ряд

$$Ne_{2m}(h, \operatorname{ch}\mu) = \frac{1}{B_0^e} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n}^{e} N_n\left(\frac{1}{2}he^{\mu}\right) J_n\left(\frac{1}{2}he^{-\mu}\right)$$

(для экономии места мы опустили символы h, $2m$ у коэффициентов B_{2n}^e и B_0^e) сходится удовлетворительно вблизи $\mu = 0$.

Вронскиан, связывающий решение первого рода с соответствующим решением второго рода, равен единице (этим, конечно, объясняется сделанный выше выбор коэффициентов). Это связано с вопросом о значении функций Ne, No и их производных при $\mu = 0$. Например, поскольку производная Je_m при $\mu = 0$ равна нулю, производная Ne_m (по переменной μ) при $\mu = 0$ должна иметь значение, обратное значению Je_m при $\mu = 0$. Наоборот, No_m при $\mu = 0$ должна иметь значение, обратное значению производной от Jo_m при $\mu = 0$, взятому со знаком минус. Значения функции Ne_m и производной No_m могут быть вычислены с помощью рядов по произведениям функций Бесселя. Заметим также, что равенство $\Delta(Je, Ne) = 1$ упрощает вычисление функции Грина.

Приближения для малых значений h и m. Иногда приближенные выражения для некоторых собственных функций полезнее, чем более точные численные таблицы. Для случая длинных волн, например, разложения по степеням h позволяют вычислить предельное поведение решения. С другой стороны, иногда требуется вычислять значения функций для очень больших значений h и желательно иметь приближенные формулы и для этого предельного случая.

Для получения приближения в случае длинных волн мы отправляемся от видоизмененного уравнения Матье

$$\frac{d^2y}{d\vartheta^2} + \left(b - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^2 \cos 2\vartheta\right) y = 0.$$

Очевидно, зависимость решения от h всегда может быть представлена в виде ряда по степеням h^2. В качестве примера этого метода вычислений мы рассмотрим функцию наинизшего порядка

$$y = Se_0(h, \cos\vartheta) = B_0 + B_2 \cos 2\vartheta + B_4 \cos 4\vartheta + \ldots.$$

Поскольку эта функция должна стремиться к 1 при $h \to 0$, коэффициенты B как функции от h должны разлагаться в ряды вида

$$B_0 = 1 + a_0h^2 + b_0h^4 + \ldots, \qquad B_2 = a_2h^2 + b_2h^4 + \ldots,$$
$$B_4 = a_4h^2 + b_4h^4 + \ldots.$$

Поскольку $be_0(h)$ стремится к нулю при $h \to 0$,

$$be_0 - \frac{1}{2}h^2 = \alpha h^2 + \beta h^4 + \ldots .$$

Пользуясь разложением Se_0 в ряд Фурье, получаем

$$y'' = -4B_2 \cos 2\vartheta - \ldots,$$

$$\left(b - \frac{1}{2}h^2\right)y = \left(b - \frac{1}{2}h^2\right)B_0 + \left(b - \frac{1}{2}h^2\right)B_2 \cos 2\vartheta + \ldots,$$

$$-\frac{1}{2}h^2 y \cos 2\vartheta = -\frac{1}{4}h^2 B_2 - \frac{1}{4}h^2(2B_0 + B_4)\cos 2\vartheta - \ldots .$$

Сравнение коэффициентов в дифференциальном уравнении дает

$$\left(b - \frac{1}{2}h^2\right)B_0 = \frac{1}{4}h^2 B_2, \quad \left[\left(b - \frac{1}{2}h^2\right) - 4\right]B_2 = \frac{1}{4}h^2(2B_0 + B_4), \ldots .$$

Подставляя теперь вместо $b - \frac{1}{2}h^2$ и B степенные ряды, находим: $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{4}a_2$, $a_2 = -\frac{1}{8}$, $b_2 = -\frac{1}{8}a_0 - \frac{1}{16}a_4$ и т. д., откуда получаем $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{32}$, $a_2 = -\frac{1}{8}$, $a_4 = 0$, $b_4 = \frac{1}{512}$. Отсюда имеем

$$Se_0 = 1 + a_0 h^2 + b_0 h^4 - \left(\frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{8}a_0 h^4\right)\cos 2\vartheta + \frac{h^4}{512}\cos 4\vartheta + \ldots .$$

Так как Se_0 должна равняться единице при $\vartheta = 0$, то $a_0 = 1/8$ и $b_0 = 7/512$. Следовательно, с точностью до четвертой степени h мы имеем

$$Se_0 = 1 + \frac{1}{8}h^2 + \frac{7}{512}h^4 - \left(\frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{64}h^4\right)\cos 2\vartheta + \frac{h^4}{512}\cos 4\vartheta - \ldots .$$

Постоянная разделения с той же точностью выражается так:

$$be_0 = \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{32}h^4 + \ldots .$$

Выполняя те же вычисления для других функций, окончательно получаем с точностью до четвертой степени малой величины h:

$$Se_0(h, \cos\vartheta) = 1 + \frac{h^2}{8} + \frac{7h^4}{512} - \left(\frac{h^2}{8} + \frac{h^4}{64}\right)\cos 2\vartheta + \frac{h^4}{512}\cos 4\vartheta - \ldots,$$

$$be_0(h) = \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{32}h^4 + \ldots;$$

$$So_1(h, \cos\vartheta) = \left(1 + \frac{3h^2}{32} + \frac{13h^4}{3072}\right)\sin\vartheta - \left(\frac{h^2}{32} + \frac{h^4}{512}\right)\sin 3\vartheta + \frac{h^4}{3072}\sin 5\vartheta - \ldots,$$

$$bo_1(h) = 1 + \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{128}h^4 + \ldots; \qquad (11.2.85)$$

$$Se_1(h, \cos\vartheta) = \left(1 + \frac{h^2}{32} + \frac{5h^4}{3072}\right)\cos\vartheta - \left(\frac{h^2}{32} + \frac{h^4}{512}\right)\cos 3\vartheta + \frac{h^4}{3072}\cos 5\vartheta - \ldots,$$

$$be_1(h) = 1 + \frac{3}{4}h^2 - \frac{1}{128}h^4 + \ldots;$$

$$So_2(h, \cos\vartheta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{h^2}{48} + \frac{23h^4}{36864}\right)\sin 2\vartheta - \left(\frac{h^2}{96} + \frac{h^4}{2304}\right)\sin 4\vartheta + \frac{h^4}{12288}\sin 6\vartheta - \ldots,$$

$$bo_2(h) = 4 + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{192}h^4 + \ldots .$$

Соответствующие нормирующие постоянные таковы:

$$M_0^e(h)=\pi\left(2+\frac{1}{2}h^2+\frac{13}{128}h^4+\ldots\right),$$

$$M_1^o(h)=\pi\left(1+\frac{3}{16}h^2+\frac{7}{384}h^4+\ldots\right),$$

$$M_1^e(h)=\pi\left(1+\frac{1}{16}h^2+\frac{1}{192}h^4+\ldots\right),$$

$$M_2^o=\frac{1}{4}\pi\left(1+\frac{1}{12}h^2+\frac{43}{9216}h^4+\ldots\right).$$

Из таблиц в конце этой главы видно, что коль скоро коэффициенты B определены, представляется возможным вычислить все радиальные функции. Наиболее важны значения этих функций и их производных по μ при $\mu=0$, ибо эти значения нужны для того, чтобы удовлетворить краевым условиям при $\mu=0$. Соответствующие выражения имеют вид:

$$\begin{aligned}
&Je_0(h,1)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{h^2}{8}+\frac{7h^4}{512}-\ldots\right], \qquad Je_0'(h,1)=0;\\
&Jo_1(h,1)=0, \qquad Jo_1'(h,1)=\frac{1}{2}h\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{h^2}{32}+\frac{5h^4}{3072}-\ldots\right];\\
&Je_1(h,1)=\frac{1}{2}h\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{3h^2}{32}+\frac{13h^4}{3072}-\ldots\right], \quad Je_1'(h,1)=0;\\
&Jo_2(h,1)=0, \qquad Jo_2'(h,1)=\frac{1}{8}h^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{1}{24}h^2+\ldots\right];\\
&Ne_0(h,1)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-\frac{1}{8}h^2\right)\ln\left(\frac{\gamma h}{4}\right), \qquad \gamma=1{,}781,\\
&Ne_0'(h,1)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[1+\frac{h^2}{8}+\frac{h^4}{512}+\ldots\right];\\
&No_1(h,1)=-\frac{2}{h}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[1+\frac{h^2}{32}-\frac{h^4}{1536}+\ldots\right],\\
&No_1'(h,1)\simeq\frac{2}{h}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[1-\frac{3}{32}h^2+\frac{1}{4}h^2\ln\left(\frac{\gamma h}{4}\right)\right];\\
&Ne_1(h,1)\simeq-\frac{2}{h}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[1+\frac{3}{32}h^2\right],\\
&Ne_1'(h,1)=\frac{2}{h}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[1+\frac{3h^2}{32}+\frac{7h^4}{1536}+\ldots\right];\\
&No_2(h,1)\simeq-\frac{8}{h^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1+\frac{1}{24}h^2\right), \quad No_2'(h,1)\simeq\frac{16}{h^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-\frac{1}{24}h^2\right);
\end{aligned} \tag{11.2.86}$$

при этом формулы для Ne_0, No_1', Ne_1, No_2, No_2' имеют точность первого порядка по h^2, а остальные — второго порядка.

Приближения для малых h и больших m. Для получения приближенных решений при больших значениях m, в частности при b, больших чем h^2, мы можем использовать метод WKBJ, рассмотренный в § 9.3. Согласно этому методу, решения уравнений (11.2.79) имеют вид

$$H(\vartheta)\simeq[b-h^2\cos^2\vartheta]^{-\frac{1}{4}}\,{}^{\cos}_{\sin}\left[\int_0^\vartheta\sqrt{b-h^2\cos^2 u}\,du\right]$$

при условии, что разность $b-h^2\cos^2\vartheta$ нигде на действительной оси не обращается в нуль. Интеграл в скобках выражается через *эллиптические интегралы второго рода*:

$$\int_0^{\vartheta}\sqrt{b-h^2\cos^2 u}\,du=\sqrt{b}\left[E\left(\frac{1}{2}\pi,\frac{h}{\sqrt{b}}\right)+E\left(\vartheta-\frac{1}{2}\pi,\frac{h}{\sqrt{b}}\right)\right],$$

где

$$E(x,k)=\int_0^x\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

и

$$E\left(\frac{1}{2}\pi,\ k\right)=\frac{1}{2}\pi\left[1-\frac{1}{4}k^2-\frac{3}{64}k^4-\frac{5}{256}k^6\ldots\right].$$

Для того чтобы $H(\vartheta)$ была периодической по ϑ с периодом 2π, необходимо, чтобы аргумент косинуса или синуса был целым кратным π при $\vartheta=\pi$. Это условие равносильно уравнению

$$2\sqrt{b}E\left(\frac{1}{2}\pi,\ \frac{h}{\sqrt{b}}\right)=m\pi,$$

устанавливающему связь между m и b. Используя степенной ряд для $E\left(\frac{1}{2}\pi,k\right)$, мы можем получить приближенные выражения для постоянных разделения:

$$be_m\simeq bo_m\simeq m^2+\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{32}\frac{h^4}{m^2}+\ldots.$$

В этом приближении нет разницы между значениями be и bo при одном и том же номере m. Точные разложения высших собственных функций по степеням h показывают, что полученное выражение верно с точностью до степеней h^2, меньших чем порядок m собственной функции. Имеет место общая формула

$$be_m\simeq bo_m\simeq m^2+\frac{1}{2}h^2+\frac{h^4}{32(m^2-1)}+\frac{(5m^2+7)h^8}{2048(m^2-1)^3(m^3-4)}+\ldots,\qquad(11.2.87)$$

которая верна при $m=1$ только с точностью до постоянного члена ($m^2=1$), при $m=2$ с точностью до члена h^2, при $m=3$ с точностью до члена h^4 и т. д. При каждом значении m разность между be_m и bo_m имеет при малых h порядок h^{2m}. При $m>4$ можно использовать все члены, выписанные в (11.2.87).

Возвращаясь теперь к самим собственным функциям, мы можем в формуле для $H(\vartheta)$ разложить подинтегральное выражение, стоящее в аргументе косинуса или синуса, по степеням h^2 и, используя это разложение для собственных значений b, произвести интегрирование. С той же степенью точности, что и в (11.2.87), получаем

$$Se_m(h,\cos\vartheta)\simeq\left[\frac{be_m-h^2}{be_m-h^2\cos^2\vartheta}\right]^{\frac{1}{4}}\times$$
$$\times\cos\left[m\vartheta-\frac{h^2}{8m}\sin 2\vartheta-\frac{h^4}{256m^3}\sin 4\vartheta-\ldots\right],$$

$$So_m(h,\cos\vartheta)\simeq\left[\frac{bo_m-h^2}{bo_m-h^2\cos^2\vartheta}\right]^{\frac{1}{4}}\left[m-\frac{h^2}{4m}-\frac{h^4}{32m^3}-\ldots\right]^{-1}\times$$
$$\times\sin\left[m\vartheta-\frac{h^2}{8m}\sin 2\vartheta-\frac{h^4}{256m^3}\sin 4\vartheta-\ldots\right].\qquad(11.2.88)$$

Правые части, как и в (11.2.85), можно разложить в ряды Фурье. Зная коэффициенты рядов Фурье, можно, как и ранее, вычислить ряды для радиальных функций.

Заметим, что чем больше m, тем большим должно быть h, для того чтобы Se_m, So_m начали заметно отличаться от обычных тригонометрических функций и для того чтобы be_m, bo_m начали заметно отличаться друг от друга. При увеличении h разность $be_m - bo_m$ возрастает от нуля (сначала как h^{2m}), пока, наконец, be_m не становится почти равным bo_{m+1}, что мы вскоре покажем. При малых h величины b возрастают, начиная с их первоначального значения m^2, пропорционально h^2; при больших h они меняются линейно вместе с h, как это будет показано ниже.

Выражения для больших h. Если h очень велико, то, как следует из теории Штурма — Лиувилля, решения будут велики только при $\vartheta = \pi/2$ и $\vartheta = -\pi/2$. Обращаясь к уравнению Лиувилля (6.3.12), видим, что для уравнения Матье $p = 1$, $q = -h^2 \cos^2 \vartheta$, $r = 1$ и $\lambda = b$. Как было указано на стр. 672 тома I, если разность $b - h^2 \cos^2 \vartheta$ положительна, то решение y имеет синусоидальный характер, а если $b - h^2 \cos^2 \vartheta$ отрицательна, то характер y экспоненциальный. Если бы b было отрицательно, то y имело бы экспоненциальный характер для всей области значений ϑ, и поэтому не могло бы быть периодическим. Если b положительно, но меньше h^2, то y может быть синусоидальным только вблизи точек $\vartheta = \pi/2$ и $\vartheta = -\pi/2$, где $\cos^2 \vartheta$ обращается в нуль. Следовательно, y может принимать большие значения только вблизи этих точек и y убывает до весьма малых значений при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, причем кривые в окрестности этих точек выпуклые, т. е. ведут себя подобно экспоненте.

Для больших значений h функции Se, So должны, следовательно, иметь свои наибольшие значения вблизи $\vartheta = \pm\pi/2$ и быстро убывать с каждой стороны от этих точек, чтобы вблизи $\vartheta = 0$, π принять сравнительно малые значения. Быть может, следует попытаться решить уравнение (11.2.79) вблизи точек $\vartheta = \pm\pi/2$, потребовав в качестве краевых условий, чтобы решения экспоненциально убывали (подобно отрицательной экспоненте) на границах соответствующих областей.

Для больших значений h вблизи точки $\vartheta = \pi/2$ уравнение (11.2.79) приближенно записывается в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (b - h^2x^2)\, y = 0, \quad x = \vartheta - \frac{1}{2}\pi.$$

Это — уравнение полиномов Эрмита, если только интервал изменения x совпадает с $(-\infty, +\infty)$. Формулы, касающиеся полиномов Эрмита, даны в таблицах в конце гл. 6. Собственными функциями, экспоненциально стремящимися к нулю при больших значениях z, являются $\psi_n(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2} H_n(z)$. Они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\psi_n}{dz^2} + [(2n+1) - z^2]\, \psi_n = 0.$$

Если мы потребуем, чтобы $y \simeq A\psi_n(x\sqrt{h})$ вблизи $x = 0$ $\left(\vartheta = \frac{1}{2}\pi\right)$, то y должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [h(2n+1) - h^2x^2]\, y = 0$$

и экспоненциально убывать при удалении от $x = 0$.

Истинное решение должно поэтому почти равняться $A\psi_n(x\sqrt{h})$ вблизи $x = 0$, но для других значений x его поведение должно отличаться от этой функции, ибо y должно быть периодическим по x с периодом 2π, в то время как ψ_n — непериодическая функция, стремящаяся к нулю по мере увеличения $|x|$. Все же мы в состоянии приближенно решить уравнение (11.2.79) в важных областях вблизи $\vartheta=\pi/2$ и $\vartheta=-\pi/2$, составляя линейную комбинацию функций ψ. Мы можем использовать одну из комбинаций $A\left\{\psi_n\left[\sqrt{h}\left(\vartheta-\frac{1}{2}\pi\right)\right]\pm\psi_n\left[\sqrt{h}\left(\vartheta+\frac{1}{2}\pi\right)\right]\right\}$, причем комбинация со знаком плюс симметрична по отношению $\vartheta=0$ и потому должна соответствовать функциям Se; комбинация со знаком минус антисимметрична, и потому она должна соответствовать So. Если две функции ψ мало «перекрываются», то наша комбинация даст, вероятно, хорошее приближение.

Нам остается еще обеспечить периодичность решения, но это может быть сделано добавлением функций, подобных выписанным, у которых ϑ увеличено последовательно на $2\pi, 4\pi, \ldots, -2\pi, -4\pi, \ldots$. Таким образом, мы получаем, наконец, приближенное решение для больших h:

$$Se_m(h, \cos\vartheta)\simeq A_m\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\psi_m\left[\sqrt{h}\left(\vartheta-\frac{1}{2}\pi+2n\pi\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\psi_m\left[\sqrt{h}\left(\vartheta+\frac{1}{2}\pi+2n\pi\right)\right]\right\}, \quad (11.2.89)$$

$$So_m(h,\cos\vartheta)\simeq B_m\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\psi_{m-1}\left[\sqrt{h}\left(\vartheta-\frac{1}{2}\pi+2n\pi\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\psi_{m-1}\left[\sqrt{h}\left(\vartheta+\frac{1}{2}\pi+2n\pi\right)\right]\right\},$$
$$\psi_m(z)=e^{-z^2/2}H_m(z),$$

где постоянные A_m, B_m определяются из условий, которым должны удовлетворять Se, So при $\vartheta=0$. Несколько первых собственных функций можно выразить через эллиптические функции. Так, функция наинизшего порядка имеет вид

$$Se_0(h, \cos\vartheta)\simeq A\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}h\left(\vartheta-\frac{1}{2}\pi+2m\pi\right)^2}+e^{-\frac{1}{2}h\left(\vartheta+\frac{1}{2}\pi+2m\pi\right)^2}\right]=$$
$$=A\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}h\left(\vartheta+n\pi+\frac{1}{2}\pi\right)^2}=Ae^{-\frac{1}{2}h\vartheta^2}\vartheta_2\left(\frac{1}{2}ih\pi\vartheta,\ e^{-\frac{1}{2}h\pi^2}\right),$$

где ϑ_2 — одна из эллиптических тэта-функций, определенная в (4.5.70). Поскольку $Se_0(h, 1)$ должна быть равна единице, коэффициент A должен иметь вид $1/\vartheta_2(0, e^{-\frac{1}{2}h\pi^2})$. С помощью хорошо известного преобразования тэта-функций (см. задачу 4.51) можно показать, что

$$Se_0(h, \cos\vartheta)\simeq\frac{\vartheta_4(\vartheta, e^{-2/h})}{\vartheta_4(0, e^{-2/h})},$$

и это доказывает периодичность функции Se_0.

Итак, мы имеем

$$Se_0(h,\cos\vartheta)\simeq\frac{\sqrt{\frac{1}{2}h\pi}}{\vartheta_4(0, e^{-2/h})}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}h\left(\vartheta+n\pi+\frac{1}{2}\pi\right)^2}=\frac{\vartheta_4(\vartheta, e^{-2/h})}{\vartheta_4(0, e^{-2/h})}.$$

Аналогично

$$So_1(h, \cos\vartheta) \simeq \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\pi h}}{\vartheta_2(0, e^{-2/h})\,\vartheta_3(0, e^{-2/h})\,\vartheta_4(0, e^{-2/h})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{1}{2}h\left(\vartheta + n\pi + \frac{1}{2}\pi\right)^2} =$$

$$= \frac{\vartheta_1(\vartheta, e^{-2/h})}{\vartheta_2(0, e^{-2/h})\,\vartheta_3(0, e^{-2/h})\,\vartheta_4(0, e^{-2/h})}. \qquad (11.2.90)$$

Эти результаты, связывающие решения волнового уравнения в эллиптических координатах с эллиптическими функциями, исключительно интересны. В нашем приближении функции Se_1, So_2 оказываются связанными с производными Se_0, So_1 по ϑ.

Чтобы выяснить, в какой области пригодны эти приближения, и вычислить приближенные значения постоянной разделения b, мы используем полученное приближенное выражение для y в качестве функции сравнения в вариационном методе. В соответствии с (6.2.20) величина

$$\Omega = \frac{\left\{\int_0^{2\pi} \psi\left[-\left(\frac{d^2\psi}{d\vartheta^2}\right) + h^2\psi\cos^2\vartheta\right] d\vartheta\right\}}{\int_0^{2\pi} \psi^2 d\vartheta}$$

не меньше чем b_0^e и приближается к точному значению b_0^e, когда ψ приближается к истинной функции Se_0.

Чтобы увидеть, как ведут себя эти интегралы, мы вычислим нормирующую постоянную для приближенного выражения Se_0. Переставляя знаки суммирования и интегрирования, получаем

$$M_0^e = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}hx^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}h(x+n\pi)^2}\, dx = A^2 \sqrt{\frac{\pi}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\frac{1}{4}h\pi^2 n^2} =$$

$$= A^2 \sqrt{\frac{\pi}{h}}\, \vartheta_3\left(0, e^{-\frac{1}{4}h\pi^2}\right) = A^2 \frac{2}{h} \vartheta_3(0, e^{-4/h}).$$

Числитель упрощаем, используя равенства $-\psi'' = (h - h^2x^2)\psi$ и $\cos^2\vartheta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\vartheta$. Вычисления дают

$$b_0^e \leqslant h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{h^2\sqrt{h/\pi}}{\vartheta_3\left(0, e^{-\frac{1}{4}h\pi^2}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}hx^2} \left[x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x\right] e^{-\frac{1}{2}h(x+n\pi)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^2 e^{-1/h} \frac{\vartheta_4\left(0, e^{-\frac{1}{4}h\pi^2}\right)}{\vartheta_3\left(0, e^{-\frac{1}{4}h\pi^2}\right)} - \frac{h}{\vartheta_3} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{1}{4} h\pi^2 n^2 e^{-\frac{1}{4}h\pi^2 n^2} \simeq$$

$$\simeq h - \frac{1}{4} + \frac{1}{6h} - \frac{1}{24h^2} + \ldots - \left(\frac{1}{2}\pi^2 - 2\right) h^2 e^{-\frac{1}{4}h\pi^2} + \ldots, \quad h \to \infty.$$

С другой стороны, для постоянной разделения b_1^o, соответствующей So_1, имеем

$$b_1^0 \leqslant \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^2 e^{-1/h}\ \frac{\vartheta_3\left(0, e^{-\frac{1}{4}h\pi^2}\right)}{\vartheta_4\left(0, e^{-\frac{1}{4}h\pi^2}\right)} - \\ - \frac{h}{\vartheta_4}\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(-1)^n \frac{1}{4} h\pi^2 n^2 e^{-\frac{1}{4}h\pi^2 n^2} \simeq \qquad (11.2.91)$$

$$\simeq h - \frac{1}{4} + \frac{1}{6h} - \frac{1}{24h^2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\pi^2 - 2\right) h^2 e^{-\frac{1}{4}h\pi^2} + \cdots, \qquad h \to \infty.$$

Заметим, что эти выражения отличаются только последними членами. Оба собственных значения возрастают при больших h пропорционально h. Множитель $e^{-\frac{1}{4}h\pi^2}$ измеряет «перекрытие» одного из членов ряда с последующим. Если оно мало, то мы можем быть уверены, что приведенные формулы дают хорошее приближение к точным решениям; пока $h > 2$ этот «перекрывающий» член меньше 0,01 и мы можем ожидать, что формула, грубо говоря, будет правильной с точностью до одного процента.

Волны внутри эллиптической области. Для решения внутренних задач следует найти значения h, при которых радиальные функции Je, Jo удовлетворяют заданным краевым условиям на граничном эллипсе $\mu = \mu_0$. Функции Je, Jo должны здесь использоваться потому, что функции Ne, No или их производные имеют особенность при $\mu = 0$ и применяются только во внешних задачах.

Для эллиптической мембраны краевое условие имеет вид: $\psi = 0$ на границе. Предположим, что границей служит эллипс с большой осью A и малой осью B. Возвращаясь к выражениям для координат, мы видим, что $a\operatorname{ch}\mu_0 = A$ и $a\operatorname{sh}\mu_0 = B$, так что $a^2 = A^2 - B^2$ и $\mu_0 = \operatorname{Ar}\operatorname{th}(B/A)$. Следовательно, можно вычислить a и μ_0, если заданы A и B или если заданы фокальное расстояние a и эксцентриситет $e = \sqrt{1-(B/A)^2} = \operatorname{sech}\mu_0$ (или какая-либо другая пара величин A, B, a, e). Краевое условие, определяющее собственные частоты, имеет вид

$$Je_m(h, \operatorname{ch}\mu_0) = 0 \quad \text{или} \quad Jo_m(h, \operatorname{ch}\mu_0) = 0,$$

где $h = a\omega/2c = \pi a\nu/c = \pi a/\lambda$. Мы выбираем ω, а вместе с тем и h так чтобы Je (или Jo) обращалась в нуль при $\mu = \mu_0$.

Если μ_0 велико (т. е. эксцентриситет $e = 1/\operatorname{ch}\mu_0$ мал), то корни этих уравнений существуют для малых h. В этом случае для определения собственных частот можно использовать приближенные выражения (11.2.85). Например, для наинизшей формы колебания ($m = 0$) радиальная функция с точностью до величин второго порядка относительно малого h имеет вид

$$Je_0(h, \operatorname{ch}\mu) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(1 + \frac{1}{8}h^2\right) J_0(h\operatorname{ch}\mu) + \frac{1}{8}h^2 J_2(h\operatorname{ch}\mu) + \ldots\right\}.$$

Если высшие члены отсутствуют, то эта функция обращается в нуль при $h\operatorname{ch}\mu_0 = \pi\beta_{01}$ (см. таблицу на стр. 523), т. е. когда $h\operatorname{ch}\mu_0$ равно наименьшему корню уравнения $J_0(\pi\beta) = 0$. Если h мало, то корень уравнения $Je = 0$ мало отличается от этого значения. Вблизи $\pi\beta_{01}$ мы имеем $J_0(x) \simeq (\pi\beta_{01} - x) J_1(\pi\beta_{01})$, так что уравнение $Je_0 = 0$ приближенно сводится к следующему:

$$\left(1 + \frac{1}{8}h^2\right)(\pi\beta_{01} - h\operatorname{ch}\mu_0) J_1(\pi\beta_{01}) + \frac{1}{8}h^2 J_2(\pi\beta_{01}) = 0.$$

Решение последнего уравнения с точностью до малых второго порядка относительно $e = 1/\mathrm{ch}\,\mu_0$ равно

$$h_{01} \simeq \pi\beta_{01}e + \frac{1}{8}(\pi\beta_{01}e)^2 \frac{J_2(\pi\beta_{01})}{J_1(\pi\beta_{01})}. \qquad (11.2.92)$$

Подставляя численные значения $\beta_{01} = 0{,}7655$, $J_2(\pi\beta_{01}) = 0{,}4318$, $J_1(\pi\beta_{01}) = 0{,}5191$ и выражая все через непосредственно измеряемые величины, для наинизшей формы колебаний и для почти круглой мембраны получаем

$$\nu_{01} \approx \frac{c}{A}[0{,}7655 + 0{,}1914\,e] \quad (B \approx A),$$

где $c = \sqrt{T/\rho}$ — скорость распространения поперечных волн вдоль мембраны, A — большая ось граничного эллипса, а $e = \sqrt{1-(B/A)^2}$ — его эксцентриситет. Первый член представляет собой собственную частоту круглой мембраны диаметра A. Второй член дает поправку первого порядка, которую следует внести в эту частоту для учета эффекта эксцентричности границы. Эта поправка, очевидно, пригодна только для очень малых значений эксцентриситета. Соответствующая собственная функция выражается так:

$$\psi \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1 + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{8}h^2\cos 2\vartheta\right]\left[\left(1 + \frac{1}{8}h^2\right)J_0(h\,\mathrm{ch}\,\mu) + \frac{1}{8}h^2 J_2(h\,\mathrm{ch}\,\mu)\right],$$

где величина h определена в (11.2.92).

Когда эксцентриситет велик, μ_0 мало и $B \approx a\mu_0$, $A \approx a\left(1 + \frac{1}{2}\mu_0^2\right)$ с точностью до членов второго порядка относительно μ_0 или $a \approx A - \frac{1}{2}(B^2/A)$, $\mu_0 \approx (B/A) + (1/3)(B/A)^3$ с точностью до членов третьего порядка относительно B/A. В этом случае даже наинизшее допустимое значение h велико и мы должны использовать формулы, предшествующие (11.2.90). Чтобы удовлетворить краевым условиям, подставим $i\mu$ вместо ϑ в выражение для Se_0 через тэта-функции. Приравнивая это выражение нулю, получаем

$$\vartheta_2\left(-\frac{1}{2}h\pi\mu_0,\ e^{-\frac{1}{2}h\pi^2}\right) =$$

$$= 2e^{-\frac{1}{8}\pi^2 h}\left[\cos\left(\frac{1}{2}h\pi\mu_0\right) + e^{-h\pi^2}\cos\left(\frac{3}{2}h\pi\mu_0\right) + \ldots\right] = 0.$$

Наинизшим корнем является $h\mu_0 = 1$, или

$$h_{01} \approx \frac{A}{B} - \frac{1}{3}\frac{B}{A}, \text{ или } \nu_{01} \approx \frac{c}{\pi B}\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{B}{A}\right)^2\right] \quad (B \ll A).$$

В этом предельном случае частота точнее выражается не через большую ось A, а через малую ось B $(A \gg B)$.

Соответствующее выражение для наинизшей собственной функции в случае очень эксцентричной эллиптической мембраны имеет вид

$$\psi_{01} \simeq K\left[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(-1)^n e^{-2n^2/h}\cos 2n\vartheta\right] \times$$

$$\times\left\{e^{\frac{1}{2}h\mu^2}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}h\pi^2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi h\mu\right]\right\},$$

где величина h определена выше.

Для промежуточных значений эксцентриситета границы или для получения более точных результатов приходится пользоваться точными решениями, помещенными в таблицах в конце этой книги. Эти решения выражаются в виде $Se_m(h, \cos\vartheta)\,Je_m(h, \operatorname{ch}\mu)$, где h — корень уравнения $Je_m(h, \operatorname{ch}\mu_0)=0$, или в виде соответствующей комбинации So и Jo.

Разложения функции Грина и плоской волны. Обычную методику, приведшую нас к (7.2.63), легко применить и здесь для получения разложения в эллиптических координатах двумерной функции Грина для всей плоскости:

$$G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|\,\omega)=G_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)=i\pi H_0^1(kR)= \tag{11.2.93}$$

$$=4\pi i\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Se_m(h,\cos\vartheta)}{M_m^e(h)}Se_m(h,\ \cos\vartheta)\left\{\begin{matrix}Je_m(h,\operatorname{ch}\mu_0)\,He_m(h,\operatorname{ch}\mu)\\ Je_m(h,\operatorname{ch}\mu)\,He_m(h,\operatorname{ch}\mu_0)\end{matrix}\right.+\right.$$

$$\left.+4\pi i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{So_m(h,\cos\vartheta_0)}{M_m^o(h)}So_m(h,\ \cos\vartheta)\left\{\begin{matrix}Jo_m(h,\operatorname{ch}\mu_0)\,Ho_m(h,\operatorname{ch}\mu), & \mu>\mu_0,\\ Jo_m(h,\operatorname{ch}\mu)\,Ho_m(h,\operatorname{ch}\mu_0), & \mu_0>\mu,\end{matrix}\right\}\right.$$

где $h=ak/2=a\omega/2c$ и

$$He_m=Je_m+iNe_m=-iC_m^e(h,\mu)\,e^{i\delta_m^e(h,\mu)},$$

$$Ho_m=Jo_m+iNo_m=-iC_m^o(h,\mu)\,e^{i\delta_m^o(h,\mu)}$$

— решения, соответствующие расходящимся волнам.

От этого разложения можно непосредственно перейти к разложению плоской волны, но для рассматриваемого случая мы все же проведем вычисления. Поместим источник в точке на большом расстоянии от начала в направлении, образующем угол $u+\pi$ с положительной полуосью x. Тогда величина R будет равна $r_0+r\cos(u-\varphi)$ при $r_0\gg r$, $\vartheta_0\approx\varphi+\pi$ и $kr_0\approx h\operatorname{ch}\mu_0$. Асимптотическое выражение для $i\pi H_0(kR)$ имеет вид $\sqrt{2\pi i/kr_0}\,e^{ikr_0+ikr\cos(u-\varphi)}$. Пользуясь соотношением

$$Se_m(h,\ -\cos u)=(-1)^m Se_m(h,\cos u),$$

а также асимптотическими формулами для He_m и Ho_m, получаем

$$\sqrt{\frac{2\pi i}{kr_0}}\,e^{ikr_0+ikr\cos(u-\varphi)}\simeq\frac{4\pi\sqrt{i}}{\sqrt{h\operatorname{ch}\mu_0}}\,e^{ih\operatorname{ch}\mu_0}\times$$

$$\times\sum_m(-1)^m e^{-\frac{1}{2}im\pi}\left\{\frac{Se_m(u)}{M_m^e}Se_m(\vartheta)\,Je_m(\mu)+\frac{So_m(u)}{M_m^o}So_m(\vartheta)\,Jo_m(\mu)\right\}.$$

Произведя возможные сокращения, в конце концов придем к формуле

$$e^{ikr\cos(u-\varphi)}=e^{ik[x\cos u+y\sin u]}=$$

$$=\sqrt{8\pi}\sum_m i^m\left\{\frac{Se_m(h,\cos u)}{M_m^e(h)}Se_m(h,\cos\vartheta)\,Je_m(h,\operatorname{ch}\mu)+\right.$$

$$\left.+\frac{So_m(h,\cos u)}{M_m^o(h)}So_m(h,\cos\vartheta)\,Jo_m(h,\operatorname{ch}\mu)\right\}, \tag{11.2.94}$$

которая представляет собой разложение плоской волны, распространяющейся под углом u к положительной полуоси x (т. е. по отношению к большой оси эллипса).

Из этой последней формулы можно получить интегральное представление собственных функций в эллиптических координатах типа (11.2.2)

$$
\begin{aligned}
Se_m(h, \cos\vartheta)\, Je_m(h, \operatorname{ch}\mu) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi}\, i^m} \int_0^{2\pi} e^{ikX}\, Se_m(h, \cos u)\, du, \\
So_m(h, \cos\vartheta)\, Jo_m(h, \operatorname{ch}\mu) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi}\, i^m} \int_0^{2\pi} e^{ikX}\, So_m(h, \cos u)\, du,
\end{aligned} \tag{11.2.95}
$$

где $X = r\cos(u - \varphi) = x\cos u + y\sin u$. Из этой формулы в свою очередь можно извлечь выражение для $Se_m Je_m$ через решения в полярных координатах $r^m J_m$. Разложив $Se_m(h, \cos u)$ в ряд Фурье (11.2.81) и пользуясь формулой (11.2.21), находим

$$
Se_{2m}(h, \cos\vartheta)\, Je_{2m}(h, \operatorname{ch}\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}^{e}(h, 2m) \cos(2n\varphi)\, J_{2n}(kr) \tag{11.2.96}
$$

и аналогично для Se_{2m+1} и функций So, Jo.

Так как Se_m — собственная функция, то тригонометрическую функцию от u можно разложить в ряды по Se, So вида

$$
\cos(2mu) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M_{2n}^{e} \varepsilon_m} B_{2m}^{e}(h, 2n)\, Se_{2n}(h, \cos u).
$$

Поэтому мы можем написать

$$
\cos(2m\varphi)\, J_{2m}(kr) = \frac{\sqrt{8\pi}}{\varepsilon_m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2m}^{e}(h, 2n)}{M_{2n}^{e}(h)}\, Se_{2n}(h, \cos\vartheta)\, Je_{2n}(h, \operatorname{ch}\mu).
$$

Это — обращение разложения (11.2.96). Полученные результаты нетрудно распространить на случаи симметрий иных типов по φ или ϑ.

Излучение колеблющейся полосы. Простейшей внешней задачей является излучение поверхности, которая представляет собой полосу $\mu = 0$ нулевой толщины и ширины a. Если полоса достаточно длинна и каждая точка любой вертикальной прямой движется одинаково, то задача становится двумерной, и можно использовать эллиптические координаты, расположив фокусы эллипса на «краях» полосы. Мы приведем два примера: в одном будет рассмотрено акустическое излучение колеблющейся полосы, во втором — электромагнитное излучение тока, текущего по полосе.

В случае колеблющейся полосы положим, что в точках ее поверхности движение окружающей среды нормально к поверхности и имеет скорость $v_0 e^{-i\omega t}$ на части поверхности от $\vartheta = 0$ до $\vartheta = \pi$ и $-v_0 e^{-i\omega t}$ на части от $\vartheta = \pi$ до $\vartheta = 2\pi$. Поэтому если ψ — потенциал скоростей, то краевое условие при $\mu = 0$ таково:

$$
-\operatorname{grad}_\mu \psi = \begin{cases} v_0 & (0 < \vartheta < \pi), \\ -v_0 & (\pi < \vartheta < 2\pi). \end{cases}
$$

Поскольку $\operatorname{grad}_\mu \psi$ при $\mu = 0$ равен $[2/a\,|\sin\vartheta\,|]\,(\partial\psi/\partial\mu)$, это условие принимает вид

$$
\left.\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right|_{\mu=0} = -\frac{1}{2} a v_0 \sin\vartheta.
$$

Это означает, что ψ должно быть нечетной функцией от ϑ, так что следует пользоваться функциями So, Jo, No. Краевое условие на бесконечности сводится к требованию, чтобы решение представлялось расходящимися волнами, так что для радиальных решений мы будем пользоваться функциями Ho_m — аналогом функций Ганкеля. Производные этих функций имеют вид

$$\frac{d}{d\mu} Ho_m(h, \operatorname{ch}\mu) = iC_m^o(h, \mu)\, e^{i\delta_m^o(h, \mu)} = \frac{d}{d\mu}[Jo_m + iNo_m],$$

где величины C_m^o и δ_m^o определяются аналогично случаю полярных координат.

В нашей задаче нужно найти величину производной при $\mu=0$. Обозначая значения величин C и δ при $\mu=0$ снова через C_m^o и δ_m^o и используя формулы, помещенные в конце этой главы, получаем

$$\left[\frac{d}{d\mu} Ho_m(h, \operatorname{ch}\mu)\right]_{\mu=0} = iC_m^o e^{i\delta_m^o} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\pi}\left\{\frac{\frac{1}{4}h^2(-1)^{\frac{1}{2}m} B_2^o(h, m)}{So_m'(h, 0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{B_2^o(h, m)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-\frac{1}{2}m}(2n) B_{2n}^o(h, m)\,[2J_n N_n - J_{n-1}N_{n+1} - J_{n+1}N_{n-1}]\right\}$$

(m — четное),

где аргументы всех функций J_n, N_n и т. д. равны $h/2$. Аналогичная формула имеет место для нечетного m. Используя формулы (11.2.86), находим, что для малых h

$$C_1^o \simeq \frac{2}{h}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - \frac{3}{32}h^2\right), \quad \delta_1^o \simeq -\frac{\pi}{8}h^2\left(1 + \frac{1}{16}h^2\right).$$

Теперь разложим $\sin\vartheta$ в ряд по собственным функциям So. В разложение войдут только нечетные значения m (почему?), и мы в конце концов получим

$$\sin\vartheta = \pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^o(h, 2m+1)}{M_{2m+1}^o(h)} So_{2m+1}(h, \cos\vartheta).$$

Следовательно, выражение для излученной волны имеет вид

$$\psi = \frac{1}{2} i\pi a v_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^o(h, 2m+1)}{M_{2m+1}^o(h)} \frac{e^{-i\delta_{2m+1}^o}}{C_{2m+1}^o} So_{2m+1}(h, \cos\vartheta)\, Ho_{2m+1}(h, \operatorname{ch}\mu).$$

Пользуясь этим выражением, можно подсчитать обратное воздействие поля на полосу (а значит, акустический импеданс полосы) и количество энергии, излученной полосой. Чтобы найти импеданс, найдем прежде всего давление на поверхности полосы $\mu=0$. Так как

$$Ho_{2m+1}(h, 1) = Jo_{2m+1}(h, 1) + iNo_{2m+1}(h, 1) =$$

$$= 0 - \frac{i}{Jo_{2m+1}'(h, 1)} = \frac{i}{C_{2m+1}^o \sin(\delta_{2m+1}^o)}$$

и давление p в любой точке равно произведению $-i\omega\rho$ на потенциал скоростей ψ, то мы имеем

$$p = \frac{1}{2}\pi a\omega\rho v_0 \sum_m \frac{B_1^o(h, 2m+1)}{M_{2m+1}^o} \frac{ie^{-i\delta_{2m+1}^o}}{(C_{2m+1}^o)^2 \sin(\delta_{2m+1}^o)} So_{2m+1}(h, \cos\vartheta).$$

Полная сила F, действующая на единицу длины полосы равна $\frac{1}{2}a\int p\sin\vartheta\, d\vartheta$ и направлена в сторону убывания y-ов:

$$F=\frac{1}{2}a\pi^2 h\rho c v_0 \sum_m \left[\frac{B_1^o(h, 2m+1)}{C_{2m+1}^o}\right]^2 \frac{1+i\operatorname{ctg}(\delta_{2m+1}^o)}{M_{2m+1}^o}.$$

Отношение силы F к скорости полосы v_0 является акустическим импедансом излучения единицы длины полосы $Z=R-iX$, где

$$R=\frac{1}{2}a\pi^2 h\rho c \sum_m \left[\frac{B_1^o(h, 2m+1)}{C_{2m+1}^o}\right]^2 \frac{1}{M_{2m+1}^o},$$
$$X=-\frac{1}{2}a\pi^2 h\rho c \sum_m \left[\frac{B_1^o(h, 2m+1)}{C_{2m+1}^o}\right]^2 \frac{\operatorname{ctg}(\delta_{2m+1}^o)}{M_{2m+1}^o}, \qquad (11.2.97)$$

причем R — активная, а X — реактивная составляющие импеданса излучения единицы длины полосы.

Для низких частот ($\omega \ll 2c/a$), или длинных волн ($\lambda \gg \pi a$) h мало по сравнению с единицей и можно вычислить приближенные значения составляющих импеданса, пользуясь формулами (11.2.85) и (11.2.86):

$$R \simeq \frac{\pi^2}{16} a\rho c h^3 = \frac{\pi^2 a^4 \omega^3}{128 c^3}\rho c, \qquad X \simeq \frac{\pi a h}{2}\rho c = \frac{\pi a^2 \omega}{4}\rho.$$

Таким образом, активная составляющая импеданса излучения при низких частотах возрастает как третья степень частоты, в то время как реактивная составляющая возрастает с частотой линейно. Поэтому при очень низких частотах обратное воздействие поля излучения подобно реактивной нагрузке массой ($X=M\omega$), причем эффективная масса единицы длины полосы равна $\pi\rho a^2/4$.

При очень высоких частотах излучение представляет собой плоскую волну, распространяющуюся от обеих сторон полосы нормально к ее поверхности. Так как акустический импеданс для плоской волны, согласно сказанному на стр. 298 тома I, составляет ρc на единицу площади, то предельное значение R при очень высоких частотах ($\omega \gg 2c/a$) равно $2\rho c a$, а предельное значение X равно нулю. Для средних частот, т. е. для ω порядка величины $2c/a$, следует пользоваться таблицами и полными формулами (11.2.97).

Возвращаясь к уравнению для ψ, видим, что предельное значение ψ на больших расстояниях от полосы, где $\operatorname{ch}\mu \simeq 2r/a$, $\vartheta \simeq \varphi$ (r и φ — полярные координаты с началом в центре полосы), имеет вид

$$\psi \simeq \frac{i\pi a v_0}{\sqrt{2ikr}} e^{ikr} \sum_m \frac{B_1^o(h, 2m+1)\, e^{-i\delta_{2m+1}^o}}{(-1)^m M_{2m+1}^o C_{2m+1}^o} So_{2m+1}(h, \cos\varphi).$$

На таких расстояниях волна практически является плоской, так что ее интенсивность (см. стр. 352) $P=\frac{1}{2}\overline{pu}=\frac{1}{2}\rho c k^2 |\psi|^2$, и

$$S=\frac{\pi^2 \rho c k a^2 v_0^2}{4r} \sum_{m,n} \frac{B_1^o(h, 2m+1) B_1^o(h, 2n+1)}{M_{2m+1}^o M_{2n+1}^o C_{2m+1}^o C_{2n+1}^o} \times$$
$$\times \cos[\delta_{2m+1}^o - \delta_{2n+1}^o + \pi(m-n)]\, So_{2m+1}(h, \cos\varphi)\, So_{2n+1}(h, \cos\varphi). \qquad (11.2.98)$$

Полная энергия, излучаемая единицей длины полосы, равна этой интенсивности, умноженной на r и проинтегрированной по φ. Вследствие ортогональности функций So получаем

$$P=\frac{1}{4}a\pi^2h\rho cv_0^2\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{B_1^o(h,\ 2m+1)}{C_{2m+1}^o}\right]^2\frac{1}{M_{2m+1}^o},$$

т. е., как и следовало ожидать, эта полная энергия равна произведению $\frac{1}{2}v_0^2$ на активную часть R импеданса излучения.

Излучение тока, текущего по полосе. Чтобы определить излучение тока, текущего по проводящей полосе, мы должны вернуться к электродинамическим уравнениям из § 2.5. Будем исходить из векторного потенциала $\mathbf{A}$. Если отсутствуют свободные заряды, то скалярный потенциал можно положить равным нулю, приняв, что дивергенция векторного потенциала равна нулю. Тогда в случае чисто гармонических колебаний (и $\varepsilon=\mu=1$) напряженность электрического поля равна $-\partial\mathbf{A}/c\partial t=i\omega\mathbf{A}/c$, а напряженность магнитного поля $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$. Уравнение для $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\square^2\mathbf{A}=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{J},$$

где $\mathbf{J}$ — плотность тока.

Если падение напряжения, вызывающее ток в полосе, равномерно по всей длине полосы, то вектор $\mathbf{A}$ всюду направлен по оси z перпендикулярно к плоскости координат x,y или μ,ϑ и имеет вид $\mathbf{a}_z\psi e^{-i\omega t}$, где ψ — скаляр. Для того чтобы $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, ψ должно быть функцией от x, y или μ, ϑ, но не от z, и тем самым задача сводится к двумерной. Несмотря на то, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}$ направлены по оси z, зависимости ψ, $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ от пространственных координат включают только x и y, но не z, и можно рассматривать только скалярную функцию ψ. Эта амплитуда векторного потенциала удовлетворяет уравнению Гельмгольца, однородному вне полосы и неоднородному внутри нее.

Краевые условия для ψ вытекают из требования, чтобы падение потенциала было равномерным вдоль полосы и чтобы волна была расходящейся. Если падение потенциала на единицу длины полосы равно $E_0e^{-i\omega t}$, то первое из этих условий состоит в том, что $\psi=-icE_0/\omega$ при $\mu=0$; из второго условия следует, что ψ должно выражаться через радиальные функции He, Ho.

Из краевого условия, которому должна удовлетворять ψ при $\mu=0$, следует симметрия ψ относительно $\vartheta=0$, что сводит допустимые радиальные функции к типу He, а также симметрия ψ относительно $\vartheta=\pi/2$ и $\vartheta=3\pi/2$, что еще сокращает множество допустимых функций до типа He_{2m}. Следовательно, $J(\vartheta)$ симметрична относительно $\vartheta=0$, $\vartheta=\pi$, а также $\vartheta=\pi/2$, $\vartheta=3\pi/2$. Таким образом, ряд для ψ имеет вид.

$$\sum c_m Se_{2m}(h,\ \cos\vartheta)\,He_{2m}(h,\ \operatorname{ch}\mu).$$

Полученное решение позволяет вычислить ток вдоль полосы (а следовательно, и импеданс), а также и интенсивность излучения на больших расстояниях. Функции He_{2m}, фигурирующие в решении, указывают на наличие разрыва производной ψ при переходе сквозь полосу с одной ее стороны на другую. При этом скачок равен удвоенной производной ψ при $\mu=0$, так что плотность тока в полосе ($\mu=0$) в точке $(0,\ \vartheta)$ равна произведению $-1/2\pi$ на производную ψ при $\mu=0$:

$$\frac{2}{a|\sin\vartheta|}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right]_{\mu=0}=-2\pi J(\vartheta).$$

Полный ток вдоль полосы в положительном направлении оси z при этом равен $(a/2)\int J(\vartheta)|\sin\vartheta|\,d\vartheta$.

Используя свойство ортогональности функций Se_{2m}, из краевого условия при $\mu=0$ вычисляем коэффициенты ряда, и для амплитуды векторного потенциала в точке $(\mu,\ \vartheta)$ получаем выражение

$$\psi(\mu,\ \vartheta)=2\pi\frac{cE_0}{\omega}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_0^e(h,\ 2m)}{M_{2m}^e(h)}\frac{e^{-i\delta^e{}_{2m}}}{C_{2m}^e}Se_{2m}(h,\ \cos\vartheta)\,He_{2m}(h,\ \operatorname{ch}\mu),$$

где

$$He_{2m}(h,\ 1)=-iC_{2m}^e e^{i\delta_{2m}^e}=Je_{2m}(h,\ 1)+iNe_{2m}(h,\ 1).$$

Плотность тока на поверхности полосы в точках $\mu=0$ [обе «стороны» считаются различными и токи на них должны суммироваться; точки $0<\vartheta<\pi$ считаются отличными от точек $\pi<\vartheta<2\pi$, а полная плотность тока в полосе в точке $x=(a/2)\cos\vartheta$ представляется суммой $J(\vartheta)$ и $J(2\pi-\vartheta)$] выражается таким образом:

$$J(\vartheta)=\frac{E_0}{h\,|\sin\vartheta|}\sum_m\frac{B_0^e(h,2m)}{M_{2m}^e(h)}\frac{1+i\operatorname{ctg}(\delta_{2m}^e)}{(C_{2m}^e)^2}Se_{2m}(h,\ \cos\vartheta).$$

Мы видим, что плотность тока не постоянна по поперечному сечению полосы и стремится к бесконечности при приближении к каждому из ее краев (как это происходит со скоростью потока через щель). Полный ток I, однако, не бесконечен. Адмитанс единицы длины полосы, т. е. отношение $I/E_0=Y=G-iS$, в нашем случае выражается формулой

$$\begin{aligned}G(\omega)&=\frac{\pi a}{h}\sum_m\left[\frac{B_0^e(h,\ 2m)}{C_{2m}^e(h)}\right]^2\frac{1}{M_{2m}^e},\\ S(\omega)&=-\frac{\pi a}{h}\sum_m\left[\frac{B_0^e(h,\ 2m)}{C_{2m}^e}\right]^2\frac{\operatorname{ctg}(\delta_{2m}^e)}{M_{2m}^e}.\end{aligned}\qquad(11.2.99)$$

При очень низких частотах $(\lambda\gg\pi a)$ предельная зависимость от ω и a дается формулами

$$G\simeq\frac{\pi c}{2\omega}\frac{1}{\ln^2(4/\gamma h)},\qquad S=-\frac{c/\omega}{\ln(4/\gamma h)}\qquad(h\ll 1).$$

В этом приближении соответствующие сопротивление R и индуктивность излучения L, приходящиеся на единицу длины полосы, выражаются формулами

$$R\simeq\frac{\pi\omega}{2c},\quad L\simeq\frac{1}{c}\ln\left(\frac{0,717\lambda}{a}\right),$$

до тех пор пока $\ln(0{,}717\lambda/a)\gg 1$ (в обычных обозначениях мы имеем $1/Y=Z=R-i\omega L$). Таким образом, сопротивление излучения при очень низких частотах не зависит от размера (или формы) полосы. Для проводника, поперечное сечение которого мало по сравнению с длиной волны, действительная часть импеданса не зависит от формы поперечного сечения проводника. Эффективная индуктивность при низких частотах зависит от ширины полосы a, но только логарифмически. Из-за этой логарифмической зависимости сходимость делается сравнительно медленной и приближенные формулы применимы в значительно более узкой области значений ω, чем это имеет место для акустического излучения.

Нетрудно вычислить интенсивность излучения полосы на больших расстояниях, определяя вектор Пойнтинга [см. (2.5.28)]. Полная энергия, излучаемая единицей длины полосы, конечно, равна $GE_0^2/2$.

Рассеяние волн на полосе. Рассеяние волн на полосе можно исследовать методами, аналогичными тем, которыми была получена формула (11.2.28) для рассеяния на цилиндре. Возможны два предельных случая: случай I, когда поле равно нулю при $\mu=0$, что соответствует электромагнитным волнам с электрическим вектором, направленным вдоль оси полосы, и случай II, когда нормальная составляющая градиента равна нулю при $\mu=0$, что соответствует акустическим волнам, а также электромагнитным волнам с магнитным вектором, направленным вдоль оси z. В обоих случаях мы исходим из разложения плоской волны (11.2.94) и, чтобы удовлетворить краевым условиям, добавляем достаточное количество расходящихся волн (с функциями He, Ho).

Для упрощения формул будут полезны следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&Je_m = C_m^e \sin\delta_m^e, && Ne_m = -C_m^e \cos\delta_m^e, && He_m = -iC_m^e e^{i\delta_m^e} \\
&Jo_m' = -C_m^o \sin\delta_m^o, && No_m' = C_m^o \cos\delta_m^o, && Ho_m' = iC_m^o e^{i\delta_m^o}; \\
&Je_m' = -C_m^{e'} \sin\delta_m^{e'}, && Ne_m' = C_m^{e'} \cos\delta_m^{e'}, && He_m' = iC_m^{e'} e^{i\delta_m^{e'}}; \quad (11.2.100) \\
&Jo_m = C_m^{o''} \sin\delta_m^{o''}, && No_m = -C_m^{o''} \cos\delta_m^{o''}, && Ho_m = -iC_m^{o''} e^{i\delta_m^{o''}}.
\end{aligned}$$

Здесь штрих у функций Je, Ne и т. д. означает производную по μ. Причина отсутствия штриха у C_m^o и δ_m^o и наличия двойного штриха у $C_m^{o''}$ и $\delta_m^{o''}$ скоро станет ясной. Параметр h опущен для упрощения записи. То же самое относится к аргументу μ, который может принимать любые положительные значения, хотя в большинстве случаев в наших формулах μ будет равно нулю. При $\mu=0$ две из четырех строк этих соотношений упрощаются:

$$\begin{aligned}
&\delta_m^{o''} = 0, \quad C_m^{o''} = -\frac{1}{C_m^o \sin\delta_m^o}, \\
&\delta_m^{e'} = 0, \quad C_m^{e'} = \frac{1}{C_m^e \sin\delta_m^e} \quad (\mu=0),
\end{aligned}$$

так что в случае $\mu=0$ мы можем обойтись только амплитудами и фазовыми множителями без штрихов. Эти упрощения заслуживают внимания, поскольку в дальнейшем величины C и δ будут рассматриваться только при $\mu=0$.

Для малых значений h имеем

$$\begin{aligned}
&C_0^e \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-\frac{1}{8}h^2\right)\left[\ln\left(\frac{4}{\gamma h}\right)+\frac{\pi^2}{8\ln(4/\gamma h)}\right], \\
&\delta_0^e \simeq \frac{\pi/2}{\ln(4/\gamma h)}\left[1-\frac{\pi^2/12}{\ln^2(4/\gamma h)}\right]; \\
&C_1^e \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2}{h}+\frac{3}{16}h\right), \quad \delta_1^e \simeq \frac{\pi h^2}{8}; \qquad (11.2.101) \\
&C_1^o \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2}{h}-\frac{3}{16}h\right), \quad \delta_1^o \simeq -\frac{\pi h^2}{8}\left(1+\frac{1}{16}h^2\right); \\
&C_2^o \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{16}{h^2}-\frac{2}{3}\right), \quad \delta_2^o \simeq -\frac{\pi h^4}{256}; \ \gamma = 1{,}7811\ \ldots
\end{aligned}$$

Так как функции Jo_m обращаются в нуль при $\mu=0$, то в случае I ($\psi=0$ при $\mu=0$) в выражении (11.2.94) только члены Je требуют исправления. Ряд для рассеянной волны в этом случае получается точно так же, как это было сделано при выводе выражения (11.2.28):

$$\psi_s^{\mathrm{I}} = -i\sqrt{8\pi}\sum_{m=0}^{\infty} i^m \frac{Se_m(h, \cos u)}{M_m^e(h)} e^{-i\delta_m^e} \sin(\delta_m^e) Se_m(h, \cos\vartheta) He_m(h, \operatorname{ch}\mu) \tag{11.2.102}$$

при единичной амплитуде падающей волны. С другой стороны, рассеянная волна для случая II содержит только функции So, Ho, поскольку функции Je_m' равны нулю при $\mu = 0$:

$$\psi_s^{\mathrm{II}} = -i\sqrt{8\pi}\sum_{m=1}^{\infty} i^m \frac{So_m(h, \cos u)}{M_m^o(h)} e^{-i\delta_m^o} \sin(\delta_m^o) So_m(h, \cos\vartheta) Ho_m(h, \operatorname{ch}\mu). \tag{11.2.103}$$

Интенсивность рассеяния на единицу амплитуды падающей волны на больших расстояниях от полосы совпадает со значением $|\psi_s|^2$ для больших μ:

$$S^{\mathrm{I}} \simeq \frac{8\pi}{kr}\sum_{m,n} \frac{\sin(\delta_m^e)\sin(\delta_n^e)}{M_m^e M_n^e} \cos(\delta_m^e - \delta_n^e) \times \\ \times Se_m(h, \cos u) Se_n(h, \cos u) Se_m(h, \cos\vartheta) Se_n(h, \cos\vartheta). \tag{11.2.104}$$

Аналогичное соотношение с M_m^o, δ_m^o, So_m имеет место в случае II. Полная энергия, рассеянная единицей длины полосы для падающей волны единичной амплитуды (т. е. эффективная ширина рассеяния полосы), в случае I равна

$$Q^{\mathrm{I}} = \frac{4\pi a}{h}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{M_m^e(h)} \sin^2\delta_m^e [Se_m(h, \cos u)]^2, \tag{11.2.105}$$

где u — угол падения плоской волны. Ясно, как выглядит аналогичная формула для случая II.

Из этих формул следуют многие интересные (хотя и очевидные) факты. Прежде всего Q^{II} равно нулю, когда $u = 0$, в то время как Q^{I} при этом отлично от нуля. Если плоская волна распространяется параллельно поперечному сечению полосы (вдоль оси x), то полоса вовсе не искажает волну при краевом условии, требующем, чтобы нормальная составляющая градиента равнялась нулю, но волна искажается при условии, требующем равенства ψ нулю на полосе. Подобно этому, интенсивность рассеяния в случае II равна нулю при $\vartheta = 0, \pi$, независимо от угла падения, что не имеет места в случае I.

При очень низких частотах, т. е. для длин волн λ, очень больших по сравнению с πa, интенсивность рассеяния и эффективная ширина рассеяния имеют вид:

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{I}} &\simeq \frac{\pi a/4r}{h\ln^2(4/\gamma h)} = \frac{\lambda}{4r\ln^2(0{,}717\lambda/a)}, \\ Q^{\mathrm{I}} &\simeq \frac{\pi^2 a}{2h\ln^2(4/\gamma h)} = \frac{\pi\lambda}{2\ln^2(0{,}717\lambda/a)}, \\ S^{\mathrm{II}} &\simeq \frac{\pi a h^3}{16r}\sin^2 u \sin^2\vartheta = \frac{\pi^4 a^4}{16r\lambda^3}\sin^2 u \sin^2\vartheta, \\ Q^{\mathrm{II}} &\simeq \frac{\pi^2 a h^3}{16}\sin^2 u = \frac{\pi^5 a^4}{16\lambda^3}\sin^2 u \quad (\lambda \gg \pi a \text{ или } h \ll 1). \end{aligned} \tag{11.2.106}$$

Заметим, что если частота стремится к нулю ($\lambda \to \infty$), рассеяние в случае I ($\psi = 0$) возрастает, в то время как в случае II ($\partial\psi/\partial\mu = 0$) оно убывает. Такой же эффект наблюдался для рассеяния на круглом цилиндре.

Краевое условие $\psi = 0$ воздействует даже на очень длинные волны, в то время как длинные волны не реагируют на условие $\partial\psi/\partial\mu = 0$.

Диффракция на щели; принцип Бабине. Те же самые функции можно использовать для расчета диффракции плоской волны на щели в плоскости. Граница здесь состоит из двух полубесконечных плоскостей $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$, края которых отстоят друг от друга на расстояние a (ширина щели). Рассматриваемая область разделяется на две части $0 < \vartheta < \pi$ и $\pi < \vartheta < < 2\pi$, соединенные между собой щелью $\mu = 0$. В щели решение и его градиент должны быть непрерывны. В первой области $\pi < \vartheta < 2\pi$ существуют падающая волна, распространяющаяся под углом u к положительной оси x, волна, отраженная от плоской поверхности и распространяющаяся в направлении $-u$, и рассеянная волна, порожденная отсутствием границы в щели. Во второй области $0 < \vartheta < \pi$ имеется только диффрагированная волна, проникшая через щель. В каждой области полную систему собственных функций образуют *либо* функции Se_m, *либо* So_m (но не обе).

В случае краевого условия II (нормальная составляющая градиента равна нулю на поверхностях $\vartheta = 0, \pi$) в каждой области следует использовать только четные относительно $\vartheta = 0, \pi$ угловые функции, т. е. $Se_m(h, \cos\vartheta)$. Суперпозиция падающей и отраженной волн в области $\pi < \vartheta < 2\pi$, согласно (11.2.94), определяется формулой

$$e^{ikr\cos(\varphi-u)} + e^{ikr\cos(\varphi+u)} = 2\sqrt{8\pi}\sum i^m \frac{Se_m(h, \cos u)}{M_m^e(h)} Se_m(h, \cos\vartheta)\, Je_m(h, \operatorname{ch}\mu).$$

К этой комбинации нужно, конечно, прибавить расходящуюся волну чтобы обеспечить непрерывность на границе $\mu = 0$. В области $0 < \vartheta < \pi$ имеется только расходящаяся волна. Итак:

$$\psi = \begin{cases} \sqrt{8\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty} i^m \dfrac{Se_m(h, \cos u)}{M_m^e(h)} Se_m(h, \cos\vartheta)\, D_m He_m(h, \operatorname{ch}\mu), & 0 < \vartheta < \pi; \\ \sqrt{8\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty} i^m \dfrac{Se_m(h, \cos u)}{M_m^e(h)} Se_m(h, \cos\vartheta) \times \\ \qquad \times [2Je_m(h, \operatorname{ch}\mu) + A_m He_m(h, \operatorname{ch}\mu)], & \pi < \vartheta < 2\pi. \end{cases} \tag{11.2.107}$$

При этом коэффициенты D_m и A_m для каждого значения m должны быть подобраны так, чтобы при $\mu = 0$ выполнялись следующие условия:

[Значение в области $0 < \vartheta < \pi]_{\mu=0}$ = [Значение в области $\pi < \vartheta < 2\pi]_{\mu=0}$,
[Производная по μ в области $0 < \vartheta < \pi]_{\mu=0}$ =
= $-$[Производная по μ в области $\pi < \vartheta < 2\pi]_{\mu=0}$.

Поскольку производная Je_m при $\mu = 0$ равна нулю, мы должны иметь $D_m = -A_m$, и, окончательно, используя соотношения (11.2.100), получаем

$$-A_m = D_m = ie^{-i\delta_m^e}\sin\delta_m^e.$$

Таким образом, диффрагированная волна в области $0 < \vartheta < \pi$ для краевых условий II на поверхности $\vartheta = 0, \pi$ точно такая же, как волна $-\psi_s^{\mathrm{I}}$ из (11.2.102), рассеянная полосой при краевых условиях I. Этот интересный результат следует сформулировать отдельно, чтобы оценить его значение: волна, рассеянная полосой ширины a при краевых условиях I, такая же (с точностью до знака), как и волна, проникшая через щель ширины a при краевых условиях II, причем угол падения и интенсивность падающей плоской волны в обоих случаях совпадают. Замена экранов щелями и наоборот при одновременной замене условий Дирихле условиями Неймана оставляет диффрагированную волну неизменной.

Иначе можно сказать, что для краевых условий II на поверхности $\vartheta = 0, \pi$ волна в области $0 < \vartheta < \pi$ равна волне ψ_s^{I} из (11.2.102), взятой с обратным знаком; для краевых условий I на поверхности $\mu = 0$ волна в этой области (позади полосы или щели) равна $e^{ikr\cos(\varphi - u)} + \psi_s^{\mathrm{I}}$; сумма этих двух волн равна неискаженной плоской волне $e^{ikr\cos(\varphi-u)}$ в области $0 < \vartheta < \pi$. Утверждение, состоящее в том, что сумма волны, диффрагированной от некоторой границы, и волны, диффрагированной от «обращенной» (в указанном выше смысле) границы, есть как раз неискаженная плоская волна, называется *принципом Бабине*. Он справедлив, как это будет показано в § 11.4, для значительно более широкого класса границ, нежели система полоса — щель, о которой здесь была речь.

Этот принцип верен, конечно, и для обратной системы: краевые условия II (производная равна нулю) на полосе $\mu = 0$ и краевые условия I (значение функции равно нулю) на полуплоскостях $\vartheta = 0, \pi$, ограничивающих щель. В области $0 < \vartheta < \pi$ волна для случая I равна $e^{ikr\cos(\varphi-u)} + \psi_s^{\mathrm{II}}$ [см. (11.2.103)], а волна для случая II равна $-\psi_s^{\mathrm{II}}$. Полная энергия, проникающая через щель, при единичной амплитуде падающей волны равна половине эффективной ширины Q для «обращенной» полосы [множитель 1/2 получается потому, что в случае проникновения мы интегрируем только по одной половине плоскости ($0 < \vartheta < \pi$), а не по всей плоскости ($0 < \vartheta < 2\pi$), как это было при подсчете Q].

11.3. Волновое движение, три пространственные координаты

Трудности, с которыми связано изучение волн в случае двух пространственных координат, в трехмерном случае проявляются еще в большей степени. В трехмерном пространстве существуют плоские волны с волновым фронтом, параллельным плоскости, перпендикулярной направлению движения. Они имеют функциональную форму $f(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения и $\mathbf{k}$ — *волновой вектор* [1]), длина которого равна $k = \omega/c$ и направление совпадает с направлением распространения волны [см. рассуждения, относящиеся к формуле (2.2.4)].

Имеются также цилиндрические волны, волновой фронт которых представляет собой цилиндрическую поверхность, а направление распространения перпендикулярно оси цилиндра. Заметим, кроме того, что существуют волны более общего вида, у которых пространственные зависимости не связаны ни с прямыми линиями, ни с плоскостями.

Все эти волны могут быть построены суперпозицией плоских волн по способу, близкому к примененному в (11.2.1). Если мы выразим направление волнового вектора $\mathbf{k}$ через сферические углы u (угол между вектором $\mathbf{k}$ и осью z) и v (угол между плоскостью $\mathbf{k}$, z и плоскостью x, z), то общее выражение для волны в пространстве трех измерений будет иметь вид

$$\Psi = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} \sin u \, F(u, v \mid \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - kct)\, du. \qquad (11.3.1)$$

---

[1]) К сожалению, в соответствии с традицией волновой вектор имеет тот же символ, что и единичный вектор оси z. В этой и следующих главах мы будем употреблять $\mathbf{k}$ для обозначения волнового вектора и $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$ — для обозначения единичных векторов, когда это понадобится.