

сивность падающей плоской волны в обоих случаях совпадают. Замена экранов щелями и наоборот при одновременной замене условий Дирихле условиями Неймана оставляет диффрагированную волну неизменной.

Иначе можно сказать, что для краевых условий II на поверхности $\vartheta = 0, \pi$ волна в области $0 < \vartheta < \pi$ равна волне ψ_s^I из (11.2.102), взятой с обратным знаком; для краевых условий I на поверхности $\mu = 0$ волна в этой области (позади полосы или щели) равна $e^{ikr \cos(\varphi-u)} + \psi_s^I$; сумма этих двух волн равна неискаженной плоской волне $e^{ikr \cos(\varphi-u)}$ в области $0 < \vartheta < \pi$. Утверждение, состоящее в том, что сумма волны, диффрагированной от некоторой границы, и волны, диффрагированной от «обращенной» (в указанном выше смысле) границы, есть как раз неискаженная плоская волна, называется *принципом Бабине*. Он справедлив, как это будет показано в § 11.4, для значительно более широкого класса границ, нежели система полоса — щель, о которой здесь была речь.

Этот принцип верен, конечно, и для обратной системы: краевые условия II (производная равна нулю) на полосе $\mu = 0$ и краевые условия I (значение функции равно нулю) на полуплоскостях $\vartheta = 0, \pi$, ограничивающих щель. В области $0 < \vartheta < \pi$ волна для случая I равна $e^{ikr \cos(\varphi-u)} + \psi_s^{II}$ [см. (11.2.103)], а волна для случая II равна $-\psi_s^{II}$. Полная энергия, проникающая через щель, при единичной амплитуде падающей волны равна половине эффективной ширины Q для «обращенной» полосы [множитель 1/2 получается потому, что в случае проникновения мы интегрируем только по одной половине плоскости ($0 < \vartheta < \pi$), а не по всей плоскости ($0 < \vartheta < 2\pi$), как это было при подсчете Q].

11.3. Волновое движение, три пространственные координаты

Трудности, с которыми связано изучение волн в случае двух пространственных координат, в трехмерном случае проявляются еще в большей степени. В трехмерном пространстве существуют плоские волны с волновым фронтом, параллельным плоскости, перпендикулярной направлению движения. Они имеют функциональную форму $f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения и \mathbf{k} — волновой вектор¹⁾, длина которого равна $k = \omega/c$ и направление совпадает с направлением распространения волны [см. рассуждения, относящиеся к формуле (2.2.4)].

Имеются также цилиндрические волны, волновой фронт которых представляет собой цилиндрическую поверхность, а направление распространения перпендикулярно оси цилиндра. Заметим, кроме того, что существуют волны более общего вида, у которых пространственные зависимости не связаны ни с прямыми линиями, ни с плоскостями.

Все эти волны могут быть построены суперпозицией плоских волн по способу, близкому к примененному в (11.2.1). Если мы выразим направление волнового вектора \mathbf{k} через сферические углы u (угол между вектором \mathbf{k} и осью z) и v (угол между плоскостью \mathbf{k} , z и плоскостью x, z), то общее выражение для волны в пространстве трех измерений будет иметь вид

$$\Psi = \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi \sin u F(u, v | \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - kct) du. \quad (11.3.1)$$

¹⁾ К сожалению, в соответствии с традицией волновой вектор имеет тот же символ, что и единичный вектор оси z . В этой и следующих главах мы будем употреблять \mathbf{k} для обозначения волнового вектора и $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ — для обозначения единичных векторов, когда это понадобится.

Эта волна при помощи интегрирования по трем прямоугольным составляющим вектора \mathbf{k} может быть представлена в виде тройного интеграла Фурье

$$\Psi = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - kct)} d\zeta, \quad (11.3.2)$$

где ξ, η, ζ — компоненты вектора \mathbf{k} по осям x, y, z .

Для простых гармонических волн $\Psi = \psi e^{-i\omega t}$, где ψ — решение трехмерного уравнения Гельмгольца и интегрирование должно быть выполнено по поверхности сферы в « k -пространстве», поскольку длина k фиксирована:

$$\psi_{\mathbf{k}}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} dv \int \sin u A(u, v) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} du, \quad (11.3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} &= x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u = \\ &= r [\cos \vartheta \cos u + \sin \vartheta \sin u \cos(v - \varphi)], \end{aligned}$$

причем r, ϑ, φ — сферические координаты точки наблюдения. По u можно интегрировать от 0 до π или в комплексной плоскости u . Мы убедимся, что интегральные представления типа (11.3.3) для собственных функций в различных трехмерных координатах окажутся весьма полезными [см., например, (11.4.49)].

Функция Грина для свободного пространства. Наши рассуждения по поводу преобразования Фурье и функции Грина (см. стр. 762 тома I и стр. 340) также переносятся на случай трех измерений. Будем исходить из приведенного в (7.3.8) выражения для излучения единичного точечного импульса, сообщаемого системе при (x_0, y_0, z_0, t_0) ,

$$g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | t - t_0) = \frac{1}{R} \delta\left(t - t_0 - \frac{R}{c}\right), \quad (11.3.4)$$

где $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$. Излучение единичного чисто гармонического источника будет тогда преобразованием Лапласа предыдущего выражения:

$$G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | \omega) = \int_0^{\infty} g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | t) e^{-pt} dt = \frac{1}{R} e^{-pR/c} = \frac{1}{R} e^{ikR},$$

$$p = -i\omega, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (11.3.5)$$

Полное преобразование Фурье функции g имеет вид

$$F(\mathbf{r}_0, t_0 | \mathbf{k}, \omega) = 4\pi \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 + i\omega t_0}}{k^2 - (\omega/c)^2}, \quad (11.3.6)$$

где ξ, η, ζ — компоненты \mathbf{k} . Тогда

$$G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | \omega) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t_0} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | t - t_0) = \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} d\xi d\eta d\zeta d\omega.$$

Эти равенства похожи на квантово-механические соотношения (2.6.24) между волновыми функциями в координатном и импульсном представлениях.

Решение неоднородного уравнения

$$\square^2 \psi = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -4\pi\rho(\mathbf{r}, t), & t > 0, \end{cases}$$

не подчиненное никаким краевым условиям, за исключением требования, чтобы волна по всем направлениям была расходящейся на бесконечности, может быть представлено в различных формах:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{r}_0, t_0) g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|t-t_0) dx_0 dy_0 dz_0 dt_0 = \\ &= \int \int \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{r}_0|\omega) G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|\omega) e^{-i\omega t} dx_0 dy_0 dz_0 d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{k}|\omega) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}}{k^2 - (\omega/c)^2} d\xi d\eta d\zeta d\omega, \end{aligned} \quad (11.3.7)$$

где

$$P(\mathbf{r}_0|\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\omega t_0} \rho(\mathbf{r}_0, t_0) dt_0 \quad (p = -i\omega)$$

и

$$Q(\mathbf{k}|\omega) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 dy_0 dz_0 \int_0^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0 - \omega t_0} \rho(\mathbf{r}_0, t_0) dt_0,$$

а выражения для g и G те же, что и в (11.3.4) и (11.3.5). Эти решения пригодны, если не существует границ на конечном расстоянии от объема, в котором ρ отлична от нуля.

При наличии границ на конечном расстоянии функции g , G и F изменяются. Для простых типов границ эти измененные функции можно подсчитать так, как было указано в § 7.3. Мы вернемся к этому в дальнейшем, когда разовьем соответствующие методы.

Прямоугольный параллелепипед. Собственные функции в случае стоячих волн в прямоугольном параллелепипеде со сторонами l_x , l_y , l_z имеют вид либо

$$\psi_n(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t} = \cos\left(\frac{\pi n_x x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n_y y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{\pi n_z z}{l_z}\right) e^{-i\omega_n t}, \quad (11.3.8)$$

либо

$$\psi_n(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t} = \sin\left(\frac{\pi n_x x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi n_z z}{l_z}\right) e^{-i\omega_n t},$$

где n_x , n_y , n_z — целые числа. Предполагается, что начало координат находится в одном из углов параллелепипеда. Первая форма дает решение для однородных краевых условий Неймана, вторая — для однородных условий Дирихле. В обоих случаях собственные частоты определяются выражением

$$\omega_n = \pi c \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2}, \quad (11.3.9)$$

причем во втором случае все n отличны от нуля.

Если краевые условия являются более сложными, то можно найти выражения собственных функций, собственные частоты и коэффициенты затухания методами, использованными для получения (11.2.20). Задачу

о неустановившихся колебаниях можно решить методами, использованными для получения (11.1.29).

В этих и других расчетах используется выражение поля, создаваемого внутри параллелепипеда чисто гармоническим единичным источником, помещенным в точке (x_0, y_0, z_0) . Знакомыми нам методами легко убедиться, что функция Грина для случая условий Неймана (нормальная составляющая градиента равна нулю) имеет вид

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|\omega) = \frac{4\pi c^2}{l_x l_y l_z} \sum_n \varepsilon_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}_0)}{\omega_n^2 - \omega^2} \phi_n(\mathbf{r}) =$$

$$= -\frac{4\pi}{l_x l_y} \sum_{m,n} \varepsilon_m \varepsilon_n \frac{\cos(\pi m x_0 / l_x) \cos(\pi n y_0 / l_y)}{k_{mn} \sin(k_{mn} l_z)} \times \quad (11.3.10)$$

$$\times \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{l_y}\right) \cdot \begin{cases} \cos(k_{mn} z_0) \cos[k_{mn}(l_z - z)], & z > z_0, \\ \cos(k_{mn} z) \cos[k_{mn}(l_z - z_0)], & z < z_0 \end{cases}$$

где n в первой форме заменяет тройку целых чисел n_x, n_y, n_z ; ϕ_n — первая из функций, определенных в (11.3.8); $\varepsilon_n = \varepsilon_{n_x} \varepsilon_{n_y} \varepsilon_{n_z}$ и ω_n задается равенством (11.3.9). Во второй форме, аналогично (11.2.14), $k_{mn}^2 = (\omega/c)^2 - (\pi m/l_x)^2 - (\pi n/l_y)^2$, эта вторая форма может быть, конечно, видоизменена путем перестановки x, y и z . В функции Грина для условий Дирихле мы заменяем косинусы на синусы, отбрасываем значения нуль для каждого индекса в суммах, заменяем ε_n в первой форме на δ и $\varepsilon_m \varepsilon_n$ во второй форме на 4.

Для случаев, в которых на одной или нескольких стенках задается краевое условие, более общее чем условия Дирихле или Неймана, можно перенести на три измерения формулы (11.2.12). В частности, если граничный импеданс имеет действительную составляющую (активное сопротивление), то собственные «частоты» ω представляют собой комплексные числа с мнимой частью $-ix$, которая вызывает экспоненциальное затухание волн с течением времени.

Искажение стоячей волны полосой. Функция Грина может быть также применена для вычисления воздействия на стоячие волны и на резонансные частоты малых изменений границы области. Не очень сложный пример

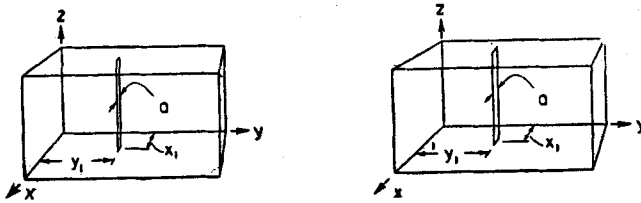


Рис. 11.3. Искажение стоячих волн полосой ширины a .

такого рода представляет собой случай, когда полоса ширины a помещена между полом и потолком параллелепипеда (рис. 11.3). Мы предполагаем, что центральная линия полосы совпадает с прямой $x = x_1, y = y_1$ и что поверхность полосы параллельна плоскости x, z . Если полоса достаточно мала и достаточно удалена от стен, то можно полагать, что она находится в бесконечной области, и применить функции, рассмотренные в предыдущем параграфе.

Стоячая волна внутри параллелепипеда без наличия полосы имеет вид $\psi_0 = \cos(\pi x/l_x) \cos(\pi \sigma y/l_y) \cos(\pi \tau z/l_z)$ ($\nu, \sigma, \tau = 0, 1, 2, 3, \dots$). Это выражение может рассматриваться как надлежащим образом составленная комбинация восьми плоских волн. У одной из них волновой вектор \mathbf{k}

имеет компоненты $+(\pi\nu/l_x)$, $+(\pi\sigma/l_y)$, $+(\pi\tau/l_z)$, у другой—компоненты $+(\pi\nu/l_x)$, $+(\pi\sigma/l_y)$, $-(\pi\tau/l_z)$ и т. д. для всех восьми возможных комбинаций знаков плюс или минус у компонент; для всех восьми волн вектор \mathbf{k} имеет одну и ту же длину

$$k_0 = \pi \sqrt{\left(\frac{\nu}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{l_z}\right)^2}. \quad (11.3.11)$$

С этой точки зрения стоячая волна является комбинацией всех плоских волн, отраженных от каждой из шести стен. Все эти волны ударяются о полосу и рассеиваются на ней.

Возвращаясь к стр. 401, где обсуждалось рассеяние плоских волн на полосе, мы видим, что z -компоненту решения $\cos(\pi\tau z/l_z)$ можно рассматривать как модулирующий множитель у решения двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \pi^2 \left[\left(\frac{\nu}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{l_y}\right)^2 \right] \psi = 0,$$

что соответствует рассеянию плоских волн на полосе, середина которой находится в x_1, y_1 . Перенесем начало координат в точку x_1, y_1 ($x = x_1 + \xi$, $y = y_1 + \eta$) и перейдем к эллиптическим координатам $\xi = (1/2)a \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta$, $\eta = (1/2)a \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta$. Мы интересуемся вызванным полосой искажением комбинаций плоских волн

$$\begin{aligned} \psi = \cos(\pi\tau z/l_z) & \left[e^{(i\pi\nu/l_x)x_1 + (i\pi\sigma/l_y)y_1} e^{(2ih/a)\rho} \cos(u - \varphi) + \right. \\ & + e^{(i\pi\nu/l_x)x_1 - (i\pi\sigma/l_y)y_1} e^{(2ih/a)\rho} \cos(-u - \varphi) + e^{-(i\pi\nu/l_x)x_1 - (i\pi\sigma/l_y)y_1} e^{(2ih/a)\rho} \cos(\pi + u - \varphi) + \\ & \left. + e^{-(i\pi\nu/l_x)x_1 + (i\pi\sigma/l_y)y_1} e^{(2ih/a)\rho} \cos(\pi - u - \varphi) \right], \quad (11.3.12) \end{aligned}$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\operatorname{tg} \varphi = \eta/\xi$, $\operatorname{tg} u = \sigma l_x / \nu l_y$ и $h^2 = (\pi a/2)^2 [(\nu/l_x)^2 + (\sigma/l_y)^2]$.

С помощью формулы (11.2.10²) и следующих мы можем вычислить воздействие, которое полоса произвела бы на эти четыре плоские волны, если бы они распространялись в открытом пространстве без стен. Наличие стен существенно изменяет эти результаты на некотором расстоянии от полосы, но если только полоса не находится вплотную у одной из стен, они будут мало влиять на значения решения у поверхности полосы. Следовательно, мы достаточно точно знаем поведение измененной стоячей волны вблизи полосы. Чтобы найти ее поведение в остальной части параллелепипеда, можно применить метод функции Грина.

Из (7.2.7) имеем выражение

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint [\psi(\mathbf{r}_0^s) \operatorname{grad}_0 G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s | \omega)] dA_0$$

для решения ψ , нормальная составляющая градиента которого на всех граничных поверхностях обращается в нуль. Если мы применим функцию G из (11.3.10), то интеграл по границе области исчезнет, так как на этой границе нормальная составляющая градиента G обращается в нуль; поэтому остается только интеграл по поверхности полосы. Обозначая величину ψ на стороне полосы, обращенной к плоскости x, z , через $\psi_-(\xi)$ и на обратной стороне через $\psi_+(\xi)$, приведем формулу (7.2.7) в конце концов к виду

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{l_z} dz_0 \int_{-a/2}^{a/2} [\psi_+(\xi) - \psi_-(\xi)] \left[\frac{\partial}{\partial \eta} G(\mathbf{r} | x_1 + \xi, y_1 + \eta | \omega) \right]_{\eta=0} d\xi. \quad (11.3.13)$$

Поэтому, если мы получим хорошее приближение для значений ψ на поверхности полосы, то сможем получить хорошее приближение для ψ и в любом месте внутри области. Как было отмечено выше, значения ψ на поверхности полосы не слишком чувствительны к присутствию или

отсутствию границы области, до тех пор пока полоса узка и расположена не вплотную у стены. Таким образом, мы можем в качестве функции $\psi(\mathbf{r}^0)$ взять ее величину для свободного пространства и использовать равенство (11.3.13) для учета влияния стен.

Из (11.2.103) мы видим, что для волны, распространяющейся под углом u к оси x , суперпозиция плоской и рассеянной волн на поверхности полосы равна

$$\psi(\xi, u) = \sqrt{8\pi} \sum_m i^m \left\{ \frac{Se_m(h, \cos u) Se_m(h, \cos \vartheta)}{M_m^e} J_{e_m}(h, 1) + \frac{So_m(h, \cos u) So_m(h, \cos \vartheta)}{M_m^o} [J_{o_m}(h, 1) - ie^{-i\vartheta} \sin^2 \vartheta H_{o_m}(h, 1)] \right\}.$$

Но ряды по четным функциям представляют в точности часть плоской волны, четную относительно $\vartheta = 0, \pi$. Из (11.2.94) следует, что

$$\sqrt{8\pi} \sum_m i^m \frac{Se_m(h, \cos u) Se_m(h, \cos \vartheta)}{M_m^e} J_{e_m}(h, \text{ch } \mu) = e^{(2ih/a)\xi} \cos u \cos \left[\frac{2h}{a} \eta \sin u \right].$$

Член в квадратных скобках в первой сумме пропорционален вронскиану $\Delta(J_{o_m}, H_{o_m}) = i$. Поэтому из приближенного выражения (11.2.101) мы, наконец, получаем с точностью до членов второго порядка по h

$$\psi(\xi, u) \simeq e^{ih \cos \vartheta \cos u} + ih \sin u \sin \vartheta - \frac{1}{8} h^2 \sin(2u) \sin(2\vartheta),$$

где

$$\xi = (1/2) a \cos \vartheta \text{ и } h^2 = (\pi a/2)^2 [(\nu/l_x)^2 + (\sigma/l_y)^2].$$

Обращаясь к равенству (11.3.12), мы видим, что значения ψ на поверхности полосы, полученные при суперпозиции волн, распространяющихся в четырех направлениях $u, -u, \pi - u$ и $\pi + u$, выражаются формулой

$$\psi \simeq \cos \left[\frac{\pi \nu (x_1 + \xi)}{l_x} \right] \cos \left(\frac{\pi \sigma y_1}{l_y} \right) \cos \left(\frac{\pi \tau z_0}{l_z} \right) - \frac{\pi \sigma a}{2l_y} \cos \left(\frac{\pi \nu x_1}{l_x} \right) \sin \left(\frac{\pi \sigma y_1}{l_y} \right) \cos \left(\frac{\pi \tau z_0}{l_z} \right) \sin \vartheta + \dots$$

Члены порядка h^2 здесь не выписаны, так как они не нужны для дальнейшего. Величина $\psi_+(\xi)$ является значением ψ при $0 < \vartheta < \pi$, когда $\sin \vartheta = \sqrt{1 - (2\xi/a)^2}$, а $\psi_-(\xi)$ — значением при $\pi < \vartheta < 2\pi$, когда $\sin \vartheta = -\sqrt{1 - (2\xi/a)^2}$.

Поэтому

$$\psi_+(\xi) - \psi_-(\xi) \simeq -\frac{\pi \sigma a}{l_y} \cos \left(\frac{\pi \nu x_1}{l_x} \right) \sin \left(\frac{\pi \sigma y_1}{l_y} \right) \cos \left(\frac{\pi \tau z_0}{l_z} \right) \sqrt{1 - (2\xi/a)^2} \quad (11.3.14)$$

с точностью до членов второго порядка по малому параметру h (h мало, когда a мало по сравнению с длиной волны).

Чтобы вычислить интеграл (11.3.13), нам необходимо иметь выражение для градиента G . Используя вторую форму в (11.3.10) и меняя в ней ролями y и z , мы имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial \eta} G \right]_{\eta=0} = \frac{4\pi}{l_x l_z} \sum_{m,n} \varepsilon_m \varepsilon_n \frac{\cos(\pi m x_0/l_x) \cos(\pi n z_0/l_z)}{\sin(k_{mn} l_y)} \times \\ \times \cos \left(\frac{\pi m x}{l_x} \right) \cos \left(\frac{\pi n z}{l_z} \right) \cdot \begin{cases} \sin(k_{mn} y_1) \cos[k_{mn}(l_y - y)], & y > y_1, \\ -\cos(k_{mn} y) \sin[k_{mn}(l_y - y_1)], & y < y_1. \end{cases}$$

где $x_0 = x_1 + \xi$ и $k_{mn} = \sqrt{(\omega/c)^2 - (\pi m/l_x)^2 - (\pi n/l_z)^2}$. Вследствие ортогональности множителей $\cos(\pi \tau z_0/l_z)$ из ψ и $\cos(\pi n z_0/l_z)$ из G интегрирование выражения (11.3.13) по z_0 обращает в нуль все члены суммы по n , кроме тех, у которых $n = \tau$. В интеграле по ξ множитель $\cos(\pi m x_0/l_x)$ может быть заменен на $\cos(\pi m x_1/l_x)$, поскольку ширина полосы мала по сравнению с длиной волны. Следовательно,

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos \left[\frac{\pi m}{l_x} (x_1 + \xi) \right] \sqrt{1 - \left(\frac{2\xi}{a} \right)^2} d\xi \simeq \frac{1}{4} \pi a \cos \left(\frac{\pi m x_1}{l_x} \right).$$

Поэтому приближенное решение уравнения Гельмгольца, имеющее равную нулю нормальную составляющую градиента как на границе области, так и на полосе, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) \simeq \frac{\pi^2 \sigma a^2}{4 l_x l_y} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{\cos(\pi m x_1/l_x) \cos(\pi \nu x_1/l_x)}{\sin(k_{m\tau} l_y)} \sin \left(\frac{\pi \sigma y_1}{l_y} \right) \times \\ \times \cos \left(\frac{\pi m x}{l_x} \right) \cos \left(\frac{\pi \tau z}{l_z} \right) \cdot \begin{cases} -\sin(k_{m\tau} y_1) \cos[k_{m\tau} (l_y - y)], & y > y_1, \\ \cos(k_{m\tau} y) \sin[k_{m\tau} (l_y - y_1)], & y < y_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (11.3.15)$$

где $k_{m\tau} = \sqrt{k^2 - (\pi m/l_x)^2 - (\pi \tau/l_z)^2}$ и $k = \omega/c$, причем ω — собственная частота для искаженной собственной функции.

Вычисление собственных значений. Решение задачи еще не закончено, поскольку собственное значение k еще не вычислено и в выражение, написанное нами для $\psi(\mathbf{r})$, нужно подставить это, пока неизвестное, значение величины k . Для определения k воспользуемся вновь теоремой Грина. Умножаем уравнение для $\psi_0 = \cos(\pi x/l_x) \cos(\pi \sigma y/l_y) \cos(\pi \tau z/l_z)$ на приближенное выражение (11.3.15), аппроксимирующее решение ψ , и вычитаем уравнение для ψ , умноженное на ψ_0 ; в результате получим

$$\psi \nabla^2 \psi_0 - \psi_0 \nabla^2 \psi = (k^2 - k_0^2) \psi \psi_0,$$

где k_0 определяется равенством (11.3.11), а k должно быть определено.

Интегрируя обе части этого равенства по всему объему внутри параллелепипеда и вне полосы, заменим интеграл слева интегралом по поверхности с помощью (7.2.2). Этот интеграл по поверхности обращается в нуль, за исключением интеграла от $\psi \text{grad} \psi_0$ по поверхности полосы. В конечном счете в обозначениях (11.3.13) имеем

$$k^2 = k_0^2 - \int_0^{l_z} dz \int_{-a/2}^{a/2} [\psi_+(\xi) - \psi_-(\xi)] \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right]_{y=y_1} \left[\iiint \psi \psi_0 d\sigma \right]^{-1} d\xi.$$

Но мы можем получить приближенное значение разности $\psi_+ - \psi_-$ из (11.3.14), а $\partial \psi_0 / \partial y$ вычислить легко. Мы предполагаем, что ψ в большей части области приближенно равно ψ_0 , и поэтому объемный интеграл приближенно равен $l_x l_y l_z / \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z}$.

Итак, с точностью до членов второго порядка по a/l_y ,

$$\begin{aligned} k^2 \simeq \left(\frac{\pi \nu}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{\pi \tau}{l_z} \right)^2 + \\ + \left(\frac{\pi \sigma}{l_y} \right)^2 \left[1 - \frac{\pi \varepsilon_y \varepsilon_z}{4} \frac{a^2}{l_x l_y} \cos^2 \left(\frac{\pi \nu x_1}{l_x} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi \sigma y_1}{l_y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (11.3.16)$$

Собственная частота, конечно, равна $ck/2\pi$.

Мы замечаем прежде всего, что собственные частоты уменьшаются (если они вообще изменяются). Это представляется естественным, так как наличие полосы замедляет движение воздуха в помещении и тем самым снижает все резонансные частоты. Далее, мы видим, что это уменьшение частоты пропорционально квадрату y -компоненты скорости воздуха в невозмущенной волне в точках, где расположена полоса. Если, например, полоса установлена там, где скорость параллельна плоскости x, z [т. е. где $\sin(\pi\sigma y_1/l_y) = 0$], то k^2 не будет отличаться от k_0^2 . Это явление также легко объяснить, так как «замедление» колебаний вызывается обтеканием полосы, и величина уменьшения зависит от того, какая часть потока перпендикулярна поверхности полосы. Поток, параллельный поверхности, не искажается ею. Возможно, точнее будет сказать, что искажение течения вблизи полосы увеличивает эффективную массу воздуха по сравнению с его упругостью, так что резонансные частоты убывают до тех пор, пока a/l_y мало.

Вернемся теперь к равенству (11.3.15) и подставим в него величину k , чтобы получить приближенное выражение для ψ . В силу того, что разность $k_0 - k$ мала, ее можно учитывать в выражениях для $k_{m\tau}$ только при $m = \nu$. Поэтому мы можем принять, что $k_{m\tau} = k_m \simeq \sqrt{(\pi/l_x)^2 (\nu^2 - m^2) + (\pi\sigma/l_y)^2}$, $m \neq \nu$. С другой стороны,

$$k_{\nu\tau} = k_\nu \simeq \frac{\pi\sigma}{l_y} - \frac{\epsilon_\nu}{4} \frac{\pi^2 \sigma a^2}{l_x l_y^2} \cos^2\left(\frac{\pi \nu x_1}{l_x}\right) \sin^2\left(\frac{\pi \sigma y_1}{l_y}\right).$$

Следовательно, $\sin(k_\nu l_y)$ оказывается весьма малым, значительно меньшим, чем $\sin(k_m l_y)$ для $m \neq \nu$. Единственное большое слагаемое для $m = \nu$ можно выделить из суммы, и, поскольку

$$\sin(k_\nu l_y) \simeq -(-1)^\nu \frac{\pi^2 \sigma a^2}{l_x l_y^2} \frac{\epsilon_\nu}{4} \cos^2\left(\frac{\pi \nu x_1}{l_x}\right) \sin^2\left(\frac{\pi \sigma y_1}{l_y}\right),$$

мы получаем в конечном счете

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) \simeq & \psi_0 + \frac{\pi^2 \sigma a^2}{4 l_x l_y^2} \sum_{m \neq \nu} \epsilon_m \frac{\cos(\pi m x_1/l_x) \cos(\pi \nu x_1/l_x) \sin(\pi \sigma y_1/l_y)}{\sin(k_m l_y)} \times \\ & \times \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi \tau z}{l_z}\right) \cdot \begin{cases} -\sin(k_m y_1) \cos[k_m(l_y - y_1)], & y > y_1, \\ \cos(k_m y) \sin[k_m(l_y - y)], & y < y_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (11.3.17)$$

В дополнение к невозмущенной части ψ_0 в этой формуле имеется небольшой член, представляющий рассеяние на полосе и выражающийся через другие стоячие волны для различных m . Можно сказать, что из-за наличия полосы происходит преобразование одних стоячих волн в другие. До тех пор пока ось полосы параллельна оси z , ни одна волна с заданной величиной τ (квантовое число по z) не преобразуется в волны с другими значениями τ , но волны с различными квантовыми числами по x и y по большей части преобразуются из-за наличия полосы.

Распространение колебаний в трубах. Целый ряд трехмерных задач, тесно связанных с некоторыми рассмотренными в предыдущем параграфе двумерными задачами, возникает при рассмотрении передачи колебаний по трубам. Предположим, что труба является цилиндром, поперечное сечение которого имеет такую форму, что волновое уравнение допускает разделение переменных в соответствующих координатах ξ_1 и ξ_2 . Тогда волновая функция может быть представлена в виде произведения функции φ от ξ_1 и ξ_2 и функции F от расстояния z вдоль оси цилиндра:

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi(\xi_1, \xi_2) F(z), \quad \nabla^2 \varphi + k_i^2 \varphi = 0, \\ \frac{d^2 F}{dz^2} + k_z^2 F &= 0, \quad k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k_i^2 + k_z^2. \end{aligned}$$

Краевые условия для φ на границе (например, $\xi_1 = K$) определяют допустимые значения поперечного волнового числа k_t . Величина k фиксирована, коль скоро задана частота ω передаваемого колебания. Следовательно, продольное волновое число k_z фиксируется заданием ω и выбором определяющей значение k_t формы поперечной стоячей волны, исходя из заданных краевых условий. Решением для F может быть бегущая волна $e^{ik_z z - i\omega t}$ или комбинация из волн противоположных направлений. Если это простая бегущая волна, то ее фазовая скорость ω/k_z никогда не меньше, чем скорость c волны в свободном пространстве. В самом деле, k_z никогда не больше, чем $k = \omega/c$, и будет много меньше k , если k_t велико. Для высших типов поперечных колебаний k_t может быть больше, чем k . В этом случае k_z оказывается мнимым, и действительное волновое движение отсутствует; волна, так сказать, настолько «занята» колебаниями взад и вперед поперек трубы, что она «забывает» продвигаться вдоль нее.

Если нормальная составляющая градиента обращается в нуль на внутренней поверхности цилиндрической трубы, то поперечная собственная функция φ наимизшего типа постоянна и для нее $k_t = 0$. В этом случае $k_z = k = \omega/c$, фазовая скорость равна скорости c в свободном пространстве и дисперсии не происходит. Для всех более высоких типов поперечных собственных функций $k_z < k$, фазовая скорость больше c и, следовательно, имеется дисперсия. Если ψ равно нулю на поверхности, то даже для наимизшего типа поперечной собственной функции k_t больше нуля и все k_z меньше k . В этом случае существует такая определенная частота, пропорциональная наимизшему значению k_t и называемая *критической частотой*, что волны с меньшей частотой не могут распространяться вдоль трубы.

Распространение волн вдоль цилиндрических труб — явление весьма простое, покуда не учитываются эффекты от воздействия одного или другого конца трубы и поперечное сечение остается постоянным вдоль всей трубы. Но как раз в этих-то случаях практически важно изучить распространение волн в трубах, поэтому целесообразно рассмотреть несколько типичных примеров. Сначала мы будем рассматривать бесконечно длинную трубу и изучать исключительно возбуждение волны на входе. Если в этом случае возникает волновое движение вдоль трубы, то оно направлено от входа.

Акустические волны в прямоугольной трубе. Если известна продольная скорость воздуха у входа в трубу, то можно рассчитать акустические волны в трубе. Краевые условия сводятся к требованию, чтобы скорость воздуха на жестких стенках трубы была касательной к поверхности трубы. Так, для прямоугольной трубы в случае чисто гармонических колебаний общее выражение для потенциала скоростей волны, распространяющейся от входа ($z = 0$), имеет вид

$$\psi = \sum_{m,n} A_{mn} \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{l_y}\right) e^{i\omega[(\tau/c)z - t]}, \quad (11.3.18)$$

где

$$\tau = \tau_{mn} = \sqrt{1 - (\pi m c / \omega l_x)^2 - (\pi n c / \omega l_y)^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

для трубы прямоугольного сечения со сторонами l_x и l_y . Для заданного значения ω величина τ при достаточно больших m и n будет мнимой. Будем считать, что мнимая часть τ положительна, так что в этом случае

$$\tau = i \frac{c x_{mn}}{\omega}, \quad x_{mn} = \sqrt{\left(\frac{\pi m}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{l_y}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}, \quad (11.3.19)$$

где κ — постоянная затухания для волны высшего типа. В этом случае множитель, зависящий от z , приобретает вид $e^{-\kappa z}$, и это показывает, что вдоль трубы вместо волнового движения наблюдается затухающее.

Если задано давление у входа в трубу $p_0(x, y)e^{-i\omega t} = -i\omega\rho\phi|_{z=0}$, то коэффициенты ряда имеют вид

$$A_{mn} = i \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{\rho l_x l_y} F_{mn}, \quad F_{mn} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} p_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{l_y}\right) dx dy,$$

где F_{mn} — mn -я компонента силы, обуславливающей движение волны вдоль трубы. Однако обычно у конца $z=0$ задается продольная скорость воздуха, по которой затем определяется давление. Если эта скорость $(v_z)_{z=0} = (\partial\phi/\partial z)_{z=0} = v_0(x, y)e^{-i\omega t}$, то

$$A_{mn} = -\frac{ic\varepsilon_m \varepsilon_n}{l_x l_y} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} I_{mn},$$

$$I_{mn} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} v_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{l_y}\right) dx dy,$$

где $\omega_{mn} = \pi c \sqrt{(m/l_x)^2 + (n/l_y)^2}$ называется критической частотой mn -й волны, по причине, которая вскоре выяснится.

Отношение F_{mn}/I_{mn} может быть названо импедансом mn -й волны

$$Z_{mn} = \rho c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} = \frac{\rho c}{\tau_{mn}}. \quad (11.3.20)$$

Если частота возбуждения ω больше критической частоты mn -й волны, то Z_{mn} и τ_{mn} действительны и волна распространяется вдоль трубы со скоростью c/τ_{mn} . Если ω уменьшается, то скорость возрастает, пока при $\omega = \omega_{mn}$ она не становится бесконечной, τ_{mn} обращается в нуль и Z_{mn} становится бесконечным. При частотах ниже этой критической mn -я волна не распространяется, а затухает и импеданс становится мнимым

$$Z_{mn} = -i \frac{\rho\omega}{\tau_{mn}} = -i\omega \frac{\rho c}{\sqrt{\omega_{mn}^2 - \omega^2}},$$

соответствуя эффективной массе $M_{mn} = \rho c / \sqrt{\omega_{mn}^2 - \omega^2}$ на единицу площади поперечного сечения трубы. Следовательно, при данной частоте возбуждения ω только волны, у которых критические частоты ω_{mn} меньше ω , в действительности распространяются по трубе и приносят некоторую действительную часть во входной импеданс; все более высокие типы волн приносят только реактивную часть и не распространяются далеко от источника, т. е. от $z=0$.

Если колебания возбуждаются импульсом, приложенным при $z=0$ в момент времени $t=0$, то результирующее движение может быть найдено с помощью преобразования Лапласа. Предположим, что начальная скорость имеет характер импульса $(v_z)_{z=0} = v_0(x, y)\delta(t)$. Тогда в соответствии с (11.1.16) волна (11.3.18) является преобразованием Лапласа импульсной волны. Таблица в конце этой главы показывает, что преобразованием Лапласа от $u(t-b)J_0(a\sqrt{t^2-b^2})$ является $[\exp(-b\sqrt{p^2+a^2})]/\sqrt{p^2+a^2}$. mn -й член ряда (11.3.18) имеет вид

$$-\frac{c\varepsilon_m \varepsilon_n}{l_x l_y} I_{mn} \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{l_y}\right) \frac{\exp[-(z/c)\sqrt{p^2+\omega_{mn}^2}]}{\sqrt{p^2+\omega_{mn}^2}}, \quad \omega = ip,$$

что соответствует выражению, помещенному в таблице. Поэтому рассматриваемая волна имеет потенциал скоростей

$$\psi = -u \left(t - \frac{z}{c} \right) \frac{c}{l_x l_y} \sum_{m, n} \varepsilon_m \varepsilon_n \cos \left(\frac{\pi m x}{l_x} \right) \times \\ \times \cos \left(\frac{\pi n y}{l_y} \right) J_0 \left[\omega_{mn} \sqrt{t^2 - \left(\frac{z}{c} \right)^2} \right]. \quad (11.3.21)$$

Для наименьшей парциальной волны $\omega_{00} = 0$ и множитель, зависящий от времени, равен просто $J_0(0) = 1$; эта волна представляет собой импульс, продвигающийся вдоль трубы (давление равно $-\rho \partial \psi / \partial t$, благодаря чему вместо ступенчатой функции u мы имеем дельта-функцию, т. е. настоящий импульс). Чем выше тип парциальной волны, тем больше ω_{mn} и тем быстрее осциллирует функция Бесселя. Фазовая скорость волны наименьшего типа равна c ; для этой волны дисперсии нет, она возникает от мгновенного импульса и продвигается в виде скачка давления вдоль трубы. Для волн высших типов имеет место дисперсия, ибо их фазовая скорость c/τ_{mn} зависит от частоты, так что скачок размывается по мере продвижения по трубе, оставляя за собой осциллирующий след (см. рис. 2.7).

Соответствующие исследования распространения электромагнитных волн в трубах (волноводах) будут проведены в гл. 13.

Препграда со щелью в прямоугольной трубе. Препятствия в трубе вызывают частичные отражения проходящей по ней волны. Если препятствие настолько мало, что вызывает только незначительное изменение невозмущенного течения (как, например, узкая полоса, помещенная поперек

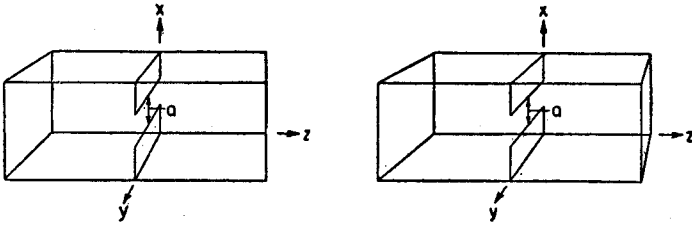


Рис. 11.4. Отражение и распространение волн в трубе при наличии плоской преграды со щелью.

трубы), то для получения приближенных формул можно пользоваться методами, использующими формулу (11.3.13). Однако при значительных относительных размерах препятствия приходится обращаться к другим методам. Примером может служить прямоугольная труба со сторонами поперечного сечения l_x и l_y , в которой при $z = 0$ помещена жесткая поперечная диафрагма со щелью ширины a , сделанной посередине диафрагмы, параллельно оси y [другими словами, щель находится между $x = (l_x - a)/2$ и $x = (l_x + a)/2$ при $z = 0$ и $0 \leq y \leq l_y$ (см. рис. 11.4)]. Волна, идущая слева ($z < 0$), ударяясь о преграду, частично отражается влево, а частично проходит через щель и распространяется далее вправо.

Здесь, как мы уже видели в нескольких местах ранее, до тех пор пока длина волны значительно больше, чем ширина щели, можно считать, что движение воздуха в щели и вблизи нее происходит в одной и той же фазе. Все, что нам требуется знать, это общее выражение потенциала скоростей, соответствующего установившемуся течению через щель, и его градиента внутри щели. Сопрягая эти выражения с волновыми решениями на каждой стороне преграды, находим поток через щель.

Нет особой нужды производить эти вычисления для волны самого общего вида, распространяющейся вдоль трубы. Приближенное решение, которое мы собираемся получить, лучше всего подходит для длинных волн и процесс отражения описывается достаточно просто только при низких частотах. В самом деле, пока частота достаточно низка, только волна типа $m = n = 0$ может распространяться вдоль трубы и отраженная волна вдали от преграды будет того же типа, что и падающая волна. Воздействие преграды в этом случае можно выразить, указав амплитуду и фазу отраженной волны для падающей волны единичной амплитуды и стандартной фазы. При частотах, более высоких, чем следующая самая низкая критическая частота ω_{10} или ω_{01} , отражаются по крайней мере два типа волн и для описания отражения потребуется более двух величин.

В случае падающей на преграду плоской волны мы можем принять потенциал скоростей равным

$$\psi(x, z) = \begin{cases} e^{ikhz} + (1 - A_0) e^{-ikhz} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{\pi mx}{l_x}\right) e^{*mz}, & z < 0, \\ A_0 e^{ikhz} - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{\pi mx}{l_x}\right) e^{-*mz}, & z > 0, \end{cases} \quad (11.3.22)$$

где $k = \omega/c$, $*m = \sqrt{(\pi m/l_x)^2 - k^2}$ ($k < \pi/l_x$), и где коэффициенты рядов выбраны так, чтобы обеспечить непрерывность составляющей градиента $\partial\psi/\partial z$ при $z=0$. Задача будет решена, если мы определим коэффициенты A так, чтобы потенциал ψ , выражаемый обоими рядами, был непрерывен в щели, ибо производная его там уже непрерывна. Вообще говоря, эта задача сводится к решению бесконечной системы линейных уравнений, однако мы попытаемся использовать решение задачи об установившемся потоке в качестве отправного пункта для получения последовательных приближений.

Обращаясь к формуле (10.1.24) и следующим, мы видим, что для установившегося потока потенциал скоростей в щели постоянен, а z -компонента градиента ψ в щели равна постоянной, разделенной на $\sin \vartheta$, где $x = (l_x - a \cos \vartheta)/2$. Следовательно, при $k \ll 2\pi/a$ имеем

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{z=0} \simeq \begin{cases} 0, & 0 \leq x < (l_x - a)/2, \\ \frac{2Q}{\pi a l_y} \operatorname{cosec} \vartheta, & (l_x - a)/2 < x < (l_x + a)/2, \\ 0, & (l_x + a)/2 < x \leq l_x, \end{cases}$$

где Q — полный поток через щель. Но, согласно (11.3.22), разложение в ряд этой составляющей градиента должно иметь вид $ikA_0 + \sum *m A_m \cos\left(\frac{\pi mx}{l_x}\right)$, так что коэффициенты A должны иметь вид

$$A_0 \simeq \frac{2Q}{i\pi k a l_x l_y} \int \operatorname{cosec} \vartheta dx = -i \frac{Q}{k l_x l_y},$$

$$A_m \simeq \frac{4Q}{\pi *m l_x l_y} \int \cos\left(\frac{\pi mx}{l_x}\right) \operatorname{cosec} \vartheta dx = \frac{2Q}{*m l_x l_y} \cos\left(\frac{1}{2} \pi m\right) J_0\left(\frac{\pi m a}{2 l_x}\right),$$

где для получения последнего выражения мы применили (5.3.65). Как и ранее, мы уменьшили число неизвестных до одной неизвестной Q .

Для того чтобы определить Q , необходимо вычислить потенциал ψ в середине щели и выбрать Q таким образом, чтобы ψ оставался непре-

рывным при переходе через щель. Со стороны $z > 0$ предельное значение в середине щели приближенно равно

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{1}{2}l_x, 0\right) &\simeq -i\frac{Q}{kl_xl_y} - \frac{2Q}{l_xl_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa_{2n}} J_0\left(\frac{\pi na}{l_x}\right) \simeq \\ &\simeq -i\frac{Q}{kl_xl_y} - \frac{2Q}{\pi l_xl_y} \int_0^{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left[\pi n\left(1 - \frac{a}{l_x} \cos\vartheta\right)\right] \frac{1}{\kappa_{2n}} \cos(\pi n) \right\} d\vartheta. \end{aligned}$$

Этот ряд сходится плохо, поэтому было бы желательно найти похожий ряд, который можно было бы просуммировать, чтобы вычестить и прибавить его к данному. Мы написали с этой целью вторую формулу, в которой коэффициенты записаны в интегральной форме. Однако ряд, стоящий под знаком интеграла, достаточно прост, и если мы заменим в нем κ_{2n} через $2\pi n/l_x$ (обе величины приближенно равны между собой при больших значениях n), то его можно будет просуммировать:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_x}{2\pi n} \cos\left(\frac{\pi na}{l_x} \cos\vartheta\right) &= -\operatorname{Re} \left\{ \frac{l_x}{2\pi} \ln \left[1 - e^{(\pi ia/l_x) \cos\vartheta} \right] \right\} = \\ &= -\frac{l_x}{4\pi} \ln \left[2 - 2 \cos\left(\frac{\pi a}{l_x} \cos\vartheta\right) \right] = -\frac{l_x}{4\pi} \ln \left[4 \sin^2\left(\frac{\pi a}{2l_x} \cos\vartheta\right) \right]. \end{aligned}$$

При $\pi a/2l_x \ll 1$ можно считать величину в квадратных скобках пропорциональной $\cos^2\vartheta$. Окончательно получаем

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_x}{2\pi n} \cos\left(\frac{\pi na}{l_x} \cos\vartheta\right) d\vartheta \simeq -\frac{1}{2} l_x \ln\left(\frac{\pi a}{2l_x}\right).$$

Обозначим ряд, входящий в выражение для $\psi\left(\frac{1}{2}l_x, 0\right)$, через $(Q/\pi l_y)W(a/l_x)$, где функция

$$\begin{aligned} W\left(\frac{a}{l_x}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l_x \kappa_{2n}} J_0\left(\frac{\pi na}{l_x}\right) \simeq \\ &\simeq \ln\left(\frac{2l_x}{\pi a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi n} - \frac{2}{l_x \kappa_{2n}} \right] J_0\left(\frac{\pi na}{l_x}\right), \quad \kappa_{2n} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{l_x}\right)^2 - k^2}, \quad (11.3.23) \end{aligned}$$

действительна, положительна и велика, когда a/l_x мало. Ряд, стоящий в правой части этой формулы, быстро сходится.

Возвращаясь снова к соотношению, выражающему непрерывность ψ в щели, мы видим, что условие, определяющее Q , сводится к требованию, чтобы два выражения для ψ в (11.3.22) были равны при $z=0$, $x = \frac{1}{2}l_x$:

$$2 + i\frac{Q}{kl_xl_y} + \frac{Q}{l_y} W = -i\frac{Q}{kl_xl_y} - \frac{Q}{l_y} W.$$

Отсюда амплитуда и фаза потока через щель для случая падающей волны единичной амплитуды определяются выражением

$$Q \simeq \frac{ikl_xl_y}{1 - ikl_xW(a/l_x)}. \quad (11.3.24)$$

Потенциал скоростей имеет вид

$$\psi \approx \begin{cases} e^{ikz} - \frac{ikl_x W}{1 - ikl_x W} e^{-ikz} + \\ \quad + \frac{2ik}{1 - ikl_x W} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_0\left(\frac{\pi n a}{l_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi n x}{l_x}\right) \frac{e^{-x_{2n} z}}{x_{2n}}, & z < 0, \\ \frac{e^{ikz}}{1 - ikl_x W} - \frac{2ik}{1 - ikl_x W} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_0\left(\frac{\pi n a}{l_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi n x}{l_x}\right) \frac{e^{-x_{2n} z}}{x_{2n}}, & z > 0. \end{cases}$$

Оба эти ряда достаточно хорошо сходятся пока z не равно нулю.

Взглянем теперь еще раз на полученные результаты. Если отношение a/l_x мало, то величина W велика, но произведение $kl_x W (a/l_x)$ может и не быть большим, если kl_x мало по сравнению с единицей. Тем не менее, каково бы ни было kl_x , мы можем сделать a достаточно малым по сравнению с l_x , так что $kl_x W (a/l_x)$ будет заметно больше единицы. В этом случае амплитуда отраженной волны почти равна амплитуде падающей и изменение фазы при отражении близко к нулю. Величины, представленные рядами, определяют искажение волны вблизи щели. Благодаря экспоненциальным множителям они становятся пренебрежимо малыми, когда $|z|$ превышает несколько длин волн. За пределами этой области искажения существуют только плоские волны (пока $k < 2\pi/l_x$): падающая и отраженная волны слева, прошедшая волна справа. Вдали от щели, потенциал скоростей имеет вид

$$\psi \approx \begin{cases} e^{ikz} - \frac{ikl_x W}{1 - ikl_x W} e^{-ikz}, & z < 0, \\ \frac{1}{1 - ikl_x W} e^{ikz}, & z > 0. \end{cases}$$

Если произвести измерения на некотором расстоянии от щели, то результат будет таков, как если бы при $z=0$ имелась мембрана или другое препятствие, при проходе через которое давление падает на

$$ik\rho c [\psi_- - \psi_+] \approx -2ik\rho c \frac{ikl_x W}{1 - ikl_x W}.$$

При этом скорость мембраны равна $Q/l_x l_y$, так что *эффективный импеданс* преграды (какова бы ни была ее природа) имеет значение

$$\frac{\text{Перепад давления}}{\text{Средняя скорость}} \approx \rho c [-2ikl_x W] = -i\omega (2\rho l_x W) = Z_s. \quad (11.3.25)$$

Величина в круглых скобках, умноженная на $l_x l_y$ (чтобы получить величину, рассчитанную на все сечение трубы, а не на единицу площади), может быть названа *эффективной массой* воздуха в щели. Эта эффективная масса, приближенно равная $(2\rho l_x^2 l_y) \ln(2l_x/\pi a)$ при $k \ll 2\pi/l_x$ (или $\lambda \gg l_x$), под влиянием падающей волны движется взад и вперед в щели, образуя при этом отраженную и проходящую волны. Полный импеданс для падающей волны складывается из импеданса препятствия и импеданса части трубы позади препятствия.

В соответствии с формулами (2.1.13) и (2.1.15), если волна e^{ikz} (без дисперсии) встречает границу при $z=0$ с импедансом Z_0 , то отраженная волна отличается от падающей по амплитуде и фазе множителем $-(A_-/A_+) = -e^{-2\pi(a-i\beta)}$, связанным с Z_0 соотношениями

$$e^{-2\pi(a-i\beta)} = \frac{A_-}{A_+} = \frac{\rho c - Z_0}{\rho c + Z_0}, \quad Z_0 = \rho c \frac{1 - (A_-/A_+)}{1 + (A_-/A_+)} = \rho c \operatorname{th}[\pi(a - i\beta)].$$

В нашем случае $A_+ = 1$, $A_- = ikl_x W / (1 - ikl_x W)$, так что импеданс для

падающей волны равен

$$Z_0 \simeq \rho c (1 - 2ikl_x W) = \rho c + Z_s,$$

где Z_s — эффективный импеданс преграды со щелью. Поскольку ρc — импеданс открытой трубы, это равенство показывает, что Z_0 получается сложением импеданса преграды и импеданса участка трубы, лежащего за щелью.

Когда частота возбуждения ω становится больше, чем критическая частота ω_{10} , отраженные и проходящие волны не будут более простыми плоскими волнами и одного комплексного импеданса будет недостаточно для описания связи с падающей волной.

Конечно, наше решение не точно; мы обеспечили непрерывность только в центре щели, а в других местах ψ будет разрывным. Этот дефект может быть исправлен с помощью дополнительных рядов, которые введут малый разрыв градиента и т. д. Однако найденное первое приближение обычно оказывается достаточно точным.

Волны в трубе, изогнутой под прямым углом. Иногда бывает полезно уметь рассчитать распространение волн внутри изогнутого участка трубы. В качестве примера расчета такого типа мы рассмотрим трубу прямоугольного поперечного сечения с размерами l_y и l_z , изогнутую под прямым углом, ось которой находится в плоскости x, y . В § 10.2 мы рассматривали установившееся течение внутри такого колена. Потенциал скоростей, задаваемый формулой (10.2.57), и преобразование, показанное на рис. 10.23, могут быть применены и здесь, если мы положим $a = b = l_y$, так что $\alpha = 1$. Потенциал скоростей ψ связан с ω уравнением $\omega = e^{-\pi Fl_z/l_y}$, где $F = \psi + i\chi$. Здесь через Q обозначен полный поток в колене, так что Q/l_z равно Q в формуле (10.2.57), т. е. потоку на единицу размера l_z , перпендикулярного плоскости чертежа.

В этих обозначениях соотношение между $z = x + iy$ и F имеет вид

$$z = \frac{2l_y}{\pi} \left[\operatorname{Arth} \sqrt{\operatorname{th} \left(\frac{\pi Fl_z}{2Q} \right)} - \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{th} \left(\frac{\pi Fl_z}{2Q} \right)} \right], \quad (11.3.26)$$

$$|v| = \left| \frac{dF}{dz} \right| = \left| \frac{Q/l_y l_z}{\sqrt{\operatorname{th} (\pi Fl_z/2Q)}} \right|,$$

где $|v|$ — величина установившейся скорости в точке F (или z). Теперь мы будем рассматривать течение в квадратной области $BP'DP$ (рис. 11.5) как течение несжимаемой жидкости, а течение на участках от A до $P'D$ и от DP до C — как волновое движение сжимаемой жидкости. До тех пор пока длина волны больше l_y , пренебрежение сжатием в колене несущественно, и оно дает нам возможность использовать формулы (11.3.26) для сопряжения решений на границах $P'D$ и DP .

Когда мы рассматриваем волновые решения, можно считать, что две полубесконечные трубы связаны своего рода преобразователем, который создает некоторое распределение скоростей по линии $P'D$ и то же самое распределение по PD . Трубу от A до $P'D$ можно рассматривать отдельно от трубы от PD до C и для изучения движения в каждой из них можно считать ось x направленной вдоль обеих труб, причем положительная полуось направлена от PD к C и отрицательная — от A к $P'D$. За исключением области $BP'DP$, волна вдоль трубы при $k < \pi/l_y$ имеет обычную форму

$$\psi(x, y) = \begin{cases} e^{ikx} + (1 - A_0) e^{-ikx} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \left(\frac{\pi m y}{l_y} \right) e^{x m x}, & x < 0, \\ A_0 e^{ikx} - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \left(\frac{\pi m y}{l_y} \right) e^{-x m x}, & x > 0. \end{cases} \quad (11.3.27)$$

где $\kappa_m = \sqrt{(\pi m/l_y)^2 - k^2}$ и где начало координат x, y для $x < 0$ расположено в P' , а для $x > 0$ в P . Чтобы найти начальную зависимость нормальной составляющей градиента от y при $x=0$, мы рассчитываем величину v вдоль линий DP и DP' , используя стационарное решение (11.3.26).

В первую очередь нам нужно найти образы линий DP и DP' на плоскости F . Точке D , очевидно, соответствует начало $F=0$, но образ точки P ($-il_y$ на плоскости z) не так легко найти. Ей должно соответствовать на плоскости F число с положительной действительной частью и мнимой частью, равной $-i(Q/l_z)$. Но $\text{th}[(\pi\phi_0 l_z/2Q) - i\pi/2] = \text{cth}(\pi\phi_0 l_z/2Q)$, и эта величина больше единицы. Поэтому вдоль линии BC

$$z = -il_y + \frac{2l_y}{\pi} \left[\text{Ar th} \sqrt{\text{th} \left(\frac{\pi\phi_0 l_z}{2Q} \right)} - \text{arctg} \sqrt{\text{cth} \left(\frac{\pi\phi_0 l_z}{2Q} \right)} \right],$$

и чтобы z равнялось $-il_y$, мы должны, полагая $\text{th}(\pi\phi_0 l_z/2Q) = \gamma^2$, иметь $\text{Ar th} \gamma = \text{arctg}(1/\gamma)$. Это уравнение имеет корень $\gamma = 0,7341$; $\text{Ar th} \gamma = 0,9376$, $\text{th}(\pi\phi_0 l_z/2Q) = \gamma^2 = 0,5389$, $\pi\phi_0 l_z/2Q = 0,6026$, так что точка P на плоскости F соответствует $F = (Q/l_z)[0,3836 - i]$, а точке P' соответствует $F' = (Q/l_z)[-0,3836 - i]$. В обеих точках плоскости z скорость жидкости параллельна границе на плоскости z и имеет в точке $x=0, y=0$ на первом чертеже рис. 11.5 значение

$$v_0 = \left| \frac{(Q/l_y l_z)}{\sqrt{\text{th}[(\pi\phi_0 l_z/2Q) - i\pi/2]}} \right| = 0,7341 \frac{Q}{l_y l_z}.$$

Из симметрии решения (можно добавить вторую трубу с изгибом в противоположном направлении и рассматривать поток через Т-образную трубу) видно, что $dv_0/dy = 0$ в точке P .

По мере продвижения вдоль пунктирных линий PD на любом из трех чертежей рис. 11.5, x -компонента скорости $v_0(y)$ монотонно возрастает, стремясь к бесконечности при приближении к D . Если бы мы знали точное направление пунктирной линии на плоскости F , мы могли бы определить точное поведение v_0 как функции от y ; но эта функция от y будет, очевидно, настолько сложной, что мы никак не сумеем использовать ее. Однако нам известно значение v_0 при $y=0$ и известно, что $\int v_0 dy = Q/l_z$. Поэтому естественно предположить, что изучение поведения v_0 вблизи точки D ($y=l_y$) позволит найти более простую функцию от y , которая удовлетворяет всем требованиям достаточно точно.

Формула (11.3.26) показывает, что вблизи точки $F=0$ разложение z в ряд по степеням $\text{th}(\pi F l_z/2Q) = \delta^2$ имеет вид

$$z = \frac{2l_y}{\pi} \left[\delta + \frac{1}{3} \delta^3 + \dots - \delta + \frac{1}{3} \delta^3 - \dots \right] \simeq \frac{4l_y}{3\pi} \delta^3,$$

откуда

$$\delta = \sqrt{\text{th}(\pi F l_z/2Q)} \simeq (3\pi z/4l_y)^{1/3}.$$

Для того чтобы z перемещалась вдоль пунктирной линии от D к P , она должна быть равна $-i\zeta = \zeta e^{-i\pi/2}$, где $\zeta = l_y - y$ (первый чертеж рис. 11.5).

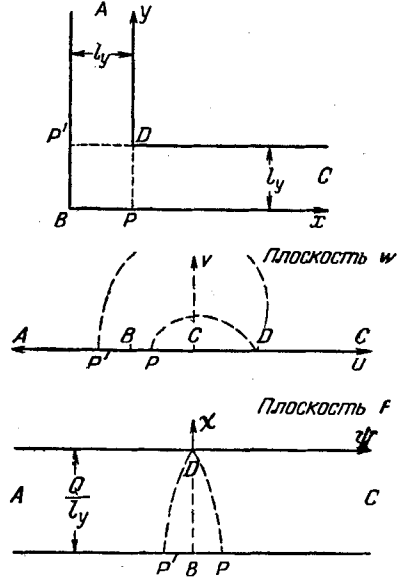


Рис. 11.5. Распространение волн в трубе, изогнутой под прямым углом.

Два нижних чертежа поясняют конформные преобразования, которые нужно осуществить, чтобы вычислить установившийся поток в сечениях $P'D$ и DP .

Это означает, что F приближенно равно $(2Q/\pi l_y) e^{-i\pi/3} (3\pi\zeta/4l_y)^{2/3}$ и пунктирная линия выходит из D на плоскости F под углом -60° к оси ψ . Скорость v_0 по величине и направлению является величиной, комплексно сопряженной к dF/dz , которая вдоль DP вблизи точки D приближенно равна $(Q/l_y l_z) (4l_y/3\pi\zeta)^{1/3} e^{-i\pi/6}$ и направлена книзу под углом 30° к горизонтали. Поэтому вдоль DP вблизи D ($y=l_y$) горизонтальная компонента скорости равна

$$v_0(y) \simeq \frac{Q}{l_y l_z} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \left[\frac{8/3\pi}{2-2y/l_y}\right]^{1/3} = 0,821 \frac{Q/l_y l_z}{\sqrt[3]{2[1-y/l_y]}}.$$

Итак, все предельные условия для $v_0(y)$ получены и остается найти простую функцию, которая будет аппроксимировать поведение $v_0(y)$. Простейшей функцией, имеющей требуемый характер зависимости от y как вблизи $y=0$ (точка P), так и при $y=l_y$ (точка D), является $v_0 = C/\sqrt[3]{1-(y/l_y)^2}$.

Для того чтобы эта функция была точным решением, C должно быть равно $0,734(Q/l_y l_z)$ при $y=0$ и $0,821(Q/l_y l_z)$ при $y=l_y$, так что при $C = \text{const}$ это выражение не может быть точным. Однако если для C принять некоторое промежуточное значение, то найденная функция оказывается вполне пригодным приближенным решением. Посмотрим, какое значение должно иметь C для того, чтобы интеграл от v_0 по сечению трубы был равен полному потоку Q . Имеем

$$Q = l_z C \int_0^{l_y} \frac{dy}{\sqrt[3]{1-(y/l_y)^2}} = Cl_y l_z \int_0^{\pi/2} \sin^{1/3}\varphi d\varphi = \frac{V\pi\Gamma(2/3)}{2\Gamma(7/6)} Cl_y l_z$$

и

$$C = \frac{2\Gamma(7/6)}{V\pi\Gamma(2/3)} \frac{Q}{l_y l_z} = 0,7714 \frac{Q}{l_y l_z}.$$

Это значение действительно является промежуточным между приведенными выше.

Итак, мы предполагаем, что вдоль линии PD (а также линии $P'D$) x -компонента градиента ψ приближенно равна $C[1-(y/l_y)^2]^{-1/3}$, где значение C указано выше. Теперь можно вернуться к (11.3.27) и преобразовать соответственно ряд Фурье для градиента ψ . Согласно (5.3.63), коэффициенты Фурье определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} l_y A_m \chi_m &= C \int_0^{l_y} \frac{\cos(\pi m y/l_y)}{\sqrt[3]{1-(y/l_y)^2}} dy = Cl_y \int_0^1 \frac{\cos(\pi m u)}{\sqrt[3]{1-u^2}} du = \\ &= Cl_y \frac{V\pi\Gamma(2/3)}{(\pi m/2)^{1/6}} J_{1/6}(\pi m), \\ A_m &= \frac{2\Gamma(7/6)J_{1/6}(\pi m)}{\chi_m (\pi m/2)^{1/6}} \frac{Q}{l_y l_z}, \quad A_0 = \frac{Q}{ik l_y l_z}. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить поток Q и тем самым решить задачу (по крайней мере в том приближении, которое мы здесь рассматриваем), мы должны связать значение потенциала ψ на входе в колено с его значением на выходе. Мы получили бы, возможно, более точный результат, если бы нам удалось достигнуть сопряжения значений ψ для всех y в данном поперечном сечении. Однако мы не будем к этому стремиться, зная, что в рассматриваемом приближении при $k < \pi/l_y$ достаточно установить надлежащую связь значений ψ в одной точке, чтобы обеспечить достаточно хорошее соответствие во всех точках. Парой точек, в которых это легче всего сделать, являются $y=l$ (точка D), где требование состоит

в том, чтобы $\psi_- = \psi_+$, и $y = 0$ (точки P и P'), где требуется, как это показало предыдущее рассмотрение, чтобы $\psi_+ = \psi_- + 0,7672(Q/l_z)$. Конечно, результаты сопряжения в этих точках будут несколько различаться.

Мы выбираем соответствие в точке D , ибо оно проще, а также и потому, что это точка максимальной скорости. В этой точке сумма ряда для волн высших типов равна $(Q/l_z)G(kl_y)$, где

$$G(kl_y) = 2\Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m J_{1/6}(\pi m)}{l_y x_m (\pi m/2)^{1/6}}, \quad (11.3.28)$$

так что искомое соотношение имеет вид $2 = 2(Q/l_z)[(1/ikl_y) - G]$, т. е.

$$Q = \frac{2ikl_y l_z}{1 - ikl_y G(kl_y)}.$$

Поскольку это выражение вычислено как функция от kl_y (при $kl_y < \pi$), все остальные искомые величины могут быть получены точно так же, как это было сделано в случае преграды со щелью. В частности, мы видим, что импеданс колена вместе с полубесконечной трубой позади него для плоской падающей волны равен

$$Z_0 \simeq \rho c + Z_e, \quad Z_e = -\rho c(2ikl_y G) = -i\omega(2\rho l_y G), \quad (11.3.29)$$

где Z_e — эффективный импеданс отдельно взятого колена, а ρc — импеданс полубесконечной трубы.

При низких частотах Z_e имеет реактивный характер; эффективная масса (для всей трубы) при этом равна $2\rho l_y^2 l_z G(kl_y)$. Для очень малых значений kl_y функция G стремится к постоянной

$$G_0 = \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{2}\pi m\right)^{-7/6} J_{1/6}(\pi m) = 0,2518.$$

Для несколько больших значений $kl_y < 1$ мы можем разложить $G(kl_y)$ в степенной ряд

$$G(kl_y) = G_0 + \frac{1}{2}(kl_y)^2 G_1 + \frac{3}{8}(kl_y)^4 G_2 + \frac{5}{16}(kl_y)^6 G_3 + \dots,$$

где

$$G_n = 2^{7/6} \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m}{(\pi m)^{2n+7/6}} \right] J_{1/6}(\pi m),$$

$$G_1 = 0,01306, \quad G_2 = 0,001217, \dots$$

Ряды для G_n сходятся абсолютно, но вычисления можно упростить следующим образом. Для больших m функции Бесселя имеют асимптотическую форму

$$J_{1/6}(\pi m) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi^2 m}} \cos\left(\pi m - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{m}} (-1)^m.$$

Поэтому ряды для G_n могут быть переписаны следующим образом:

$$G_n = \frac{2^{2/3} \Gamma(7/6)}{\pi^{2(n+1)+1/6}} \left\{ \zeta\left(2n + \frac{5}{3}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n+5/3}} [1 - (-1)^m \pi \sqrt{2m} J_{1/6}(\pi m)] \right\}.$$

Здесь $\zeta\left(2n + \frac{5}{3}\right)$ — дзета-функция Римана

$$\zeta(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^z} = \prod_p (1 - p^{-z})^{-1},$$

где произведение берется по всем положительным простым числам ($p=2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$). Ряды, которые следует прибавлять к дзета-функции для получения G_n , сходятся очень быстро. Действительно, для $n > 2$ последняя формула при одном члене

$$G_n \simeq \frac{0,12343}{\pi^{2n}} \zeta \left(2n + \frac{5}{3} \right) - \frac{0,00764}{\pi^{2n}}$$

дает лучшую точность, чем первый ряд для G_n со значительно большим количеством членов.

Мембрана в круглой трубе. Следующим примером, связанным с распространением волн в трубах, нам послужит задача об упругой мембране, натянутой поперек круглой трубы, радиус сечения которой равен a . Задача включает в себя расчет волны, отраженной от мембраны, и волны, прошедшей сквозь нее. Если падающая волна симметрична относительно оси трубы, то весь процесс будет симметричным, т. е. возникают лишь парциальные колебания вида

$$J_0 \left(\frac{\pi a_n r}{a} \right) e^{ik\tau_n z - i\omega t}, \quad \tau_n = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi a_n}{ka} \right)^2},$$

где постоянная a_n при краевых условиях, соответствующих акустическим волнам (условия Неймана), является n -м корнем уравнения $J_0'(\pi x) = -J_1(\pi x) = 0$. Эти корни приведены в таблице в конце настоящей главы, где они обозначены α_{0n} . Далее, r , как обычно, — радиальная координата, z — расстояние вдоль трубы и $k = \omega/c$ (c — скорость акустических волн в воздухе).

С другой стороны, если упругая мембрана характеризуется поверхностной плотностью M и натяжением T и если ее край ($r = a$) неподвижно закреплен, то форма свободных колебаний при симметричном возбуждении имеет вид

$$\zeta = J_0 \left(\frac{\pi \beta_n r}{a} \right) e^{-i\omega_n t}, \quad \omega_n = \frac{\pi C \beta_n}{a},$$

где ζ — перемещение точки (r, φ) мембраны в направлении z , отсчитываемое от положения равновесия, $C = \sqrt{T/M}$ — скорость поперечных волн на мембране, $\omega_n/2\pi$ — n -я резонансная частота и β_n — n -й корень уравнения $J_0(\pi \beta) = 0$ (обозначенный β_{0n} в таблице в конце этой главы).

Теперь предположим, что плоская волна ($n = 0$) с частотой, меньшей $\alpha_0 c/2a$, возбуждается в левой части трубы на некотором расстоянии от мембраны, расположенной в плоскости $z = 0$, и распространяется вправо. Волна ударяется о мембрану, частично отражается и частично проходит сквозь нее, вызывая при этом колебания и самой мембраны. Мы можем принять, что акустическая волна имеет потенциал скоростей

$$\psi = \begin{cases} e^{ikz} + (1 - A_0) e^{-ikz} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{\pi \alpha_n r}{a} \right) e^{\kappa_n z}, & z < 0, \\ A_0 e^{ikz} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{\pi \alpha_n r}{a} \right) e^{-\kappa_n z}, & z > 0, \end{cases} \quad (11.3.30)$$

где $\kappa_n = \sqrt{(\pi \alpha_n/a)^2 - k^2}$. Экспоненты и коэффициенты A выбраны так, что z -компонента скорости при $z = 0$ одинакова по обе стороны от мембраны (и, конечно, равна z -компоненте скорости мембраны), а на больших расстояниях от мембраны ($|z|$ велико) справа имеется прошедшая волна, а слева — падающая и отраженная волны.

Коэффициенты A определяются путем подстановки полученных выражений в уравнение колебаний мембраны. При колебаниях, симметричных

относительно центра мембраны, уравнение для перемещения имеет вид

$$M \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{T}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) + p(r), \quad (11.3.31)$$

причем, согласно (11.3.30), вынуждающее давление равно

$$p(r) = 2i\omega\rho \left[1 - A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) \right] e^{-i\omega t},$$

где ρ — плотность воздуха в трубе и $k_n = \pi a_n/a$ не равно ω_n/c .

Мы можем решить уравнение (11.3.31) двумя способами (хотя, конечно, независимо от примененного способа результаты должны получиться одни и те же). Первый способ — разложение ζ и p по собственным функциям $J_0(\pi^2 m^2 r/a)$, обращающимся в нуль при $r=a$; второй способ состоит в том, что (11.3.31) рассматривается как обыкновенное линейное неоднородное уравнение, подлежащее решению по методу (5.2.19). Так как у нас рядов и без того достаточно, то мы избираем последний способ, не ведущий непосредственно к двойным рядам. Независимыми решениями однородного уравнения являются $J_0(Kr)$ и $N_0(Kr)$, где $K = \omega/C = \omega\sqrt{M/T}$, c вронскианом

$$\Delta(J_0, N_0) = J_0(Kr)N_0'(Kr) - N_0(Kr)J_0'(Kr) = 2/\pi Kr,$$

причем J_0', N_0' обозначают производные по аргументу Kr . Решение уравнения (11.3.31) сводится, таким образом, к применению формулы (5.2.19) и к такому выбору пределов интегрирования и постоянных, чтобы ζ обращалось в нуль при $r=a$ и не было бы бесконечным при $r=0$. Используя формулы для интегрирования произведений функций Бесселя, приведенные в конце гл. 10, мы получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{-\pi}{2T} \left\{ J_0(Kr) \left[\int_r^a N_0(Kx) p(x) x dx - \frac{N_0(Ka)}{J_0(Ka)} \int_0^a J_0(Kx) p(x) x dx \right] + \right. \\ & \left. + N_0(Kr) \int_0^r J_0(Kx) p(x) x dx \right\} = \\ = & -i \frac{2K\rho}{MC} e^{-i\omega t} \left\{ \frac{1-A_0}{K^2} \left[1 - \frac{J_0(Kr)}{J_0(Ka)} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{K^2 - k_n^2} \left[J_0(k_n r) - \frac{J_0(Kr)}{J_0(Ka)} J_0(k_n a) \right] \right\}. \quad (11.3.32) \end{aligned}$$

Это выражение стремится к нулю при $r \rightarrow a$.

Коэффициенты A и, следовательно, форма мембраны и звуковой волны могут быть определены из условия, чтобы скорость движения мембраны $-i\omega\zeta$ была равна z -компоненте скорости воздуха при $z=0$:

$$-i\omega\zeta = ikA_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n A_n J_0(k_n r), \quad x_n = \sqrt{k_n^2 - k^2}.$$

Это условие приводит к бесконечной системе линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных A_n . Для их решения лучше всего пользоваться последовательными приближениями. Обычно отношение $a\rho/M$ для мембраны мало; если это так, то все A также малы по сравнению с единицей (если только частота возбуждения не совпадает с резонансной частотой мембраны).

Если нет резонанса, если $a\rho/M \ll 1$ и если частота меньше, чем первая критическая частота трубы ($k < k_1$), то в нулевом приближении

скорость мембраны равна

$$ikA_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n J_0(k_n r) \simeq -2 \frac{\rho}{M} \left[1 - \frac{J_0(Kr)}{J_0(Ka)} \right] (1 - A_0).$$

Коэффициенты A в первом приближении по ρ/M можно получить, умножая обе части на $J_0(k_n r) r = J_0(\pi \alpha_n r/a) r$ и интегрируя по r от нуля до a :

$$\begin{aligned} A_0 &\simeq \frac{2\rho J_2(Ka)}{ikMJ_0(Ka) + 2\rho J_2(Ka)} \simeq -i\omega \frac{\rho ca^2}{4T}, \quad Ka \rightarrow 0, \\ A_n &\simeq \frac{-2\rho}{\alpha_n J_0^2(k_n a) M} \frac{K^2}{K^2 - k_n^2} \left[\frac{J_0(Ka) J_2(k_n a) - J_0(k_n a) J_2(Ka)}{J_0(Ka) + (2\rho/ikM) J_2(Ka)} \right] \simeq \\ &\simeq -\frac{2\rho}{M \alpha_n J_0^2(k_n a)}, \quad K \rightarrow k_n. \end{aligned} \quad (11.3.33)$$

Здесь важно отметить, что, используя множитель $(1 - A_0)$ вместо 1, мы добились того, что формулы (11.3.33) остаются в первом приближении по ρ/M правильными даже при наличии резонанса. Резонанс имеет место, если K таково, что $J_0(Ka) = 0$. При этом

$$A_0 \simeq 1 \text{ и } A_n \simeq -i(k/\alpha_n) [K^2/(K^2 - k_n^2)] [1/J_0(k_n a)].$$

Эти значения A_n много больше тех, которые получаются при других K , но они не бесконечны. Точно так же ни один из A не стремится к бесконечности, когда K близко к k_n [следует иметь в виду, что при $K \rightarrow k_n$, $\omega \rightarrow C\pi \alpha_n/a$ резонанса нет; резонанс наступает при $\omega = C\pi \beta_n/a$, когда $J_0(Ka) = 0$].

Возвращаясь к формуле (11.3.25) и последующим, мы видим, что отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей равно $A_-/A_+ = -(1 - A_0)$, так что эффективный импеданс мембраны и части трубы позади нее для плоской волны, ударяющейся о мембрану с левой стороны, равен

$$Z_0 = \rho c \frac{1 - (A_-/A_+)}{1 + (A_-/A_+)} = i\omega M \frac{J_0(Ka)}{J_2(Ka)} + \rho c.$$

Активный член ρc является акустическим импедансом части трубы позади мембраны; к нему мембрана добавляет реактивную часть. При очень низких частотах этот реактивный импеданс мембраны обращается в

$$X_0 \simeq -\frac{8T}{i\omega a^2},$$

а это реактивный импеданс упругости, порожденной натяжением T в мембране. При резонансе $J_0(Ka) = 0$, импеданс мембраны обращается в нуль и импеданс системы сводится к импедансу трубы ρc . При $J_2(Ka) = 0$ мембрана в процессе колебаний одинаково воздействует на воздух как по одну сторону от нее, так и по другую, и полный импеданс бесконечен. Для частот, больших чем $k_1 c/a\pi = \alpha_1 c/2a$, по трубе могут передаваться волны и более высоких типов, и явление усложняется, так что для его описания уже недостаточно единственного импеданса.

Излучение из открытого конца трубы. Другим примером расчетов, используемых в акустических задачах, является вычисление волны, выходящей из открытого конца круглой трубы. Характер излучения и его обратное влияние на волну внутри трубы зависит от выбранного вида окончания трубы. Простейшим с точки зрения вычислений окончанием трубы является бесконечный фланец. При этом конец трубы представляет собой отверстие в плоской стене, размеры которой велики по сравнению

с длиной волны λ . Случай бесфланцевого окончания будет рассмотрен в § 11.4. Здесь мы рассматриваем случай круглой трубы радиуса a , осью которой служит отрицательная часть z -оси и которая кончается при $z=0$. Плоскость x, y — это жесткая стена с круглым отверстием, являющимся концом трубы.

Когда плоская волна, распространяющаяся вправо вдоль трубы, достигает отверстия, часть ее переходит во внешнее свободное пространство, вправо от стены, а часть отражается обратно в трубу. Если частота возбуждения ниже первой критической частоты ($k < k_1 = \pi a_1/a$), то поле в трубе, как и ранее, имеет вид

$$\psi = e^{ikh} - A_0 e^{-ikh} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) e^{\alpha_n z}, \quad z < 0, \quad (11.3.34)$$

где $\alpha_n = \sqrt{k_n^2 - k^2}$. В нулевом приближении по (предполагаемо) малым величинам A_n скорость воздуха у открытого конца трубы равна

$$v_0 \simeq \begin{cases} ik(1 + A_0), & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Для вычисления излучения вправо из открытого конца мы можем использовать метод функции Грина. Здесь применима функция Грина, нормальная производная которой при $z=0$ равна нулю:

$$G_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \frac{e^{ikhR}}{R} + \frac{e^{ikhR'}}{R'}$$

где

$$k = \omega/c, \quad R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

и

$$(R')^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2,$$

что соответствует единичным источникам в точке (x_0, y_0, z_0) и в симметричной точке $(x_0, y_0, -z_0)$. Используя выражение для скорости при $z=0$

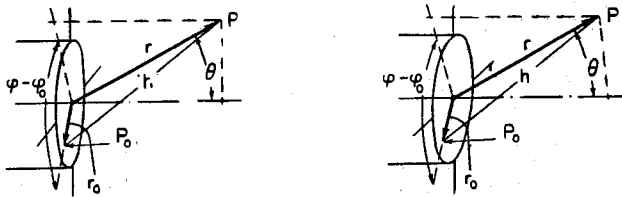


Рис. 11.6. Углы и расстояния для случая излучения из открытого конца трубы.

(которая равна нормальной производной потенциала со знаком минус) в формулу (7.2.10), получим для поля излучения выражение

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^a r_0 v_0(r_0) \frac{e^{ikh}}{h} dr_0, \quad (11.3.35)$$

где $h^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0)$ (см. рис. 11.6). Точка P_0 находится в плоскости $z=0$ и определена полярными координатами r_0, φ_0 , точка P — в конце вектора \mathbf{r} и определена сферическими координатами r, ϑ, φ (ось этой системы координат является продолжением оси трубы)

и начало находится в центре отверстия); h — расстояние между точками P_0 и P .

Чтобы определить коэффициенты A_n и тем самым распределение давления и скоростей в отверстии, нам следует приравнять, хотя бы приближенно, выражения для давления при $z=0$. Используя интегральное представление, мы выразим давление в точке (r, φ) плоскости $z=0$ в виде

$$p(r) = -\frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^a r_0 v_0(r_0) \frac{\exp(ik\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\varphi_0})}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\varphi_0}} dr_0.$$

Но, как показывает таблица в конце гл. 10,

$$\frac{e^{ikh}}{h} = \int_0^\infty J_0(xh) \frac{x dx}{\sqrt{x^2-k^2}},$$

где

$$\sqrt{x^2-k^2} = -i\sqrt{k^2-x^2},$$

когда x и k положительны и $x < k$ (другими словами, путь интегрирования по x проходит ниже точки k). Заметим также, что

$$J_0\left(x\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\varphi_0}\right) = \sum_{m=0}^\infty \varepsilon_m \cos(m\varphi_0) J_m(xr_0) J_m(xr).$$

Эти подстановки кажутся уведящими от цели, так как добавляется новое интегрирование к двум первоначальным. Однако они дадут нам возможность продвинуться вперед, так как мы можем теперь интегрировать по φ_0 :

$$\begin{aligned} p(r) &= -\frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^a r_0 v_0(r_0) dr_0 \left\{ \sum_{m=0}^\infty \varepsilon_m \cos(m\varphi_0) \int_0^\infty \frac{J_m(xr_0) J_m(xr)}{\sqrt{x^2-k^2}} x dx \right\} = \\ &= -ik\rho c \int_0^\infty x dx \int_0^a v_0(r_0) \frac{J_0(xr_0) J_0(xr)}{\sqrt{x^2-k^2}} r_0 dr_0. \end{aligned}$$

В эту формулу можно уже подставить выражение для $v_0(r_0)$.

Если мы допустим, что коэффициенты A_n ряда в выражении для ψ внутри трубы малы, то можно будет подставить приближенное выражение $v_0 \simeq ik(1+A_0)$ в интеграл для p ; приравнявая результат ряду, полученному из (11.3.34), получаем

$$ik\rho c \left[(1-A_0) + \sum_{n=1}^\infty A_n J_0(k_n r) \right] \simeq \rho c k^2 a (1+A_0) \int_0^\infty J_0(xr) J_1(xa) \frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}}.$$

Из этого соотношения можно получить приближенные выражения для A_n . Так, умножая обе части равенства на r и интегрируя по r от нуля до a , мы видим, что с левой стороны вследствие ортогональности собственных функций $J_0(k_n a)$ исчезают все члены, за исключением одного, содержащего множитель $1-A_0$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{1-A_0}{1+A_0} &\simeq -2ik \int_0^\infty [J_1(xa)]^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-k^2}} = \\ &= 2\mu \int_0^\mu \frac{[J_1(u)]^2 du}{u\sqrt{\mu^2-u^2}} - 2i\mu \int_\mu^\infty \frac{[J_1(u)]^2 du}{u\sqrt{u^2-\mu^2}}, \end{aligned}$$

где $u = xa$ и $\mu = ka = \omega a/c = 2\pi a/\lambda$.

Оба эти интеграла приведены в таблице на стр. 305. Первый оказывается равным $1 - (1/\mu) J_1(2\mu)$, а второй — произведению $1/\mu$ на функцию Струве $S_1(2\mu)$, определенную на стр. 305. Заметим, что в этом приближении эффективный акустический импеданс отверстия для плоской волны, распространяющейся вдоль трубы слева, равен произведению ρc на $(1 - A_0)/(1 + A_0)$:

$$Z_0 \simeq \rho c \left[1 - \frac{1}{ka} J_1(2ka) - \frac{i}{ka} S_1(2ka) \right] \simeq \frac{1}{2} \rho c (ka)^2 - i\omega \frac{8\rho a}{3\pi}, \quad ka \ll 1,$$

покуда $k < \alpha_1/a$, т. е. покуда только наименьшая гармоника может распространяться вдоль трубы. Из этих предельных формул следует, что при низких частотах открытый конец имеет меньший импеданс, чем продолжение той же трубы в бесконечность.

Мы можем теперь найти другие A_n , умножая уравнение для давления на $J_0(k_n r) r$ и интегрируя по r от нуля до a ($k_n = \alpha_{0n}/a$). При этом

$$\int_0^a J_0(xr) J_0(k_n r) r dr = \frac{xa}{x^2 - k_n^2} \left[J_0(k_n a) J_1(xa) - \frac{k_n}{x} J_0(xa) J_1(k_n a) \right],$$

где второй член в квадратных скобках обращается в нуль, поскольку $J_1(k_n a) = J_1(\alpha_{0n}) = 0$. Интегрирование в конечном счете дает

$$A_n \simeq \frac{1 + A_0}{J_0(\alpha_{0n})} [\Theta_n(\mu) - i\chi_n(\mu)], \quad \mu = ka = \frac{2\pi a}{\lambda},$$

$$\Theta_n = 2\mu \int_0^\mu \frac{[J_1(u)]^2}{u^2 - u_n^2} \frac{u du}{\sqrt{\mu^2 - u^2}}, \quad \chi_n = 2\mu \int_\mu^\infty \frac{[J_1(u)]^2}{u^2 - u_n^2} \frac{u du}{\sqrt{u^2 - \mu^2}}, \quad (11.3.36)$$

где $u_n = k_n a = \alpha_{0n}$. При $\mu < u_1$ эти величины быстро убывают с возрастанием n , тем самым оправдывая наш приближенный метод. Существуют таблицы этих функций¹⁾. Предельные значения для низших частот таковы:

$$\begin{aligned} \Theta_n &\simeq -(\mu^4/3\pi^2 \alpha_{0n}^2); & \chi_n &\simeq -g_n \mu; & \mu \rightarrow 0, & n > 0, \\ g_1 &= 0,0920; & g_2 &= 0,0356; & g_3 &= 0,0194, \dots \end{aligned}$$

Функции для $n=0$ были указаны выше:

$$\Theta_0 = 1 - \frac{1}{\mu} J_1(2\mu) \simeq \frac{1}{2} \mu^2, \quad \chi_0 = \frac{1}{\mu} S_1(2\mu) \simeq \frac{8\mu}{3\pi}; \quad \mu \rightarrow 0.$$

Мы можем теперь вернуться к (11.3.35), чтобы подсчитать в первом приближении по малым величинам A_n излучение из открытого конца трубы. На больших по сравнению с длиной волны расстояниях от отверстия можно положить $h \simeq r - r_0 \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0)$ и, используя выражение

$$v_0 \simeq \frac{2}{1 + \Theta_0 - i\chi_0} \left\{ ik + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n (\Theta_n - i\chi_n) \frac{J_0(k_n r)}{J_0(k_n a)} \right\},$$

где $k_n = \alpha_{0n}/a$ и $\kappa_n = \sqrt{k_n^2 - k^2}$, мы получаем

$$\begin{aligned} \psi &\simeq \frac{-(1/\pi)}{1 + \Theta_0 - i\chi_0} \frac{e^{ikr}}{r} \times \\ &\times \left\{ \int_0^a r_0 dr_0 \left[ik + \sum \kappa_n (\Theta_n - i\chi_n) \frac{J_0(k_n r_0)}{J_0(k_n a)} \right] \int_0^{2\pi} e^{-ihr_0 \sin \vartheta \cos(\varphi_0 - \varphi)} d\varphi_0 \right\}. \end{aligned}$$

Интегрирование по φ_0 дает $2\pi J_0(kr_0 \sin \vartheta)$, где ϑ — угол между вектором

¹⁾ См., например, Морз Ф., Колебания и звук, ГТТИ, М., 1949.

r и осью трубы, продолженной за отверстие в плоской стене при $z = 0$ (т. е. сферический угол между r и осью z). Теперь можно выполнить интегрирование по r_0 , откуда получаем

$$\psi \simeq \frac{-i\mu a}{1 + \Theta_0 - i\chi_0} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ \Phi_0(\mu \sin \vartheta) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n}{k} (\Theta_n - i\chi_n) \Phi_n(\mu \sin \vartheta) \right\}, \quad (11.3.37)$$

где

$$\mu = ka, \quad \Phi_n(s) = \frac{2sJ_1(s)}{s^2 - (\pi a_{0n})^2} \simeq \begin{cases} 1, & n = 0, \\ -(s/\pi a_{0n})^2, & n > 0, \quad s \rightarrow 0. \end{cases}$$

Из этого выражения можно определить давление и интенсивность излучения на больших расстояниях от отверстия при единичной амплитуде плоской волны, распространяющейся вдоль трубы по направлению к отверстию. Эти выводы справедливы для частот, удовлетворяющих условию $k < k_1$, т. е. для частот ниже первой критической частоты трубы.

Мы могли бы, конечно, изучить случаи распространения волн внутри и вне других цилиндров — эллиптических или параболических, — но подобные случаи практически очень редки и ничего существенно нового при их изучении мы не узнаем. (Несколько подобных задач приведено в конце главы.) Вместо этого, прежде чем перейти к нецилиндрическим координатам, мы займемся задачей другого типа.

Распространение волн в упругих трубах. Имеются случаи, когда изменения давления в звуковой волне, распространяющейся в круглой трубе, производят заметное растяжение стенок трубы. Это обстоятельство особенно существенно, когда труба содержит сравнительно мало сжимаемую жидкость (например, воду), а сама находится в воздухе, так что внешнее давление на стенки трубы сравнительно мало. Реакция стенок трубы на асимметричные типы волн (для $m > 0$) резко отличается от реакции на симметричные ($m = 0$) волны; в первом случае существенную роль играет сопротивляемость стенок изгибу, в то время как во втором достаточно знать только простой модуль Юнга для растяжения. Таким образом, симметричный случай проще; к тому же он чаще встречается.

Пусть в определенном поперечном сечении (для определенного значения z) избыток давления сверх равновесного равен $p(z, t)$. Можно предположить, что радиус поперечного сечения трубы в этом месте на некоторую величину, пропорциональную p , будет больше, чем в состоянии равновесия. Приращение внутреннего давления p должно компенсироваться увеличением напряжения растяжения в стенке трубы ap/h , где h — толщина стенки. Поэтому радиус трубы будет больше на величину $a^2 p/hE_t$, где E_t — модуль Юнга материала стенок трубы. Таким образом, при медленных колебаниях давления радиус трубы должен меняться от равновесного значения a до значения $a + p(a^2/hE_t)$, если только стенки трубы достаточно гибки, так что растяжение в одной точке не вызывает растяжения в ближайших точках.

Однако если изменения происходят быстро, то следует принять в расчет и эффективную массу стенки трубы. Если обозначить приращение радиуса через δ , то уравнение, связывающее δ с приращением внутреннего давления, принимает вид

$$\rho_t h \frac{d^2 \delta}{dt^2} + \delta \frac{hE_t}{a^2} = p,$$

где ρ_t — плотность материала стенки трубы. Следовательно, если можно пренебречь внутренним трением в стенке трубы, то радиальная скорость

этой стенки v_r (являющаяся также радиальной скоростью жидкости на внутренней поверхности) при колебании давления $p(z) e^{-i\omega t}$ равна

$$v_r = \frac{p(z)}{Z_t} e^{-i\omega t}, \quad Z_t = -i\omega(\rho_t h) - \frac{hE_t}{i\omega a^2}.$$

Величина Z_t может быть названа *поперечным механическим импедансом* стенки трубы. Мы исходим из того, что реакцией внешнего воздуха на трубу можно пренебречь и что стенки трубы гибкие (подобно резине), а не жесткие (подобно стали).

Симметричная звуковая волна внутри круглой трубы задается потенциалом скоростей

$$\psi = A \exp(ikz \sqrt{1-\sigma^2}) J_0(k\sigma r) e^{-i\omega t}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (11.3.38)$$

где значение параметра σ определяется импедансом Z_t . Избыточное давление на стенку трубы в точке (z, a) равно

$$p = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \rho \psi = i\omega \rho A \exp(ikz \sqrt{1-\sigma^2}) J_0(k\sigma a) e^{-i\omega t},$$

где ρ — плотность жидкости. Радиальная скорость жидкости у стенки в той же точке равна

$$v_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} = -k\sigma A \exp(ikz \sqrt{1-\sigma^2}) J_1(k\sigma a) e^{-i\omega t},$$

и σ определяется уравнением

$$\frac{p}{v_r} = -i\omega \rho_t h - \frac{hE_t}{i\omega a^2} = -\frac{i\omega \rho J_0(k\sigma a)}{k\sigma J_1(k\sigma a)}.$$

Для низких частот, когда $\omega^2 \ll E_t/\rho_t a^2$, наименьший корень σ оказывается мнимым, так что ψ следует выражать через гиперболическую функцию Бесселя $I_0(k\tau r) = J_0(ik\tau r)$, где $\sigma = i\tau$. На практике, кроме того, hE_t/a^2 достаточно велико, так что τ значительно меньше, чем $1/ka$, и можно ограничиться только несколькими первыми членами разложения I_0 в ряд. Следовательно, потенциал скоростей можно выразить так:

$$\psi \simeq A \left[1 + \frac{1}{4} (k\tau r)^2 \right] \exp(ikz \sqrt{1+\tau^2} - i\omega t), \quad 2\rho\omega^2 a^3 \ll hE_t,$$

и уравнение для τ принимает вид

$$-i\omega \rho_t h + \frac{ihE_t}{\omega a^2} \simeq \frac{2i\omega \rho}{k^2 \tau^2 a} = i \frac{2\rho c^2}{\omega \tau^2 a},$$

то есть

$$\tau^2 \simeq \frac{2\rho c^2 a/h}{E_t - \omega^2 a^2 \rho_t} \simeq \frac{2\rho c^2 a}{hE_t} \left[1 + \frac{\omega^2 a^2 \rho_t}{E_t} \right].$$

Поэтому потенциал скоростей (с рассматриваемой степенью точности) принимает вид

$$\psi \simeq A \left[1 + \frac{\rho\omega^2 a r^2}{2hE_t} + \frac{\rho\rho_t \omega^4 a^3 r^2}{2hE_t^2} \right] e^{i\omega[(z/c_t) - t]},$$

где c_t — скорость волны при ее распространении вдоль трубы:

$$c_t \simeq c \left[1 - \frac{\rho c^2 a}{hE_t} - \frac{\rho\rho_t \omega^2 c^2 a^3}{hE_t^2} \right],$$

что меньше, чем скорость звука c в свободном пространстве, заполненном такой же жидкостью. Для жестких труб ($hE_t \gg \rho c^2 a$) скорость уменьшается мало. Имеет место дисперсия рассматриваемых волн, поскольку c_t зависит от ω .

Высшие формы симметричных волн могут быть выражены через угол

$$\alpha_0(z) = \text{arc tg} \left[\frac{-z}{J_0(z)} \frac{dJ_0(z)}{dz} \right] = \text{arc tg} \left[\frac{zJ_1(z)}{J_0(z)} \right],$$

значения которого приведены в таблицах в конце этой главы и в конце книги. Предельные значения таковы:

$$\alpha_0(z) \simeq \frac{1}{2} z^2, \quad z \rightarrow 0;$$

$$\alpha_0(z) \simeq \text{arc tg} \left[z \text{tg} \left(z - \frac{1}{4} \pi \right) \right], \quad z \rightarrow \infty,$$

$$\alpha_0(z) \simeq -\text{arc tg } y, \quad z = iy \rightarrow i\infty.$$

Уравнение для σ можно при этом записать в виде

$$\text{ctg} [\alpha_0(k\sigma a)] = -\frac{hE_t/\rho a}{(k\sigma a)^2} + \frac{\rho_t h}{\rho a}.$$

Значения σ для высших типов волн можно вычислить при помощи таблицы углов α_0 в конце книги. Для этих высших типов волн σ действительно и скорость распространения $c_t = c/\sqrt{1-\sigma^2}$ больше c .

Для волны наименьшего типа и для очень эластичных труб или для высоких частот число $k\sigma a$ чисто мнимое и по модулю велико, а значит

$$\tau \simeq \frac{\rho c \omega a^2 / h}{E_t - \rho_t \omega^2 a^2}, \quad \frac{\rho \omega^2 a^3}{h} > E_t > \rho_t \omega^2 a^2$$

и скорость распространения равна

$$c_t = \frac{c}{\sqrt{1+\tau^2}}.$$

Эта величина при большом τ может быть мала. Наконец, если $\rho_t \omega^2 a^2 > E_t$, то σ действительно также и для наименьшего типа волн и c_t больше c для всех типов волн. В этом предельном случае стенки трубы «управляемы массой» и они, двигаясь противоположно по фазе давлению, «толкают» волны вперед быстрее, чем они двигались бы в свободном пространстве. Конечно, рассмотренный нами здесь пример сильно упрощен. В действительности обычно приходится учитывать реакцию внешней среды и жесткость самой трубы. Наши формулы, однако, дают удовлетворительные результаты для движения воды внутри тонкой резиновой трубки или для движения крови в артериях.

Сферические координаты. Мы рассматривали сферические координаты r, ϑ, φ в связи с уравнением Лапласа [см. формулу (10.3.25) и следующие]. Выражения для коэффициентов Ламе ($h_r = 1, h_\vartheta$ и h_φ зависят от r) показывают, что в уравнении Гельмгольца только r -множитель зависит от k , и поэтому множители, зависящие от ϑ и φ , для уравнений Лапласа и Гельмгольца одинаковы. Разделяя переменные в уравнении Гельмгольца, получаем $\psi = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$ и

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0,$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] \Theta = 0,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] R = 0.$$

Это разделение в отношении постоянных m, n, k почти полное: Θ и Φ не зависят от k , Φ не зависит от n и R не зависит от m .

Если φ может свободно меняться от нуля до 2π , то множитель Φ должен быть периодическим с периодом 2π относительно φ и m должно быть либо целым числом, либо нулем. Соответствующими собственными функциями являются $\sin(m\varphi)$ и $\cos(m\varphi)$, или $e^{\pm im\varphi}$. Если ϑ может меняться от 0 до π , то постоянная n также должна быть целой и множитель Θ является присоединенной функцией Лежандра, определенной в (5.3.36) и (10.3.25). Чтобы освежить в памяти определения этих функций углов, уже рассматривавшихся в гл. 10, мы приведем их вновь:

$$\Theta = P_n^m(\cos \vartheta) = \sin^m \vartheta T_{n-m}^m(\cos \vartheta) = \\ = \frac{(n+m)!}{2^m n! (n-m)!} \sin^m \vartheta F\left(m-n, m+n+1 \mid m+1 \mid \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta\right).$$

Свойства этих функций были подробно изучены в § 10.3 и функции табулированы в конце гл. 10. Полные угловые функции для сферических координат называются *сферическими гармониками*.

$$Y_{emn}(\vartheta, \varphi) = \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ Y_{omn}(\vartheta, \varphi) = \sin(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta), \quad m = 1, 2, \dots, n-1, n; \\ Y_{e0n}(\vartheta, \varphi) = Y_n(\vartheta) = P_n(\cos \vartheta).$$

Функции при $m=0$ называются *зональными гармониками*, при $m=n$ — *секториальными гармониками*, а остальные — *тессеральными гармониками*. На стр. 262 мы видели, как они связаны с производными функции $1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ по x , y и z . На стр. 253 были также приведены интегральные представления этих функций.

Рассмотрим некоторые свойства симметрии сферических гармоник. Эти вопросы могли бы быть разобраны в гл. 10, но мы отложили их до этой главы, чтобы внести в нее некоторое разнообразие. Мы несколько раз подчеркивали, что оператор $\mathbf{r} \times \nabla$ есть оператор вращения. Этим утверждением мы хотели сказать, что изменение функции $\psi(\mathbf{r})$ в результате вращения по часовой стрелке на угол $|d\omega|$ вокруг оси, проходящей через начало в направлении $d\omega$, равно $d\omega \cdot \mathbf{r} \times \nabla \psi(\mathbf{r})$. Перемещение точки \mathbf{r} при подобном вращении равно $d\omega \times \mathbf{r}$ и разность между значениями ψ при $\mathbf{r} + d\omega \times \mathbf{r}$ и \mathbf{r} имеет вид

$$(d\omega \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \psi = d\omega \cdot (\mathbf{r} \times \nabla \psi).$$

Интересное замечание по поводу сферических гармоник, которое мы хотели бы здесь сделать, состоит в том, что оператор вращения $\mathbf{r} \times \nabla$ оказывает на них весьма простое воздействие. Это легко показать, используя комплексную сферическую гармонику

$$X_n^m(\vartheta, \varphi) = Y_{emn} + iY_{omn} = e^{im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta).$$

Вектор $\mathbf{r} \times \nabla \psi = \mathbf{R}(\psi)$ в сферических координатах выражается так:

$$\mathbf{R}(\psi) = \mathbf{a}_\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} - \frac{\mathbf{a}_\vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}. \quad (11.3.39)$$

Компонента этого вектора по оси z , определяющая эффект вращения вокруг сферической оси, имеет вид

$$R_z(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi},$$

как это и должно быть. Вместо рассмотрения x - и y -компонент вектора \mathbf{R} , мы введем комплексную величину

$$R_x + iR_y = ie^{i\varphi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + i \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right),$$

что легче приведет нас к желаемым результатам:

Используя рекуррентные формулы для сферических гармоник, приведенные на стр. 307, мы получаем

$$\begin{aligned} R_z(X_n^m) &= (\mathbf{r} \times \nabla X_n^m)_z = imX_n^m, \\ R_x(X_n^m) + iR_y(X_n^m) &= -iX_n^{m+1}, \end{aligned} \quad (11.3.40)$$

$$R_x(X_n^m) - iR_y(X_n^m) = -i(n-m+1)(n+m)X_n^{m-1}.$$

Следовательно, вращение X_n^m вокруг оси z просто меняет фазу этой функции — весьма очевидное утверждение, поскольку вращение вокруг оси z сводится к изменению переменной φ . Менее очевидный результат состоит, однако, в том, что вращение вокруг оси x или y переводит X_n^m в комбинацию не любых функций, а только двух соседних: X_n^{m+1} и X_n^{m-1} . Распространение этих правил на действительные операторы R_x и R_y и действительные гармоники Y не вызывает затруднений. Между прочим, существует очень тесная связь между этими результатами и формулой (1.6.42) и следующими, касающимися момента количества движения.

Если рассматривать операторы R_x , R_y , R_z как компоненты векторного оператора вращения, то возникает вопрос, что получится в результате применения к сферической гармонике квадрата абсолютной величины этого оператора. Имеет место формула

$$\begin{aligned} R^2 X_n^m &= \left[R_z^2 + \frac{1}{2}(R_x + iR_y)(R_x - iR_y) + \frac{1}{2}(R_x - iR_y)(R_x + iR_y) \right] X_n^m = \\ &= n(n+1)X_n^m, \end{aligned}$$

так что сферическая гармоника оказывается собственной функцией оператора R^2 . Это обстоятельство не имеет большого значения в классической физике, но для волновой механики оно очень важно, ибо векторный оператор \mathbf{R} пропорционален моменту количества движения поля относительно начала, и квадрат оператора \mathbf{R} совпадает с квадратом момента количества движения¹⁾.

Таким образом, сферические гармоники являются собственными функциями вращения вокруг сферической оси z и связаны очень простыми рекуррентными соотношениями для вращений вокруг осей x и y . Поскольку сферическая граница инвариантна относительно вращения вокруг любой оси, проходящей через ее центр, вполне естественно, что приспособленные к таким границам решения в сферических координатах обладают простыми свойствами по отношению к таким вращениям.

Совокупность сферических гармоник образует полную ортогональную систему собственных функций для координат ϑ , φ . Нормирующий множитель имеет вид

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta [Y_{emn}]^2 d\vartheta = \frac{4\pi}{\varepsilon_m (2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta [Y_{o,mn}]^2 d\vartheta,$$

так что для кусочно-непрерывной в области $0 < \vartheta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ функции F от ϑ , φ имеет место равенство

$$\begin{aligned} F(\vartheta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\varepsilon_m}{4\pi} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi \sin u F(u, v) \times \\ &\times \{Y_{emn}(\vartheta, \varphi) Y_{emn}(u, v) + Y_{o,mn}(\vartheta, \varphi) Y_{o,mn}(u, v)\} du. \end{aligned} \quad (11.3.41)$$

Радиальные множители связаны с функциями Бесселя, рассмотренными в § 5.3 и 10.3 и табулированными в конце гл. 10. Полагая

¹⁾ С точностью до множителя — \hbar^2 . — Прим. ред.

$R = J(r)/\sqrt{r}$, имеем

$$\frac{d^2 J}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ}{dr} + \left[k^2 - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} \right] J = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют функции

$$J_{n+\frac{1}{2}}(kr), N_{n+\frac{1}{2}}(kr), H_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Чтобы упростить асимптотические разложения, мы определяем радиальные решения следующим образом:

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \simeq \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{1}{2}\pi n\right), \quad kr \rightarrow \infty;$$

$$n_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} N_{n+\frac{1}{2}}(kr) \simeq \frac{-1}{kr} \cos\left(kr - \frac{1}{2}\pi n\right), \quad kr \rightarrow \infty; \quad (11.3.42)$$

$$h_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) \simeq \frac{i^{-n}}{ikr} e^{ikr}, \quad kr \rightarrow \infty,$$

Эти функции можно назвать *сферическими функциями Бесселя* соответственно первого, второго и третьего рода [см. (5.3.67)].

Сферические функции Бесселя. Специфической особенностью этих функций является то, что их разложения в ряды вблизи $z = \infty$ оказываются не асимптотическими, а точными. Причина этого заключается в том, что после выделений члена с существенной особенностью остается не бесконечный (расходящийся) ряд, а многочлен. Это легче всего показать для h_n ; две другие функции j_n и n_n являются соответственно действительной и мнимой частью $h_n(kr)$.

Из уравнения для h_n видно, что эта функция имеет полюс порядка $n+1$ при $r=0$ и существенную особенность при $r=\infty$. Чтобы явно выделить эту особенность, мы сначала положим $r = u/ik$ в уравнении для функции J , а затем произведем замену $J = e^u S(u)/u$. В получившемся уравнении для S положим $u = 1/\omega$, чтобы изучить поведение S при $r \rightarrow \infty$. В конце концов имеем

$$\frac{d^2 S}{d\omega^2} + \left(\frac{2}{\omega} - \frac{2}{\omega^2}\right) \frac{dS}{d\omega} - \frac{n(n+1)}{\omega^2} S = 0.$$

Это уравнение допускает решение в виде ряда

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2}n(n+1)\omega + \frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)\omega^2 - \dots = \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{m!(n-m)!} \left(-\frac{1}{2}\omega\right)^m, \end{aligned}$$

который обрывается на члене с n -й степенью ω . Следовательно, наша сферическая функция Ганкеля, удовлетворяющая требуемым предельным соотношениям при $r \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\begin{aligned} h_n(z) &= \frac{e^{iz}}{iz} i^{-n} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{m!(n-m)!} \left(\frac{i}{2z}\right)^m = \\ &= -ie^{iz} \frac{(2n)!}{2^n n! z^{n+1}} F(-n | -2n | -2iz), \quad z = kr. \end{aligned} \quad (11.3.43)$$

Это выражение применимо при всех $z > 0$. Действительная часть этой функции равна $j_n(z)$, а мнимая часть $n_n(z)$. Другие свойства этих функций указаны в таблице в конце настоящей главы. В частности, там табулированы корни уравнений $j_n(\pi\beta) = 0$ и $dj_n(\pi\alpha)/d\alpha = 0$, которые используются при решении внутренних задач для условий Дирихле или Неймана на сферической поверхности.

Функция Грина и разложение плоской волны. Исходя из формулы (7.2.63) или из свойств функций Бесселя, указанных в конце гл. 10, мы находим, что функция Грина свободного пространства для расходящейся волны с частотой $\omega/2\pi$ имеет вид

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|\omega) &= \frac{e^{ikhR}}{R} = ikh_0(kR) = \\ &= ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n e_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] P_n^m(\cos \vartheta_0) \times \\ &\quad \times P_n^m(\cos \vartheta) \begin{cases} j_n(kr_0) h_n(kr), & r > r_0, \\ j_n(kr) h_n(kr_0), & r < r_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11.3.44)$$

Предполагая, что точка, где расположен источник, стремится к бесконечности, $r_0 \rightarrow \infty$, так, что $\vartheta_0 = \pi$, мы получаем разложение плоской волны e^{ikhz} , как в (7.2.52),

$$e^{ikr \cos \vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos \vartheta) j_n(kr). \quad (11.3.45)$$

Для плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении u, v , получаем

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \sum_{m=0}^n e_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos[m(\varphi - v)] P_n^m(\cos u) P_n^m(\cos \vartheta) j_n(kr), \quad (11.3.46)$$

где вектор \mathbf{r} имеет длину r и сферические углы ϑ, φ , а вектор \mathbf{k} — длину k и сферические углы u, v .

Это последнее разложение дает возможность получить интегральное представление разделенных решений в сферических координатах. Умножая обе части последнего равенства на Y_{emn} или Y_{omn} и интегрируя по u, v , получаем

$$\begin{aligned} Y_{emn}(\vartheta, \varphi) j_n(kr) &= \frac{1}{4\pi i^n} \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} Y_{emn}(u, v) \sin u \, du, \\ Y_{omn}(\vartheta, \varphi) j_n(kr) &= \frac{1}{4\pi i^n} \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} Y_{omn}(u, v) \sin u \, du. \end{aligned} \quad (11.3.47)$$

Эти формулы связаны с интегральными представлениями (5.3.67). Подобные же интегральные формулы для функций Бесселя второго или третьего рода могут быть получены изменением контура интегрирования по u . Например, используя контур B рис. 5.10 (идя от $i\infty - \varepsilon$ до $-i\infty + \varepsilon$,

$0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \pi$) и n раз интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} 2\pi \int_B e^{ikr \cos u} P_n(\cos u) \sin u \, du &= \frac{4\pi}{2^n n!} \int_{i\infty}^1 e^{ikrz} \left[\frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \right] dz = \\ &= \frac{4\pi}{n!} \left(\frac{ikr}{2} \right)^n \int_{i\infty}^1 e^{ikrz} (1 - z^2)^n dz = \frac{4\pi}{in!} \left(\frac{ikr}{2} \right)^n \int_{-\infty}^i e^{krt} (1 + t^2)^n dt = \\ &= 4\pi i^n \sqrt{\pi/2kr} H_{n+\frac{1}{2}}(kr) = 4\pi i^n h_n(kr), \end{aligned}$$

а отсюда

$$P_n(\cos \vartheta) h_n(kr) = \frac{1}{4\pi i^n} \int_0^{2\pi} dv \int_B e^{ik \cdot r} P_n(\cos u) \sin u \, du \quad (11.3.48)$$

и т. д.

Эти представления будут многократно использованы на последующих страницах. Здесь с их помощью мы установим связь между волновыми решениями в цилиндрических [$\eta = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg(y/x)$, z] и сферических [$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vartheta = \arccos(z/r)$, $\varphi = \arctg(y/x)$] координатах. С помощью соотношений $\eta = r \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$,

$$ik \cdot r = ikr [\cos \vartheta \cos u + \sin \vartheta \sin u \cos(\varphi - v)] = ik [z \cos u + \eta \sin u \cos(\varphi - v)]$$

и соотношения (11.2.21) для соответствующего интегрального представления функции $\cos(m\varphi)$ $J_m(k\rho)$ формула (11.3.47) дает

$$P_n^m(\cos \vartheta) j_n(kr) = \frac{1}{2} i^{m-n} \int_0^\pi e^{ikz \cos u} J_m(k\eta \sin u) P_n^m(\cos u) \sin u \, du. \quad (11.3.49)$$

Аналогично решение $\cos(m\varphi) J_m(k\eta)$ может быть представлено в виде ряда $\sum B_n P_n^m(\cos \vartheta)$, коэффициенты B_n которого являются коэффициентами разложения по сферическим гармоникам:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^\pi \cos(m\varphi) J_n(kr \sin u) P_n^m(\cos u) \sin u \, du = \\ &= \frac{2n+1}{4\pi i^m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi e^{ikr \sin u \cos(\varphi-v)} \cos(mv) P_n^m(\cos u) \sin u \, du = \\ &= i^{n-m} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\varphi) P_n^m(0) j_n(kr), \end{aligned}$$

где $P_n^m(0) = 0$, когда $n - m$ нечетно, и $P_n^m(0) = (-1)^l [(2m+2l)!/2^{m+2l} l! (m+l)!]$, когда $n - m = 2l$ четно. Следовательно,

$$J_m(k\eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2m+4l+1)(2l)!}{2^{m+2l} l! (m+l)!} P_{m+2l}^m(\cos \vartheta) j_{m+2l}(kr) \quad (11.3.50)$$

и, в частности,

$$\begin{aligned} J_0(k\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{n! \Gamma(\frac{1}{2})} P_{2n}(\cos \vartheta) j_{2n}(kr), \\ H_0(k\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{n! \Gamma(\frac{1}{2})} P_{2n}(\cos \vartheta) h_{2n}(kr). \end{aligned} \quad (11.3.51)$$

Вторая формула получена методами, аналогичными примененным для вывода (11.3.48).

Возникает естественный вопрос, достаточно ли хорошо сходятся вышеприведенные ряды. Ряд (11.3.45), например, не выглядит многообещающим в этом отношении. Однако изучение ряда для $j_n(kr)$ (который сходится абсолютно для всех конечных значений kr) показывает, что

$$j_n(kr) \simeq (kr/2)^n \left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) / \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \right] \text{ при } n \gg \frac{1}{2}kr.$$

Следовательно, остаток ряда для n , больших чем $N \gg \frac{1}{2}kr$, ведет себя так же, как

$$\sum \left(\frac{ikr}{2}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} P_n(\cos \vartheta),$$

а этот ряд сходится абсолютно. Конечно, если kr велико, приходится брать много членов ряда, прежде чем их величина начнет уменьшаться, но в конце концов она будет уменьшаться, и мы сможем пренебречь остатком ряда.

Собственные колебания внутри сферы. Резонансные частоты для колебаний внутри сферы определяются корнями функций $j_n(kr)$. Если, например, краевые условия соответствуют звуковым волнам внутри сферы радиуса a , то следует пользоваться функцией первого рода $j_n(\pi\alpha_{ns}r/a)$, ограниченной при $r=0$, и величины α следует подобрать так, чтобы $dj_n(\pi\alpha)/d\alpha = 0$. Величина α_{ns} является s -м корнем этого уравнения; значения нескольких первых корней этого уравнения даны в таблице в конце главы. Собственными функциями для внутренности сферы при краевых условиях Неймана служат функции

$$\psi_{mns}^e(r) = \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta) j_n\left(\frac{\pi\alpha_{ns}r}{a}\right), \quad (11.3.52)$$

а также аналогичные функции с $\sin(m\varphi)$ вместо $\cos(m\varphi)$ и с буквой o (нечетная) в качестве верхнего индекса. Эти собственные функции взаимно ортогональны между собой. Их нормирующие постоянные имеют вид

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^a [\psi_{mns}^e]^2 r^2 dr = \frac{2\pi a^3 (n+m)!}{\varepsilon_m (2n+1) (n-m)!} \frac{(\pi\alpha_{ns})^2 - n(n+1)}{(\pi\alpha_{ns})^2} [j_n(\pi\alpha_{ns})]^2 = \Lambda_{mns}^2,$$

и точно так же для нечетных функций. Все эти волны для заданной пары значений n, s при всех допустимых значениях m (от 0 до n), как четные $[\cos(m\varphi)]$, так и нечетные $[\sin(m\varphi)]$, соответствуют одной и той же резонансной частоте $\omega_{ns}/2\pi$, где $\omega_{ns} = \pi\alpha_{ns}/a$.

Стоячие волны для m и n , меньших чем s , соответствуют почти нормальному отражению от сферической поверхности и поэтому они фокусируются в центре сферы. Первый максимум находится примерно на расстоянии $na/\pi\alpha_{ns} \simeq na/\pi s$ от центра, а затем до наружной сферической границы амплитуда уменьшается приблизительно обратно пропорционально расстоянию от центра. С другой стороны, амплитуды волн, у которых m или n много больше чем s , очень малы в центре сферы и становятся большими приблизительно для тех r , которые превосходят $a(n-s-1)/n$. Заметим, что в этом случае (при $s \ll n$) $\pi\alpha_{ns} \simeq n + \pi s/2$, так что множитель

$[(\pi\alpha_{ns})^2 - n(n+1)]/(\pi\alpha_{ns})^2$ немного меньше единицы. Это показывает, что амплитуда волны подобного типа весьма мала почти во всей области внутри сферы.

Функция Грина для области, ограниченной сферой, имеет вид

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \sum_{m, n, s} \frac{4\pi}{\Lambda_{mns}^2 (k_{ns}^2 - k^2)} [\psi_{mns}^e(\mathbf{r}_0) \psi_{mns}^e(\mathbf{r}) + \psi_{mns}^o(\mathbf{r}_0) \psi_{mns}^o(\mathbf{r})], \quad (11.3.53)$$

где $k_{ns} = \pi\alpha_{ns}/a$. Она, конечно, не равна функции Грина (11.3.44), так как функция (11.3.53) удовлетворяет условиям Неймана при $r = a$, в то время как функция (11.3.44) удовлетворяет условию для расходящегося излучения при $r \rightarrow \infty$.

Следующие два примера волновых процессов внутри сферы должны быть изучены не потому, что звуковые волны в областях, ограниченных сферой, часто встречаются, а потому что навыки в применении методов, приобретенные при решении этих задач, могут оказаться полезными в других, практически более интересных случаях.

Колебания полой гибкой сферы. Интересная во многих отношениях задача связана со свободными колебаниями сферической оболочки, надутой воздухом (сферической мембраны). Избыточное воздушное давление внутри сферы создает в мембране равномерное натяжение T (дин на сантиметр). В состоянии равновесия мембрана представляет собой полую сферу радиуса a и равновесное избыточное внутреннее давление равно $P = 2T/a$ (ибо $2\pi aT = \pi a^2 P$). В первом приближении мы пренебрегаем реакцией воздуха вне сферы; влияние излучения будет рассмотрено ниже, в этом параграфе.

Очень важно разделить колебания нашей сферы на различные типы, зависимость которых от угловых сферических координат имеет вид различных сферических гармоник, так как сферическим гармоникам различных порядков соответствуют различные собственные частоты. Кроме того, восстанавливающая сила, возвращающая мембрану в ее состояние равновесия, различна для гармоник нулевого или более высоких порядков.

Рассмотрим в первую очередь случай нулевого порядка, когда колебания сферически симметричны. В этом случае движение воздуха внутри сферы определяется потенциалом скоростей $\psi = Aj_0(kr)e^{-i\omega t}$, где частота $\omega = kc$ подлежит определению. Избыточное давление p на внутренней стороне мембраны и радиальная скорость мембраны выражаются формулами

$$p_a = i\omega\rho Aj_0(ka)e^{-i\omega t}, \quad v_r = -kAj_1(ka)e^{-i\omega t},$$

и их отношение должно быть равно акустическому импедансу мембраны для сферически симметричных колебаний. Если плотность мембраны равна ρ_s и ее толщина равна h , то масса мембраны, приходящаяся на единицу площади, составляет $h\rho_s$, так что нагрузка, создаваемая массой, равна $-i\omega h\rho_s$. Если радиус сферы увеличится сверх равновесного значения a на η , то напряжение в мембране увеличится сверх равновесного на величину $2\eta hE/a$, где E — модуль упругости мембраны для растяжения. Приращение сверх равновесного значения избыточного давления у мембраны при этом составит $4\eta hE/a^2$. Таким образом, импеданс упругости равен $i(4Eh/\omega a^2)$.

Следовательно, для свободных симметричных колебаний

$$\frac{p_a}{v_r} = -i\rho_s \frac{j_0(ka)}{j_1(ka)} = -i\omega h\rho_s + i \frac{4Eh}{\omega a^2},$$

или

$$\frac{j_0(ka)}{j_1(ka)} = \frac{\rho_s h}{\rho a} ka - \frac{4Eh}{\rho c^2 ka^2}. \quad (11.3.54)$$

Различные значения $\pi\gamma_{0s}$ величины ka , которые удовлетворяют этому уравнению, определяют собственные частоты симметричных колебаний $\omega_{0s} = \pi\gamma_{0s}c/a$. Если определяющим фактором является масса мембраны, то самая низкая собственная частота равна

$$\pi\gamma_{01} \simeq \sqrt{\frac{3\rho a}{\rho_s h}} \left[1 + \frac{2Eh}{3\rho c^2 a} \right], \quad \rho_s h \gg 3\rho a; \quad 3\rho c^2 a \gg 2Eh. \quad (11.3.55)$$

Высшие частоты для симметрии такого типа следует определить из таблиц сферических функций Бесселя.

Чтобы найти резонансные частоты для других типов симметрии, мы должны вернуться к § 1.3 и рассмотреть вопрос о кривизне мембраны. Восстанавливающая сила мембраны для высших типов колебаний создается изменением соотношения между давлением и натяжением, вызванным изменением кривизны мембраны. Обращаясь к (1.3.6) и к рассуждениям начала § 2.1 о кривизне струны и мембраны, мы видим, что кривизна (или «выпученность») поверхности $\xi_1 = \text{const}$ равна $C = -(1/h_1 h_2 h_3) (\partial h_2 h_3 / \partial \xi_1)$. Отсюда можно найти восстанавливающую силу мембраны. Сила на единицу площади, возникающая в мембране с натяжением T при изгибании ее до совпадения с поверхностью $\xi_1 = \text{const}$, равна TC и давление, необходимое, чтобы удержать мембрану в этом положении, равно $-TC$. Для сферы в состоянии равновесия ($h_r = 1$, $h_\vartheta = r$, $h_\varphi = r \sin \vartheta$) $C = -2/a$ и давление равно $2T/a$, как и было указано выше.

Но, поскольку мы интересуемся кривизной и полной силой для случая мембраны, выведенной из состояния равновесия, мы должны пойти дальше. Это нетрудно сделать, если смещение невелико. Предположим, что истинная поверхность имеет уравнение $\xi_1 = \eta(\xi_2, \xi_3) + \text{const}$, где смещение η достаточно мало, так что угол между нормалью к ξ_1 -поверхности и нормалью к истинной поверхности мал. Тогда единичный вектор, нормальный к истинной деформированной поверхности, с достаточной точностью выражается формулой

$$\mathbf{e} = \mathbf{a}_1 - \frac{a_2}{h_2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_2} - \frac{a_3}{h_3} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_3}.$$

Чтобы получить кривизну деформированной поверхности, сложим составляющую вектора $d\mathbf{e}/d\xi_2$ вдоль ξ_2 и составляющую вектора $d\mathbf{e}/d\xi_3$ вдоль ξ_3 :

$$C_\eta \simeq \frac{-1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_2 h_3) + \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_3}{h_2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{h_2}{h_3} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_3} \right) \right], \quad (11.3.56)$$

где первый член взят при $\xi_1 + \eta$.

Поэтому, когда мембрана с натяжением T , бывшая первоначально сферической, совпадает с поверхностью $r = a + \eta(\xi_2, \xi_3)$, сила реакций на единицу поверхности мембраны равна TC_η , а приращение сверх равновесного значения силы реакции равно

$$\begin{aligned} TC_\eta + \frac{2T}{a} &\simeq -\frac{2T}{a+\eta} + \frac{2T}{a} + \frac{T}{a^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{T}{a^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi^2} \simeq \\ &\simeq \frac{T}{a^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{2T\eta}{a^2}. \end{aligned}$$

Если смещение равно $\eta = \eta_0 Y_{emn}(\vartheta, \varphi) e^{-i\omega t}$, то приращение силы реакции на единицу поверхности составит

$$-p = -(n-1)(n+2) \frac{T}{a^2} \eta_0 Y_{emn}(\vartheta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (11.3.57)$$

Это любопытный результат: функции углов Y оказываются собственными функциями оператора, измеряющего кривизну. Акустический импеданс мембраны для этого типа колебаний равен $-i\omega\rho_s h + i(n-1)(n+2)(T/\omega a^2)$. Тот же результат получается для нечетных функций Y_{omn} . Заметим, что при смещениях типа $n=1$ (например, $Y = \cos \vartheta$) в мембране не возникает восстанавливающей силы, что вполне естественно, так как подобное движение представляет собой смещение сферы как целого в ту или другую сторону и не вызывает изменения ее кривизны.

Если смещение η мембраны пропорционально определенной сферической гармонике Y_{emn} или Y_{omn} , то угловое движение внутри сферы должно иметь такую же зависимость от угла, как и это смещение:

$$\psi = A \frac{\cos}{\sin} (m\varphi) P_n^m (\cos \vartheta) j_n(kr) e^{-i\omega t}.$$

Отношение давления к радиальной скорости при $r=a$ для этого типа колебаний равно

$$z(a) = \frac{i\omega\rho j_n(ka)}{k j_n'(ka)} = -i\omega\rho a \operatorname{ctg} [\alpha_n(ka)],$$

где, как указано в таблице в конце этой главы, $\operatorname{tg} \alpha_n = -z j_n'(z)/j_n(z)$.

Собственные частоты колебаний мембраны и заключенного внутри нее воздуха получим, потребовав, чтобы импеданс мембраны равнялся импедансу заключенного внутри воздуха вблизи мембраны:

$$\operatorname{ctg} [\alpha_n(ka)] = \frac{\rho_s h}{\rho a} - \frac{(n-1)(n+2)}{(ka)^2} \frac{T}{\rho a c^2}, \quad n > 1. \quad (11.3.58)$$

Значения ka , полученные при решении этого уравнения, можно обозначить $\pi\gamma_{ns}$. Они могут быть использованы для определения резонансных частот системы $\omega_{ns} = \pi\gamma_{ns}c/a$ при $n > 1$. Для случая полной симметрии, когда $n=0$, эти частоты получаются из уравнения (11.3.54); в случае $n=1$, как уже отмечалось, нет вовсе восстанавливающей силы.

Колеблющаяся струна внутри сферы. В качестве второго примера рассмотрим гибкую струну, натянутую вдоль диаметра полой сферы. Этот диаметр будем считать совпадающим со сферической осью ($\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$). Радиус поперечного сечения струны η_1 много меньше радиуса сферы a . Пусть, далее, струна характеризуется натяжением T и массой на единицу длины ρ_s , а скорость распространения поперечных волн вдоль нее пусть равна c_s (скорость распространения акустических волн в воздухе внутри сферы обозначена через c). Предположим, что каким-нибудь образом эта струна приведена в колебание, соответствующее ее основному тону, так, что точки струны остаются в плоскости x, z . При этом струна взаимодействует с воздухом, заключенным внутри сферы, и задача состоит в вычислении результирующего акустического поля.

При изучении звуковой волны вблизи наружных стенок лучше всего использовать сферические координаты r, ϑ, φ , но когда мы имеем дело с явлениями вблизи поверхности струны, удобнее применить цилиндрические координаты $\eta = r \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta$ и φ (то же φ , что и для сферических координат). Мы рассматриваем колебания системы, состоящей из струны и воздуха, заключенного внутри сферы. Струна колеблется, «возбуждая» звуковые волны в воздухе, которые в свою очередь воздействуют на струну, «возбуждая» ее колебания. Взаимодействие колебаний происходит на поверхности струны.

Так как мы не можем решить эту задачу точно, то придется начать с некоторого приближения; мы задаемся некоторым колебанием или вынуждающей силой и определяем последующие колебания и силы, пока не возвратимся к первоначальному колебанию и не выясним, насколько оно соответствует выбранному приближению. Мы начинаем с задания силы,

воздействующей на струну, предполагая, что она не зависит от положения точки на струне и равна $F_0 e^{-i\omega t}$ на единицу длины струны. В этом случае смещение точки струны, находящейся на расстоянии z от середины, составит

$$\xi = \frac{F_0}{k_s^2 T} \left[\frac{\cos(k_s z)}{\cos(k_s a)} - 1 \right] e^{-i\omega t}, \quad k_s = \frac{\omega}{c_s}, \quad c_s^2 = \frac{T}{\rho_s}.$$

Так как движение происходит в плоскости x, z , то x -компонента скорости точки струны с координатой z равна $-i\omega\xi$, а радиальная компонента скорости воздуха у поверхности струны ($\eta = \eta_1$) равна

$$v_p = \frac{F_0}{i\omega\rho_s} \cos\varphi \left[\frac{\cos(k_s z)}{\cos(k_s a)} - 1 \right] e^{-i\omega t}.$$

Если бы струна была бесконечной и колебалась в свободном пространстве, то потенциал скоростей звуковой волны, излучаемой струной, был бы равен

$$\frac{F_0}{i\omega\rho_s} \cos\varphi \left[\frac{\cos(k_s z)}{\cos(k_s a)} \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_s^2}} \frac{Z_1(\eta\sqrt{k^2 - k_s^2})}{Z_1(\eta_1\sqrt{k^2 - k_s^2})} - \frac{Z_1(k\eta)}{kZ_1(k\eta_1)} \right] e^{-i\omega t},$$

где $k = \omega/c$, Z_1 — некоторая линейная комбинация J_1 и N_1 , удовлетворяющая краевым условиям в бесконечности, а Z_1' — ее производная. Если радиус струны много меньше, чем длина волны $2\pi/k$, то вблизи струны главным членом в Z является функция Неймана (за исключением того маловероятного случая, когда краевые условия могут быть удовлетворены вовсе без привлечения функции Неймана). Поэтому вблизи поверхности струны $Z_1(x) \simeq A/x$ и $Z_1'(x) \simeq -A/x^2$, а значит,

$$\psi_a \simeq \frac{F_0}{i\omega\rho_s} \cos\varphi \left[1 - \frac{\cos(k_s z)}{\cos(k_s a)} \right] \frac{\eta_1^2}{\eta}, \quad \eta_1 < \eta \ll \frac{2\pi}{k}. \quad (11.3.59)$$

Предположим далее, что радиус струны η_1 достаточно мал по сравнению с радиусом сферической оболочки a , так что присутствие сферы заметно не изменяет потенциал вблизи струны, хотя вблизи сферической стенки он изменяется значительно. Следовательно, в формуле Грина

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint [\psi(\mathbf{r}_0) \text{grad}_0 G - G \text{grad}_0 \psi(\mathbf{r}_0)] dS_0$$

на поверхности струны с незначительной погрешностью можно использовать функцию G и ее производную из (11.3.53). В рассматриваемом случае следует, конечно, взять функцию Грина, нормальная составляющая градиента которой при $r_0 = a$ равна нулю [т. е. функцию ψ_{mns}^e из (11.3.52)]. Таким образом, решение, удовлетворяющее краевым условиям Неймана при $r = a$, может быть представлено в виде интеграла по поверхности струны

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\eta_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{-a}^a \left[G \frac{\partial}{\partial r_0} \psi_a - \psi_a \frac{\partial}{\partial r_0} G \right]_{\eta_0 = \eta_1} dz_0,$$

где G определяется формулой (11.3.53), а ψ_a — формулой (11.3.59).

При интегрировании по φ_0 все члены ряда для G дают нуль, за исключением тех, которые содержат ψ_{mns}^e при $m = 1$. Собрав все такие члены, мы получим

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) = & \frac{F_0 \eta_1^2}{2\omega\rho_s a^2} \sum_{n,s} \frac{i^{-n} (\pi a_{ns})^3 (2n+1)}{n(n+1) [(\pi a_{ns})^2 - n(n+1)] [(\pi a_{ns})^2 - k^2 a^2]} \frac{1}{j_n^2(\pi a_{ns})} \cos\varphi P_n^1(\cos\vartheta) \times \\ & \times j_n\left(\frac{\pi a_{ns} r}{a}\right) \int_{-a}^a \left[\frac{\cos(k_s z_0)}{\cos(k_s a)} - 1 \right] dz_0 \int_0^{2\pi} e^{i(\pi a_{ns}/a) z_0 \cos u} P_n^1(\cos u) \sin^2 u du. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой (11.3.49), чтобы превратить $P_n^1(\cos \vartheta_0) j_n(\pi \alpha_{ns} r_0/a)$ в функцию от η_0 и z_0 , которую удобно дифференцировать по η_0 . В интегральном выражении (11.3.49) мы также положили $J_1(\pi \alpha_{ns} \eta_1 \sin u/a)$ равным $\pi \alpha_{ns} \eta_1 \sin u/2a$, поскольку η_1 значительно меньше a (это приближение непригодно для больших n или s , но соответствующие члены во всех случаях малы). Используем затем таблицу в конце гл. 10, чтобы выразить P_n^1 через производные и произвести интегрирование по u по частям (производим замену $x = \cos u$). В результате получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 e^{igzx} (1-x^2) \left[\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2-1)^n \right] dx = \\ & = 2i^{n+1} \frac{(gz/2)^{n+1}}{n!} \int_{-1}^1 e^{igzx} \left\{ -(1-x^2)^{n+1} + (1-x^2)^n \left[\frac{2(n+1)x}{igz} + \frac{n(n+1)}{(igz)^2} \right] \right\} dx = \\ & = i^{n+1} \sqrt{\pi} \frac{n+1}{\sqrt{gz/2}} \left\{ -J_{n+\frac{3}{2}}(gz) - \frac{n}{gz} J_{n+\frac{1}{2}}(gz) + J_{n-\frac{1}{2}}(gz) \right\} = \\ & = 2i^{n+1} (n+1) \left\{ \frac{n+1}{gz} j_n(gz) - 2j_{n+1}(gz) \right\}, \quad g = \frac{\pi \alpha_{ns}}{a}, \quad n > 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались одним из интегральных представлений функций Бесселя.

Чтобы вычислить коэффициенты разложения для ψ , следует полученное выражение проинтегрировать по z_0 . Поскольку мы изучаем только те силы, действующие на струну (и тем самым движения струны), которые симметричны по отношению к центру струны и сферы, в разложение войдут только звуковые волны, обладающие соответствующей симметрией и, значит, все члены с четными значениями n исчезнут. Интегралы для нечетных n не могут быть выражены в конечной форме и обычно их приходится подсчитывать численно. Мы можем положить

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \left[\frac{\cos(k_s z_0)}{\cos(k_s a)} - 1 \right] dz_0 \int_0^\pi e^{igz_0 \cos u} P_n^1(\cos u) \sin^2 u \, du = \\ & = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{2i^{n+1} (n+1) a}{\cos(k_s a)} A_n(k_s a; \pi \alpha_{ns}), & n = 1, 3, 5, \dots, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$A_n(\alpha; \beta) = \int_{-1}^1 [\cos(\alpha x) - \cos(\alpha)] \left[\frac{n+1}{\beta x} j_n(\beta x) - 2j_{n+1}(\beta x) \right] dx$$

— безразмерная функция параметров α, β , конечная для конечных действительных значений α, β .

Теперь можно написать

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) \simeq i \frac{F_0 \tau_{II}^2}{\omega \rho_s a} \sum_{n, s} \frac{(\pi \alpha_{ns})^2 (2n+1) A_n(k_s a; \pi \alpha_{ns})}{n [(\pi \alpha_{ns})^2 - n(n+1)] [(\pi \alpha_{ns})^2 - k^2 a^2]} \frac{\cos \varphi P_n^1(\cos \vartheta) j_n(\pi \alpha_{ns} r/a)}{\cos(k_s a) j_n^2(\pi \alpha_{ns})}, \quad (11.3.60)$$

где суммирование производится по нечетным значениям n . Сила, с которой звуковые волны действуют на единицу длины струны в направлении положительных x , равна интегралу от x -компоненты давления при $\eta = \eta_1$. Так, при $z = 0$ (середина струны) эта сила равна

$$F_s = -i\omega\rho\eta_1 \int_0^{2\pi} \psi\left(\eta_1, \frac{1}{2}\pi, \varphi\right) \cos\varphi d\varphi,$$

где параметр k , входящий в члены ka и $k_s a = kca/c_s$, пока остается неопределенным.

Эта сила F_s , вообще говоря, не равна первоначальной силе F_0 . Во-первых, она зависит от z , что не имеет места для F_0 . Во-вторых, она обычно значительно меньше, чем F_0 , благодаря безразмерному множителю $\rho\eta_1^3/\rho_s a$, который весьма мал, поскольку η_1 значительно меньше, чем a , и плотность воздуха ρ много меньше, чем ρ_s/η_1^2 . Однако в знаменателе каждого члена имеются два множителя $[(\pi\alpha_{ns})^2 - (ka)^2]$ и $\cos(k_s a) = \cos(kac/c_s)$; за счет этих множителей, которые могут быть весьма малыми, можно добиться равенства F_s и F_0 в каждой точке струны. Если приравнять F_s и F_0 во всех точках, то, мы, конечно, получим точное решение для одного из свободных колебаний системы струна — воздух. Для получения этого точного решения следовало бы использовать F_s вместо F_0 в нашем уравнении. В формуле для $F_0 A_n$ мы получили бы вместо $F_0 \left[\frac{\cos(k_s z_0)}{\cos(k_s a)} - 1 \right]$ выражение

$$\begin{aligned} \cos(k_s z_0) \left[\operatorname{tg}(k_s a) \int_0^{k_s a} F_s \left(\frac{\xi}{a} \right) \cos \xi d\xi - \int_{k_s z_0}^{k_s a} F_s \left(\frac{\xi}{a} \right) \sin \xi d\xi \right] - \\ - \sin(k_s z_0) \int_0^{k_s z_0} F_s \left(\frac{\xi}{a} \right) \cos \xi d\xi \end{aligned}$$

В результате получилось бы интегральное уравнение для F_s , которое, однако, слишком сложно для решения. Вместо этого мы предположим, что F_s для некоторых свободных колебаний почти постоянна и равна F_0 . Для некоторых из низших частот это почти верно, и мы можем получить приближенное решение, приняв F_s равным F_0 при $z_0 = 0$.

Резонансные частоты системы. Резонанс системы имеет место только в тех случаях, когда струна находится вблизи своего резонанса, т. е. при $\cos(kac/c_s) \simeq 0$, или когда близки к резонансу колебания воздуха внутри сферы, т. е. при $ka \simeq \pi\alpha_{ns}$. В первом случае энергия колебаний сосредоточена главным образом в струне и струна «вынуждает» колебания воздуха внутри сферы; во втором случае стоячая звуковая волна внутри сферы, обладая основной частью энергии, «вынуждает» колебания струны. В каждом из этих случаев, поскольку $\rho\eta_1^3/\rho_s a$ мало, взаимодействие между воздухом и струной слабое, и собственные частоты системы близки к собственным частотам либо струны, либо воздуха внутри сферы. Для нескольких первых собственных колебаний струны или воздуха внутри сферы, симметричных относительно $z = 0$, F_s почти не зависит от z , и F_s , полученная при помощи (11.3.60), приближенно равна F_0 .

Например, вблизи наинизшего звукового резонанса рассматриваемого типа симметрии имеем $k = \pi\alpha_{11}/a - \varepsilon$, где ε мало. В первом приближении по ε мы в ряде (11.3.60) ограничиваемся только членом $n = 1, s = 1$ и получаем

$$\varepsilon_{11} \simeq \frac{(\pi\eta_1^4/2\rho_s a^3) (\pi\alpha_{11})^2 A_1 (\pi\alpha_{11}c/c_s; \pi\alpha_{11})}{[(\pi\alpha_{11})^2 - 2] j_1^2 (\pi\alpha_{11}) \cos(\pi\alpha_{11}c/c_s)}. \quad (11.3.61)$$

При этом мы учли, что $P_1^1(0) = 1$ и $j_1(\pi\alpha_{11}\gamma_1/a) \simeq \frac{1}{3}(\pi\alpha_{11}\gamma_1/a)$. Это выражение служит для определения резонансной частоты по формуле

$$\nu_{11} \simeq \frac{c\alpha_{11}}{2a} - \frac{c\varepsilon_{11}}{2\pi}.$$

Для вычисления ψ при этом следует подставить в (11.3.60) $k_{11}a = \pi\alpha_{11} - \varepsilon_{11}a$ и $k_{11}ac/\varepsilon_s$ соответственно вместо ka и $k_s a$. В первом приближении следует рассмотреть только член $n = 1, s = 1$. Тогда

$$\psi_{11} \simeq F_0 \frac{3a}{\pi\alpha_{11}\gamma_1} \cos \varphi P_1^1(\cos \vartheta) j_1\left(\frac{\pi\alpha_{11}r}{a}\right),$$

где F_0 теперь постоянная, которую следует выбрать так, чтобы решение согласовывалось с заданной амплитудой колебаний струны или воздуха. Заметим, что если ν_{11} ниже наименьшей собственной частоты струны, то ν_{11} также ниже собственной частоты сферической полости без струны. В области частот ниже своей наименьшей собственной частоты струна действует как дополнительная нагрузка массой для колебаний воздуха.

Для наименьшего резонанса, для которого большая часть энергии сосредоточена в струне, мы принимаем $k = \pi c_s/2ac - \delta$ и получаем

$$\delta \simeq \frac{\pi r \eta_1^2}{3\rho_s a^3} \sum_{n,s} \frac{(\pi\alpha_{ns})^3 (2n+1) A_n \left(\frac{1}{2}\pi; \pi\alpha_{ns}\right)}{n [(\pi\alpha_{ns})^2 - n(n+1)] [(\pi\alpha_{11})^2 - (\pi c_s/2c)^2] j_n^2(\pi\alpha_{ns})}. \quad (11.3.62)$$

Зная δ , мы можем рассчитать колебания и струны и воздуха.

Случай, когда собственные частоты струны и сферы близки друг к другу, является случаем *вырождения*, и его следует рассмотреть отдельно. Когда наименьшая собственная частота полости $c\alpha_{11}/2a$ отличается от наименьшей собственной частоты струны $c_s/4a$ на малую величину $\Delta\nu$, т. е. когда $\pi c_s/2c = \pi\alpha_{11} + (2\pi a\Delta\nu/c)$ и $2\pi a\Delta\nu/c \ll 1$, мы полагаем $ka = \pi\alpha_{11} - \gamma$. Два допустимых значения ka , определяющих две резонансные частоты, при этом равны

$$(ka)_{\text{рез}} \simeq \pi\alpha_{11} + \frac{\pi a\Delta\nu}{c} \pm \sqrt{\left(\frac{\pi a\Delta\nu}{c}\right)^2 + K}, \quad (11.3.63)$$

где

$$K \simeq \frac{\pi r \eta_1^2 c_s}{2\rho_s a^2 c} \frac{(\pi\alpha_{11})^2 A_1(\pi\alpha_{11}c/c_s; \pi\alpha_{11})}{[(\pi\alpha_{11})^2 - 2] j_1^2(\pi\alpha_{11})}.$$

Как показано на рис. 11.7, когда $|\Delta\nu|$ больше чем $(c/\pi a)\sqrt{K}$, две допустимые частоты резко отличаются друг от друга; одна из них приближается к горизонтальной линии, соответствующей решению (11.3.61), а другая — к решению (11.3.62). Когда собственная частота отдельно взятой струны приближается к собственной частоте резонатора без струны ($\Delta\nu \rightarrow 0$), две резонансные частоты не сливаются, а остаются разделенными некоторым расстоянием, которое при $\Delta\nu = 0$ пропорционально \sqrt{K} . Поэтому, когда $\Delta\nu$ меняет знак, тип колебания с концентрацией энергии в струне (диагональная линия) переходит в тип колебания с концентрацией энергии в звуковой волне (горизонтальная линия), и наоборот. Очевидна аналогия между этим фактом и известными свойствами простых связанных осцилляторов.

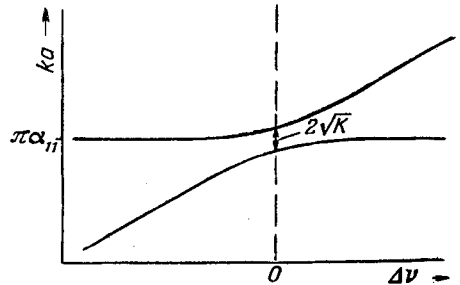


Рис. 11.7. Поведение резонансных частот вблизи точки вырождения $\Delta\nu = 0$ [см. формулу (11.3.63)]; K — постоянная связи.

Излучение сферы. Для решения внешних задач введем фазовые углы, аналогичные тем, которые уже применялись в задачах об излучении и рассеянии на цилиндре (см. стр. 351 и таблицы в конце этой главы):

$$\begin{aligned} j_n(z) &= D_n(z) \sin[\delta_n(z)], & \frac{d}{dz} j_n(z) &= -D'_n(z) \sin[\delta'_n(z)]; \\ n_n(z) &= -D_n \cos \delta_n, & \frac{d}{dz} n_n(z) &= D'_n \cos \delta'_n; \\ h_n(z) &= -iD_n e^{i\delta_n}, & \frac{d}{dz} h_n(z) &= iD'_n e^{i\delta'_n}. \end{aligned} \quad (11.3.64)$$

Потенциал скоростей звуковых волн вне сферы радиуса a , радиальная скорость на поверхности которой равна $v_0(\vartheta, \varphi) e^{-i\omega t}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi ik} \sum_{m, n} \varepsilon_m (2n+1) \frac{(n-m)! e^{-i\delta'_n(ka)}}{(n+m)! D'_n(ka)} h_n(kr) P_n^m(\cos \vartheta) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^\pi v_0(\vartheta_0, \varphi_0) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0. \end{aligned} \quad (11.3.65)$$

Потенциал скоростей, радиальная скорость и давление на больших расстояниях от сферы при этом равны

$$\begin{aligned} \psi &\simeq \frac{ca}{ikr} e^{ik(r-ct)} f(\vartheta, \varphi), & v_r &\simeq \frac{ca}{r} e^{ik(r-ct)} f(\vartheta, \varphi), \\ p &\simeq \frac{\rho c^2 a}{r} e^{ik(r-ct)} f(\vartheta, \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\vartheta, \varphi) &= \frac{-i}{cka} \sum_{n, m} \frac{i^{-n} \varepsilon_m}{4\pi} (2n+1) \frac{(n-m)! e^{-i\delta'_n}}{D'_n} P_n^m(\cos \vartheta) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^\pi v_0(\vartheta_0, \varphi_0) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0. \end{aligned} \quad (11.3.66)$$

Средняя интенсивность S излучаемого звука в точке (r, ϑ, φ) ($r \gg a$) равна $\frac{1}{2} |pv_r|$, так что

$$S = \frac{\rho c^3 a^2}{2r^2} |f(\vartheta, \varphi)|^2,$$

и полная мощность излучения колеблющейся сферы выражается формулой

$$\begin{aligned} P &= \frac{\rho c^3}{8\pi k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \int_0^\pi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \times \\ &\times \frac{v_0(\vartheta_0, \varphi_0) v_0(\vartheta_1, \varphi_1)}{cD'_n(ka) cD'_n(ka)} P_n [\cos \vartheta_0 \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_0 \sin \vartheta_1 \cos(\varphi_0 - \varphi_1)]. \end{aligned} \quad (11.3.67)$$

Для очень длинных волн ($ka \ll 1$), как и при излучении цилиндрических волн, формула упрощается. Приближенные формулы показывают, что при этом $1/D'_0(ka) \simeq (ka)^2$ и $1/D'_n$ для $n > 0$ убывают как высшие степени ka ; $\delta'_0(ka) \simeq (1/3)(ka)^3$ и δ'_n при $n > 0$ является также величиной более высокого порядка малости. Поэтому, если интеграл от $v_0(\vartheta, \varphi)$ по φ и ϑ не равен нулю, то

$$f(\vartheta, \varphi) \simeq \frac{-ika}{4\pi c} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^\pi v_0(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0, \quad ka \rightarrow 0.$$

Излучаемая волна сферически симметрична, как если бы сфера расширялась и сжималась равномерно по всей поверхности. Величина Q , равная

$$Q = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{\pi} v_0(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0, \quad f(\vartheta, \varphi) \simeq -i \frac{kQ}{4\pi ac},$$

называется *эквивалентной производительностью* колеблющейся сферы как источника излучения. Интенсивность излучения на расстоянии r от центра сферы для предельного случая длинных волн равна

$$S \simeq \frac{\rho c k^2 Q^2}{32\pi^2 r^2} = \frac{\rho \omega^2 Q^2}{32\pi^2 c r^2}, \quad ka \rightarrow 0,$$

а предельное выражение для полной излучаемой сферой мощности имеет вид

$$P \simeq 4\pi S r^2 \simeq \frac{\rho \omega^2 Q^2}{8\pi c}, \quad ka \rightarrow 0.$$

Очень короткие волны стремятся распространяться вонне радиально от каждой точки сферы, так что угловая зависимость на любом расстоянии такая же, как угловая зависимость движения точек поверхности сферы. Как показывают таблицы в конце этой главы, при $ka \gg 1$ фазовый угол $\delta'_n(ka)$ для $n < N = \sqrt{ka}$ приближенно равен $ka - \pi(n+1)/2$, а амплитуды $D'_n(ka)$ равны $1/ka$, в то время как для $n > N$ амплитуды D'_n при $n \rightarrow \infty$ неограниченно возрастают. Поэтому функция углового распределения (11.3.66) приобретает вид

$$f(\vartheta, \varphi) \simeq \frac{1}{c} \sum_{m,n} \frac{\varepsilon_m}{4\pi} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{\pi} v_0(\vartheta_0, \varphi_0) \times \\ \times P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 = \frac{v_0(\vartheta, \varphi)}{c}, \quad ka \rightarrow \infty,$$

так что для очень коротких волн $v_r \simeq [av_0(\vartheta, \varphi)/r] e^{ik(r-ct)}$ и $p = \rho cv_r$; отсюда $S \simeq (\rho ca^2/r^2) |v_0(\vartheta, \varphi)|^2$ при $ka \rightarrow \infty$. Этот результат аналогичен полученному на стр. 353 для полярных координат.

Излучение диполя. Сфера, сжимающаяся и расширяющаяся равномерно по всей поверхности, представляет собой пример источника простейшего типа; следующим по простоте является случай, когда сфера колеблется как целое взад и вперед вдоль оси z . Если смещение вдоль оси z равно $Ae^{-i\omega t}$, то радиальная скорость поверхности сферы в точке (a, ϑ, φ) равна $-i\omega A \cos \vartheta e^{-i\omega t}$, и функция углового распределения f имеет вид

$$f(\vartheta, \varphi) = i \frac{A}{a} \frac{e^{-i\delta'_1(ka)}}{D'_1(ka)} \cos \vartheta,$$

а излучаемая мощность равна

$$P = \frac{2\pi \rho c^3 |A|^2}{3 [D'_1(ka)]^2} \simeq \begin{cases} \frac{1}{6} \pi \rho c^3 k^6 a^6 |A|^2, & ka \rightarrow 0, \\ \frac{2}{3} \pi \rho c^3 k^2 a^2 |A|^2, & ka \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Избыточное давление волны, вызванной движением сферы, вблизи сферической поверхности равно

$$p = \rho c \omega A \frac{D_1(ka)}{D'_1(ka)} e^{i(\delta_1 - \delta'_1) - i\omega t} \cos \vartheta,$$

где $-i\omega A$ является, очевидно, амплитудой скорости движения сферы. Полная сила реакции поля излучения, препятствующая движению сферы,

равна интегралу по сфере от z -компоненты вектора $r\mathbf{p}_0$, где \mathbf{p}_0 — единичный вектор нормали к поверхности сферы. Опуская временной множитель $e^{-i\omega t}$, мы получаем

$$F = \frac{4}{3} \pi a^2 \rho c \omega A \frac{D_1}{D_1'} e^{i(\delta_1 - \delta_1')} = -\frac{4}{3} \pi a^2 \rho c \omega A \frac{h_1(ka)}{h_1'(ka)} = \\ = -\frac{4}{3} \pi a^2 \rho c \frac{\omega^2 (\omega + i\omega_0)}{[\omega + \omega_0 (i+1)] [\omega + \omega_0 (i-1)]} A, \quad \omega_0 = \frac{c}{a}.$$

Вместо h_1 и h_1' мы подставили их выражения через $ka = \omega/\omega_0$, имеющиеся в таблицах в конце этой главы. Импеданс излучения сферы для колебательного движения такого типа поэтому равен

$$Z_r = \frac{F}{-i\omega A} = M_a \frac{\omega\omega_0 (\omega + i\omega_0)}{\omega^2 + 2i\omega_0\omega - 2\omega_0^2},$$

где $M_a = (4/3) \pi a^3 \rho$ — масса воздуха в объеме сферы. При низких частотах ($\omega \ll \omega_0 = c/a$) имеем чисто реактивный импеданс $-(1/2) i\omega M_a$, эквивалентный нагрузке массой $M_a/2$; при высоких частотах ($\omega \gg \omega_0$) имеем чисто активный импеданс $(4/3) \pi a^2 \rho c$.

Предположим теперь, что сфера имеет массу M_0 . Тогда комбинированный импеданс механической массы и излучения равен $Z_r - i\omega M_0$, и если сила $F_\omega e^{-i\omega t}$ приложена к сфере в направлении оси z , то скорость сферы и потенциал скоростей звуковой волны на больших расстояниях от сферы выражаются формулами

$$U_\omega = \frac{(F_\omega M_0 / -i\omega) [\omega + \omega_0 (i+1)] [\omega + \omega_0 (i-1)] e^{-i\omega t}}{[M_0 \omega + i\omega_0 (M_0 + M_a/2) + \omega_0 \sqrt{M_0^2 - M_a^2/4}]} \times \\ \times [M_0 \omega + i\omega_0 (M_0 + M_a/2) - \omega_0 \sqrt{M_0^2 - M_a^2/4}]^{-1} \\ \psi_\omega \simeq \frac{(F_\omega M_0 a c / r) \exp \left\{ i\omega \left[\frac{r-a}{c} - t \right] \right\} \cos \vartheta}{\{M_0 \omega + i\omega_0 (M_0 + M_a/2) + \omega_0 \sqrt{M_0^2 - M_a^2/4}\}} \times \\ \times [M_0 \omega + i\omega_0 (M_0 + M_a/2) - \omega_0 \sqrt{M_0^2 - M_a^2/4}]^{-1}.$$

Теперь при помощи метода преобразования Фурье или Лапласа можно рассмотреть неустановившиеся колебания сферы и излучение сферы при воздействии на нее силы, приложенной в направлении оси z . Если, например, сообщить сфере единичный импульс при $t=0$, то потенциал скоростей в момент t в точке (r, ϑ, φ) будет равен

$$g(\mathbf{r}|t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_\omega}{F_\omega} d\omega = \begin{cases} 0, & ct < r-a, \\ \frac{a^2 \cos \vartheta}{r \sqrt{M_0^2 - M_a^2/4}} \exp \left[\left(1 + \frac{M_a}{2M_0} \right) \left(\frac{r-a}{a} - \frac{ct}{a} \right) \right] \times \\ \times \sin \left[\sqrt{1 - \left(\frac{M_a}{2M_0} \right)^2} \left(\frac{ct}{a} - \frac{r-a}{a} \right) \right], & ct > r-a \end{cases}$$

Колебание существенно затухает; оно заметно только на первой половине длины волны. Отметим, между прочим, что если масса сферы значительно больше, чем масса воздуха в объеме сферы, то длина излучаемой волны равна $2\pi a$.

Излучение при неустановившемся движении сферы, вызванном произвольной силой $f(t)$, приложенной к сфере, можно определить по формуле (11.1.15).

Излучение группы источников. Если излучение создается не колебаниями поверхности сферы, а группой источников, находящихся внутри

сферической области радиуса a , то для расчета поля излучения можно воспользоваться функцией Грина (11.3.44). Предположим, что плотность источников в единице объема равна $q(r, \vartheta, \varphi) e^{-i\omega t}$, причем q обращается в нуль при $r > a$. Тогда потенциал скоростей при $r \gg a$ имеет вид

$$\psi \simeq (e^{ikr - i\omega t}/r) f(\vartheta, \varphi),$$

где

$$\begin{aligned} f(\vartheta, \varphi) &= \iiint q(x_0, y_0, z_0) e^{-i(k/r)(xx_0 + yy_0 + zz_0)} dV_0 = \\ &= \sum_{m,n} \varepsilon_m i^{-n} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] d\varphi_0 \int_0^\pi P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \int_0^a q(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) j_n(kr_0) r_0^2 dr_0. \end{aligned} \quad (11.3.68)$$

Сравним эти формулы с аналогичными формулами (10.3.42) и (10.3.44) для статического случая. Разложение по сферическим гармоникам мало отличается от (10.3.42), ибо при $n > ka$ интегралы в этих двух выражениях мало отличаются друг от друга. Однако в нашем случае все члены, соответствующие различным сферическим гармоникам, умножаются на одну и ту же функцию от r , а именно на e^{ikr}/r , а не на различные степени $1/r^{n+1}$. Поле излучения для всех высших типов сферических гармоник убывает с расстоянием значительно медленнее, чем статическое поле. Интеграл, на который умножается сферическая гармоника Y_{emn} или Y_{omn} , представляет собой mn -ю компоненту плотности распределения источников.

Интеграл по x, y, z , однако, в большей мере отличается от своего статического аналога. Прежде всего зависимость от x_0, y_0, z_0 , фигурирующая под интегралом, выражается через показательную функцию, а не через алгебраическую.

Если ka больше единицы, то разложение экспоненты по степеням x, y, z сходится медленно и непосредственное интегрирование экспоненты возвращает нас ко второй формуле, содержащей сферические гармоники.

Если, однако, $ka < 1$, то разложение экспоненты в ряд сходится быстро. При этом нулевой член представляет собой полную *производительность источников* $\iiint q dV$. Первые члены разложения $f(\vartheta, \varphi)$ по x, y, z равны $-ikx/r \iiint x_0 q(x_0, y_0, z_0) dV_0$ и аналогично для y и z . Интеграл, входящий в это выражение, называется x -компонентой *дипольного момента* распределения источников (см. стр. 260). Члены второго порядка содержат интегралы, называемые *квадрупольными моментами*, и т. д. Соотношения между этими *мультипольными моментами* и интегралами по сферическим гармоникам такое же, как и в рассмотренном на стр. 263 статическом случае.

Излучение поршня, являющегося частью сферы. Пусть часть сферы (радиуса a) $0 < \vartheta < \vartheta_0$ представляет собой поршень, движущийся с радиальной скоростью $Ue^{-i\omega t}$, а остальная часть сферы неподвижна. Тогда, вычисляя интеграл (11.3.65), получаем выражение для потенциала

скоростей вне сферы

$$\psi = \frac{Ue^{-i\omega t}}{2ik} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i\delta'_n(ka)}}{D'_n(ka)} [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)] P_n(\cos \vartheta) h_n(kr). \quad (11.3.69)$$

Коэффициент в скобках при $n = 0$ равен $1 - \cos \vartheta_0$.

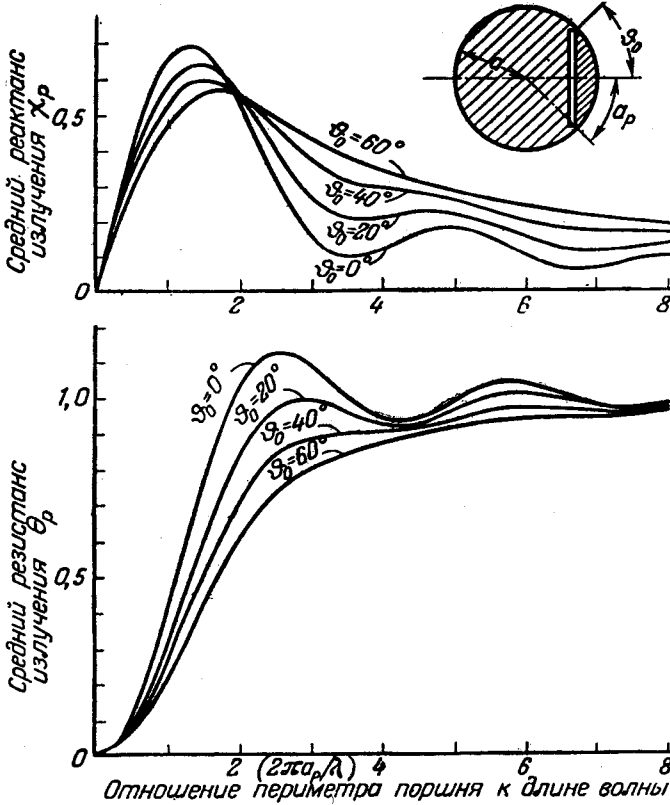


Рис. 11.8. Активная и реактивная составляющие акустического импеданса для случая поршня, являющегося частью сферы.

Полный импеданс поршня равен $\rho c (4\pi a^2) \sin^2(\vartheta_0/2) (\theta_p - i\chi_p)$.

На больших расстояниях от сферы это выражение переходит в следующее:

$$\psi \approx \frac{-Ue^{i\hbar(r-ct)}}{2k^2 r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i\delta'_n - i\pi/2}}{D'_n(ka)} [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)] P_n(\cos \vartheta).$$

На поверхности сферы давление равно $(ikrc\psi)_{r=a}$; интегрируя по поверхности поршня ($0 < \vartheta < \vartheta_0$), получаем

$$F = \frac{i\rho c}{2} Ue^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(ka)}{h'_n(ka)} \frac{2\pi a^2}{2n+1} [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)]^2 =$$

$$= 4\pi a^2 \rho c Ue^{-i\omega t} \sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta_0\right) [\theta_p - i\chi_p],$$

где

$$\theta_p = \frac{1}{4 \sin^2(\vartheta_0/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)]^2}{(2n+1)(ka)^2 [D'_n(ka)]^2}, \quad (11.3.70)$$

$$\chi_p = \frac{1}{4 \sin^2(\vartheta_0/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)]^2}{2n+1} \frac{D_n(ka)}{D'_n(ka)} \cos[\delta_n(ka) - \delta'_n(ka)].$$

На рис. 11.8 изображены графики величин θ_p и χ_p , как функций от отношения эквивалентного периметра поршня к длине волны $2\pi a_p/\lambda = 2ka \sin(\vartheta_0/2)$. Заметим, что для длинных волн (по сравнению с $2\pi a_p$) активная часть импеданса меньше реактивной; последняя представляет собой реактивный импеданс эквивалентной механической массы, пропорциональный k . Для коротких волн $\theta_p \simeq 1$ и $\chi_p \simeq 0$, так что полный импеданс действителен и равен произведению ρc на площадь поршня $\pi a_p^2 = 4\pi a^2 \sin^2(\vartheta_0/2)$.

Рассеяние плоской волны на сфере. На стр. 354–359 в связи с задачей о рассеянии на круглом цилиндре были рассмотрены общие методы и принципы расчета рассеяния плоских волн. При изучении рассеяния на сфере мы исходим из разложения плоской волны (11.3.45). Если в силу краевых условий ψ равно нулю при $r = a$, то решение принимает вид

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos \vartheta) \left[j_n(kr) - \frac{j_n(ka)}{h_n(ka)} h_n(kr) \right] e^{-i\omega t} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos \vartheta) e^{-i\delta_n(ka)} \{ \cos \delta_n j_n(kr) + \sin \delta_n n_n(kr) \} e^{-i\omega t} = \\ &= e^{ik(z-ct)} + \psi_s e^{-i\omega t}, \\ \psi_s &= - \sum_n (2n+1) i^{n+1} e^{-i\delta_n(ka)} \sin[\delta_n(ka)] P_n(\cos \vartheta) h_n(kr). \end{aligned} \quad (11.3.71)$$

Амплитуда рассеянной волны на больших расстояниях от сферы, отношение S интенсивности рассеянной волны к интенсивности падающей и отношение Q полной рассеянной мощности к интенсивности падающей волны (эффективное поперечное сечение рассеяния сферы) выражаются формулами

$$\begin{aligned} \psi_s &\simeq - \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_n (2n+1) e^{-i\delta_n} \sin \delta_n P_n(\cos \vartheta), \\ S &= \frac{1}{k^2 r^2} \sum_{m,n} (2m+1)(2n+1) \cos(\delta_m - \delta_n) \sin \delta_m \sin \delta_n P_m(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta), \\ Q &= 4\pi a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(ka)^2} \sin^2[\delta_n(ka)]. \end{aligned} \quad (11.3.72)$$

Эффективное поперечное сечение Q можно вычислить и иным путем, который окажется полезным позднее, когда мы будем изучать поглощение сферой. Мы найдем Q , вычислив работу, произведенную давлением падающей волны на поверхности сферы за единицу времени, и разделив ее

на интенсивность падающей волны $\frac{1}{2} \rho c k^2$. Давление падающей волны $i\omega r\psi$ на поверхности сферы равно

$$p_0 = i\rho c k \sum i^n (2n+1) P_n(\cos \vartheta) j_n(ka),$$

а истинная скорость (мы имеем в виду составляющую скорости по внутренней нормали) при $r = a$ равна

$$\begin{aligned} -v_r &= -k \sum i^n (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \frac{e^{-i\delta_n}}{D_n} [-n_n(ka) j'_n(ka) + n'_n(ka) j_n(ka)] = \\ &= -\frac{k}{(ka)^2} \sum i^n (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \frac{e^{-i\delta_n}}{D_n}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались выражением для вронскиана $\Delta(j_n, n_n) = 1/(ka)^2$. Мощность, отбираемая у волны на поверхности сферы, равна интегралу от $\text{Re}(-\bar{p}_0 v_r)/2$ по поверхности сферы:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \text{Re}[-\bar{p}_0 v_r] dA &= \frac{1}{2} \rho c k^2 \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \text{Re} \left\{ \sum (2n+1) i e^{-i\delta_n} \frac{j_n(ka)}{D_n(ka)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \rho c k^2 \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum (2n+1) \sin^2 \delta_n. \end{aligned}$$

Частное от деления этой мощности на интенсивность падающей волны $(1/2) \rho c k^2$ как раз равно Q . Мощность, передаваемая падающей волной сфере, переходит в этом случае целиком в рассеянную волну. Для случая краевых условий Неймана, когда в формулу (11.3.72) вместо δ_n подставляется δ'_n , величина v_r равна нулю при $r = a$; в этом случае нужно сосчитать произведение истинного давления на радиальную скорость падающей волны, которое может быть представлено в виде $\text{Re}(-\bar{p}_{0r})/2$.

Для длинных волн ($ka \ll 1$) $\delta_0 \simeq ka$, $\delta_1 \simeq (ka)^3/3$ и т. д., так что в первом приближении при условиях Дирихле

$$S \simeq \left(\frac{a}{r}\right)^2, \quad Q \simeq 4\pi a^2, \quad ka \rightarrow 0.$$

В этом предельном случае рассеяние сферически симметрично, и предельное эффективное поперечное сечение Q больше, чем геометрическое поперечное сечение πa^2 . В случае условий Неймана выражение для Q содержит δ'_n вместо δ_n , и асимптотическое выражение для Q при $ka \rightarrow 0$ равно $(4/9) \pi a^2 (ka)^4$. Эта величина значительно меньше, чем πa^2 , поскольку $ka \ll 1$. Как уже упоминалось в связи с изучением рассеяния на цилиндре, длинные волны в случае условий Дирихле рассеиваются сильнее, чем при условиях Неймана.

В случае очень коротких волн рассеянная волна распадается на две части: на тенеобразующую волну, распространяющуюся в направлении плоской волны, и отраженную волну, распространяющуюся по всем направлениям. При ka большом $\delta_n(ka)$ велико при $n < ka$ и мало при $n > ka$. Следовательно, приближенное выражение для эффективного поперечного сечения рассеяния имеет вид

$$Q \simeq \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=0}^{ka} (2n+1) = 2\pi a^2, \quad ka \gg 1,$$

где вместо $\sin^2 \delta_n$ подставлено его среднее значение $1/2$ для $n < ka$, а быстро сходящаяся часть ряда при $n > ka$ отброшена. Это эффективное поперечное сечение равно удвоенному геометрическому поперечному сечению πa^2 . Это объясняется тем, что оно включает в себе части, соответ-

ствующие и тенеобразующей и отраженной волне. Для каждой из них поперечное сечение равняется πa^2 .

Ниже в этой главе мы покажем, что если ka очень велико, то интенсивность рассеяния приобретает вид

$$S \simeq \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a^2}{4r^2} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{1}{2} \vartheta\right) J_1^2(ka \sin \vartheta).$$

Первый член этой формулы соответствует равномерно распределенной по всем направлениям отраженной волне, полная мощность которой равна πa^2 . Второй член соответствует тенеобразующей волне: для подсчета интенсивности полного поля ее следует скомбинировать с падающей волной. Тенеобразующая волна имеет пик, направленный вперед ($\vartheta = 0$), величина которого в $ka/2$ раз больше, чем в других направлениях; по мере удаления от направления распространения падающей волны тенеобразующая волна быстро убывает и скоро становится меньше первого слагаемого. Зависимость интенсивности рассеянной волны от частоты для краевых условий Неймана ($v_r = 0$ при $r = a$) показана на рис. 11.9. В этом случае диаграмма рассеяния искажена даже для длинных волн, а характер ее для коротких волн, когда впереди пик, такой же, как и в случае условий Дирихле.

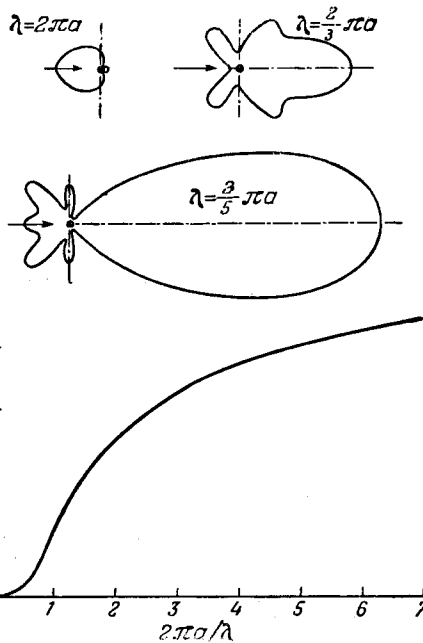


Рис. 11.9. Интенсивность рассеянной волны и эффективное поперечное сечение рассеяния Q для случая рассеяния плоской волны с длиной волны λ на сфере радиуса a [$v_r(a) = 0$].

Представляют определенный интерес случаи, когда краевые условия при $r = a$ не сводятся ни к условиям Дирихле, ни к условиям Неймана. Иногда волны могут распространяться внутри сферы, но со скоростью, отличной от скорости распространения в воздухе, и, возможно, с поглощением. В таких задачах возникают два, несколько отличных друг от друга варианта краевых условий: в первом появляются общие однородные краевые условия при $r = a$, а во втором используется при $r < a$ эффективный показатель преломления. Первый вариант возникает, когда воздух не проникает глубоко внутрь сферы и поверхность лишь слегка деформируется под влиянием давления, но настоящего волнового движения внутри сферы не возникает. В этом случае мы можем принять с разумной степенью точности, что имеется акустический импеданс поверхности

$$Z = -\left(\frac{p}{v_r}\right)_a = -\left(\frac{i\omega\rho\psi}{\partial\psi/\partial r}\right)_a = R - iX,$$

более или менее независимый от угла падения волны, но изменяющийся с изменением ω .

Второй вариант более пригоден в тех случаях, когда колебания действительно проникают внутрь сферы $r = a$ и когда среда внутри сферы более или менее однородна, хотя ее свойства могут быть совершенно иными, нежели свойства окружающего сферу воздуха. В этом случае мы

можем рассматривать также колебания внутри (при $r < a$) сферы $r = a$ и согласовывать оба решения при $r = a$. Внутри сферы волновое уравнение имеет вид

$$\nabla^2 \psi - \left(\frac{n+iq}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

где $n+iq$ — комплексный показатель преломления среды внутри сферы. В обоих этих случаях энергия поглощается сферой (если только R_a или q не равно нулю) в противоположность случаям простых условий Дирихле или Неймана, где вся приходящая энергия вновь излучается вовне, частично в виде неискаженной плоской, а частично в виде рассеянной волны.

Рассеяние на сфере с комплексным показателем преломления. Рассмотрим здесь второй случай, когда колебания проникают внутрь сферы, причем среда внутри нее имеет показатель преломления $n+iq$ и эффективную плотность ρ_s , отличную от плотности воздуха ρ . Потенциал скоростей, давление и скорость плоской волны в этой среде соответственно равны

$$\psi = A e^{-kqx + ik(nx - ct)}, \quad p = i\omega \rho_s \psi, \quad v_x = (ikn - kq) \psi,$$

где, как и ранее, $k = \omega/c$. Средняя интенсивность этой волны в точке x равна $(1/2) \rho_s c n k^2 |A|^2 e^{-2kqx}$, что указывает на затухание колебаний во внутренней среде.

Конечные при $r < a$ решения для рассматриваемого показателя преломления, которыми удобно пользоваться для того, чтобы удовлетворить краевым условиям при $r = a$, имеют вид

$$\frac{\cos}{\sin} (m\vartheta) P_l^m (\cos \vartheta) j_l [k(n+iq)r].$$

Чтобы удовлетворить краевым условиям, нужно определить отношение радиальной составляющей градиента к величине потенциала при $r = a$. Как и при решении других задач, мы вводим углы

$$\operatorname{tg}[\alpha_n(z)] = -\frac{z j_n'(z)}{j_n(z)}, \quad \operatorname{tg}[\beta_n(z)] = -\frac{z n_n'(z)}{n_n(z)},$$

значения которых приведены в таблицах в конце этой главы. Для внутренних функций нам нужны только углы α_n для комплексного аргумента $k(n+iq)a$. Чтобы упростить запись, будем обозначать этот угол $\alpha_n^i = \alpha_n[k(n+iq)a]$. Далее потенциалы скоростей внутри и вне сферы должны сопрягаться при $r = a$ и потенциал вне сферы должен быть комбинацией плоской и рассеянной волны. Поэтому мы ищем эти потенциалы в виде

$$\psi = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) i^m A_m P_m(\cos \vartheta) j_m [k(n+iq)r] e^{-i\omega t}, & r < a, \\ \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) i^m P_m(\cos \vartheta) e^{-i\eta_m} [\cos(\eta_m) j_m(kr) + \sin(\eta_m) n_m(kr)] e^{-i\omega t}, & r > a, \end{cases}$$

где коэффициенты A_m и фазовые углы η_m должны быть определены таким образом, чтобы давление и радиальная скорость оставались непрерыв-

ными при $r = a$. Соответствующие равенства для m -х членов имеют вид

$$A_m i \omega \rho_s j_m [k(n+iq)a] = i \omega \rho e^{-i\eta_m} [\cos(\eta_m) j_m(ka) + \sin(\eta_m) n_m(ka)],$$

$$A_m k(n+iq) a j'_m [k(n+iq)a] = ka e^{-i\eta_m} [\cos(\eta_m) j'_m(ka) + \sin(\eta_m) n'_m(ka)].$$

Разделив одно равенство на другое, мы получаем

$$\frac{k(n+iq)a}{i_m [k(n+iq)a]} j'_m [k(n+iq)a] = -\operatorname{tg} \alpha_m^i = ka \frac{\rho_s j'_m(ka) + \operatorname{tg}(\eta_m) n'_m(ka)}{\rho j_m(ka) + \operatorname{tg}(\eta_m) n_m(ka)},$$

или

$$\operatorname{tg} \eta_m = \operatorname{tg} [\delta_m(ka)] \frac{\rho \operatorname{tg} \alpha_m^i - \rho_s \operatorname{tg} \alpha_m^0}{\rho \operatorname{tg} \alpha_m^i - \rho_s \operatorname{tg} \beta_m^0}, \quad (11.3.73)$$

где

$$\alpha_m^i = \alpha_m [k(n+iq)a], \quad \alpha_m^0 = \alpha_m(ka) \quad \text{и} \quad \beta_m^0 = \beta_m(ka).$$

Отсюда можно получить оба предельных случая, а также и все промежуточные. Например, если $\rho \gg \rho_s$, то $\eta_m \simeq \delta_m(ka)$, но если $\rho \ll \rho_s$, то $\eta_m \simeq \delta'_m(ka)$. Если $q > 0$, то углы η_m комплексные, и мы их обозначаем

$$\eta_m = \chi_m - i\kappa_m.$$

Значения χ и κ находим из равенства (11.3.73).

Выражение для рассеянной волны приобретает вид

$$\psi_s = - \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) e^{-i\eta_n} \sin \eta_n h_n(kr) \simeq$$

$$\simeq - \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) e^{-i\eta_n} \sin \eta_n, \quad r \rightarrow \infty.$$

Интенсивность рассеянной волны при единичной интенсивности падающей составляет

$$S = \frac{1}{4k^2 r^2} \sum_{m,n} (2m+1)(2n+1) P_m(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta) \times$$

$$\times [1 + \cos [2(\chi_m - \chi_n)] e^{-2(\kappa_m + \kappa_n)} - e^{-2\kappa_m} \cos(2\chi_m) - e^{-2\kappa_n} \cos(2\chi_n)],$$

и, наконец, эффективное поперечное сечение рассеяния, т. е. полная рассеянная мощность, приходящаяся на единицу интенсивности падающей волны, равна

$$Q_s = \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-2\kappa_n} [\operatorname{sh}^2 \kappa_n + \sin^2 \chi_n]. \quad (11.3.74)$$

Однако при наличии поглощения это не единственное эффективное поперечное сечение. Часть мощности теряется внутри сферы, не создавая излучения. Комбинация падающей плоской волны и рассеянной может быть представлена следующим образом:

$$e^{ikz} + \psi_s \simeq \frac{i}{2kr} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) [(-1)^n e^{-ikr} - e^{ikr-2i\eta_n}], \quad r \rightarrow \infty.$$

Первые члены соответствуют падающей плоской волне: поглощения или изменения фазы этой волны нет. С другой стороны, вторые члены, представляющие уходящие волны, искажены введением угла рассеяния η_n . Пока η_n действительно (пока $\kappa_n = 0$), из сферы излучается вовне столько же мощности, сколько ее поступает. Но если $\eta_n = \chi_n - i\kappa_n$ и $\kappa_n > 0$, то

излучаемая мощность меньше поступающей. Часть волны, которая поглощается внутри сферы и вовсе не выходит вовне, равна уменьшению полного излучения вовне. Мы составляем разность между излучаемой мощностью при отсутствии поглощения ($\kappa_n = 0$) $\frac{\pi}{k^2} \sum (2n+1)$ и излучаемой мощностью при наличии поглощения $\frac{\pi}{k^2} \sum (2n+1) e^{-4\kappa_n}$. Эта разность, равная

$$Q_a = \frac{2\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-2\kappa_n} \operatorname{sh}(2\kappa_n),$$

представляет собой мощность, поглощаемую сферой на единицу интенсивности падающей волны, и называется *эффективным сечением поглощения*.

Сумма двух названных эффективных сечений является *полным эффективным сечением*, т. е. частью энергии, потерянной плоской волной как на рассеяние, так и на поглощение:

$$Q_t = Q_s + Q_a = \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-\kappa_n} [\operatorname{ch} \kappa_n \sin^2 \chi_n + \operatorname{sh} \kappa_n \cos^2 \chi_n]. \quad (11.3.75)$$

Это последнее выражение для полного эффективного сечения можно также получить вычислением мощности, потерянной падающей плоской волной на поверхности сферы. Мы умножаем давление плоской волны на радиальную составляющую скорости у поверхности сферы, взятую со знаком минус, и складываем результат с произведением радиальной составляющей скорости плоской волны, взятой со знаком минус, на истинное давление у поверхности; в итоге получаем

$$\int \frac{1}{2} \operatorname{Re} [-p_0 v_r - p v_{0r}] dA = \frac{1}{2} \rho c k^2 4\pi a^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) D_n(ka) D'_n(ka) e^{-\kappa_n} \times \\ \times \{ \operatorname{ch} \kappa_n \sin \chi_n [\sin \delta_n \sin(\chi_n - \delta'_n) + \sin \delta'_n \sin(\delta_n - \chi_n)] + \\ + \operatorname{sh} \kappa_n \cos \chi_n [\sin \delta_n \cos(\chi_n - \delta'_n) - \sin \delta'_n \cos(\delta_n - \chi_n)] \},$$

что после некоторой перестановки членов и элементарных преобразований приводит к формуле (11.3.75).

Формулы, до некоторой степени подобные этим, можно получить, исходя из акустического импеданса материала. Если этот импеданс равен $Z = R - iX$, то краевое условие имеет вид

$$\left(\frac{p}{-v_r} \right)_a = \frac{-i\omega\rho\psi}{(\partial\psi/\partial r)_{r=a}} = Z = R - iX.$$

Выражение для ψ вне сферы, а также и формулы для эффективного поперечного сечения рассеяния, поглощения и полного эффективного сечения остаются те же самые, что и вышеприведенные. Единственное отличие представляет формула для фазового угла $\eta_n = \chi_n - i\kappa_n$, которая теперь имеет вид

$$\operatorname{tg} \eta_n = \operatorname{tg} \delta'_n \frac{iZ + \rho c k a \operatorname{ctg} \alpha_n}{iZ + \rho c k a \operatorname{ctg} \beta_n}.$$

При $Z \rightarrow \infty$ требуется, чтобы радиальная скорость равнялась нулю при $r = a$, и $\eta_n \simeq \delta'_n$; при $Z \rightarrow 0$ имеем $\eta_n \simeq \delta_n$.

Иногда для конкретных вычислений легче использовать вместо фазового угла η_m коэффициент отражения $R_m = e^{-2i\eta_m}$, выражая через него результат. Полное поле и поле рассеянной волны на больших расстояниях

от сферы имеют при этом вид

$$\psi \simeq \frac{i}{2kr} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_m(\cos \vartheta) [(-1)^m e^{-ikr} - R_m e^{ikr}],$$

$$\psi_s \simeq \frac{ie^{ikr}}{2kr} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_m(\cos \vartheta) (1 - R_m).$$

Эффективные сечения рассеяния и поглощения и полное эффективное сечение в этом случае выражаются значительно проще по формулам:

$$Q_s = \frac{\pi a^2}{k^2 a^2} \sum (2m+1) |1 - R_m|^2, \quad Q_a = \frac{\pi a^2}{k^2 a^2} \sum (2m+1) [1 - |R_m|^2],$$

$$Q_t = \frac{\pi a^2}{k^2 a^2} \sum (2m+1) [2 - R_m - \bar{R}_m]. \quad (11.3.76)$$

Формулы, выражающие коэффициент отражения R_m через внутреннее поле или импеданс поверхности, таковы:

$$-R_m = \frac{ka\rho_s \bar{h}'_m(ka) + \rho \operatorname{tg}(\alpha_m^i) \bar{h}_m(ka)}{ka\rho_s h'_m(ka) + \rho \operatorname{tg}(\alpha_m^i) h_m(ka)} = \frac{\rho c \bar{h}_m(ka) - iZ \bar{h}'_m(ka)}{\rho c h_m(ka) - iZ h'_m(ka)}. \quad (11.3.77)$$

Заметим, что если iZ или $\operatorname{tg}(\alpha_m^i)$ действительны, то $|R_m| = 1$ и $Q_a = 0$. Поскольку

$$R_m = e^{-2i\delta_m} \frac{[1 + (iZD'_m/\rho c D_m) \cos(\delta_m - \delta'_m)] + (Z/\rho c D_m^2 k^2 a^2)}{[1 + (iZD'_m/\rho c D_m) \cos(\delta_m - \delta'_m)] - (Z/\rho c D_m^2 k^2 a^2)},$$

значения ka , обращающие в нуль квадратную скобку, приводят к $R_m = -1$ и при этом полное эффективное сечение достигает наибольшего значения. Подобные резонансные пики встречаются как при рассеянии звуковых волн, так и при рассеянии нейтронов.

Рассеяние на резонаторе Гельмгольца. Другая весьма интересная задача, которую следует рассмотреть детально, — диффракция звуковой волны на полый сфере, снабженной круглым отверстием, диаметр которого мал по сравнению с диаметром сферы. Подобная сфера с отверстием является простейшим возможным видом *резонатора Гельмгольца*, и ее поведение в звуковом поле представляет значительный интерес. Обозначим радиус сферы через a и предположим, что центр отверстия расположен на оси z , так что отверстие находится между $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \vartheta_1$ (радиус отверстия при этом равен $a \sin \vartheta_1$), а твердая сферическая оболочка находится между $\vartheta = \vartheta_1$ и $\vartheta = \pi$.

Избыток давления в отверстии вызывает поток воздуха, входящего или выходящего через отверстие. Если радиус отверстия меньше длины волны, то поток вблизи отверстия будет подобен стационарному, описываемому формулой (10.3.58) и рассмотренному на страницах, следующих за этой формулой. Для дальнейшего нам достаточно только знать, что давление равномерно вдоль всего отверстия и что нормальная к плоскости отверстия составляющая скорости равна $C/\sqrt{a_h^2 - \eta^2}$, где a_h — радиус отверстия (в данном случае $a \sin \vartheta_1$) и η — расстояние в плоскости отверстия от его центра. В рассматриваемом здесь случае, когда a_h значительно меньше чем a , мы получим хорошее приближение, предположив, что в отверстии ρ постоянно и

$$v_r \simeq \frac{V}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_1}}, \quad 0 \leq \vartheta < \vartheta_1,$$

причем $v_r = 0$ при $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \pi$. Соотношение между постоянной V и давлением подлежит определению.

Предположим, что, каково бы ни было избыточное давление падающей волны вдоль площади отверстия, его среднее равно $p_0 e^{-i\omega t}$. Это давление действует как вынуждающая сила на воздух в отверстии, толкая его внутрь или вовне и вызывая колебания внутри и вне сферы. Потенциал скоростей этого вынужденного движения можно написать в виде

$$\psi_f = \begin{cases} a \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta) \frac{j_n(kr)}{ka j'_n(ka)} e^{-i\omega t}, & r < a, \\ a \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta) \frac{h_n(kr)}{ka h'_n(ka)} e^{-i\omega t}, & r > a; \end{cases} \quad (11.3.78)$$

так что радиальная составляющая скорости при $r = a$ равна

$$v_r = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta) e^{-i\omega t}.$$

Для определения точного решения нужно решить бесконечную систему уравнений для коэффициентов A_n . Как и на стр. 364, мы получим приближенное решение, задаваясь определенными соотношениями между A_n и решая уравнение относительно единственного оставшегося неизвестного V .

Чтобы аппроксимировать установившееся распределение скоростей в отверстии, радиальная составляющая скорости должна равняться (приближенно) $[V/\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_1}] e^{-i\omega t}$ при $0 \leq \vartheta < \vartheta_1$ и нулю при $\vartheta_1 < \vartheta \leq \pi$. Таблицы в конце гл. 10 содержат нужный ряд. Мы находим, что

$$V \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] P_n(\cos \vartheta) = \begin{cases} V/\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_1}, & 0 \leq \vartheta < \vartheta_1, \\ 0, & \vartheta_1 < \vartheta \leq \pi, \end{cases}$$

так что $A_n \simeq V \sqrt{2} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right]$, а значит, все A_n выражаются через одно неизвестное V .

В приближении, которое мы ищем, давление в отверстии должно быть равномерным. Но давление, вычисленное из ряда для $r < a$, не равно вычисленному из ряда для $r > a$; разность должна быть равна вынуждающему давлению $p_0 e^{-i\omega t}$, и это соотношение дает возможность определить величину V . Ряды для давления при $\vartheta = 0, r = a$ не сходятся, но разность между ними, как легко убедиться, сходится. Таким образом, уравнение для определения V имеет вид

$$\begin{aligned} p_0 &= i\rho c \sqrt{2} V \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] \left[\frac{j_n(ka)}{j'_n(ka)} - \frac{j_n(ka) + i n_n(ka)}{j'_n(ka) + i n'_n(ka)} \right] = \\ &= -i \sqrt{2} V \frac{\rho c}{k^2 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] \frac{e^{-i\delta'_n}}{(D'_n)^2 \sin(\delta'_n)}, \end{aligned}$$

где у δ'_n и D'_n подразумевается аргумент ka .

Сходимость может быть улучшена путем прибавления и вычитания ряда, ведущего себя при больших n подобно рассматриваемому. Для $n \gg ka$ мы имеем

$$\frac{e^{-i\delta'_n}}{(ka)^2 (D'_n)^2 \sin(\delta'_n)} \simeq ka \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{ka}{n} + \frac{ka}{n+1},$$

так что рядом сравнения будет

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}ka \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] \right\} = \\ & = \sqrt{8}ka \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) \operatorname{Im} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in\vartheta_1} \right] = -\sqrt{8}ka \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) \operatorname{Im} [\ln (1 - e^{i\vartheta_1})] = \\ & = \sqrt{2}ka (\pi - \vartheta_1) \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right), \quad m = n + 1. \end{aligned}$$

Следовательно, для вынуждающего давления мы получаем

$$p_0 = -\frac{\sqrt{2}\rho c V}{\sin(\vartheta_1/2)} \zeta(ka, \vartheta_1),$$

где величина

$$\begin{aligned} \zeta(ka, \vartheta_1) = & -ika \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) \left\{ (\pi - \vartheta_1) \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] \left[\frac{e^{-i\delta'_n}}{(ka)^2 (D'_n)^2 \sin \delta'_n} + \frac{1 - \delta_{0n}}{n} + \frac{1}{n+1} \right] \right\} \quad (11.3.79) \end{aligned}$$

может быть названа, по соображениям, которые вскоре станут ясными, *удельным импедансом* отверстия. Величина V не равна средней скорости по отверстию. Действительно, амплитуда полного потока выражается формулой

$$Q = 2\pi \int_0^{a_h} \frac{V y dy}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_1}} = 2\pi V a^2 \int_{\cos \vartheta_1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x - \cos \vartheta_1}} = 4\pi a^2 V \sqrt{2} \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right).$$

Но эта амплитуда равна амплитуде средней скорости, умноженной на площадь отверстия $4\pi a^2 \sin^2(\vartheta_1/2)$. Поэтому соотношение между V и амплитудой средней скорости v_0 имеет вид $V = (\sqrt{2}/2) \sin(\vartheta_1/2) v_0$. Следовательно, $p_0 = \rho c v_0 \zeta(ka, \vartheta_1)$ и $\zeta(ka, \vartheta_1)$ является акустическим импедансом отверстия (с учетом и внешних и внутренних колебаний), выраженным в единицах ρc .

Для длинных волн ($ka \ll 1$) этот импеданс принимает вид

$$\begin{aligned} \zeta \simeq & -ika \left[(\pi - \vartheta_1) \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) - \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) \right] \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) + \\ & + i \frac{3}{ka} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) + (ka)^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right), \quad ka \rightarrow 0, \\ \zeta \simeq & -i \left(\frac{1}{2} \pi ka \vartheta_1 \right) + i \frac{3\vartheta_1^2}{4ka} + \left(\frac{1}{2} ka \vartheta_1 \right)^2, \quad \vartheta_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для небольших значений ϑ_1 и ka механический импеданс воздуха в отверстии, т. е. отношение $\pi(a\vartheta_1)^2 p_0$ к v_0 , равен

$$\frac{F}{v_0} \simeq -i\omega \left(\frac{1}{2} \pi^2 a_h^3 \rho \right) + \frac{i}{\omega} (\pi a_h^2)^2 \frac{\rho c^2}{(4/3) \pi a^3} + \omega^2 (\pi a_h^2)^2 \frac{\rho}{4\pi c},$$

где $a_h \simeq a\vartheta_1$. Первый член этого выражения дает реактивную часть импеданса, связанную с определяемой формулой (10.3.60) эффективной массой воздуха в отверстии. Второй член представляет собой реактивную часть импеданса, связанную с упругостью воздуха внутри сферы и определяемую отношением удельной упругости воздуха ρc^2 к объему шара. Последний член — это активное сопротивление излучения, создаваемое

уходящими волнами. Резонанс имеет место при $\omega = \omega_0 \simeq \sqrt{3\vartheta_1^2 c^2 / 2\pi a^2}$, а также и при бóльших частотах, близких к тем, для которых $\sin \delta'_n$ обращается в нуль. Для учета вязкости воздуха приходится добавлять четвертый член, соответствующий сопротивлению трения при движении через отверстие.

Далее, нам следует согласовать это вынужденное движение с падающей волной. Пусть падающая плоская волна распространяется в направлении $\vartheta = \alpha$, $\varphi = 0$ по отношению к оси отверстия. Комбинация плоской и рассеянной волн, удовлетворяющая краевому условию $v_r = 0$ при $r = a$ (в нулевом приближении отверстие отсутствует), имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = & \sum_{m, n} \varepsilon_m (2n+1) i^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \vartheta) \times \\ & \times \left[j_n(kr) - \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} h_n(kr) \right] e^{-i\omega t} = e^{ih(z\cos\alpha + x\sin\alpha) - i\omega t} - \\ & - i \sum_n (2n+1) i^n P_n [\cos \alpha \cos \vartheta + \sin \alpha \sin \vartheta \cos \varphi] \times \\ & \times e^{-i\delta'_n(ka)} \sin[\delta'_n(ka)] h_n(kr) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (11.3.80)$$

Среднее по площади отверстия давление при этом равно

$$\begin{aligned} p_0 = & \frac{ik\rho c}{2\sin^2(\vartheta_1/2)} \sum_{n=0}^{\infty} i^n P_n(\cos \alpha) [P_{n-1}(\cos \vartheta_1) - P_{n+1}(\cos \vartheta_1)] \frac{e^{-i\delta'_n(ka)}}{(ka)^2 D'_n(ka)} \simeq \\ & \simeq ik\rho c \left[1 + \frac{3}{2} ika \cos \alpha \cos^2 \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) \right], \quad ka \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Чтобы получить ту часть волны, которая порождается движением воздуха в отверстии, это среднее давление нужно подставить в выражения для коэффициентов ряда (11.3.78):

$$A_n = -\frac{p_0}{\rho c \zeta(ka, \vartheta_1)} \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right].$$

Полное выражение для рассеянной волны, включая волну, обусловленную движением в отверстии, на больших расстояниях от резонатора принимает вид

$$\begin{aligned} \psi_s \simeq & -\frac{e^{ikr-i\omega t}}{kr} \sum_{m, n} \left\{ \varepsilon_m (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) e^{-i\delta'_n} \sin \delta'_n - \right. \\ & \left. - i^{-n} \frac{\delta_{0m} p_0}{k\rho c \zeta(ka, \vartheta_1)} \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] \frac{e^{-i\delta'_n}}{D'_n} \right\} \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta) \simeq \\ \simeq & -\frac{ae^{ikr-i\omega t}}{r} (ka)^2 \left\{ \frac{1}{3} - [\cos \alpha \cos \vartheta + \sin \alpha \sin \vartheta \cos \varphi] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} \left[\frac{\left(1 + \frac{3}{2} ika \cos \alpha \right) \left(1 - \frac{3}{2} ika \cos \vartheta \right)}{1 - (2\pi k^2 a^2 / 3\vartheta_1) - \frac{1}{3} i(ka)^3} \right] \right\}, \quad ka \rightarrow 0, \vartheta_1 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (11.3.81)$$

Отсюда можно получить выражения для интенсивности рассеянной волны и эффективного поперечного сечения рассеяния.

При очень большой длине волны часть волны, порождаемая отверстием, уничтожает сферически симметричную часть волны, рассеянную сферической оболочкой. Отверстие как бы «закрывает накоротко» сферу, уничтожая сферически симметричное и оставляя только «дипольное» рас-

сеяние. Единственным членом, содержащим ϑ_1 (в этом приближении), является реактивная часть импеданса, связанная с массой. Чем меньше отверстие, тем ниже резонансная частота резонатора $(ka)_0 \simeq \sqrt{3\vartheta_1/2\pi}$. При резонансе часть волны, порождаемая отверстием, сильнее, чем часть, рассеянная оболочкой, приблизительно в $(2\pi/3\vartheta_1)^{3/2}$ раз, что значительно больше единицы:

$$\psi_s \simeq i \frac{ae^{ikr-i\omega t}}{r} \sqrt{\frac{2\pi}{3\vartheta_1}}, \quad \omega = \omega_0, \quad \vartheta_1 \ll 1.$$

В первом приближении по ka и по ϑ_1 эффективное сечение рассеяния равно

$$Q \simeq 4\pi a^2 (ka)^4 \left\{ \frac{(2\pi k^2 a^2 / 3\vartheta_1)^2 + (k^3 a^3 / 3)^2}{[1 - (2\pi k^2 a^2 / 3\vartheta_1)]^2 + (k^3 a^3 / 3)^2} + 3 \right\}. \quad (11.3.82)$$

Оно много меньше площади сферы $4\pi a^2$ (покуда $ka < 1$), за исключением случая резонансной частоты резонатора, когда

$$Q \simeq \frac{24\pi}{\vartheta_1} \pi a^2, \quad ka = \sqrt{\frac{3\vartheta_1}{2\pi}}.$$

При этой частоте эффективное поперечное сечение рассеяния значительно больше, чем геометрическое поперечное сечение πa^2 .

Выражения для ψ_s и Q при резонансе существенно изменятся, если мы будем учитывать влияние вязкости. В основном влияние вязкости приводит к появлению дополнительного активного члена импеданса, возникающего вследствие течения через отверстие. Если амплитуды скоростей достаточно малы, так что отсутствуют завихрения, то эффект заключается в прибавлении действительного слагаемого к импедансу ζ , что приводит к появлению дополнительного слагаемого в знаменателе последней строки формулы (11.3.81) и превращает его в $1 - (2\pi k^2 a^2 / 3\vartheta_1) - i(ka)^3/3 - i\delta$. Знаменатель формулы (11.3.82) принимает при этом вид $[1 - (2\pi k^2 a^2 / 3\vartheta_1)]^2 + [(ka)^3/3 + \delta]^2$. Член δ зависит от частоты не так, как $(ka)^3/3$, и превосходит эту величину, хотя обычно в области частот, для которых наши формулы применимы, он меньше единицы. Поэтому выражения ψ_s , S и Q меняются незначительно, за исключением случая частот, близких к резонансным, когда $ka \simeq \sqrt{3\vartheta_1/2\pi}$. При учете вязкости пик резонанса оказывается не столь высоким, как было ранее. Например, Q при резонансе приближенно равно $\pi a^2 (3\vartheta_1/\pi\delta)^2$ вместо $\pi a^2 (24\pi/\vartheta_1)$; поскольку в большинстве случаев $(24\pi/\vartheta_1) > (3\vartheta_1/\pi\delta)^2 > 1$, пик все еще высок, хотя и не настолько, как при отсутствии вязкости.

Рассеяние на совокупности рассеивателей. К изучению диффракции волн на совокупности рассеивателей сводится широкий круг вопросов, начиная от голубизны неба до электропроводности металлов, от реверберации звука в морской воде до диффракции рентгеновских лучей. Детальное рассмотрение всего комплекса относящихся сюда задач увело бы нас слишком далеко и потребовало бы по меньшей мере дополнительной главы в книге. Вместо этого мы коснемся лишь некоторых простейших концепций и примеров.

Степень сложности подобных задач в значительной мере зависит от интенсивности рассеяния. Если эффективное поперечное сечение рассеяния составляет незначительную часть площади, облучаемой падающей волной, как это имеет место с рентгеновскими лучами или звуковыми волнами в «пузырящейся» воде, то с хорошим приближением можно считать, что рассеяние на каком-либо отдельном центре не зависит от нали-

чия других рассеивателей (множественностью рассеяния можно пренебречь). С другой стороны, для электронных волн в металле и для некоторых акустических случаев волна на каждом рассеивателе в значительной степени подвержена влиянию других рассеивателей и разделение на однократно или множественно рассеянные волны теряет свой смысл. Мы начнем рассмотрение вопроса с простого случая слабого рассеяния.

Обращаясь к рис. 11.10, допустим, что имеется N рассеивателей, и все они расположены внутри сферы радиуса a , причем n -й рассеиватель находится в точке, положение которой относительно центра сферы

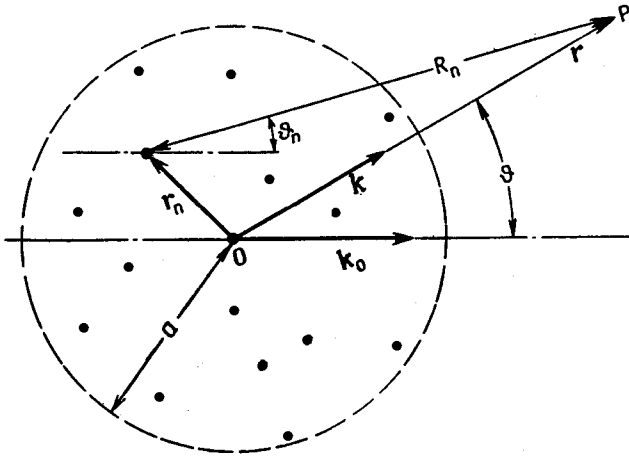


Рис. 11.10. Углы и векторы положения и распространения для случая рассеяния плоской волны на совокупности рассеивателей.

определяется вектором \mathbf{r}_n . Падающая плоская волна единичной интенсивности имеет вид $\psi_i = e^{ikr \cos \vartheta}$ (мы определили потенциал волны так, чтобы ее интенсивность равнялась $|\psi|^2$). Если полное рассеяние мало, то каждый рассеиватель ведет себя так, как если бы он был единственным; рассеянная им волна характеризуется функцией углового распределения $f(\vartheta)$. Следовательно, рассеянная волна в точке P имеет вид

$$\psi_s = \sum_{n=1}^N \frac{f(\vartheta_n)}{R_n} \exp [i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_n + kR_n)],$$

причем фаза в центре сферы положена равной нулю. При $r \gg a$ эта волна в первом приближении по a/r может быть представлена в виде

$$\psi_s \simeq \frac{e^{ikr}}{r} f(\vartheta) \sum_{n=1}^N \exp(i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}_n), \quad (11.3.83)$$

где

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}, \quad \mu = 2k \sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right).$$

Каждая составляющая волна в точке P имеет свою собственную фазу; в некоторых случаях все или почти все волны находятся в одинаковых фазах и тогда рассеянный пучок интенсивен. В других случаях совпадения фаз вовсе нет или же только немногие из составляющих волн имеют одинаковые фазы и тогда рассеянная волна заметно слабее. В первом случае рассеяние называется *когерентным*, во втором случае — *неко-*

герентным. Относительное количество и когерентных и некогерентных волн в рассеянной волне в какой-то мере зависит от степени равномерности расположения рассеивателей.

Чтобы получить экстремальный случай, предположим сначала, что все рассеиватели расположены в равноотстоящих друг от друга плоскостях, перпендикулярных вектору $\mu = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$. Предположим, что имеется M плоскостей на расстоянии d друг от друга и в каждой из этих плоскостей L рассеивателей, так что $LM = N$ и $d < 2a$. Направим ось x параллельно вектору μ ; тогда x -координата n -й плоскости рассеивателей равна $x = x_1 + (n-1)d$. Формула (11.3.83) приобретает тогда вид

$$\psi_s = \frac{e^{ikr}}{r} f(\vartheta) L e^{i\mu x_1} \sum_{n=1}^M e^{i\mu(n-1)d} = N \frac{e^{ikr}}{r} f(\vartheta) e^{i\mu(x_1 + \frac{1}{2}Md)} \frac{\sin \left[kMd \sin \left(\frac{1}{2}\vartheta \right) \right]}{M \sin \left[kd \sin \left(\frac{1}{2}\vartheta \right) \right]} \quad (11.3.84)$$

Для $\vartheta \rightarrow 0$, т. е. в направлении распространения падающей волны, рассеянная волна $\psi_s = Nf(\vartheta)(e^{ikr}/r)$ интерferирует с падающей и образует тень. Если величина $Mkd = 2\pi Md/\lambda$ значительно меньше, чем единица, то это предельное выражение пригодно для всех значений ϑ , и полная рассеянная волна точно равна произведению N на волну, рассеянную одним рассеивателем. В этом случае, т. е. если $2\pi a$ меньше, чем длина волны, все рассеянные волны когерентны и вся совокупность рассеивателей действует подобно единому рассеивателю с «силой» в N раз большей, чем у отдельного рассеивателя.

Если, однако, $Mkd > 1 \gg kd$ ($4\pi a > \lambda \gg 2\pi d$), то выражение для ψ_s , соответствующее отдельному рассеивателю, умножается на $\{\sin [Mkd \sin(\vartheta/2)] : Mkd \sin(\vartheta/2)\}$. Если ось x (перпендикулярная к плоскостям рассеивателей) остается при изменении ϑ параллельной вектору μ , то амплитуда рассеянной волны быстро убывает с ростом ϑ и, за исключением резко выраженного тенеобразующего луча, амплитуда рассеянной волны значительно меньше, чем N раз взятая амплитуда, соответствующая одному рассеивателю.

Наконец, когда длина волны λ меньше, чем $2\pi d$, мы должны воспользоваться точной формулой (11.3.84). В этом случае, если $kd \sin(\vartheta/2) = (2\pi d/\lambda) \sin(\vartheta/2)$ равно произведению целого числа m на π , то знаменатель вновь обращается в нуль и образуется сильный луч. Другими словами, сильный луч возникает, когда угол ϑ таков, что $2d \sin(\vartheta/2) = m\lambda$ (и когда μ остается перпендикулярным к плоскостям рассеивателей). Это и есть углы Брэгга для диффракции рентгеновских лучей на кристаллической решетке.

Когда μ не перпендикулярен к правильно расположенным плоскостям рассеивателей или когда рассеиватели не расположены в каком-либо регулярном порядке, разобраться в происходящем явлении легче не при помощи амплитуды ψ_s , а путем подсчета интенсивности рассеяния $|\psi_s|^2$ (при единичной интенсивности падающей волны). (Бесспорно, обычно легче экспериментально измерить $|\psi_s|^2$, чем ψ_s .) Из (11.3.83) мы имеем

$$S = \frac{|f(\vartheta)|^2}{r^2} \sum_{m, n=1}^N \exp(i\mu \cdot \mathbf{R}_{mn}),$$

где $\mu = 2k \sin(\vartheta/2)$, $\mu = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$ и $\mathbf{R}_{mn} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n$ представляет собой вектор, проведенный от n -го к m -му рассеивателю. В этой сумме выделим члены

с $m = n$:

$$S = \frac{|f(\vartheta)|^2}{r^2} \left[N + \sum_{n \neq m} \exp(i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{R}_{mn}) \right].$$

Первый член представляет интенсивность, которая получилась бы, если бы N рассеивателей посылали свои волны независимо друг от друга, так что складывались бы не амплитуды, а интенсивности этих волн. Это — *некогерентная* часть рассеяния. Второй член является *когерентной* частью. В нем учтены соотношения между фазами различных рассеянных волн. Если рассеиватели в среднем достаточно удалены друг от друга, т. е. если $\mu = 2k \sin(\vartheta/2)$ достаточно велико, так что $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{R}_{mn} > \pi/2$ для большинства m и n , и если рассеиватели так распределены, что величины $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{R}_{mn}$ распределяются случайно (т. е. если вектор $\boldsymbol{\mu}$ не перпендикулярен к плоскостям регулярно размещенных рассеивателей, как это было выше), то экспоненты в двойной сумме взаимно уничтожаются и остается только некогерентный член.

Однако для достаточно малого μ все же сохраняется и когерентная часть, которая доминирует в направлении распространения падающей волны. Если, например, рассеиватели случайно распределены внутри сферы радиуса a , так что *средняя* плотность их постоянна и равна $3N/4\pi a^3$, то наша сумма будет приблизительно равна

$$\begin{aligned} \frac{3N(N-1)}{4\pi a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx \int_0^a e^{i\mu r x} r^2 dr &= \frac{3N(N-1)}{a^3} \int_0^a \frac{\sin(\mu r)}{\mu r} r^2 dr = \\ &= 3N(N-1) \frac{\sin(\mu a) - \mu a \cos(\mu a)}{\mu^3 a^3} \simeq N(N-1) \left[1 - \frac{1}{10} \mu^2 a^2 \right], \quad \mu a \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где множитель $N(N-1)$ появляется, несмотря на суммирование по m от 1 до N , потому что при суммировании по n мы опускаем член $n = m$.

Эта формула показывает, что при $\mu a \ll 1$ [$2\pi a \sin(\vartheta/2) \ll \lambda$] полная интенсивность рассеянной волны имеет резко выраженный пик

$$S \simeq N^2 \frac{|f(\vartheta)|^2}{r^2} \left[1 - \frac{2}{5} \frac{N-1}{N} k^2 a^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \vartheta \right) + \dots \right],$$

пропорциональный *квадрату* числа рассеивателей. Здесь амплитуды всех рассеянных волн складываются и когерентное рассеяние преобладает. С другой стороны, при $4a \sin(\vartheta/2) \gg \lambda$ когерентное рассеяние относительно мало (в особенности, если N велико) и преобладает некогерентное рассеяние

$$S \simeq \frac{N |f(\vartheta)|^2}{r^2},$$

пропорциональное первой степени числа рассеивателей.

Рассеяние звука на пузырьках воздуха в воде. В предыдущих рассуждениях мы предполагали рассеяние «слабым», так что можно было пренебречь воздействием рассеянных волн на волны, падающие на рассеиватели. Для иллюстрации многократного рассеяния мы рассмотрим случай рассеяния звуковых волн на распределенных в воде малых пузырьках воздуха. Чтобы провести эти вычисления до конца, мы предположим, что радиус пузырьков мал по сравнению с длиной волны, так что рассеяние единственным пузырьком сферически симметрично. Прежде всего следует выяснить, что представляет собой рассеяние от одного единственного пузырька.

Поскольку размер пузырька значительно меньше длины волны, избыточное давление p падающей звуковой волны (по сравнению со средним давлением P) практически одинаково по всей поверхности пузырька. Пусть $p = p_0 e^{-i\omega t}$. Отношение избыточного давления p к изменению объема пузырька, если расширение воздуха в пузырьке происходит адиабатически, равно $p/P = -\gamma(dV/V)$, а так как для воздуха $\gamma P = \rho_a c_a^2$, то

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = i\omega p = \frac{3\rho_a c_a^2}{4\pi a^3} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{3\rho_a c_a^2}{a} v_r e^{-i\omega t},$$

где γ — отношение удельных теплоемкостей (для воздуха 1,4), а v_r — радиальная скорость поверхности пузырька.

Возникающее колебание поверхности пузырька вызывает в воде радиально расходящуюся звуковую волну

$$\psi_s = \frac{A}{r} e^{ikr - i\omega t}, \quad \omega = kc_w,$$

где ρ_w и c_w — соответственно плотность и скорость звука для воды, а ρ_a и c_a — соответствующие величины для воздуха при среднем давлении P . Избыточное давление падающей и рассеянной волн вне пузырька у его поверхности должно быть равно избыточному давлению внутри него. Радиальная скорость также должна оставаться непрерывной при $r = a$:

$$p_0 + \frac{i\omega\rho_w}{a} A = -i \frac{3\rho_a c_a^2}{\omega a} v_r = i \frac{3\rho_a c_a^2}{\omega a^3} A + \frac{3\rho_a c_a^2}{a^2 c_w} A;$$

здесь принято $ka \ll 1$, так что $e^{ika} \simeq 1$. Наконец, потенциал скоростей рассеянной волны в этом приближении имеет вид

$$\psi_s \simeq \frac{a p_0 / i\omega\rho_w}{(\omega_0/\omega)^2 - 1 - i(B/\omega)} \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r},$$

где $\omega_0^2 = 3\rho_a c_a^2 / a^2 \rho_w$ — резонансная частота воздушного пузырька, а $B = 3\rho_a - c_a^2 / a \rho_w c_w$ — активное сопротивление излучения сферической поверхности. Практически имеются также активные потери, связанные с вязкостью, и другие потери, связанные с тем, что изменение давления в малых пузырьках происходит не точно адиабатически, а потому и не вполне обратимо. Таким образом, последний член знаменателя должен быть заменен функцией $-i\delta(\omega)$, зависящей от частоты более сложным образом, нежели $-i(B/\omega)$, при этом $\delta(\omega)$ несколько больше, чем B/ω . Функция $\delta(\omega)$ в общем случае также несколько больше единицы при $\omega = \omega_0$.

Следовательно, если потенциал скоростей падающей волны на пузырьке имеет вид $\psi_i e^{-i\omega t}$, то рассеянный потенциал скоростей, «порожденный» падающей волной, равен

$$\psi_s \simeq \frac{a\psi_i}{(\omega_0/\omega)^2 - 1 - i\delta(\omega)} \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} = \frac{i\psi_i}{2k} (1 - R_0) \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r},$$

где R_0 — коэффициент отражения из (11.3.76). Эффективные поперечные сечения рассеяния и поглощения и полное эффективное поперечное сечение пузырька при этом равны

$$Q_t \simeq \frac{4\pi a^2 [1 + \delta/ka]}{[(\omega_0/\omega)^2 - 1]^2 + \delta^2}, \quad Q_s \simeq \frac{4\pi a^2}{[(\omega_0/\omega)^2 - 1]^2 + \delta^2}, \\ Q_a \simeq \frac{4\pi a^2 \delta/ka}{[(\omega_0/\omega)^2 - 1]^2 + \delta^2}.$$

Все это указывает на наличие при $\omega = \omega_0$ резонанса между упругостью воздуха в пузырьке и эффективной массой воды непосредственно у пузырька. Как ω_0 , так и δ являются функциями радиуса пузырька a .

Теперь рассмотрим действие нескольких пузырьков. Предположим, что внутри сферы с радиусом P_0 мы имеем N пузырьков. Они различны по размеру и распределены в пространстве случайно, но можно полагать, что существует функция плотности распределения $n(\mathbf{r}, a) da$, которая дает среднюю плотность пузырьков, имеющих радиус между a и $a + da$ и находящихся в точке \mathbf{r} . Тогда полное количество пузырьков равно

$$N = \int_0^{a_m} da \iiint n(\mathbf{r}, a) dV, \quad \text{а} \quad n(\mathbf{r}) = \int_0^{a_m} n(\mathbf{r}, a) da$$

является средней плотностью пузырьков всех размеров в точке \mathbf{r} . Мы предполагаем, что максимальный радиус пузырька равен a_m и что область интегрирования по сфере радиуса P_0 включает в себе все пузырьки какого-либо размера. Чтобы предыдущие расчеты рассеяния оставались в силе, мы должны предположить, что длина звуковой волны в свободной воде значительно больше чем $2\pi a_m$.

Если $c_w/\omega \gg a_m$, то мы можем представить потенциал скоростей в некоторой точке $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ в виде суммы падающей волны ψ_i и сферически симметричных волн, рассеянных от N пузырьков, причем n -й пузырек находится в точке \mathbf{r}_n :

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{r} e^{ikR_n},$$

где $k = \omega/c_w$ и $R_n = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|$ — расстояние от n -го пузырька до точки P . Величина A_n связана с потенциалом скоростей в точке расположения n -го пузырька.

При этом ψ не является еще истинным потенциалом, так как ψ включает в себе эффект рассеянной волны от самого n -го пузырька, а «вынуждающая сила» должна быть комбинацией первичной волны и волн, рассеянных на других пузырьках. Другими словами,

$$A_n = \frac{a\psi_n}{(\omega_0/\omega)^2 - 1 - i\delta}, \quad \psi_n = \psi_i(\mathbf{R}_n) + \sum_{m \neq n} \frac{A_m}{R_{mn}} e^{ikR_{mn}},$$

где $R_{mn} = |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|$. Эта формула учитывает действие на n -й пузырек рассеяния на всех других пузырьках.

Формулы, необходимые для дальнейшей выкладки, могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \psi_i(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N \psi_n \left(\frac{g_n}{R_n} \right) e^{ikR_n}, \\ \psi_n &= \psi(\mathbf{r}_n) - \frac{g_n}{R_{nn}} \psi_n e^{ikR_{nn}} = \psi_i(\mathbf{r}_n) + \sum_{m \neq n} \frac{g_m}{R_{mn}} \psi_m e^{ikR_{mn}}, \\ g_n &= \frac{a}{[\omega_0(a)/\omega]^2 - 1 - i\delta(\omega, a)}, \quad Q_{sn} = 4\pi |g_n|^2. \end{aligned}$$

Поля для конкретных конфигураций пузырьков, даже если они могут быть рассчитаны, не представляют особого интереса. Более интересным является среднее поле, получаемое при усреднении по всем конфигурациям пузырьков внутри сферы радиуса P_0 . Такое усреднение мы будем обозначать скобками $\langle \rangle$. Усреднение потенциала ψ_i не меняет его, так как это — первичное поле, не зависящее от конфигурации пузырьков; следовательно,

$\langle \psi_i(\mathbf{r}) \rangle = \psi_i(\mathbf{r})$. Конфигурационное среднее для ψ выражается формулой

$$\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle = \psi_i(\mathbf{r}) + \iiint G(\mathbf{r}_n) \langle \psi_n(\mathbf{r}_n) \rangle \frac{e^{ikR_n}}{R_n} dV_n,$$

где $\langle \psi_n(\mathbf{r}) \rangle$ — среднее внешнее поле, действующее на n -й пузырек и являющееся комбинацией поля падающей волны и поля рассеяния на всех пузырьках, за исключением n -го. Величина $G(\mathbf{r})$ представляет среднюю плотность рассеяния на пузырьках, находящихся в точке \mathbf{r} , усредненную в этой точке по всем размерам пузырьков:

$$G(\mathbf{r}) = \int_0^{P_0} n(\mathbf{r}, a) g(a) da.$$

Она равна средней «силе» рассеяния, умноженной на среднюю плотность пузырьков в точке \mathbf{r} .

Среднее от ψ_n — наружного поля, воздействующего на n -ю частицу, — приближенно равно среднему от всего поля ψ в той же точке. Если имеется только один рассеиватель, то это среднее равно ψ_i ; для большого количества пузырьков оно отличается от $\langle \psi \rangle$ на величину порядка $1/N$. Следовательно, для больших N мы имеем

$$\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle \simeq \psi_i(\mathbf{r}) + \iiint G(\mathbf{r}_n) \langle \psi(\mathbf{r}_n) \rangle \frac{e^{ikR_n}}{R_n} dV_n.$$

Это интегральное уравнение относительно $\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle$ равносильно дифференциальному уравнению в частных производных

$$\nabla^2 \langle \psi \rangle + k^2 \langle \psi \rangle = -4\pi G \langle \psi \rangle \text{ или } \nabla^2 \langle \psi \rangle + k_s^2(r) \langle \psi \rangle = 0,$$

где

$$k_s(r) = k \left[1 + \frac{4\pi G}{k^2} \right]^{1/2} \simeq k + \frac{2\pi}{k} \int_0^{P_0} \frac{n(r, a) ada}{(\omega_0/\omega)^2 - 1 - i\delta(a)}.$$

Таким образом, конфигурационное среднее потенциала скоростей является решением волнового уравнения, в котором показатель преломления $\sqrt{1 + 4\pi G/k^2}$ меняется вместе с плотностью пузырьков. Благодаря наличию члена с δ этот показатель преломления оказывается комплексным, и присутствие этого члена указывает на затухание волны по мере ее прохождения через область, заполненную пузырьками. Функция Грина для нашего среднего удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 K(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) + k_s^2(r) K(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Она ведет себя как $1/R$ при $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \rightarrow 0$, а для больших R представляет расходящуюся волну.

Точно так же можно вычислить конфигурационное среднее квадрата потенциала скоростей $|\psi(\mathbf{r})|^2$. Интегральное уравнение, аналогичное полученному для $\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle$, имеет вид

$$\langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle \simeq \langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle + \frac{1}{4\pi} \iiint S(\mathbf{r}_0) \langle |\psi(\mathbf{r}_0)|^2 \rangle |K(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)|^2 dV_0,$$

где

$$S(\mathbf{r}) = 4\pi \int_0^{P_0} n(\mathbf{r}, a) |g(a)|^2 da = \int_0^{P_0} n(\mathbf{r}, a) Q_s(a) da$$

— полное эффективное поперечное сечение рассеяния пузырьков на единицу объема в точке, определяемой вектором \mathbf{r} . Это уравнение показывает,

что когерентная часть рассеянной волны определяется квадратом конфигурационного среднего $\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle$; пузырьки влияют на эту часть через показатель преломления $\sqrt{1 - 4\pi G/k^2}$. В дополнение к когерентной волне $|\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle|^2$ имеется также некогерентное рассеяние (определяемое интегралом), пропорциональное плотности S эффективного сечения рассеяния, причем излучение от каждого элемента объема пропорционально $\langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle$. Это рассеяние затухает при прохождении через область, заполненную пузырьками, как квадрат модуля функции Грина $K(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$.

Сфероидальные координаты. Вытянутые сфероидальные координаты были определены формулами (10.3.46). Их можно также выразить через переменные $\mu = \text{Ar ch } \xi$, $\vartheta = \text{arc cos } \eta$:

$$z = \frac{1}{2} a \text{ch } \mu \cos \vartheta, \quad x = \frac{1}{2} a \text{sh } \mu \sin \vartheta \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta},$$

$$h_\mu = h_\vartheta = \frac{1}{2} a \sqrt{\text{ch}^2 \mu - \cos^2 \vartheta} = \frac{a}{\sqrt{8}} \sqrt{\text{ch } 2\mu - \cos 2\vartheta}, \quad h_\varphi = \frac{1}{2} a \text{sh } \mu \sin \vartheta, \quad (11.3.85)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{4/a^2}{\text{ch}^2 \mu - \cos^2 \vartheta} \left[\frac{1}{\text{sh } \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\text{sh } \mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\text{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}{\text{sh}^2 \mu \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right].$$

Исходя из этих формул, можно произвести разделение переменных. Сплюсненные сфероидальные координаты определены формулами (10.3.55). Они могут быть получены из вытянутых сфероидальных координат заменой a на $-ia$ и одновременно ξ на $i\xi$ или же заменой $\text{ch } \mu$ на $i \text{sh } \mu$ в формулах (11.3.85). Следовательно, решения, полученные для случая вытянутых сфероидальных координат, допускают весьма простое продолжение на мнимые значения параметров и координат.

Сомножителями решения уравнения Гельмгольца $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ в вытянутых сфероидальных координатах являются тригонометрические функции угловой координаты φ [а именно $\frac{\cos}{\sin}(m\varphi)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, если допустимы все значения φ от 0 до 2π] и решения следующих уравнений (в координатах ξ и η):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{dJ}{d\xi} \right] - \left[A - h^2 \xi^2 + \frac{m^2}{\xi^2 - 1} \right] J &= 0, \\ \frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dS}{d\eta} \right] + \left[A - h^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] S &= 0, \end{aligned} \quad (11.3.86)$$

где $h = ak/2 = \omega a/2c = \pi a/\lambda$ и A — постоянная разделения. При этом

$$\psi = \frac{\cos}{\sin}(m\varphi) S(\eta) J(\xi).$$

Заметим, что уравнения для J и S в действительности совершенно одинаковы. Одно из них — для S — рассматривается на интервале между особыми точками -1 и $+1$, а второе — для J — на интервале от $+1$ до ∞ . Поэтому мы можем изучать решения одного уравнения для z , причем η пробегает интервал от -1 до $+1$, а ξ — интервал от $+1$ до ∞ .

Вопрос о свойствах этих решений был уже затронут в гл. 5 [см. (5.3.95)]. Мы выяснили, что для данного уравнения точки ± 1 регулярные особые с индексами $\pm m/2$, а бесконечность — иррегулярная особая точка. Мы показали также, что функция $S(\eta)$ может быть представлена

в виде ряда по присоединенным функциям Лежандра

$$S(\eta) = \sum_n d_n P_{m+n}^m(\eta) = (1 - \eta^2)^{m/2} \sum_n d_n T_n^m(\eta),$$

где последовательные коэффициенты связаны рекурсивной формулой

$$\frac{n(n-1)h^2}{(2n+2m-1)(2n+2m-3)} d_{n-2} + h^2 \frac{(n+2m+1)(n+2m+2)}{(2n+2m+3)(2n+2m+5)} d_{n+2} + \\ + \left[h^2 \frac{2(n+m)(n+m+1) - m^2 - 1}{(2n+2m+3)(2n+2m-1)} + (n+m)(n+m+1) - A \right] d_n = 0.$$

Решение S , конечное при $\eta = 1$ для большинства значений A , будет бесконечным при $\eta = -1$. Однако рекурсивные уравнения могут быть решены методом непрерывных дробей, изученным в § 5.2 (в связи с уравнением Матье), и сходимость рядов может быть обеспечена для дискретного ряда значений постоянной разделения A . Имеются две последовательности конечных решений, одна с четными значениями n , другая с нечетными. Мы нумеруем каждую последовательность по возрастающим значениям A и окончательно получаем

$$S_{ml}(h, \eta) = \begin{cases} (1 - \eta^2)^{\frac{1}{2}m} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}(h | m, l) T_{2n}^m(\eta), & l = m, m+2, m+4, \dots, \\ (1 - \eta^2)^{\frac{1}{2}m} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1}(h | m, l) T_{2n+1}^m(\eta), & l = m+1, m+3, \dots, \end{cases} \quad (11.3.57)$$

где $A_{ml}(h) < A_{m(l+1)}(h)$. Для данного m наименьшее значение A имеет номер $l = m$ (т. е. обозначается A_{mm}), следующее — номер $l = m + 1$ и т. д. Соответствующие функции S_{ml} являются собственными функциями, и при данном m и различных l они взаимно ортогональны.

Когда $h \rightarrow 0$, уравнение для S сводится к уравнению для простой сферической гармонике $P_{l-m}^m(\eta) = (1 - \eta^2)^{m/2} T_{l-m}^m(\eta)$ и $A_{ml} \simeq l(l+1)$. Мы можем нормировать функцию S таким образом, чтобы ее поведение вблизи $\eta = 1$ было при любом значении h таким же, как и у функции P . Другими словами, поскольку $T_{l-m}^m(1) = [(l+m)!/2^m m! (l-m)!]$, мы требуем, чтобы

$$\sum_n' \frac{(n+2m)!}{n!} d_n(h | m, l) = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}, \quad (11.3.88)$$

где штрих над знаком суммирования показывает, что в сумму включаются только члены с четными номерами n , если $l - m$ четно, и только с нечетными номерами n , если $l - m$ нечетно. Это позволяет объединить в одной формуле как четные, так и нечетные функции. Легко также получить разложения в степенные ряды коэффициентов d и других постоянных при малом h . Например, полагаая

$$S_{00} = d_0 P_0(\eta) + d_2 P_2(\eta) + d_4 P_4(\eta) + \dots$$

и

$$A_{00} = a_2 h^2 + a_4 h^4 + \dots,$$

мы получаем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3} h^2 d_0 + \frac{2}{15} h^2 d_2 - A d_0 \right] P_0(\eta) + \\ & + \left[6d_2 + \frac{2}{3} h^2 d_0 + \frac{11}{21} h^2 d_2 + \frac{4}{21} h^2 d_4 - A d_2 \right] P_2(\eta) + \\ & + \left[20d_4 + \frac{12}{35} h^2 d_2 + \frac{39}{77} h^2 d_4 + \frac{30}{143} h^2 d_6 - A d_4 \right] P_4(\eta) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Полагая $d_2 = [h^2 a_2 + h^4 x_4 + \dots] d_0$ и $d_4 = [h^4 \beta_4 + \dots] d_0$ и приравнявая коэффициенты при P_0, P_2, \dots нулю, получаем

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{2}{15} a_2, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{9}, \quad -a_2 a_2 + 6x_4 + \frac{11}{21} a_2 = 0, \\ a_4 &= -\frac{2}{135}, \quad \alpha_4 = \frac{2}{567}, \quad 20\beta_4 + \frac{12}{35} a_2 = 0, \quad \beta_4 = \frac{1}{525}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_{00} \simeq d_0 P_0 - d_0 \left[\frac{1}{9} h^2 - \frac{2}{567} h^4 \right] P_2 + d_0 \frac{h^4}{525} P_4 + \dots$$

Так как при $\eta = 1$ эта величина должна равняться единице, то мы получаем

$$d_0 \left[1 - \frac{1}{9} h^2 + \frac{11}{2025} h^4 - \dots \right] = 1,$$

или

$$d_0 = 1 + \frac{1}{9} h^2 + \frac{14}{2025} h^4 + \dots$$

Таким образом можно найти приближенные формулы для малых значений h :

$$\begin{aligned} S_{00} &\simeq \left(1 + \frac{1}{9} h^2 + \frac{14}{2025} h^4 \right) P_0(\eta) - \left(\frac{1}{9} h^2 + \frac{5}{567} h^4 \right) P_2(\eta) + \frac{h^4}{525} P_4(\eta), \\ A_{00} &\simeq \frac{1}{3} h^2 - \frac{2}{135} h^4, \quad \Lambda_{00} \simeq 2 \left[1 + \frac{2}{9} h^2 + \frac{116}{2025} h^4 \right]; \\ S_{01} &\simeq \left(1 + \frac{1}{25} h^2 + \frac{144}{55125} h^4 \right) P_1^1(\eta) - \left(\frac{1}{25} h^2 + \frac{29}{6525} h^4 \right) P_3^1(\eta) + \frac{h^4}{2205} P_5^1(\eta), \\ A_{01} &\simeq 2 + \frac{3}{5} h^2 - \frac{6}{875} h^4, \quad \Lambda_{01} \simeq \frac{2}{3} + \frac{4}{75} h^2 + \frac{92}{18375} h^4; \\ S_{11} &\simeq \left(1 + \frac{2}{25} h^2 + \frac{1193}{275625} h^4 \right) P_1^1(\eta) - \left(\frac{1}{75} h^2 + \frac{16}{16875} h^4 \right) P_3^1(\eta) + \frac{h^4}{11025} P_5^1(\eta), \\ A_{11} &\simeq 2 + \frac{2}{5} h^2 - \frac{4}{875} h^4; \quad \Lambda_{11} \simeq \frac{4}{3} + \frac{16}{75} h^2 + \frac{17104}{826875} h^4; \end{aligned} \quad (11.3.89)$$

величины Λ_{ml} являются нормирующими постоянными

$$\Lambda_{ml}(h) = \sum_n [d_n(h|m, l)]^2 \frac{2}{2n+2m+1} \frac{(n+2m)!}{n!} = \int_{-1}^1 [S_{ml}]^2 d\eta.$$

Вторые решения могут быть получены в виде рядов по функциям Лежандра второго рода Q_n^m , причем эти ряды следует распространить и на отрицательные значения n ; однако вторые решения для угловых функций требуются очень редко.

Радиальные функции. Функция

$$F_{ml}(\eta) = (1 - \eta^2)^{-m/2} S_{ml}(h, \eta) = \sum'_n d_n T_n^m \eta$$

(где штрих над знаком суммирования показывает, что в сумму включаются члены только с четными n , когда $l - m$ четно, и с нечетными n , когда $l - m$ нечетно) является решением дифференциального уравнения ($\eta = z$)

$$L_z(f) = (z^2 - 1)f'' + 2(m + 1)zf' + [m(m + 1) - A + h^2z^2]f = 0, \quad (11.3.90)$$

которое мы рассматривали в гл. 5 [см. (5.3.95)]. Было показано, что для решения этого уравнения имеет место интегральное представление

$$f(z) = \int_{-1}^1 e^{ihzt} (1 - t^2)^m F(t) dt, \quad L_z(f) = 0,$$

где F — решение уравнения $L_t(F) = 0$. Используя это соотношение как интегральное преобразование, мы можем подставить F_{ml} под знак интеграла и снова получить решение уравнения (11.3.90), которое оказывается удобным для координаты ξ . Используя одно из указанных в конце этой главы соотношений между T_n^m и сферическими функциями Бесселя j_n , мы получаем

$$\int_{-1}^1 e^{ihzt} (1 - t^2)^{m/2} S_{ml}(h, t) dt = \frac{2}{(hz)^m} \sum'_n i^n d_n \frac{(n + 2m)!}{n!} j_{n+m}(hz),$$

и, следовательно, радиальная функция первого рода

$$\begin{aligned} j_{e_{ml}}(h, z) &= \frac{1}{2} i^{m-l} h^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} \int_{-1}^1 e^{ihzt} (1 - t^2)^{m/2} S_{ml}(h, t) dt = \\ &= \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{z^2 - 1}{z^2} \right)^{m/2} \sum'_n i^{n+m-l} d_n(h | ml) \frac{(n + 2m)!}{n!} j_{n+m}(hz) \simeq \\ &\simeq \frac{1}{hz} \cos \left[hz - \frac{1}{2} \pi (l + 1) \right], \quad hz \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (11.3.91)$$

является решением первого из уравнений (11.3.86). Мы нормировали эту функцию так, чтобы она имела при любом h такое же асимптотическое поведение, как и предельное решение при $h \rightarrow 0$ ($j_{e_{ml}} \simeq j_l$).

Отнюдь не очевидно, что $j_{e_{ml}}$ ведет себя при $z = 1$ так же, как $S_{ml}(h, z)$. Несколько страницами выше было упомянуто, что индексы обеих особых точек ± 1 равны $\pm m/2$, и мы видим, что функции S (для указанных значений A) выбраны таким образом, что они соответствуют *только* индексу $+m/2$ как при $+1$, так и при -1 (т. е. они конечны в обеих точках). При $z = \pm 1$ функции Бесселя $j_{n+m}(hz)$ аналитичны, и, поскольку ряды сходятся, их суммы аналитичны при $z = \pm 1$. Таким образом, индекс при $z = \pm 1$ определяется множителем $(z^2 - 1)^{m/2}$ и, значит, он равен $m/2$, как и для функции S . Следовательно, $j_{e_{ml}}(h, z)$ пропорциональна $S_{ml}(h, z)$. Может показаться, что множитель z^{-m} в формуле для $j_{e_{ml}}$ указывает на наличие полюса в точке $z = 0$, но оказывается, что функции $j_{n+m}(hz)$ стремятся к нулю при $z \rightarrow 0$ как $(hz)^{n+m}$, так что для неотрицательных значений n функция j_{n+m}/z^n аналитична при $z = 0$.

Коэффициент пропорциональности между $j_{e_{ml}}$ и S_{ml} можно найти из соотношения между ними при $z = 0$. Для четных значений $l - m$ в сумме со штрихом для j_e имеется член $i^{m-l} d_0(2m)! j_m(hz)$, который не исчезает

при $z=0$:

$$je_{ml} \simeq \frac{(l-m)!}{(l+m)!} i^{-l} d_0 (2m)! \frac{h^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}, \quad z \rightarrow 0, \quad l-m=0, 2, 4, 6, \dots$$

Но для четных $l-m$

$$S_{ml}(h, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} T_{2n}^m(0) = \sum_n d_{2n} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+2n-1)}{2^n (n)!}.$$

Для нечетных значений $l-m$ в сумме фигурируют только нечетные значения n и

$$je_{ml}(h, z) \simeq z \frac{(l-m)!}{(l+m)!} i^{-l+1} d_1 (2m+1)! \frac{h^{m+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+3)}, \quad z \rightarrow 0.$$

Все T_n^m стремятся к нулю при $z \rightarrow 0$, если n нечетно, и, следовательно, нам предстоит сравнить производные. Поскольку $dT_n^m/dz = T_{n-1}^{m+1}$, мы имеем

$$S_{ml}(h, z) \simeq z \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} T_{2n+1}^{m+1}(0) = z \sum_n d_{2n+1} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+2m+1)}{2^n (n)!}.$$

Следовательно, мы можем положить $S_{ml}(h, z) = \lambda_{ml}(h) je_{ml}(h, z)$, где

$$\lambda_{ml}(h) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{i^l}{d_0 h^m} \frac{2m+1}{2^m m!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} S_{ml}(h, 0), \quad l=m, m+2, m+4, \dots; \\ \frac{i^l}{\pi h^m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2^{2m+1}}{(2m)!} \Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) \times \\ \quad \times \sum_n (-1)^n \frac{d_{2n}}{d_0} \frac{\Gamma\left(n+m + \frac{1}{2}\right)}{(n)!}, \quad l-m=0, 2, \dots; \\ \frac{i^{l-1}}{\pi h^{m+1}} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2^{2m+3}}{(2m+1)!} \Gamma\left(m + \frac{5}{2}\right) \times \\ \quad \times \sum_n (-1)^n \frac{d_{2n+1}}{d_1} \frac{\Gamma\left(n+m + \frac{3}{2}\right)}{(n)!}, \quad l-m=1, 3, \dots; \\ \frac{i^{l-1}}{d_1 h^{m+1}} \frac{(2m+2)(2m+3)}{2^m m!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} S'_{ml}(h, 0), \quad l=m+1, m+3, \dots \end{array} \right. \quad (11.3.92)$$

Для радиальной координаты ξ необходимо найти также и второе решение. Это решение должно иметь особенность при $\xi = \pm 1$, а именно оно должно содержать сумму члена с логарифмической особенностью и члена вида $(\xi^2 - 1)^{-m/2}$. Мы можем нормировать это решение так, чтобы его асимптотическое поведение было просто связано с поведением je . Один из возможных способов для получения искомого решения состоит в том, чтобы подставить в ряд (11.3.91) вместо функций $j_{n+m}(hz)$ соответствующие сферические функции Неймана $n_{n+m}(hz)$, так что

$$ne_{ml}(h, z) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{z^2-1}{z^2} \right)^{m/2} \sum_n i^{n+m-1} d_n(h|ml) \frac{(n+2m)!}{n!} n_{n+m}(hz) \simeq \\ \simeq \frac{1}{hz} \sin \left[hz - \frac{1}{2} \pi (l+1) \right], \quad hz \rightarrow \infty. \quad (11.3.93)$$

К сожалению, эти ряды плохо сходятся при малых hz ; на самом деле это — асимптотические ряды, которые не сходятся абсолютно ни для какого конечного значения hz . Другие разложения будут рассмотрены ниже. Однако из асимптотического поведения мы видим, что вронскиан имеет вид

$$\Delta(je_{ml}, ne_{ml}) = \frac{1}{h(z^2 - 1)}. \quad (11.3.94)$$

Функция Грина и другие разложения. Уже привычными нам методами мы получаем разложение функции Грина в вытянутых сфероидальных координатах

$$\begin{aligned} \frac{e^{ihR}}{R} = 2ik \sum_{m,l} \frac{\varepsilon_m}{\Lambda_{ml}} S_{ml}(h, \cos \vartheta_0) S_{ml}(h, \cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \begin{cases} je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu_0) he_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu), & \mu > \mu_0, \\ je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) he_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu_0), & \mu < \mu_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (11.3.95)$$

где $he_{ml} = je_{ml} + ine_{ml}$ — радиальная функция, которая сводится к функции Ганкеля при $h \rightarrow 0$, и

$$\begin{aligned} R^2 = \frac{1}{4} a^2 [\operatorname{ch}^2 \mu + \operatorname{ch}^2 \mu_0 - \sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_0 - 2 \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} \mu_0 \cos \vartheta \cos \vartheta_0 - \\ - 2 \operatorname{sh} \mu \operatorname{sh} \mu_0 \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]. \end{aligned}$$

Аналогично разложение плоской волны имеет вид

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 2 \sum_{m,l} \frac{\varepsilon_m i^l}{\Lambda_{ml}(h)} S_{ml}(h, \cos \vartheta_0) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] S_{ml}(h, \cos \vartheta) je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu),$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k [z \cos \vartheta_0 + x \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + y \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0] = \\ = h [\operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (11.3.96)$$

Эти разложения могут быть использованы, в частности, для вывода некоторых интегральных соотношений между различными функциями. Например, умножая обе части равенства (11.3.96) на $\cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times S_{ml}(h, \cos \vartheta)$ и интегрируя по φ и по $\cos \vartheta$, мы получаем

$$\int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] d\varphi \int_0^\pi e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} S_{ml}(h, \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi i^l S_{ml}(h, \cos \vartheta_0) je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu).$$

Выделив из $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ множитель $e^{ih \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$ и выполнив интегрирование по φ , приведем это равенство к виду

$$\begin{aligned} 4\pi i^l S_{ml}(h, \cos \vartheta_0) je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) = \\ = 2\pi i^m \int_0^\pi e^{ih \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \cos \vartheta_0} J_m(h \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta \sin \vartheta_0) S_{ml}(h, \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Разделив теперь обе части равенства на $\sin^m \vartheta_0$ и устремляя ϑ_0 к нулю, получим

$$je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) = \frac{1}{2} i^{m-l} h^m \operatorname{sh}^m \mu \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_0^\pi e^{ih \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta} S_{ml}(h, \cos \vartheta) \sin^{m+1} \vartheta d\vartheta.$$

Эту формулу полезно сопоставить с (11.3.91).

Другое интегральное представление получается умножением обеих частей равенства (11.3.95) на $\cos [m(\varphi - \varphi_0)] S_{ml}(h, \cos \vartheta)$ и интегрированием по $\cos \vartheta$ и φ :

$$S_{ml}(h, \cos \vartheta_0) j e_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu_0) h e_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos [m(\varphi - \varphi_0)] d\varphi \int_0^\pi h_0(kR) S_{ml}(h, \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (11.3.97)$$

При $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$ и $\mu_0 \rightarrow 0$ левая часть этого равенства стремится к

$$\operatorname{sh}^m \mu_0 \frac{i^{m-1} d_0 h^m}{2m+1} h e_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu),$$

если $l = m, m+2, m+4, \dots$, или же к

$$\operatorname{sh}^m \mu_0 \frac{i^{m+1-l} d_1 h^{m+1}}{(2m+2)(2m+3)} \cos \vartheta_0 h e_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu),$$

если $l = m+1, m+3, \dots$.

Далее мы рассмотрим правую часть равенства (11.3.97) при $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$ и $\mu_0 \rightarrow 0$. Обращаясь сначала к случаю $l = m, m+2, m+4, \dots$, мы предположим, что $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$ и μ_0 мало. При этом с точностью до величин первого порядка малости относительно $\operatorname{sh} \mu_0$

$$kR \simeq h \sqrt{\rho^2 + \eta^2 - 2\rho\eta \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

где

$$\rho^2 = \operatorname{ch}^2 \mu - \sin^2 \vartheta \quad \text{и} \quad \eta^2 = \frac{\operatorname{sh}^2 \mu \sin^2 \vartheta}{\operatorname{ch}^2 \mu - \sin^2 \vartheta} \operatorname{sh}^2 \mu_0.$$

Используя разложение, данное на стр. 303, мы можем представить функцию $h_0(kR)$ в виде ряда

$$h_0(kR) \simeq \frac{\sqrt{\pi/2h}}{[\rho^2 + \eta^2 - \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi - \varphi_0}]^{1/4}} H_{1/2}[h\sqrt{\rho^2 + \eta^2 - 2\rho\eta \cos(\varphi - \varphi_0)}] \simeq \\ \simeq \frac{e^{-i\varphi/2}}{1 - (\eta/2\rho) \cos(\varphi - \varphi_0)} \sqrt{\frac{\pi}{2h\rho}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi_0)} J_m(h\eta) H_{m+1/2}(h\rho) \simeq \\ \simeq \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi_0)} J_m(h\eta) h_m(h\rho) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\eta}{\rho} e^{-i(\varphi - \varphi_0)} \right].$$

Подставим это выражение в (11.3.97), проинтегрируем по φ и разделим обе части полученного равенства на $\operatorname{sh}^m \mu_0$; переходя затем к пределу при $\mu_0 \rightarrow 0$, мы в конце концов получим формулу для $h e_{ml}$ при $l = m, m+2, m+4, \dots$:

$$h e_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) = i^{l-m} (2m+1) \frac{\operatorname{sh}^m \mu}{2^{m+2} m! d_0} \int_0^\pi \frac{1}{\rho^m} \left[h_m(h\rho) + (-1)^m h_{-m}(h\rho) - \right. \\ \left. - (-1)^m \frac{m}{h\rho} h_{m+1}(h\rho) \right] S_{ml}(h, \cos \vartheta) \sin^{m+1} \vartheta d\vartheta, \quad (11.3.98)$$

где

$$\rho^2 = \operatorname{ch}^2 \mu - \sin^2 \vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2\mu + \frac{1}{2} \cos 2\vartheta = u^2 + v^2 + 2uv \cos 2\vartheta,$$

$$u = \frac{1}{2}, \quad v = \frac{1}{2} e^{-\mu}$$

Отсюда с помощью еще одного преобразования можно получить разложение в ряд he . При $m=0$ величина в скобках под знаком интеграла обращается в (см. стр. 532)

$$2h_0(h\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) P_n(\cos 2\vartheta) j_n(h\nu) h_n(h\nu),$$

так что для $l=0, 2, 4, \dots$

$$\begin{aligned} he_{0l}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \\ &= \frac{i^l}{2d_0} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_n\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) \int_0^{\pi} P_n(\cos 2\vartheta) S_{0l}(h, \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Из этой формулы, используя (11.3.87), мы можем получить новое разложение для he , удовлетворительно сходящееся при $\mu=0$. Поскольку

$$P_0(\cos 2\vartheta) = P_0(\cos \vartheta),$$

$$P_1(\cos 2\vartheta) = \frac{4}{3} P_2(\cos \vartheta) - \frac{1}{3} P_0(\cos \vartheta),$$

$$P_2(\cos 2\vartheta) = \frac{48}{35} P_4(\cos \vartheta) - \frac{4}{7} P_2(\cos \vartheta) + \frac{1}{5} P_0(\cos \vartheta)$$

и т. д., мы имеем

$$\begin{aligned} he_{0l}(h, \operatorname{ch} \mu) &= i^l \left\{ j_0\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_0\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) - \right. \\ &\quad - \left[\frac{4}{5} \frac{d_2(h|0l)}{d_0(h|0l)} - 1 \right] j_1\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_1\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) + \\ &\quad \left. + \left[\frac{16}{21} \frac{d_4(h|0l)}{d_0(h|0l)} - \frac{4}{7} \frac{d_2(h|0l)}{d_0(h|0l)} + 1 \right] j_2\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_2\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) + \dots \right\} \end{aligned}$$

для $l=0, 2, 4, \dots$

Эти ряды хорошо сходятся при малых h и часто их можно непосредственно суммировать. Так, используя (11.3.89), разложения в ряд для j и h и формулу

$$\operatorname{Ar th}(e^{-\mu}) = e^{-\mu} + \frac{1}{3} e^{-3\mu} + \frac{1}{5} e^{-5\mu} + \dots,$$

мы получаем при $he^{\mu} \ll 1$

$$ne_{00}(h, \operatorname{ch} \mu) \simeq -\frac{2}{h} \left\{ \frac{1}{3} h^2 \operatorname{ch} \mu + \left(1 + \frac{11}{72} h^2 - \frac{1}{24} h^2 \operatorname{ch} 2\mu\right) \operatorname{Ar th} e^{-\mu} \right\}.$$

При $m=1$ величина в скобках под знаком интеграла в (11.3.98) равна $2h_1(h\rho)$, и мы в конце концов получаем

$$\begin{aligned} he_{1l}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \frac{3i^{l-1} \operatorname{sh} \mu}{hd_0} \sum_n (-1)^n (2n+3) j_{n+1}\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_{n+1}\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) \times \\ &\times \int_0^{\pi} T_n^1(\cos 2\vartheta) S_{1l}(h, \cos \vartheta) \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{12}{h} i^{l-1} \operatorname{sh} \mu \left\{ j_1\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_1\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) - \right. \\ &\quad - \left[\frac{24}{5} \frac{d_2}{d_0} - 3 \right] j_2\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_2\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) + \\ &\quad \left. + \left[\frac{80}{11} \frac{d_4}{d_0} - 8 \frac{d_2}{d_0} + 6 \right] j_3\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_3\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Тем же путем находим, что при $he^\mu \ll 1$

$$ne_{11}(h, \operatorname{ch} \mu) \simeq -\frac{3}{2h^2} \frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \left\{ \left[\left(1 - \frac{19}{75} h^2 \right) \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{75} h^2 \operatorname{ch}^2 \mu \right] - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{sh}^2 \mu \left[\left(1 + \frac{3}{50} h^2 \right) + \frac{1}{10} h^2 \operatorname{ch}^2 \mu \right] \operatorname{Ar th} e^{-\mu} \right\}.$$

Возвращаясь теперь к случаю $l = m + 1, m + 3, \dots$, замечаем, что, прежде чем положить $\vartheta_0 = \pi/2$, следует взять производную по $\cos \vartheta_0$ от правой части равенства (11.3.97). Для этого надо взять производную от $h_0(kR)$:

$$\left[\frac{dh_0(kR)}{d \cos \vartheta_0} \right]_{\vartheta_0 = \pi/2} = \\ = \frac{h \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} \mu_0 \cos \vartheta}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2 - 2\rho\eta \cos(\varphi - \varphi_0)}} h_1 [h \sqrt{\rho^2 + \eta^2 - 2\rho\eta \cos(\varphi - \varphi_0)}] = \\ = h \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} \mu_0 \cos \vartheta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im(\varphi - \varphi_0)}}{\rho} J_m(h\eta) h_{m+1}(h\rho) \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{\rho} e^{-i(\varphi - \varphi_0)} \right].$$

Полагая теперь $\operatorname{sh} \mu_0 \rightarrow 0$ и используя разложения J_m и h_{m+1} , мы, наконец, получаем для $l = m + 1, m + 3, \dots$

$$he_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) = \\ = i^{l-m-1} \frac{(2m+2)(2m+3)}{2^{m+2} m! d_1(h|ml)} \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh}^m \mu \int_0^\pi \frac{1}{\rho^{m+1}} \left[h_{m+1}(h\rho) + (-1)^m h_{-m+1}(h\rho) - \right. \\ \left. - (-1)^m \frac{3m}{\rho} h_{-m+2}(h\rho) \right] S_{ml}(h, \cos \vartheta) \cos \vartheta \sin^{m+1} \vartheta d\vartheta.$$

При $m = 0$ величина в квадратных скобках равна $2h_1(h\rho)$, так что

$$he_{0l}(h, \operatorname{ch} \mu) = i^{l-1} \frac{6 \operatorname{ch} \mu}{hd_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+3) j_{n+1} \left(\frac{1}{2} he^{-\mu} \right) h_{n+1} \left(\frac{1}{2} he^\mu \right) \times \\ \times \int_0^\pi T_n^1(\cos 2\vartheta) S_{01}(h, \cos \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \\ = i^{l-1} \frac{12 \operatorname{ch} \mu}{h} \left\{ j_1 \left(\frac{1}{2} he^{-\mu} \right) h_1 \left(\frac{1}{2} he^{-\mu} \right) - \left[\frac{12d_3}{7d_1} + 1 \right] j_2 \left(\frac{1}{2} he^{-\mu} \right) \times \right. \\ \left. \times h_2 \left(\frac{1}{2} he^\mu \right) + \left[\frac{80}{33} \frac{d_5}{d_1} + \frac{d_3}{d_1} + 2 \right] j_3 \left(\frac{1}{2} he^{-\mu} \right) h_3 \left(\frac{1}{2} he^\mu \right) - \dots \right\},$$

а при $he^\mu \ll 1$ мы имеем

$$ne_{0l}(h, \operatorname{ch} \mu) \simeq -\frac{6}{h^2} \left\{ \left[\left(1 + \frac{17}{200} h^2 \right) \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{40} h^2 \operatorname{ch} 3\mu \right] \operatorname{Ar th} e^{-\mu} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{12} h^2 \right) - \frac{1}{20} h^2 \operatorname{ch} 2\mu \right] \right\}.$$

Эти приближенные формулы вместе с соответствующими формулами для

решений первого рода:

$$\begin{aligned} j e_{00}(h, \operatorname{ch} \mu) &\simeq 1 - \frac{1}{18} h^2 - \frac{1}{6} h^2 \operatorname{sh}^2 \mu, \\ j e_{0l}(h, \operatorname{ch} \mu) &\simeq \left(\frac{1}{3} h + \frac{1}{75} h^3 \right) \operatorname{ch} \mu, \\ j e_{1l}(h, \operatorname{ch} \mu) &\simeq \left(\frac{1}{3} h + \frac{2}{75} h^3 \right) \operatorname{sh} \mu \end{aligned} \quad (11.3.99)$$

при $he^{\mu} \ll 1$ служат для вычисления излучения и рассеяния в случае предельно длинных волн.

Сплюсненные сфероидальные координаты. Эти координаты, определенные формулами (10.3.55), через $\rho = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \xi$, $\vartheta = \arccos \eta$ выражаются так:

$$\begin{aligned} z &= b \operatorname{sh} \rho \cos \vartheta, \quad x = b \operatorname{ch} \rho \sin \vartheta \frac{\sin \varphi}{\cos \vartheta}, \\ h_{\rho} = h_{\vartheta} &= b \sqrt{\operatorname{sh}^2 \rho + \cos^2 \vartheta} = \frac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{ch} 2\rho + \cos 2\vartheta}, \\ h_{\varphi} &= b \operatorname{ch} \rho \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (11.3.100)$$

причем при $\rho = 0$ получаем диск радиуса b , перпендикулярный к оси z .

Эти формулы могут быть получены из формул для вытянутых сфероидальных координат (11.3.81), если координату μ заменить на $\rho - i\pi/2$ и одновременно параметр a заменить на $2ib$. Следовательно, все формулы, полученные для волновых функций в вытянутых сфероидальных координатах, можно преобразовать в соответствующие формулы для сплюсненных сфероидальных координат заменой μ на $\rho - i\pi/2$ и $h = ka/2$ на $ig = ikb$ (здесь $k = \omega/c$, как обычно).

Через эти функции можно, например, выразить излучение колеблющегося диска. Предположим, что диск радиуса b колеблется как целое взад и вперед перпендикулярно к своей плоскости (которую можно для удобства предположить параллельной x, y -плоскости). В сплюсненных сфероидальных координатах нормальная скорость поверхности диска $\rho = 0$ равна $v_0 e^{-i\omega t}$ при $0 < \vartheta < \pi/2$ и $-v_0 e^{-i\omega t}$ при $\pi/2 < \vartheta < \pi$. Волна, порожденная колебаниями диска, может быть представлена рядом

$$\psi = \sum_l A_l S_{0l}(ig, \cos \vartheta) h e_{0l}(ig, -i \operatorname{sh} \rho),$$

где

$$\begin{aligned} A_l \Lambda_{0l} G_l &= b v_0 e^{-i\omega t} \int_{-1}^1 S_{0l}(ig, \eta) \eta d\eta = \\ &= \begin{cases} 0, & l = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{2}{3} b v_0 e^{-i\omega t} d_1(ig | 0l), & l = 1, 3, 5, \dots, \end{cases} \end{aligned}$$

$$G_l = \left[\frac{d}{d\rho} h e_{0l}(ig, -i \operatorname{sh} \rho) \right]_{\rho=0},$$

При этом давление на задней стороне диска выражается формулой

$$p = \frac{2}{3} i \rho c g v_0 e^{-i\omega t} \sum_l \left[\frac{d}{d\rho} h e_{0l}(ig, -i \operatorname{sh} \rho) \right]_{\rho=0} \frac{d_1(ig | 0l)}{\Lambda_{0l}} S_{0l}(ig, \cos \vartheta)$$

(штрих означает, что в сумму включены только члены с нечетными l), а отношение полной силы к скорости диска, т. е. акустический импеданс свободного диска, равно

$$Z = \frac{8}{9} \pi i \rho c g b^2 \sum_l \frac{d_1(i g | 0 l)}{\Lambda_{0l}} \left[\frac{h e_{0l}(i g, 0)}{\frac{d}{d\rho} h e_{0l}(i g, -i g \operatorname{sh} \rho)} \right]_{\rho=0} \approx$$

$$\approx -\frac{8}{3} i \rho c g b^2 + \frac{16}{27\pi} \rho c g^4 b^2 = -i\omega \frac{8b^3\rho}{3} + \frac{16\rho\omega^4 b^6}{27\pi c^2},$$

$$g = \frac{2\pi b}{\lambda} \ll 1.$$

Эта формула дает для волн большой длины волны λ эффективную массу воздушной нагрузки $8b^3\rho/3$ и сопротивление излучения.

С помощью выписанных функций можно выполнить многие другие расчеты. Некоторые из них будут указаны в качестве задач.

Мы не останавливались здесь на других системах координат, в которых волновое уравнение разделяется, таких, как параболические, конические и т. п., ибо, по-видимому, отсутствуют достаточно важные физические приложения этих координат. Общие методы вычисления решений, разложения плоской волны, нахождения функции Грина и формул рассеяния — все это остается таким же, как в уже описанных случаях.

11.4. Интегральные уравнения и вариационные методы

Читателю давно должно было стать очевидным, что задачи с простыми краевыми условиями на простых, допускающих разделение переменных поверхностях, хотя и легко разрешимы, но не очень интересны. Для сфер и круглых цилиндров решения хорошо изучены, и даже в задачах о рассеянии для этих поверхностей получаются результаты, давно известные и потому могущие вызвать пренебрежительное отношение. Конечно, при решении методами фундаментальных собственных функций задач для более необычных, допускающих разделение поверхностей, таких, как полоса, диск или расплющенный конус, имеются еще элементы новизны, и поэтому эти задачи продолжают привлекать интерес по крайней мере до тех пор, пока не будут опубликованы соответствующие численные таблицы; однако в основном они представляют собой «добавление того же самого». Поскольку в «реальной жизни» редко встречаются столь регулярные поверхности, эти задачи практически мало полезны.

С другой стороны, задачи, в которых граничные поверхности не «полностью разделяются», труднее, интереснее и более соответствуют действительности. Задачи о рассеянии волн на не точно сферическом теле и о распространении волн в трубе, которая имеет не везде одинаковое поперечное сечение или на поверхности которой не везде одинаковы краевые условия, уже были рассмотрены в § 9.3, и мы встречались с ними также и в этой главе (см. стр. 418 и 455). Обычно такие задачи не могут быть решены точно, но важно уметь найти для них приближенные решения, компактные по форме и имеющие по возможности малую погрешность.

Для подобных задач весьма полезны и весьма важны методы, основанные на применении функций Грина, интегральных уравнений и вариационных принципов. В настоящем параграфе мы имеем в виду рассмотреть несколько типичных задач этого рода и показать, как к этим задачам могут быть применены методы, изученные в гл. 7, 8 и 9. Некоторые из наших примеров касаются проникновения волн через отверстия в регу-