

(штрих означает, что в сумму включены только члены с нечетными  $l$ ), а отношение полной силы к скорости диска, т. е. акустический импеданс свободного диска, равно

$$Z = \frac{8}{9} \pi i \rho c g b^2 \sum_l \frac{d_1(i g | 0 l)}{\Lambda_{0l}} \left[ \frac{h e_{0l}(i g, 0)}{\frac{d}{d\rho} h e_{0l}(i g, -i g \operatorname{sh} \rho)} \right]_{\rho=0} \approx$$

$$\approx -\frac{8}{3} i \rho c g b^2 + \frac{16}{27\pi} \rho c g^4 b^2 = -i\omega \frac{8b^3\rho}{3} + \frac{16\rho\omega^4 b^6}{27\pi c^2},$$

$$g = \frac{2\pi b}{\lambda} \ll 1.$$

Эта формула дает для волн большой длины волны  $\lambda$  эффективную массу воздушной нагрузки  $8b^3\rho/3$  и сопротивление излучения.

С помощью выписанных функций можно выполнить многие другие расчеты. Некоторые из них будут указаны в качестве задач.

Мы не останавливались здесь на других системах координат, в которых волновое уравнение разделяется, таких, как параболические, конические и т. п., ибо, по-видимому, отсутствуют достаточно важные физические приложения этих координат. Общие методы вычисления решений, разложения плоской волны, нахождения функции Грина и формул рассеяния — все это остается таким же, как в уже описанных случаях.

## 11.4. Интегральные уравнения и вариационные методы

Читателю давно должно было стать очевидным, что задачи с простыми краевыми условиями на простых, допускающих разделение переменных поверхностях, хотя и легко разрешимы, но не очень интересны. Для сфер и круглых цилиндров решения хорошо изучены, и даже в задачах о рассеянии для этих поверхностей получаются результаты, давно известные и потому могущие вызвать пренебрежительное отношение. Конечно, при решении методами фундаментальных собственных функций задач для более необычных, допускающих разделение поверхностей, таких, как полоса, диск или расплющенный конус, имеются еще элементы новизны, и поэтому эти задачи продолжают привлекать интерес по крайней мере до тех пор, пока не будут опубликованы соответствующие численные таблицы; однако в основном они представляют собой «добавление того же самого». Поскольку в «реальной жизни» редко встречаются столь регулярные поверхности, эти задачи практически мало полезны.

С другой стороны, задачи, в которых граничные поверхности не «полностью разделяются», труднее, интереснее и более соответствуют действительности. Задачи о рассеянии волн на не точно сферическом теле и о распространении волн в трубе, которая имеет не везде одинаковое поперечное сечение или на поверхности которой не везде одинаковы краевые условия, уже были рассмотрены в § 9.3, и мы встречались с ними также и в этой главе (см. стр. 418 и 455). Обычно такие задачи не могут быть решены точно, но важно уметь найти для них приближенные решения, компактные по форме и имеющие по возможности малую погрешность.

Для подобных задач весьма полезны и весьма важны методы, основанные на применении функций Грина, интегральных уравнений и вариационных принципов. В настоящем параграфе мы имеем в виду рассмотреть несколько типичных задач этого рода и показать, как к этим задачам могут быть применены методы, изученные в гл. 7, 8 и 9. Некоторые из наших примеров касаются проникновения волн через отверстия в регу-

лярных поверхностях, в других же имеются иррегулярности в краевых условиях; только в немногих случаях эти задачи допускают точные решения в форме, пригодной для практического применения.

Некоторое количество подобных задач уже было рассмотрено нами в качестве примеров в § 9.3 и 9.4 и в настоящей главе. Например, мы анализировали случай диафрагмы в регулярной трубе. Метод решения сводился к тому, чтобы найти решения для каждой половины трубы, удовлетворяющие условиям вдали от диафрагмы (уходящая прошедшая волна по одну сторону, падающая и отраженная волны — по другую сторону), и затем произвести гладкое сопряжение найденных решений и их производных на отверстии в диафрагме. При этом получалась бесконечная система уравнений для неизвестных коэффициентов разложений по собственным функциям на каждой стороне диафрагмы, не допускавшая точного решения. Поэтому мы задавались приближенной формой решения непосредственно в отверстии (в большинстве случаев этой формой служило решение уравнения Лапласа для соответствующей границы), из которого можно было определить приближенные соотношения между коэффициентами неизвестного разложения и в принятии приближений свести число неизвестных к одному или двум. Эти последние неизвестные мы определяли, приравнивая решения в одной или двух точках отверстия; если выбранная приближенная форма была близка к точной, то решения приблизительно совпадали в остальных точках отверстия.

Однако этот метод, несмотря на простоту концепции и легкость применения, имеет ряд недостатков. Отсутствует простой способ повышения точности приближенного решения и даже установления степени его приближения к точному решению. Поэтому мы позволим себе вновь рассмотреть задачу указанного типа, чтобы выяснить, что можно позаимствовать из методов гл. 7, 8 и 9.

**Диафрагма в трубе.** В первую очередь мы рассмотрим задачу о распространении звука в трубе с жесткими стенками круглого поперечного сечения радиуса  $a$ , в которой при  $z=0$  помещена неподвижная диафрагма с концентрическим отверстием радиуса  $b$ . Мы уже рассматривали подобную задачу (см. стр. 414) для случая щели в диафрагме, помещенной в прямоугольной трубе. Мы предполагали, что решение при  $z > 0$  представляет собой волну, движущуюся в положительном направлении (для высших типов волн зависимость от  $z$  выражалась убывающей экспонентой), а решение при  $z < 0$  — комбинацию падающей и отраженной волн (и более высоких типов волн, экспоненциально убывающих при  $z \rightarrow -\infty$ ). Эти два решения подбирались так, чтобы они имели равную нулю составляющую градиента на закрытой части диафрагмы и одинаковые градиенты в открытом отверстии или щели. Для получения точного решения нам нужно было бы добиться, чтобы потенциал скоростей  $\psi$  был также непрерывен в щели, однако достигнуть здесь полной точности было слишком трудно и мы удовлетворялись приближенным выражением для составляющей градиента в отверстии, содержащим одну произвольную постоянную. Эта постоянная была выбрана так, чтобы обеспечить непрерывность величины  $\psi$  вдоль оси трубы. Если выбор составляющей градиента в отверстии был сделан удачно, то разрыв  $\psi$  в других точках отверстия представлялся незначительным; однако провести обратный расчет, чтобы установить, каков этот разрыв на самом деле, было затруднительно.

Воспроизведем теперь наш процесс с помощью функции Грина; результаты помогут нам увидеть, какие улучшения могут быть сделаны. Функцию Грина, имеющую равную нулю составляющую градиента на поверхности трубы, а также при  $z=0$  и соответствующую уходящим волнам при  $z \rightarrow +\infty$ , мы обозначим через  $G_h^+(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ , и, соответственно, при  $z \rightarrow -\infty$

через  $G_k^-(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ . Для круглой трубы обычная процедура даст

$$G_k^+(r, \varphi, z|r_0, \varphi_0, z_0) = \frac{4i}{a^2} \sum_{m, n} \varepsilon_m \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \frac{J_m(\pi \alpha_{mn} r/a) J_m(\pi \alpha_{mn} r_0/a)}{k_{mn} [1 - (m/\pi \alpha_{mn})^2] J_n^2(\pi \alpha_{mn})} \begin{cases} \cos(k_{mn} z_0) e^{ik_{mn} z}, & z > z_0, \\ \cos(k_{mn} z) e^{ik_{mn} z_0}, & z < z_0, \end{cases} \quad (11.4.1)$$

где  $\alpha_{mn}$  —  $n$ -й корень уравнения  $dJ_m(\pi \alpha)/d\alpha = 0$  и  $k_{mn}^2 = k^2 - (\pi \alpha_{mn}/a)^2$ . Для  $m$  и  $n$  больших  $k_{mn} = i \sqrt{(\pi \alpha_{mn}/a)^2 - k^2} \simeq i \pi n/a$ . Функция  $G_k^-$  получается отсюда изменением знаков при  $z$  и  $z_0$ .

Нетрудно видеть, что задача будет решена, если мы найдем распределение скорости воздушного потока, обозначаемой  $u_z^0(r)$ , по отверстию  $z = 0$ ,  $r < b$ . Действительно, тогда нормальная составляющая градиента потенциала скоростей  $\psi$  будет равна  $-u_z^0$  в открытом отверстии, нулю во всех остальных точках границы, и из теоремы Грина [см. (7.2.10)] следует, что потенциал скоростей внутри трубы будет, опуская множитель  $e^{-i\omega t}$ , равен

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^b r_0 u_z^0(r_0) G_k^+(r, \varphi, z|r_0, \varphi_0, 0) dr_0, & z > 0, \\ 2A \cos(kz) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^b r_0 u_z^0(r_0) G_k^-(r, \varphi, z|r_0, \varphi_0, 0) dr_0, & z < 0, \end{cases} \quad (11.4.2)$$

где, как обычно,  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ . В области  $z < 0$  мы имеем комбинацию падающей плоской волны амплитуды  $A$  с такой же отраженной волной, фаза которой выбрана так, чтобы для этой комбинации составляющая градиента при  $z = 0$  равнялась нулю. Такая комбинация была бы решением задачи, если бы в диафрагме не было отверстия; изменение отраженной волны, порожденное отверстием, учитывается интегралом от  $G^- u_z^0$ , который также представляет волну, распространяющуюся к  $-\infty$ . В области  $z > 0$  имеется только прошедшая волна, представленная интегралом от  $G^+ u_z^0$  и распространяющаяся в положительном направлении.

Если волновой вектор  $k$  меньше критического значения  $\pi \alpha_{01}/a$ , то в функции Грина при  $z \rightarrow \infty$  сохраняется только плоская волна, для которой  $m = n = 0$ , и предельная формула для прошедшей волны имеет вид

$$\psi \simeq \frac{i\tau A}{\pi k a^2} e^{ikz}, \quad z \rightarrow \infty, \quad k < \frac{\pi \alpha_{01}}{a},$$

где

$$\tau = \frac{2\pi}{A} \int_0^b u_z^0(r_0) r_0 dr_0 \quad (11.4.3)$$

— отношение амплитуды потока воздуха через отверстие в диафрагме к амплитуде падающей волны. Отношение квадрата амплитуды потенциала  $\psi$  при  $z \rightarrow \infty$  к квадрату амплитуды  $A$  падающей волны  $T = |\tau/\pi k a^2|^2$  представляет собой коэффициент прохождения через отверстие, т. е. отношение интенсивности прошедшей волны к интенсивности падающей. Этот коэффициент прохождения (и отражения) можно легко вычислить, если известна  $u_z^0$ .

В § 11.3 мы предполагали, что  $u_z^0$  выражается приблизительно так же, как и в случае установившегося потока через отверстие (решение при  $k = 0$ ), и соответственно проводили вычисления, выбирая амплитуду  $u_z^0$  так, чтобы обеспечить приближенную непрерывность  $\psi$  при  $z = 0$ . Здесь мы хотим получить интегральное уравнение для определения  $u_z^0$ , которое мо-

жет быть решено последовательными приближениями и с помощью которого мы сможем оценить степень точности приближения, полученного ранее. Практически, во многих задачах не требуется знать детально поведение  $u_z^0$  или  $\psi$  вблизи диафрагмы, если только мы в состоянии получить достаточно точное значение для величины  $\tau$ , определенной в (11.4.3). Не вычисляя непосредственно  $u_z^0$ , мы можем вычислить коэффициенты прохождения и отражения

$$T = \left| \frac{\tau}{\pi k a^2} \right|^2, \quad R = 1 - T. \quad (11.4.4)$$

Эти величины определяют, какая часть мощности, падающей на диафрагму, проходит через отверстие и какая часть отражается. Часто эти величины составляют все то, что нужно знать в данной задаче.

Интегральное уравнение для  $u_z^0$  получается из условия непрерывности  $\psi$  в отверстии, другими словами, из условия равенства значений  $\psi$  при  $z=0$ , полученных из выражений для  $z > 0$  и для  $z < 0$  по формуле (11.4.2). Поскольку  $G^+ - G^- \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow 0$ , мы получаем искомое интегральное уравнение в виде

$$A = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^b r_0 u_z^0(r_0) G_h(r, \varphi, 0 | r_0, \varphi_0, 0) dr_0, \quad r < b.$$

Если это уравнение будет решено точно, то, как мы показали, задача будет решена полностью.

**Вариационный принцип.** Решить это уравнение непосредственно не так просто, но оно имеет форму, удобную для получения вариационного принципа для  $u_z^0$  и  $\tau$  (см. § 9.4). Умножая обе части на  $u_z^0(r)$  и интегрируя по  $\varphi$  и  $r$ , мы получаем

$$\frac{1}{4\pi} \iiint u_z^0(r) u_z^0(r_0) r r_0 G_h d\varphi d\varphi_0 dr dr_0 = A \iint u_z^0 r d\varphi dr = A^2 \tau,$$

или

$$A^2 \tau = 2A \iint u_z^0 r d\varphi dr - \frac{1}{4\pi} \iiint u_z^0(r) u_z^0(r_0) G_h r r_0 d\varphi d\varphi_0 dr dr_0. \quad (11.4.5)$$

Если мы теперь изменим  $u_z^0$ , отходя от его истинного значения, на малую величину  $\delta u$ , то получим

$$A^2 \delta \tau = 2 \iint \left[ A - \frac{1}{4\pi} \iint u_z^0(r_0) G_h r_0 d\varphi_0 dr_0 \right] r d\varphi dr \delta u,$$

а это и дает уравнение для  $A$ , если положить  $\delta \tau = 0$ . Итак, истинное значение  $u_z^0$  даст стационарное значение интегралу из (11.4.5). Сначала мы варьируем только амплитуду  $u_z^0$ , полагая  $u_z^0 = B \chi(r)$ , где  $B$  подлежит варьированию для определения экстремума:

$$\delta \left[ 2AB \iint \chi r d\varphi dr - \frac{B^2}{4\pi} \iiint \chi(r) \chi(r_0) G_h r r_0 d\varphi d\varphi_0 dr dr_0 \right] = 0.$$

Отсюда определяем значение

$$B = \frac{4\pi A \iint \chi r d\varphi dr}{\iiint \chi(r) \chi(r_0) G_h r r_0 d\varphi d\varphi_0 dr dr_0}.$$

Пользуясь формулой (11.4.3), можно исключить из этого соотношения  $A$  — амплитуду падающей волны. Получим вариационный принцип, связывающий амплитуду потока  $\tau$  с распределением потока  $\chi$ , соответствующим

падающей волне единичной амплитуды [см. (9.4.8)]:

$$[\tau] = \frac{4\pi \iint \chi(r) r d\varphi dr \iint \chi(r_0) r_0 d\varphi_0 dr_0}{\iiint \chi(r) \chi(r_0) G_k(r, \varphi, 0 | r_0, \varphi_0, 0) r r_0 d\varphi_0 d\varphi dr_0 dr}. \quad (11.4.6)$$

Выражение, стоящее справа, достигает своего экстремального значения, т. е. экстремального значения  $\tau$ , при истинном  $\chi$ . Мы пойдем, однако, другим путем: если даже  $\chi$  не имеет его истинной формы, но близко к истинному, то вычисленное значение нашего отношения интегралов будет отличаться от истинного значения  $\tau$  на величину второго порядка малости относительно малой вариации  $\chi$ . Более того, используя формулу (11.4.6), как в гл. 9, мы можем получить итерированное выражение для  $\chi$ , более близкое к истинному, чем первое приближение. Заметим, что и числитель и знаменатель содержат оба множителя  $\chi$ , а следовательно, амплитуда функции сравнения, использованной для  $\chi$ , может быть установлена позднее; она не влияет на величину  $\tau$ . Если мы хотим рассчитать только коэффициенты прохождения и отражения, то можно вообще обойтись без определения амплитуды  $\chi$ .

**Вычисление коэффициента прохождения.** Выберем в качестве функции сравнения выражение, использованное в § 11.3, для диафрагмы с концентрическим отверстием, помещенной в круглой трубе,

$$\chi \simeq C \left[ 1 - \left( \frac{r}{b} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

которое является достаточно хорошим приближением в случае  $b < a/2$ . Чтобы вычислить интегралы в (11.4.6), нужно использовать общее выражение интегралов вида

$$\begin{aligned} \int_0^b \left[ 1 - \left( \frac{r}{b} \right)^2 \right]^{n-1/2} J_0(\beta r) r dr &= b^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^{2n} \theta J_0(\beta b \sin \theta) d\theta = \\ &= \frac{2^{n-1/2} b^2 \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{(\beta b)^{n+1/2}} J_{n+1/2}(\beta b) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(\beta b)^n} b^2 j_n(\beta b). \end{aligned}$$

Пользуясь этим результатом для различных значений  $n$  и  $\beta$ , мы получаем

$$\iint \chi r d\varphi dr = 2\pi C b^2 j_0(0) = 2\pi b^2 C,$$

$$\iiint \chi(r) \chi(r_0) G_k r r_0 d\varphi d\varphi_0 dr dr_0 = \frac{16\pi^2 C^2 b^4}{ka^2} \left\{ i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{K_n} \left[ \frac{j_0(\pi \alpha_{0n} b/a)}{J_0(\pi \alpha_{0n})} \right]^2 \right\},$$

где  $K_n^2 = (\pi \alpha_{0n}/a)^2 - k^2$  ( $k < \pi \alpha_{01}/a$  и  $b < a/2$ ). Таким образом, приближенное значение коэффициента прохождения равно

$$T \simeq \frac{1}{1 + (\Sigma)^2}, \quad (\Sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ka^2/b^2}{V \sqrt{1 - (ka/\pi \alpha_{0n})^2}} \frac{\sin^2(\pi \alpha_{0n} b/a)}{(\pi \alpha_{0n})^2 J_0^2(\pi \alpha_{0n})}. \quad (11.4.7)$$

Сходимость этого ряда может быть улучшена, если учесть, что  $J_0^2(\pi \alpha_{0n}) \simeq 2/\pi^2 \alpha_{0n}$  при  $n \rightarrow \infty$ , так что вспомогательный ряд, который

следует прибавить и вычесть из данного ряда, имеет вид

$$\begin{aligned} S &= \frac{ka^3}{2\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{\pi nb}{a}\right) = \frac{ka^3}{4\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi nb}{a}\right)\right] = \\ &= \frac{ka^3}{4\pi b^2} \operatorname{Re} [I(e^{2\pi ib/a})], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I(x) &= -\int_x^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = \ln x \ln(1-x) - \int_1^x \frac{\ln t}{t-1} dt = \\ &= \ln x \ln(1-x) - \ln x - \frac{1}{4} (\ln x)^2 - [\text{ряд по нечетным степеням } \ln x], \\ &|\ln x| < 2\pi. \end{aligned}$$

При этом последние соотношения получены заменой переменных интегрирования и интегрированием по частям. Окончательно

$$S = \pi \frac{ka^2}{4b} \left[1 - \frac{b}{a}\right]$$

и ряд  $(\Sigma)$  в (11.4.7) может быть записан так:

$$\begin{aligned} (\Sigma) &= \frac{\pi ka^2}{4b} - \frac{1}{4} \pi ka + \\ &+ \frac{ka^3}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n^2 \sin^2\left(\frac{\pi \alpha_{0n} b}{a}\right) - (\pi \alpha_{0n})^3 \sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \alpha_{0n}}\right)^2} J_0^2(\pi \alpha_{0n}) \sin^2\left(\frac{\pi nb}{a}\right)}{2\pi n^2 (\pi \alpha_{0n})^3 \sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \alpha_{0n}}\right)^2} J_0^2(\pi \alpha_{0n})} \end{aligned} \quad (11.4.8)$$

где новый ряд быстро сходится и его можно рассматривать как поправку к первым двум членам.

Когда  $b/a$  мало (отверстие мало по сравнению с поперечным сечением трубы), в выражении  $(\Sigma)$  наибольшим является первый член и коэффициент прохождения равен

$$T \simeq \frac{1}{1 + (\pi ka^2/4b)^2} \simeq \frac{16}{(ka)^2} \frac{b^2}{\pi^2 a^2}, \quad b \ll ka^2.$$

Часть падающей волны, проходящая через очень малое отверстие, пропорциональна отношению площади отверстия к площади поперечного сечения трубы и обратно пропорциональна квадрату частоты (если частота не слишком мала). С другой стороны, если частота стремится к нулю ( $ka \ll b/a$ ), то  $T$  стремится к единице; если частота достаточно низка (т. е. если каждый период колебания длится достаточно долго), то звук проходит через отверстие практически беспрепятственно.

Из этой формулы ничего нельзя узнать относительно предельно высоких частот, ибо при ее выводе мы предположили, что частота меньше, чем частота первой парциальной волны, так что по трубе передается только наименьший тип волн. Нельзя также ожидать, что эта формула будет пригодной для значений  $b$ , близких к  $a$  (радиус отверстия примерно равен радиусу трубы), так как использованная нами функция сравнения для  $\chi$  не является в этом случае хорошим приближением.

Если бы мы использовали метод §11.3, мы бы получили для  $T$  близкое выражение, отличающееся только тем, что при его выводе требовалась непрерывность лишь вдоль оси трубы, в то время как в изложенном здесь выводе мы требуем, так сказать, непрерывности в среднем по всему отверстию.

Лучшее приближение, которое может дать удовлетворительные результаты даже при  $b \rightarrow a$  (но не при  $ka \rightarrow \infty$ ), получим, если положим

$$\chi \simeq \frac{C}{\sqrt{1-(r/b)^2}} + \gamma C \sqrt{1-\left(\frac{r}{b}\right)^2},$$

и, варьируя  $\gamma$ , будем искать стационарное значение выражения (11.4.6).

Положив  $(d/d\gamma)(1/\tau) = 0$ , получаем простую формулу: значение  $\gamma$  для стационарного  $\tau$  равно

$$\gamma = -\frac{b}{a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_0(\pi\alpha_{0n}b/a) j_2(\pi\alpha_{0n}b/a)}{\pi\alpha_{0n} \sqrt{1-(ka/\pi\alpha_{0n})^2} J_0^2(\pi\alpha_{0n})} \right\} \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_1(\pi\alpha_{0n}b/a) j_2(\pi\alpha_{0n}b/a)}{(\pi\alpha_{0n})^2 \sqrt{1-(ka/\pi\alpha_{0n})^2} J_0^2(\pi\alpha_{0n})} \right\}^{-1}. \quad (11.4.9)$$

Отсюда находим значение коэффициента прохождения

$$T \simeq \left\{ 1 + \frac{(ka)^2}{(1+\gamma/3)^4} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_0(\pi\alpha_{0n}b/a) + (\gamma a/\pi\alpha_{0n}b) j_1(\pi\alpha_{0n}b/a)}{\pi\alpha_{0n} \sqrt{1-(ka/\pi\alpha_{0n})^2} J_0^2(\pi\alpha_{0n})} \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (11.4.10)$$

где  $\gamma$  определяется формулой (11.4.9). Этот ряд можно просуммировать методом, аналогичным тому, который привел к (11.4.8).

Отверстие в бесконечной плоскости. Этот же общий метод может быть применен в предельном случае при  $a$ , стремящемся к бесконечности, когда выражение для  $G$  в виде ряда переходит в интегральное представление

$$G_k^+ = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \int_0^{\infty} \frac{J_m(ur) J_m(ur_0)}{\sqrt{u^2 - k^2}} \times \begin{cases} \text{ch}(z_0 \sqrt{u^2 - k^2}) \exp(-z \sqrt{u^2 - k^2}) u du, & z > z_0, \\ \text{ch}(z \sqrt{u^2 - k^2}) \exp(-z_0 \sqrt{u^2 - k^2}) u du, & z < z_0. \end{cases} \quad (11.4.11)$$

Полагая  $\chi = C/\sqrt{1-(r/b)^2}$ , мы имеем, как и ранее,  $\iint \chi r d\varphi dr = 2\pi b^2 C$ , но

$$\begin{aligned} \iiint \chi(r) \chi(r_0) G_k r r_0 d\varphi d\varphi_0 dr dr_0 &= 8\pi^2 i b^4 C^2 \int_0^{\infty} \frac{u du}{\sqrt{k^2 - u^2}} j_0^2(ub) = \\ &= \frac{8\pi^2 b^2 C^2}{k} \left\{ i \int_0^1 \frac{\sin^2(kbv)}{v \sqrt{1-v^2}} dv + \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(kbv)}{v \sqrt{v^2-1}} dv \right\}. \end{aligned}$$

Эти два интеграла можно подсчитать численно для любого значения  $kb$ . Если  $kb$  мало, то их можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin^2(kbv)}{v \sqrt{1-v^2}} dv &\simeq k^2 b^2 \int_0^1 \frac{v dv}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{1}{3} k^4 b^4 \int_0^1 \frac{v^3 dv}{\sqrt{1-v^2}} = k^2 b^2 - \frac{2}{9} k^4 b^4, \\ \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(kbv)}{v \sqrt{v^2-1}} dv &\simeq \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(kbv)}{v^2} dv + (kb)^2 \int_1^{\infty} \left[ \frac{v}{\sqrt{v^2-1}} - 1 \right] dv \simeq \\ &\simeq \frac{1}{2} \pi kb - k^2 b^2 + k^2 b^2 = \frac{1}{2} \pi kb. \end{aligned}$$

Отсюда получаем приближенное значение для полного потока через отверстие

$$\tau \simeq 2\pi k b^2 \left\{ i \left( k^2 b^2 - \frac{2}{9} k^4 b^4 \right) + \frac{1}{2} \pi k b \right\}^{-1}.$$

Вместо коэффициента прохождения  $T$  теперь требуется определить *эффективную площадь* отверстия, т. е. отношение полной мощности, проходящей через отверстие, к интенсивности падающей волны. Эту величину можно выразить через  $\tau$  при помощи следующего полезного приема. Интенсивность падающей волны  $\psi_i = A e^{ikz - i\omega t}$  равна

$$I_i = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial t} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right\} = \frac{1}{2} \rho c k^2 |A|^2,$$

в то время как полная мощность, проходящая через отверстие, равна интегралу от интенсивности полного решения при  $z > 0$  по площади отверстия

$$P_t = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} i \rho c k \int \int \bar{\psi}^+ \frac{\partial \psi^+}{\partial z} r_0 d\varphi_0 dr_0 \right\}.$$

*Эффективная площадь* отверстия для прохождения волны поэтому равна

$$Q_t = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{k |A|^2} \int \int \bar{\psi}^+(r_0) u_z^0(r_0) r_0 d\varphi_0 dr_0 \right\}.$$

Но из (11.4.2) или из интегрального уравнения для  $u_z^0$  заключаем, что для обеспечения непрерывности  $\psi^+$  в отверстии должно быть  $\psi^+(r_0) = A$ . Поэтому

$$Q_t = \operatorname{Im} \left\{ \frac{-1}{kA} \int \int u_z^0(r_0) r_0 d\varphi_0 dr_0 \right\} = \operatorname{Im} \left[ -\frac{\tau}{k} \right], \quad (11.4.12)$$

где  $\tau$  — амплитуда потока, определенная в (11.4.3) (поскольку  $\tau$  имеет размерность длины, а  $Q$  — размерность площади).

Используя выражение для  $\tau$ , полученное из вариационного принципа, мы находим эффективную площадь отверстия для прохождения плоской волны, падающей нормально на круглое отверстие в бесконечной плоскости,

$$Q_t \simeq \pi b^2 \left[ \frac{8}{\pi^2} - \frac{16}{9\pi^2} k^2 b^2 - \frac{32}{\pi^4} k^4 b^4 \right] \quad (11.4.13)$$

(для условий Неймана). Эффективное отверстие для длинных волн оказывается немного меньшим, чем истинное. Первый член этого выражения может быть получен также при помощи следующих соображений. Можно рассматривать воздух в круглом отверстии как эффективную массу  $\pi^2 b^3 \rho / 2$  [см. (10.3.60)], на которую воздействует вынуждающая сила  $2\pi b^2 P_0$ , где  $P_0$  — амплитуда давления падающей волны и  $P_0^2 / \rho c$  — ее интенсивность. Тогда амплитуда скорости воздуха равна  $4P_0 / \pi k b \rho c$  и, поскольку сопротивление излучения волны вправо приблизительно равно  $(1/2) \rho c k^2 b^2$  [см. рассмотрение, предшествующее (11.3.36)], проникающая через отверстие мощность составляет

$$\frac{1}{2} \rho c k^2 b^2 \left( \frac{4P_0}{\pi k b \rho c} \right)^2 = \frac{8\pi b^2 P_0^2}{\pi \rho c}.$$

Отношение этой мощности к интенсивности падающей волны как раз равно  $8\pi b^2 / \pi^2$ , т. е. первому члену (11.4.13).

Более точное выражение можно получить, взяв более точно выражение для  $u_z^0$ . В соответствии с принципом Бабине (см. стр. 403)  $2Q_t$  представляет собой также поперечное сечение рассеяния волны, падающей нормально на диск радиуса  $b$ , причем  $\psi$  равно нулю на диске.



Расчет проникновения волн через круглое отверстие в диафрагме в случае однородных условий Дирихле на границе может быть произведен тем же способом. Функцию Грина нужно изменить таким образом, чтобы она равнялась нулю при  $z=0$ , и вариационное выражение для  $\tau$  принимает вид

$$[\tau] = \frac{4\pi k^2 \left[ \int \int \psi_0(r_0) r_0 d\varphi_0 dr_0 \right]^2}{\int \int \int \psi_0(r_0) \psi_0(r) \left[ \frac{\partial^2}{\partial z \partial z_0} G_k(r|r_0) \right]_{z=0} r r_0 d\varphi d\varphi_0 dr dr_0}, \quad (11.4.14)$$

причем теперь мы задаемся не производной потенциала скоростей в отверстии, а самим потенциалом  $\psi_0$ . Для  $\psi$  можно принять выражение  $C\sqrt{1-(r/b)^2}$ , прибавляя для большей точности член с  $[1-(r/b)^2]^{3/2}$ . Используя один член для  $\psi$ , мы получаем для поперечного сечения в случае условий Дирихле приближенную формулу

$$Q_t \simeq \pi b^2 \frac{8}{27\pi^2} (kb)^4 [1 + 0,32(kb)^2 + 0,049(kb)^4 + \dots]. \quad (11.4.15)$$

Этот результат достаточно точен при  $kb < 1$ . Действительно, численный подсчет интегралов в (11.4.14) показывает, что выражение для  $Q$ , вычисленное с помощью простейшего одночленного выражения для  $\psi_0$ , дает разумную точность до  $kb \simeq 3$ , а уточненная двучленная формула — до  $kb \simeq 5$ . По принципу Бабинне, эти результаты применимы также для случая рассеяния акустических волн, падающих нормально на жесткий диск (условия Неймана).

**Отражение в облицованной трубе.** Мы переходим теперь к другой задаче о распространении волн, для решения которой следует применить интегральные уравнения, а именно к задаче о распространении звука в трубе, облицованной звукопоглощающим материалом. Предположим, что поперечное сечение трубы представляет собой прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$  (ось вдоль оси  $z$ ) и что внутренняя поверхность при  $z < 0$  абсолютно жесткая. При  $z > 0$  стенки трубы  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=b$  также жесткие, а стенка  $x=a$  покрыта материалом, который допускает некоторое нормальное к поверхности смещение воздуха. Предположим, далее, что истинные краевые условия при  $x=a$ ,  $z > 0$  сводятся к требованию, чтобы нормальная составляющая градиента потенциала скоростей на стенке была пропорциональна  $\psi$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik\eta\psi \text{ при } x=a, z > 0. \quad (11.4.16)$$

Коэффициент пропорциональности  $\eta$  называется удельным акустическим адмитансом стенки.

Поскольку  $ikrc\psi$  — давление, а  $\partial\psi/\partial x$  — скорость в направлении  $x$ , наше краевое условие можно сформулировать и так: нормальный удельный акустический импеданс, т. е. отношение давления на поверхности к нормальной составляющей скорости воздуха на поверхности, равен  $z_n = ikrc\psi/(\partial\psi/\partial x)$ . Таким образом,

$$\eta = \frac{rc}{z_n} = \gamma + i\sigma,$$

где  $\gamma$  — активная (всегда положительная), а  $\sigma$  — реактивная составляющие акустического адмитанса материала поверхности [ $\sigma$  может быть положительной (инерционная реакция) и отрицательной (упругая реакция)].

Решения волнового уравнения внутри трубы содержат множитель  $\cos(\pi n y/b)$ ; так как парциальные волны для различных  $n$  не взаимодей-

ствуют между собой, то этот множитель одинаков как для положительных, так и для отрицательных значений  $z$ . Нам, таким образом, незачем говорить об  $y$ -множителе, и  $n$  можно при желании считать равным нулю. Множитель, соответствующий координате  $x$ , при  $z > 0$  несколько более сложен. Возьмем этот множитель в виде  $\cos(\pi\mu_m x/a)$  при  $z > 0$ , где значение  $\mu_m$  определяется из краевого условия при  $x = a$  (для  $z > 0$ )

$$(\pi\mu_m) \operatorname{tg}(\pi\mu_m) = -ika\eta(k) = ka(\sigma - i\gamma). \quad (11.4.17)$$

Это уравнение было рассмотрено в § 4.7; его корни комплексные, и если  $ka\eta$  меньше  $m + 1$ , то приближенные выражения для корней имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_0 &\simeq \frac{1}{\pi} \sqrt{-ika\eta} \left[ 1 + \frac{1}{6} ika\eta \right], \\ \mu_m &= m - \frac{ika\eta}{\pi^2 m} + \frac{k^2 a^2 \eta^2}{\pi^4 m^3} + \dots, \quad m > 0. \end{aligned}$$

Для больших значений  $ka\eta$  имеются таблицы корней.

Таким образом, возможные типы волн, распространяющихся вдоль части трубы  $z > 0$ , имеют форму

$$\varphi_{mn} e^{ik_{mn}z} = \cos\left(\frac{\pi\mu_m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{ik_{mn}z - ikct},$$

где

$$k_{mn}^2 = k^2 - (\pi\mu_m/a)^2 - (\pi n/b)^2.$$

Поскольку  $\mu$  комплексное,  $k_{mn}$  тоже комплексное и волна затухает по мере продвижения в направлении возрастания  $z$ . Когда действительная часть суммы  $(\pi\mu_m/a)^2 + (\pi n/b)^2$  становится больше  $k^2$ , мнимая часть  $k_{mn}$  становится очень большой и соответствующие типы волн сильно затухают; для меньших значений  $m$  и  $n$  также имеет место затухание (если только  $\eta$  не чисто мнимое), но оно значительно менее заметно. Следовательно, в этом случае нет столь резкого различия в поведении типов волн выше и ниже критической частоты, какое мы наблюдали для непоглощающих границ. Это различие только количественное, но в большинстве случаев оно достаточно ясно выражено, чтобы говорить о реальном разделении. При заданном значении  $k$  и при  $m$ , лежащем ниже некоторого значения  $m_0$  (для  $n = 0$ ), поглощение весьма мало по сравнению с поглощением при значениях  $m$ , лежащих выше  $m_0$ . Для небольших значений  $k$  только  $k_{00}$  имеет относительно небольшую мнимую часть; более высокие типы волн затухают гораздо быстрее.

Для решения рассматриваемой задачи мы пользуемся функцией Грина, соответствующей краевым условиям на жестких стенках при  $z < 0$ , и получаем интегральное уравнение на части границы с видоизмененным краевым условием (при  $z > 0$ ). Функция Грина для  $n = 0$  (нам нет нужды учитывать зависимость от  $y$  и потому можно рассматривать задачу как двумерную) имеет вид

$$G_k(x, z | x_0, z_0) = \frac{2\pi i}{ka} e^{ik|z-z_0|} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi}{aK_m} \cos\left(\frac{\pi m x_0}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) e^{-K_m|z-z_0|}, \quad (11.4.18)$$

где  $K_m^2 = (\pi m/a)^2 - k^2$ . (Мы предполагаем, что частота меньше, чем наименьшая критическая.)

Применяя теорему Грина, мы находим, что потенциал  $\psi(x, z)$  равен сумме интегралов по двум стенкам трубы  $x = 0$ ,  $x = a$  от произведения  $G$  на составляющую градиента  $\partial\psi/\partial x$  и интегралов по сечениям трубы при

$z = \pm\infty$  от  $G(\partial\psi/\partial z) - \psi(\partial G/\partial z)$ . Интеграл по сечению  $z = +\infty$  равен нулю, ибо  $\psi \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$  (вследствие поглощения энергии стенкой). Однако интеграл по сечению  $z = -\infty$  не равен нулю, что весьма осложняет дальнейшие рассуждения. Тут следует заметить, что мы не обязаны пользоваться только простой функцией Грина (11.4.18). Всегда можно прибавить к ней некоторое решение однородного уравнения с теми же краевыми условиями на стенках и получить таким путем другую функцию Грина. Поскольку только первый член  $G_k$  не исчезает при  $z_0 \rightarrow -\infty$ , мы введем дополнительное слагаемое, которое уничтожит этот член при  $z_0 \rightarrow -\infty$ . Таким образом получаем

$$\gamma_k(x, z | x_0, z_0) = \frac{2\pi i}{ka} [e^{ik|z-z_0|} - e^{ik(z-z_0)}] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi}{aK_m} \cos\left(\frac{\pi mx_0}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) e^{-K_m|z-z_0|}. \quad (11.4.19)$$

Интеграл от  $\gamma_k(\partial\psi/\partial z) - \psi(\partial\gamma_k/\partial z)$  по обоим граничным сечениям  $z = \pm\infty$  исчезает и интеграл в формуле Грина сводится к интегралу от произведения  $(\partial\psi/\partial x_0)_{x_0=a}$  на  $\gamma_k(x, z | a, z_0)$  по  $z_0$  в пределах от 0 до  $\infty$ . Но эта поверхность  $x_0 = a$ ,  $z_0 > 0$  покрыта таким материалом, что на ней  $\partial\psi/\partial x_0$  связано с  $\psi$  соотношением (11.4.16), так что мы в конце концов приходим к равенству

$$\psi(x, z) = \frac{ik\eta}{4\pi} \int_0^{\infty} \psi(a, z_0) \gamma_k(x, z | a, z_0) dz_0. \quad (11.4.20)$$

Полагая здесь  $x = a$ , мы получаем интегральное уравнение для  $\psi(a, z)$ ; его решение можно вновь подставить в (11.4.20) и получить  $\psi(x, z)$ .

Это — интегральное уравнение типа Винера — Хопфа (см. стр. 906 тома I); поскольку  $\gamma_k$  — функция от  $z - z_0$ , чтобы вычислить  $\psi(a, z)$ , мы воспользуемся, поэтому, методом преобразования Фурье. Фактически функция  $\psi(a, z)$  (или, вернее, ее преобразование Фурье) — это все, что требуется, чтобы вычислить относительную амплитуду волны, отраженной поглощающим материалом. При  $z \rightarrow -\infty$   $\psi$  должна иметь вид

$$\psi \simeq ae^{ikhz} + \beta e^{-ikhz}, \quad z \rightarrow -\infty,$$

а из (11.4.20), применив асимптотическую формулу для  $\gamma$ , мы получаем

$$\psi \simeq \frac{\eta}{2a} \left\{ e^{ikhz} \int_0^{\infty} \psi(a, z_0) e^{-ikhz_0} dz_0 - e^{-ikhz} \int_0^{\infty} \psi(a, z_0) e^{ikhz_0} dz_0 \right\}.$$

Сравнивая эти две формулы, мы видим, что отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей пропорционально отношению между двумя преобразованиями Фурье функции  $\psi(a, z_0)$ . Если

$$\Phi_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \psi(a, z_0) e^{iwz_0} dz_0,$$

то отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей определяется выражением

$$r(k) = \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\Phi_+(k)}{\Phi_+(-k)}. \quad (11.4.21)$$

**Преобразование Фурье интегрального уравнения.** Согласно § 4.8, следует разбить  $\psi(a, z)$  на две функции:  $\psi_+(z)$ , равную  $\psi(a, z)$  при  $z > 0$ ,

и  $\varphi_-(z)$ , равную  $\psi(a, z)$  при  $z < 0$ :

$$\varphi_+(z) = \begin{cases} \psi(a, z), & z > 0; \\ 0, & z < 0; \end{cases} \quad \varphi_-(z) = \begin{cases} 0, & z > 0, \\ \psi(a, z), & z < 0. \end{cases}$$

Запишем их преобразования Фурье:

$$\Phi_+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \psi(a, z_0) e^{i\omega z_0} dz_0, \quad \Phi_-(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \psi(a, z_0) e^{i\omega z_0} dz_0.$$

Вследствие асимптотического поведения  $\psi$  интеграл, выражающий  $\Phi_+$ , сходится при  $\text{Im } \omega > -\text{Im } k_0$  [где  $k_0^2 = k^2 - (\pi\mu_0/a)^2$ ,  $\mu_0$  определено в (11.4.17); так как  $\text{Re } \eta > 0$ , то  $\text{Im } k_0 > 0$ ], а интеграл для  $\Phi_-$  сходится при  $\text{Im } \omega < 0$ . Таким образом области сходимости перекрываются по полосе

$$-\text{Im } k_0 < \text{Im } \omega < 0, \quad k_0^2 = k^2 - \left(\frac{\pi\mu_0}{a}\right)^2 \simeq k^2 + \frac{ik\eta}{a}.$$

В соответствии с (8.5.6) двойное преобразование Фурье функции от  $z - z_0$  равно произведению  $\delta(\omega - \omega_0)$  на функцию от  $\omega$ , являющуюся преобразованием Фурье по  $z - z_0$ . Другими словами, поскольку  $\gamma_k = \gamma(z - z_0)$ , ее двойное преобразование Фурье имеет вид  $\Gamma \delta(\omega - \omega_0)$ , где

$$\Gamma(\omega | x, x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta, \quad \zeta = z - z_0,$$

при условии, что интеграл сходится. Мы теперь видим другую причину (а может быть ту же самую?) для перехода от  $G$  к  $\gamma$  путем добавления члена, содержащего  $e^{ik(z-z_0)}$ . Если не добавлять этот член, то интеграл от функции Грина по области  $\zeta = (z - z_0) > 0$  будет сходиться только при  $\text{Im } \omega > 0$ , интеграл по области  $\zeta < 0$  — только при  $\text{Im } \omega < 0$  и общей области аналитичности вовсе не будет. Благодаря введению дополнительного слагаемого  $\gamma$  при  $\zeta \rightarrow \infty$  асимптотически ведет себя как  $e^{-K_1\zeta}$ , где  $K_1 = \sqrt{(\pi/a)^2 - k^2} > 0$ . Поведение  $\gamma$  при  $\zeta \rightarrow -\infty$  то же, что и ранее, но теперь можно выбрать  $\omega$  так, чтобы его мнимая часть заключалась между 0 и  $-K_1$ , и при этом интеграл, выражающий  $\Gamma$ , будет сходиться.

В результате (при  $0 > \text{Im } \omega > -K_1$ ) мы получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega | x, x_0) &= \frac{2}{a} \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{-1}{k^2 - \omega^2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi m x_0/a) \cos(\pi m x/a)}{(\pi m/a)^2 - (k^2 - \omega^2)} \right\} \simeq \\ &\simeq -\frac{2}{\sigma} \sqrt{2\pi} \text{ctg}(\sigma a), \quad x, x_0 \rightarrow a, \end{aligned}$$

где  $\sigma^2 = k^2 - \omega^2$ . При суммировании ряда мы поступили так же, как при выводе (4.3.7).

Однако  $\Gamma$  можно получить более изящным приемом, решая преобразованное по Фурье уравнение для  $\gamma$ . Это уравнение (такое же, как и уравнение для  $G$ ) имеет вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + k^2 \right) \gamma = -4\pi \delta(x - x_0) \delta(\zeta),$$

так что для  $\Gamma$  получаем уравнение

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 - \omega^2 \right) \Gamma = -2\sqrt{2\pi} \delta(x - x_0).$$

Решение этого уравнения, имеющее равную нулю нормальную составляющую градиента при  $x=0$  и  $x=a$ , таково:

$$\Gamma(\omega | x, x_0) = \frac{-2\sqrt{2\pi}}{\sigma \sin(\sigma a)} \begin{cases} \cos(\sigma x_0) \cos \sigma(x-a), & x > x_0, \\ \cos(\sigma x) \cos \sigma(x_0-a), & x < x_0, \end{cases} \quad (11.4.22)$$

$$\Gamma(\omega | x, x_0) \simeq -\frac{2}{\sigma} \sqrt{2\pi} \operatorname{ctg}(\sigma a), \quad x, x_0 \rightarrow a,$$

где  $\sigma = \sqrt{k^2 - \omega^2}$ . Естественно поставить вопрос, является ли эта функция преобразованием  $\gamma$  или  $G$  или какой-либо другой функции, полученной добавлением к  $G$  какого-либо другого решения однородного уравнения. Ответ заключается в том, что она представляет любую из этих функций (дающую сходящееся преобразование Фурье), но только в определенных интервалах изменения мнимой части  $\omega$ . Она представляет  $\gamma$ , как мы это видели, при  $0 > \operatorname{Im} \omega > -K_1$ . Если же к  $G$  добавить  $-e^{-ik(z_0-z)}$ , так что «свободная волна» будет существовать не при  $z < 0$ , а при  $z > 0$ , то получающееся при этом сходящееся преобразование Фурье будет соответствовать  $\Gamma$  из (11.4.22) в области  $0 < \operatorname{Im} \omega < K_1$  и т. д.

Мы решили использовать  $\gamma$  именно потому, что его преобразованием Фурье является  $\Gamma$  в области  $0 > \operatorname{Im} \omega > -K_1$ , которая перекрывает области аналитичности функций  $\Phi_+$  и  $\Phi_-$ , т. е. преобразований  $\psi$  соответственно при  $z > 0$  и  $z < 0$ . Теперь мы можем сделать следующий шаг в процессе Винера — Хопфа. Преобразование Фурье интегрального уравнения

$$\psi(a, z) = \frac{ik\eta}{4\pi} \int_0^{\infty} \psi(a, z_0) \gamma_k(a, z | a, z_0) dz_0,$$

согласно (8.5.5) и (8.5.51), имеет вид

$$\Phi_+(\omega) + \Phi_-(\omega) = \frac{ik\eta}{2\sqrt{2\pi}} \Phi_+(\omega) \Gamma(\omega | a, a) = -ik\eta \frac{\operatorname{ctg}(\sigma a)}{\sigma} \Phi_+(\omega),$$

т. е.

$$\Phi_+(\omega) = \frac{-\sigma \sin(\sigma a)}{ik\eta \cos(\sigma a) + \sigma \sin(\sigma a)} \Phi_-(\omega). \quad (11.4.23)$$

**Факторизация преобразованного уравнения.** Если теперь отношение  $\Phi_+$  к  $\Phi_-$  будет факторизовано, т. е. будут получены две функции  $\Upsilon_+$  и  $\Upsilon_-$  [см. (8.5.52)], такие, что  $\Upsilon_+(\sigma)$  регулярна (т. е. не имеет ни нулей, ни полюсов) при  $\operatorname{Im} \sigma > -\operatorname{Im} \mu_0$  и  $\Upsilon_-(\sigma)$  регулярна при  $\operatorname{Im} \sigma < 0$ , то функции  $\Phi_+$  и  $\Phi_-$  можно будет найти и наша задача будет полностью решена. Выражение в скобках имеет нули при  $\sigma = n\pi/a$  ( $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ ). Его полюсы совпадают с корнями уравнения  $\sigma \operatorname{tg}(\sigma a) = -ik\eta$ ; другими словами, эти полюсы связаны с корнями уравнения (11.4.17) соотношением

$$\sigma_m = \frac{\pi \mu_m}{a} \simeq \begin{cases} \sqrt{-\frac{ik\eta}{a}}, & m=0, \\ \frac{\pi m}{a} - \frac{ik\eta}{\pi m}, & m \neq 0, \end{cases} \quad \eta \rightarrow 0, \quad (11.4.24)$$

где  $m$  может быть как отрицательным, так и положительным целым числом. При этом корни для отрицательных  $m$  отличаются только знаком от корней для положительных  $m$ . Мы можем теперь выразить отношение, подде-

жащее факторизации, через бесконечные произведения [см. (4.3.9)]:

$$\frac{\sigma \sin(\sigma a)}{ik\tau_1 \cos(\sigma a) + \sigma \sin(\sigma a)} = \frac{a(k^2 - \omega^2) \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{a}{\pi n} \right)^2 (k^2 - \omega^2) \right]}{ik\tau_1 \prod_{m=0}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{a}{\pi \mu_m} \right)^2 (k^2 - \omega^2) \right]} =$$

$$= a(k + \omega)(k - \omega) \times$$

$$\times \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{ka}{\pi n} \right)^2} + \frac{\omega a}{\pi n} \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{1 - \frac{ka^2}{\pi n}} - i \frac{\omega a}{\pi n} \right]}{ik\tau_1 \prod_{m=0}^{\infty} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{ka}{\pi \mu_m} \right)^2} + i \frac{\omega a}{\pi \mu_m} \right] \prod_{m=0}^{\infty} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{ka^2}{\pi \mu_m} \right)} - i \frac{\omega a}{\pi \mu_m} \right]}$$

Для улучшения сходимости можно умножать и делить отдельные члены на  $e^{i\omega a/\pi n}$ . Чтобы добиться большей симметрии, обозначим  $\sqrt{(\pi \mu_0/a)^2 - k^2} = -ik_0 \simeq -i\sqrt{k^2 + i(k\tau_1/a)}$  и представим первые множители двух бесконечных произведений в знаменателе в виде  $-(a/\pi \mu_m)^2 (k_0 + \omega)(k_0 - \omega)$ . Произведение  $(k + \omega)(k - \omega)$  на первое бесконечное произведение в числителе, а также и первое произведение в знаменателе регулярны при  $\text{Im } \omega < 0$ . В то же время вторые произведения (как в числителе, так и в знаменателе дроби) регулярны при  $\text{Im } \omega > -\text{Im } k_0$ ,  $-\text{Im } k_0 < 0$ . Следовательно, в равенстве

$$\Phi_+(\omega) = \frac{\frac{ik\tau_1}{\pi^2 \mu_0^2} (\omega + k_0) \prod_{m=1}^{\infty} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{ka}{\pi \mu_m} \right)^2} - i \frac{\omega a}{\pi \mu_m} \right] e^{i\omega a/\pi m}}{\prod_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{ka}{\pi n} \right)^2} - i \frac{\omega a}{\pi n} \right] e^{i\omega a/\pi n}} =$$

$$= \Phi_-(\omega) = \frac{(\omega + k)(\omega - k) \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{ka}{\pi n} \right)^2} + i \frac{\omega a}{\pi n} \right] e^{-i\omega a/\pi n}}{(\omega - k_0) \prod_{m=1}^{\infty} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{ka}{\pi \mu_m} \right)^2} + i \frac{\omega a}{\pi \mu_m} \right] e^{-i\omega a/\pi m}}$$

левая часть регулярна в верхней полуплоскости  $\omega$  и в полосе  $0 \geq \text{Im } \omega > -\text{Im } k_0$ , а правая часть регулярна в нижней полуплоскости. Таким образом, эти области перекрываются и можно утверждать, что одна часть равенства является аналитическим продолжением другой. Следовательно, каждая часть является целой функцией (см. стр. 361 тома I). Изучение асимптотической зависимости обеих частей показывает, что на бесконечности они не имеют никаких особенностей. Итак, особенностей нет нигде, и поэтому каждая часть должна быть постоянной  $C$ .

Таким образом, мы получили выражение для преобразований Фурье функции  $\psi$  при  $z > 0$  и при  $z < 0$ . Первое преобразование важнее: мы запишем его в виде

$$\Phi_+(\omega) = C \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{ka}{\pi n} \right)^2} - i \frac{\omega a}{\pi n} \right] e^{i\omega a/\pi n}}{(\omega + k_0) \prod_{m=1}^{\infty} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{ka}{\pi \mu_m} \right)^2} - i \frac{\omega a}{\pi \mu_m} \right] e^{i\omega a/\pi m}} \quad (11.4.25)$$

в соответствующей области регулярности. Отсюда с помощью обратного преобразования Фурье можно найти  $\psi(a, z)$  при  $z > 0$  и далее с помощью (11.4.20) вычислить  $\psi(x, z)$ . Однако если мы желаем вычислить только амплитуду волны, отраженной от неоднородности при  $z = 0$ , нет необходимости заниматься такой сложной работой. На основании (11.4.21) коэффициент отражения можно получить непосредственно из только что нами найденных преобразований Фурье:

$$\begin{aligned} r(k) &= -\frac{\Phi_+(k)}{\Phi_+(-k)} = \frac{k-k_0}{k+k_0} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ \sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi n}\right)^2} - i \frac{ka}{\pi n} \right]}{\left[ \sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi n}\right)^2} + i \frac{ka}{\pi n} \right]} e^{2iah/\pi n} \times \\ &\times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left[ \sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \mu_m}\right)^2} + i \frac{ka}{\pi \mu_m} \right]}{\left[ \sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \mu_m}\right)^2} - i \frac{ka}{\pi \mu_m} \right]} e^{-2iah/\pi m} = \\ &= \frac{k-k_0}{k+k_0} \prod_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \mu_m}\right)^2} + i \frac{ka}{\pi \mu_m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi m}\right)^2} + i \frac{ka}{\pi m}} \right]^2, \quad ka < \pi. \end{aligned} \quad (11.4.26)$$

Второе выражение здесь получено умножением и делением на дополнительные бесконечные произведения с последующим использованием формулы

$$\lim_{\omega \rightarrow k} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left[ 1 - \left(\frac{a}{\pi m}\right)^2 (k^2 - \omega^2) \right]}{\left[ 1 - \left(\frac{a}{\pi \mu_m}\right)^2 (k^2 - \omega^2) \right]} = 1.$$

Формула (11.4.26) выражает отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей. Множитель  $(k-k_0)/(k+k_0)$  [где  $k_0^2 = k^2 - (\pi \mu_0/a)^2 \simeq k^2 + i(k\eta/a)$ ] можно получить в качестве первого приближения, учитывая при вычислении затухания среднюю величину потери энергии. Бесконечное произведение служит поправкой к этому первому приближению; чтобы получить требуемую точность, достаточно вычислить несколько членов этого произведения, так как множители с ростом  $m$  быстро приближаются к единице. Заметим также, что  $r \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow 0$  или при  $a \rightarrow \infty$ . Укажем еще, что задачу о распространении волн (см. гл. 13) вдоль прямоугольного волновода, проводимость одной из стенок которого меняется при  $z = 0$ , можно решить почти аналогичным образом.

**Излучение из конца круглой трубы.** В качестве другого примера применения метода Винера-Хопфа мы рассмотрим случай полубесконечной трубы с жесткими стенками круглого поперечного сечения радиуса  $a$ ; осью трубы пусть является ось  $z$ , и труба простирается от  $z = -\infty$  до  $z = 0$ . Другими словами, единственная (жесткая) граничная поверхность в цилиндрических координатах  $\rho, \varphi, z$  имеет вид  $\rho = a, z < 0$ . Нужная здесь функция Грина является, пожалуй, простейшей из функций этого рода:

$$g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = (1/R) e^{ihR},$$

где  $R$  — расстояние от точки наблюдения  $(\rho, \varphi, z)$  [или  $(r, \vartheta, \varphi)$  в сферических координатах с началом в центре отверстия трубы] до точки источника  $(\rho_0, \varphi_0, z_0)$  [или  $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ ]. Эта функция Грина не удовлетворяет

краевым условиям на стенках трубы, но она является решением неоднородного уравнения

$$(\nabla^2 + k^2)g = -4\pi\delta(r - r_0),$$

изображающим расходящуюся волну при  $r \rightarrow \infty$ .

Физически интересны два возможных решения. Одно из них представляет волну, которая порождается внутри трубы при  $z = -\infty$ , и, дойдя до открытого конца трубы, частично отражается обратно вдоль трубы по направлению к  $z = -\infty$ , а частично выходит наружу, имея при  $r \rightarrow \infty$  амплитуду  $f(\vartheta)/r$ , где  $\vartheta$  — угол между радиус-вектором точки наблюдения  $(r, \vartheta, \varphi)$  и продолжением оси трубы; при этом

$$\psi \simeq \begin{cases} Ae^{ikhz} + Be^{-ikhz} & \text{внутри трубы при } z \rightarrow -\infty, \\ \frac{f(\vartheta)}{r} e^{ikr} & \text{вне трубы при } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (11.4.27)$$

Заметим, что угол  $\vartheta$  может меняться от нуля до величины, сколь угодно близкой к  $\pi$ , если  $r$  достаточно велико. Другая интересная ситуация обратна только что рассмотренной: источник, находящийся вне трубы в точке  $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$  ( $r_0 \rightarrow \infty$ ), излучает волну, достигающую отверстия трубы; часть этой падающей волны проникает в трубу, порождая внутри нее волну, распространяющуюся к  $z = -\infty$ , а остальная ее часть отражается от отверстия назад к  $r = \infty$ . В этом случае

$$\psi_r \simeq \begin{cases} Ce^{-ikhz} & \text{внутри трубы при } z \rightarrow -\infty, \\ \exp\{-ikr[\cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi - \varphi_0)]\} + \\ \quad + \frac{f_r(\vartheta)}{r} e^{ikr} & \text{вне трубы при } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (11.4.28)$$

Прежде чем изучать соотношения между этими функциями и их параметрами  $A, B, C, f, f_r$ , мы покажем, как можно получить интегральное уравнение, например для  $\psi$ , решая которое мы и найдем эти полезные соотношения. Обычная формула Грина (7.27) имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint [g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \text{grad}_0 \psi(\mathbf{r}_0^s) - \psi(\mathbf{r}_0^s) \text{grad}_0 g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s)] dA_0. \quad (11.4.29)$$

В рассматриваемом случае поверхность интегрирования состоит из части  $A_1$  — сферы радиуса  $L$  ( $L \rightarrow \infty$ ), лежащей вне трубы, части  $A_2$  — плоского кругового сечения трубы при  $z_0 \rightarrow -\infty$  и части  $A_3$  — внутренней и внешней поверхности стенок самой трубы. Поскольку и  $g$  и  $\psi$  стремятся к нулю как  $1/L$  на поверхности  $A_1$ , произведение одной из них на радиальную составляющую градиента второй стремится к нулю как  $1/L^3$  и интеграл от этого произведения по  $A_1$  стремится к нулю. Аналогично, поскольку  $g$  внутри трубы также стремится к нулю как  $1/|z|$  при  $z \rightarrow -\infty$  (хотя  $\psi$  не стремится к нулю), интеграл по  $A_2$  также исчезает. Поскольку  $\text{grad}_0 \psi$  равен нулю на внутренней и внешней поверхности стенок трубы, один из интегралов по  $A_3$  обращается в нуль, и для случая (11.4.27) мы имеем

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{A_3} \psi(\mathbf{r}_0^s) [\text{grad}_0 g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s)] dA_0.$$

Если мы ограничимся случаем аксиально симметричного решения  $\psi$  (т. е. предположим, что при  $z = -\infty$  внутри трубы возбуждается только простая плоская волна), то интегрирование по  $\varphi$  даст просто  $2\pi$  и все интегрирование по  $A_3$  сводится к интегрированию по  $z$  (при  $\rho = a$ ) от  $-\infty$  до 0 для внутренней поверхности стенок и от 0 до  $-\infty$  для



наружной поверхности. Нормальная составляющая градиента  $g$  на внутренней поверхности равна  $\partial g/\partial \rho_0$ , на наружной поверхности  $-(\partial g/\partial \rho_0)$ . Следовательно, интегральное уравнение для  $\psi$  принимает вид

$$\psi(\rho, z) = \frac{1}{2} a \int_{-\infty}^0 [\psi^+(a, z_0) - \psi^-(a, z_0)] \left[ \frac{\partial}{\partial a} g_s(\rho, z | a, z_0) \right] dz_0, \quad (11.4.30)$$

где  $\psi^+$  — значение  $\psi$  на наружной поверхности стенок трубы,  $\psi^-$  — значение на внутренней поверхности, а  $g_s$  — часть  $g$ , не зависящая от  $\varphi - \varphi_0$ . Позднее из этого уравнения (точнее, из несколько видоизмененного уравнения) мы получим решение для  $\psi^+ - \psi^-$ .

**Формулы для излученной и отраженной мощности.** Прежде чем решать интегральное уравнение, целесообразно установить, какие величины имеют физический интерес и как они связаны с разностью  $\psi^+ - \psi^-$ . Так, в случае (11.4.27), т. е. в случае волны, возникающей в трубе при  $z = -\infty$ , желательно знать величину амплитуды отражения  $R = B/A$ , т. е. отношение амплитуды  $B$  волны, отраженной в трубу от открытого конца, к амплитуде падающей волны, распространяющейся из  $-\infty$ ; также желательно иметь возможность вычислить угловое распределение  $f(\vartheta)$  волны, излученной из конца трубы вовне. Эти величины можно получить иным способом, применяя теорему Грина, либо же из формулы (11.4.29), полагая в ней  $r$  достаточно большим, для того чтобы можно было воспользоваться асимптотическим выражением  $[f(\vartheta)/r] e^{ikr}$  для  $\psi$  и асимптотическим выражением  $(e^{ikr/r}) e^{-ikr_0 \cos \vartheta}$  для  $g$ , где  $\vartheta$  — угол между  $r$  и  $r_0$ .

Радиус  $L$  внешней сферической поверхности  $A_1$  можно сделать значительно большим, чем  $r$ , так что интеграл по этой поверхности по-прежнему исчезает, но интегралом по сечению трубы  $z = -L$ ,  $\rho < a$  пренебречь уже нельзя. Этот последний интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^a \{ \exp[-ikz_0 \cos \vartheta - ik\rho_0 \sin \vartheta \cos(\varphi_0 - \varphi)] \frac{\partial}{\partial z_0} (Ae^{ikz_0} + Be^{-ikz_0}) - \\ & - (Ae^{ikz_0} + Be^{-ikz_0}) \frac{\partial}{\partial z_0} \exp[-ikz_0 \cos \vartheta - ik\rho_0 \sin \vartheta \cos(\varphi_0 - \varphi)] \}_{z_0=-L} \rho_0 d\rho_0 = \\ & = ik \frac{e^{ikr}}{2r} \int_0^a \rho_0 J_0(k\rho_0 \sin \vartheta) [A(1 + \cos \vartheta) e^{-ikL(1 - \cos \vartheta)} - \\ & \quad - B(1 - \cos \vartheta) e^{ikL(1 + \cos \vartheta)}] d\rho_0 = \\ & = \frac{e^{ikr}}{r} \frac{ia}{2} \frac{J_1(ka \sin \vartheta)}{\sin \vartheta} [A(1 + \cos \vartheta) e^{-ikL(1 - \cos \vartheta)} - B(1 - \cos \vartheta) e^{ikL(1 + \cos \vartheta)}]. \end{aligned}$$

Для получения этого выражения мы использовали интегральное представление функции Бесселя.

Интеграл по внутренней и внешней поверхности стенок трубы при помощи асимптотического выражения для  $g$  может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} & \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{-L}^0 \left\{ \chi(z_0) \frac{\partial}{\partial a} \exp[-ikz_0 \cos \vartheta - ika \sin \vartheta \cos(\varphi_0 - \varphi)] \right\} dz_0 = \\ & = \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} ka \sin \vartheta J_1(ka \sin \vartheta) \int_{-L}^0 \chi(z_0) e^{-ikz_0 \cos \vartheta} dz_0, \end{aligned}$$

где  $\chi(z_0) = [\psi^+(a, z_0) - \psi^-(a, z_0)]$  — разность значений  $\psi$  у наружной и у внутренней поверхности стенок трубы, которая входит в интегральное уравнение (11.4.30). В итоге получаем выражение для углового распределения волны, выходящей из конца трубы:

$$f(\vartheta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} a \sqrt{k^2 - \zeta^2} J_1(a \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \int_{-L}^0 \chi(z_0) e^{-iz_0 \zeta} dz_0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} ia \frac{J_1(a \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} [A(k + \zeta) e^{-iL(k - \zeta)} - B(k - \zeta) e^{iL(k + \zeta)}] \right\}, \quad (11.4.31)$$

где  $\zeta = k \cos \vartheta$ .

Рассматриваемые как функции комплексной переменной  $\zeta$  члены, содержащие  $A$  и  $B$ , исчезают при  $\text{Im} \zeta > \text{Im} k > 0$  (мы на время предполагаем, что  $k$  имеет малую положительную мнимую часть, которая в конце вычислений может быть положена равной нулю). С другой стороны, содержащий  $\chi$  интеграл, который является преобразованием Фурье функции  $\chi(z_0)$ , определяющей разрыв  $\psi$  на поверхности стенок, имеет вид

$$\Xi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(z_0) e^{-iz_0 \zeta} dz_0, \\ \chi(z) = \begin{cases} 0, & z > 0, \\ \psi^+(a, z) - \psi^-(a, z), & z < 0. \end{cases} \quad (11.4.32)$$

Согласно асимптотическому выражению для  $\psi^-(a, z)$  [см. (11.4.27)] этот интеграл имеет смысл только при  $\text{Im} \zeta > \text{Im} k$ . Следовательно, (11.4.31) в действительности означает, что  $f(\vartheta)$  равна первому члену (содержащему  $\Xi$ ) при  $\text{Im} \zeta > \text{Im} k$  и второму члену (содержащему  $A$  и  $B$ ) при  $\text{Im} \zeta < \text{Im} k$ . Эти два члена должны быть равны при  $\zeta = \pm k$ . Поскольку  $J_1 z \simeq \frac{1}{2} z$ ,  $z \rightarrow 0$ , мы получаем

$$-\frac{2i}{ka^2} f(0) = A = i\Omega^+, \quad \frac{2i}{ka^2} f(\pi) = B = i\Omega^-, \\ \Omega^+ = \sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \rightarrow k} [(\zeta - k) \Xi(\zeta)], \quad \Omega^- = \sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \rightarrow -k} [(\zeta + k) \Xi(\zeta)]. \quad (11.4.33)$$

Величины  $\Omega^+$  и  $\Omega^-$  являются вычетами преобразования  $\Xi(\zeta)$  в его полюсах  $\pm k$ .

Следовательно, амплитуда отражения, отношение амплитуд отраженной и падающей волн внутри трубы, будет определяться поведением преобразования Фурье от разности значений  $\psi$  на поверхности стенок трубы вблизи полюсов этого преобразования  $\zeta = \pm k$ :

$$\frac{B}{A} = \frac{\Omega^-}{\Omega^+} = -R e^{2ikh}, \quad R = \left| \frac{B}{A} \right|, \quad (11.4.34)$$

где  $l$  — «концевая поправка» трубы, координата кажущегося места отражения волны. Квадрат величины  $|B/A|$  представляет собой коэффициент отражения. Интенсивность падающей волны пропорциональна  $|A|^2$  (множитель пропорциональности обозначим  $D$ ; в дальнейшем он сокращается); мощность, излученная волне из открытого конца, равна

$$P_{\text{излуч.}} = \pi a^2 D (|A|^2 - |B|^2) = \pi a^2 D |A|^2 (1 - R^2).$$

Если бы эта мощность распределялась равномерно по всем направлениям, то интенсивность на больших расстояниях от открытого конца была бы равна  $(a^2 D / 4r^2) |A|^2 (1 - R^2)$ , в действительности же интенсивность равна

$D|f(\vartheta)|^2/r^2$ . Отношение этих двух величин можно назвать *фактором углового распределения*:

$$\alpha(\vartheta) = \frac{4|f(\vartheta)|^2}{|A|^2(1-R^2)a^2} = \frac{(ka)^2|f(\vartheta)|^2}{(1-R^2)|f(0)|^2}. \quad (11.4.35)$$

Формально функцию  $f(\vartheta)$  можно выразить через преобразование Фурье разности значений  $\psi$  на поверхностях стенок [в соответствии с обсуждением формулы (11.4.31)]:

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2}ka \sin \vartheta J_1(ka \sin \vartheta) \Xi(k \cos \vartheta), \quad (11.4.36)$$

где под  $\Xi(k \cos \vartheta)$  понимается аналитическое продолжение  $\Xi(\zeta)$  из области  $\text{Im} \zeta > \text{Im} k$  на действительную ось.

Дальнейшее использование только что выписанных формул приводит к соотношению между коэффициентом отражения и фактором углового распределения

$$|R|^2 = \left| \frac{\Omega^-}{\Omega^+} \right|^2 = \frac{\alpha(\pi)}{\alpha(0)} \quad (11.4.37)$$

и к явному выражению для  $\alpha(\vartheta)$  через  $\Xi$  и  $\Omega$

$$\alpha(\vartheta) = [k \sin \vartheta J_1(ka \sin \vartheta)]^2 \frac{|\Xi(k \cos \vartheta)|^2}{|\Omega^+|^2 - |\Omega^-|^2}. \quad (11.4.38)$$

Наконец, мы можем связать эти результаты с решением обратной задачи (11.4.28) о плоской волне, падающей на открытый конец трубы и частично отражающейся от него, а частично входящей в трубу. Для этого надо применить теорему Грина (7.2.2) к  $\psi$  и  $\psi_r$ . Для отношения интенсивности волны, проникающей в трубу, к интенсивности падающей волны получаем значение

$$|C|^2 = \frac{\alpha(\vartheta_0)}{\alpha(0)}, \quad (11.4.39)$$

а эффективное поперечное сечение поглощения звука открытым концом трубы, т. е. отношение полной мощности волны, проникающей в трубу, к интенсивности падающей волны, равно

$$\sigma_a(\vartheta) = \pi a^2 |C|^2 = \pi a^2 \frac{\alpha(\vartheta)}{\alpha(0)}, \quad (11.4.40)$$

где  $\alpha(\vartheta)$  определяется формулой (11.4.38) (мы опустили индекс 0 при  $\vartheta$ , так как он более не нужен). Таким образом, часть падающей под углом  $\vartheta$  к оси трубы плоской волны, которая поглощается трубой, пропорциональна той части возбуждаемой внутри трубы волны, которая выходит из конца трубы под углом  $\vartheta$  к оси трубы (в этом для нашей задачи проявляется, очевидно, принцип взаимности).

**Преобразование Фурье интегрального уравнения.** Однако ни одна из полученных формул не дает непосредственного ответа, пока не вычислено преобразование Фурье  $\Xi(\zeta)$ , определенное в (11.4.32). Мы найдем эту функцию, решив преобразованное по Фурье интегральное уравнение (11.4.30). Однако это уравнение по своей форме не приспособлено для применения метода Винера — Хопфа. Прежде всего  $(\partial/\partial a)g_s(\rho, z|a, z_0)$  не является симметричной функцией  $z$  и  $z_0$  (из-за входящей в это выражение частной производной). Кроме того, потенциал  $\phi(a, z)$  не связан непосредственно с  $\chi(z) = \phi^+(a, z) - \phi^-(a, z)$ .

Если взять производную по  $\rho$  от обеих частей уравнения (11.4.30) и затем положить  $\rho = a$ , то производная функции Грина оказывается симметричной по  $z$  и  $z_0$ , а производная от  $\phi$  благодаря крайним условиям при

$z < 0$  будет равна нулю. Следовательно, интегральное уравнение, с которым придется иметь дело, принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(z_0) \gamma(z - z_0) dz_0 = \begin{cases} v_p(z), & z > 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases} \quad (11.4.41)$$

где  $\chi$  определяется формулой (11.4.32),  $v_p(z) = (2/a) [\partial\psi/\partial\rho]_{\rho=a}$  и

$$\gamma(z - z_0) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\rho_0} g(\rho, z, \varphi | \rho_0, z_0, \varphi_0) \right]_{\rho, \rho_0=a} d\varphi_0.$$

Проинтегрировав по  $\varphi_0$ , мы получим умноженную на  $2\pi$  часть функции  $g$ , не зависящую от  $\varphi - \varphi_0$ .

Построим преобразования Фурье нужных нам величин. Преобразование  $\Xi(\zeta)$  функции  $\chi(z_0)$  было только что определено в (11.4.32); произведение  $(k^2 - \zeta^2) \Xi(\zeta)$  регулярно при  $\text{Im } \zeta > -\text{Im } k$ . Можно показать, используя асимптотическую формулу для  $\psi$  и дифференцируя ее по  $\rho$ , что и преобразование Фурье функции  $v_p(z)$

$$V(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} v_p(z) e^{i\zeta z} dz$$

регулярно в области  $\text{Im } \zeta < \text{Im } k$ .

Двойное преобразование Фурье функции  $\gamma(z - z_0)$  [см. (8.5.6)] равно  $\Gamma(\zeta) \delta(\zeta - \zeta_0)$ , где  $\Gamma(\zeta)$  — преобразование Фурье функции  $\gamma(z)$ . Эта функция  $\Gamma$  может быть получена непосредственно применением преобразования Фурье по  $z - z_0$  к уравнению для  $g$  [см. (11.4.22)]:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + k^2 \right] g = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(z - z_0) \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0),$$

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + (k^2 - \zeta^2) \right] G = -\frac{2\sqrt{2\pi}}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

(здесь  $G$  — преобразование Фурье функции  $g$ ). Разлагая  $G$  в ряд Фурье по  $\varphi - \varphi_0$  и решая уравнения для радиальных компонент, мы найдем, что преобразование Фурье  $g$  по  $z - z_0$  имеет вид

$$G(\rho, \varphi | \rho_0, \varphi_0 | \zeta) = \frac{i\pi}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \times$$

$$\times \begin{cases} H_m(\rho_0 \sqrt{k^2 - \zeta^2}) J_m(\rho \sqrt{k^2 - \zeta^2}), & \rho < \rho_0, \\ J_m(\rho_0 \sqrt{k^2 - \zeta^2}) H_m(\rho \sqrt{k^2 - \zeta^2}), & \rho > \rho_0, \end{cases}$$

где  $H_m$  — функция Ганкеля первого рода,  $H_m^{(1)}$ . Взяв производные от этого выражения по  $\rho$  и  $\rho_0$ , полагая как  $\rho$ , так и  $\rho_0$ , равным  $a$  и затем интегрируя по  $\varphi$ , мы приходим в конечном счете к искомому преобразованию Фурье

$$\Gamma(\zeta) = i\pi \sqrt{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} [H_0(a\sqrt{k^2 - \zeta^2})] \frac{\partial}{\partial a} [J_0(a\sqrt{k^2 - \zeta^2})] =$$

$$= i\pi \sqrt{2\pi} (k^2 - \zeta^2) H_1(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}) J_1(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}), \quad (11.4.42)$$

которое регулярно в области  $|\text{Im } \zeta| < \text{Im } k$ .

Поэтому [см. (8.5.5)] преобразование Фурье интегрального уравнения (11.4.41) имеет вид

$$2\pi^2 i (k^2 - \zeta^2) H_1(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}) J_1(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}) \Xi(\zeta) = V(\zeta), \quad (11.4.43)$$

где все члены регулярны в полосе  $|\operatorname{Im} \zeta| < \operatorname{Im} k$ . Теперь уравнение готово для факторизации.

**Факторизация преобразованного уравнения.** Произведение  $2\pi(k^2 - \zeta^2) \Xi(\zeta)$  регулярно в «верхней» полуплоскости  $\operatorname{Im} \zeta > -\operatorname{Im} k$ , в то время как  $V(\zeta)$  регулярна в «нижней» полуплоскости  $\operatorname{Im} \zeta < \operatorname{Im} k$  (мы предполагаем в дальнейших рассуждениях, что  $\operatorname{Im} k > 0$ ). Если мы сможем факторизовать оставшуюся часть

$$\pi i H_1(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}) J_1(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}),$$

представив ее в виде  $\Upsilon_+/\Upsilon_-$ , где  $\Upsilon_+$  регулярна в верхней, а  $\Upsilon_-$  — в нижней полуплоскости, то мы получим искомым ответ. Наличие логарифмической особенности у  $H_1$  лишает нас возможности представить  $H_1$  в виде бесконечного произведения, хотя  $J_1$  представить таким образом можно. Поэтому мы вынуждены вернуться к использованию контурных интегралов, как об этом говорилось в конце гл. 8.

Функция  $\ln[\pi i H_1(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}) J_1(a\sqrt{k^2 - \zeta^2})]$  регулярна в полосе  $|\operatorname{Im} \zeta| < \operatorname{Im} k$ , а следовательно, она может быть представлена интегралом Коши, контур которого можно деформировать так, чтобы он почти полностью охватил полосу регулярности:

$$\begin{aligned} \ln \Upsilon_+ - \ln \Upsilon_- = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\varepsilon}^{\infty - i\varepsilon} \frac{\ln[\pi i H_1(a\sqrt{k^2 - t^2}) J_1(a\sqrt{k^2 - t^2})]}{t - \zeta} dt - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \frac{\ln[\pi i H_1(a\sqrt{k^2 - t^2}) J_1(a\sqrt{k^2 - t^2})]}{t - \zeta} dt. \end{aligned}$$

Поскольку первый интеграл регулярен при  $\operatorname{Im} \zeta > -\varepsilon$  (где  $0 < \varepsilon < \operatorname{Im} k$ ), он может быть принят за  $\ln \Upsilon_+$ , а второй интеграл, регулярен при  $\operatorname{Im} \zeta < +\varepsilon$ , может быть принят за  $\ln \Upsilon_-$ . Когда  $k$  становится действительным ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), интеграл для  $\ln \Upsilon_-$  отличается от  $\ln \Upsilon_+$  только способом обхода точки  $t = \zeta$ ; для  $\Upsilon_-$  контур обходит точку  $t = \zeta$  сверху, а для  $\Upsilon_+$  — снизу.

Поэтому мы получаем

$$\begin{aligned} \Upsilon_+(\zeta) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-k}^k \frac{\ln[\pi i H_1(a\sqrt{k^2 - t^2}) J_1(a\sqrt{k^2 - t^2})]}{t - \zeta} dt + \right. \\ \left. + \frac{\zeta}{\pi i} \int_k^\infty \frac{\ln[2K_1(a\sqrt{t^2 - k^2}) I_1(a\sqrt{t^2 - k^2})]}{t^2 - \zeta^2} dt \right\}, \quad (11.4.44) \end{aligned}$$

где  $K_1$  и  $I_1$  — гиперболические функции Бесселя, определенные в конце гл. 10, и  $\Upsilon_-(\zeta) = 1/\Upsilon_+(-\zeta)$ . Если  $\zeta$  находится на действительной оси и  $|\zeta| < k$ , то первый интеграл сингулярен. Его значение равно сумме умноженного на  $\pi i$  вычета подинтегральной функции в точке  $t = \zeta$  и главного значения интеграла [см. (4.2.9)]:

$$\begin{aligned} \Upsilon_+(k \cos \vartheta) = & \sqrt{\pi i H_1(ka \sin \vartheta) J_1(ka \sin \vartheta)} \times \\ & \times \exp \left\{ i \frac{ka \cos \vartheta}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{ka} \frac{x \ln[\pi i H_1(x) J_1(x)] dx}{[x^2 - (ka \sin \vartheta)^2] V(ka)^2 - x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{ika \cos \vartheta}{\pi} \int_0^\infty \frac{x \ln[1/2I_1(x) K_1(x)] dx}{[x^2 + (ka \sin \vartheta)^2] V x^2 + (ka)^2} \right\}, \quad (11.4.45) \end{aligned}$$

где  $\mathcal{P}$  — символ главного значения интеграла (для  $\Upsilon_-$  берется сумма вычета, умноженного на  $-\pi i$ , и главного значения). При  $\zeta = \pm k$  никаких

особенностей нет и

$$\begin{aligned} \Upsilon_+(k) &= \frac{1}{\Upsilon_+(-k)} = \\ &= \exp \left\{ \frac{ika}{\pi} \int_0^{ka} \frac{\ln [\pi i H_1(x) J_1(x)]}{x \sqrt{(ka)^2 - x^2}} dx + \frac{ika}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln [1/2 I_1(x) K_1(x)]}{x \sqrt{x^2 + (ka)^2}} dx \right\} \end{aligned}$$

Возвратимся к преобразованному уравнению

$$(k^2 - \zeta^2) \Xi(\zeta) \Upsilon_+(\zeta) = \frac{V(\zeta) \Upsilon_-(\zeta)}{2\pi},$$

левая часть которого регулярна в полуплоскости  $\text{Im } \zeta > -\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \text{Im } k$ ), а правая часть — в полуплоскости  $\text{Im } \zeta < \varepsilon$ . Можно показать, что левая часть (а следовательно, и правая) остается конечной при  $\text{Re } \zeta \rightarrow \infty$  в полосе  $|\text{Im } \zeta| < \varepsilon$ . Следовательно, одна часть является аналитическим продолжением другой и обе равны некоторой постоянной  $C$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \Xi(\zeta) &= \frac{C}{(k^2 - \zeta^2) \Upsilon_+(\zeta)}, \\ \Omega^+ &= \lim_{\zeta \rightarrow k} [(\zeta - k) \Xi(\zeta)] = -\frac{C}{2k \Upsilon_+(k)}, \\ \Omega^- &= \frac{C}{2k \Upsilon_+(-k)} = \frac{C \Upsilon_+(k)}{2k}. \end{aligned} \quad (11.4.46)$$

С помощью этих соотношений мы можем выразить величины, имеющие физическое значение для нашей задачи, через функцию  $\Upsilon_+(\zeta)$ . Функция  $\Upsilon_+$ , конечно, не выражается через известные табулированные функции, но она определена через пару интегралов, которые могут быть численно найдены с любой степенью точности. В частности, формулы для отношения амплитуд падающей и отраженной волн и коэффициента отражения  $R$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= -\frac{\Upsilon_+(k)}{\Upsilon_+(-k)} = [\Upsilon_+(k)]^2 = -\sqrt{R} e^{2\pi i k l}, \\ \sqrt{R} &= \exp \left\{ -\frac{2ka}{\pi} \int_0^{ka} \frac{\arctg [-F_1(x)/N_1(x)]}{x \sqrt{(ka)^2 - x^2}} dx \right\}, \\ \frac{l}{a} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{ka} \frac{\ln [\pi J_1(x) \sqrt{J_1^2(x) + N_1^2(x)}]}{x \sqrt{(ka)^2 - x^2}} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln [1/2 I_1(x) K_1(x)]}{x \sqrt{x^2 + (ka)^2}} dx. \end{aligned} \quad (11.4.47)$$

Кривые изменения квадратного корня из коэффициента отражения  $\sqrt{R}$  и концевой поправки  $l/a$  показаны на рис. 11.11. Практически при малом  $ka$  вся падающая волна отражается обратно в трубу ( $|R| \rightarrow 1$ ); при большом  $ka$  падающая волна практически вся выходит через отверстие ( $|R| \rightarrow 0$ ).

Наконец, функция углового распределения

$$\begin{aligned} \alpha(\vartheta) &= \frac{4}{\pi \sin^2 \vartheta} \frac{J_1(ka \sin \vartheta)}{[J_1^2(ka \sin \vartheta) + N_1^2(ka \sin \vartheta)]} \frac{|R|}{1 - |R|^2} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{2ka \cos \vartheta}{\pi} \mathcal{F} \int_0^{ka} \frac{x \arctg [-J_1(x)/N_1(x)] dx}{(x^2 - k^2 a^2 \sin^2 \vartheta) \sqrt{k^2 a^2 - x^2}} \right\} \end{aligned}$$

выражается через главное значение интеграла. Зависимость этой функции от угла  $\vartheta$  для различных значений  $ka$  показана на рис. 11.12. Мы видим, что с увеличением  $ka$  выходящая из трубы волна все более и более концентрируется в направлении оси трубы.

Все эти решения становятся непригодными, если значения  $ka$  настолько велики, что по трубе могут передаваться волны высших типов, но

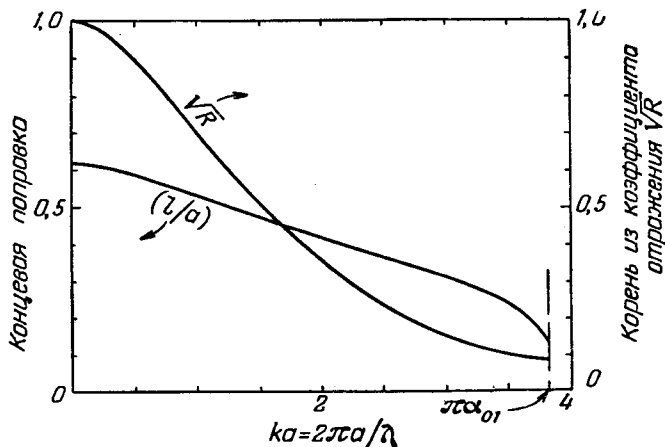


Рис. 11.11. Кривые изменения коэффициента отражения  $R$  и концевой поправки для случая излучения из открытого конца круглой трубы без фланца.

пока  $ka < \pi a_{01} = 3,832$  результаты будут точны настолько, насколько хватит терпения точно вычислить все входящие в формулы интегралы.

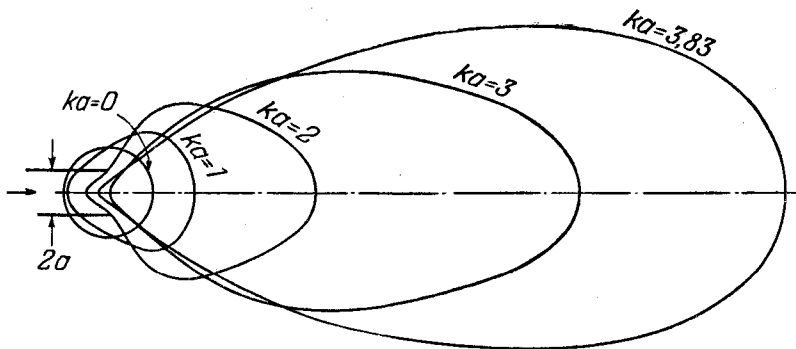


Рис. 11.12. Полярная диаграмма функции углового распределения интенсивности  $\alpha(\theta)$  для случая волны, излученной из открытого конца круглой трубы без фланца.

**Излучение колеблющегося тела.** Следующая задача, подлежащая рассмотрению, — это задача о расходящемся излучении объемного источника конечных размеров. Положим, что начало координат находится внутри источника, а на его поверхности  $A$  задается либо само поле излучения, либо нормальная составляющая градиента этого поля. Эта замкнутая граничная поверхность источника задается уравнением в сферических координатах

$$r = a(\vartheta, \varphi),$$

причем, поскольку начало находится внутри поверхности, эта функция для любой пары значений  $\vartheta, \varphi$  из области  $0 < \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta < \pi$  имеет конечные значения. Мы не очень существенно ограничим наши исследования, если исключим из рассмотрения те поверхности, для которых  $a$  имеет при некоторых  $\vartheta, \varphi$  несколько значений. В действительности ради упрощения мы введем еще большее ограничение, предположив, что поверх-

ность  $A$  всюду выпуклая и что не существует плоскостей, которые касались бы  $A$  в двух различных точках.

Если мы применим теорему Грина к полю излучения  $\psi$  и к функции Грина для свободного пространства  $g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = e^{ikR}/R$  [см. (7.2.7)], то получим

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint \left[ g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} \psi(\mathbf{r}_0^s) - \psi(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \right] dA, \quad (11.4.48)$$

где  $\partial/\partial n_0$  — составляющая градиента по направлению внешней нормали к поверхности  $A$  в точке с координатой  $\mathbf{r}_0$ . (Знак минус объясняется тем, что область, в которой задано  $\psi$ , находится *вне поверхности  $A$* , так что составляющая градиента из (7.2.7) равна  $-\partial/\partial n_0$ .) Затем мы вводим преобразование Фурье функции  $g_k$  [см. формулу (11.3.6) и следующие]

$$g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} d p_x d p_y d p_z}{p^2 - k^2},$$

где волновой вектор  $\mathbf{p}$  имеет компоненты  $p_x, p_y, p_z$  и модуль  $p$ , а направление его задается полярными углами  $u$  и  $v$ .

Интегрирование производится по всему  $p$ -пространству и, чтобы получить расходящиеся волны, мы обходим в комплексной плоскости  $p$  полюс  $p = -k$  сверху, а полюс  $p = k$  — снизу.

Подставляя это выражение в (11.4.48), получаем

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^3} \iiint \left\{ \oint \left[ i(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{p}) \psi(\mathbf{r}_0^s) + \frac{\partial}{\partial n_0} \psi(\mathbf{r}_0^s) \right] e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_0^s} dA_0 \right\} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}}{p^2 - k^2} d p_x d p_y d p_z,$$

где  $\mathbf{n}_0$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $A$ . Величина в фигурных скобках является функцией от  $\mathbf{p}$ , но не от  $\mathbf{r}_0$ . Далее мы интегрируем по  $p_z$ , обходя (в комплексной плоскости  $p_z$ ) полюс  $p_z = -\sqrt{k^2 - p_x^2 - p_y^2}$  сверху, а полюс  $p_z = +\sqrt{k^2 - p_x^2 - p_y^2}$  снизу. Когда  $z$  больше любого  $z$  на поверхности  $A$ , интеграл сводится к умноженному на  $2\pi i$  вычету подинтегральной функции в точке  $p_z = \sqrt{k^2 - p_x^2 - p_y^2}$ .

Теперь преобразуем прямоугольные координаты  $p_x, p_y$  в  $p$ -пространстве к сферическим координатам  $p, u$  и  $v$ , полагая  $p_x = k \sin u \cos v$  и  $p_y = k \sin u \sin v$ . Для того чтобы  $p_x$  и  $p_y$  могли изменяться до бесконечности,  $u$  должно быть комплексным. Элемент площади  $d p_x d p_y$  равен  $k^2 \cos u \sin u du dv$ , и выражение для  $\psi$  после интегрирования по  $p_z$  принимает вид

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \int_0^{2\pi} dv \int_{-i\infty}^{i\infty} \sin u F(u, v, k) \exp \{ ikr [\cos u \cos \vartheta + \sin u \sin \vartheta \cos(v - \varphi)] \} du, \quad (11.4.49)$$

где  $\vartheta$  и  $\varphi$  — сферические углы для  $\mathbf{r}$  и где

$$F(u, v, k) = \frac{-1}{2\pi} \oint \left[ i(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{k}) \psi(\mathbf{r}_0^s) + \frac{\partial}{\partial n_0} \psi(\mathbf{r}_0^s) \right] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0^s} dA_0,$$

причем  $\mathbf{k} = \mathbf{a}_x k \sin u \cos v + \mathbf{a}_y k \sin u \sin v + \mathbf{a}_z k \cos u$ . Интегрирование по  $u$  производится вдоль контура, который обеспечивает сходимость интеграла. Это выражение, конечно, применимо, только если  $\mathbf{r}$  находится вне поверхности  $A$ .

Таким образом, мы нашли связь между выражением решения через функцию Грина и разложением его по плоским волнам, как об этом уже говорилось в начале § 11.3 [см. (11.3.3)]. Мы не намерены вычислять



приведенный выше интеграл для  $F$ . Вместо этого мы изложим другие методы определения  $F$  через краевые условия; здесь мы хотели только показать, что формула (11.4.49) представляет расходящуюся волну, излучаемую источником конечных размеров.

**Угловое распределение излучения.** Функция  $F$  имеет простое и важное физическое значение, которое можно продемонстрировать, устремив в (11.4.49)  $r$  к бесконечности и найдя методом перевала асимптотическую формулу для  $\psi$  (см. § 4.6). Прежде всего заменим переменные интегрирования, т. е. углы  $u$  и  $v$ , характеризующие положение переменной точки интегрирования по отношению соответственно к осям  $z$  и  $x$ , на углы  $\theta$  и  $\phi$ , характеризующие положение точки интегрирования относительно вектора  $\mathbf{r}$ . При этом

$$\begin{aligned}\sin u \, du \, dv &= \sin \theta \, d\theta \, d\phi, \\ \cos \theta &= \cos u \cos \vartheta + \sin u \sin \vartheta \cos(v - \phi), \\ \cos u &= \cos \theta \cos \vartheta + \sin \theta \sin \vartheta \cos \phi, \\ \sin \theta \sin \phi &= \sin u \sin(v - \varphi).\end{aligned}$$

Так как  $u$  изменяется в пределах  $\pm i\infty$ , то такие же пределы будут и для  $\theta$ , а поэтому

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-i\infty + \frac{1}{2}i\pi}^{i\infty - \frac{1}{2}i\pi} \sin^2 \theta F(u, v, k) e^{ikr \cos \theta} d\theta.$$

При этом контур интегрирования по  $\theta$  выбран так, чтобы мнимая часть  $\cos \theta$  была положительной при  $\theta \rightarrow \pm i\infty$ , так что подинтегральная функция обращается в нуль в обоих концах контура.

Показатель экспоненты имеет стационарную точку при  $\theta = 0$  ( $u = \vartheta, v = \varphi$ ), так что фаза экспоненты остается постоянной, а ее абсолютная величина стремится к нулю по мере удаления от  $\theta = 0$  вдоль одной из линий, определенных уравнениями

$$\begin{aligned}\cos \theta &= 1 + i\zeta, & \theta &= \xi + i\eta, \\ \cos \xi &= \operatorname{sech} \eta, & \operatorname{sh} \eta \operatorname{th} \eta &= \zeta,\end{aligned}$$

где  $\eta$  положительно или отрицательно. Интеграл тогда приобретает вид

$$\psi(\mathbf{r}) = ke^{ikr} \int_0^{\infty} F(u, v, k) e^{-kr\zeta} d\zeta.$$

Если  $kr \rightarrow \infty$ , то существенный вклад дает интегрирование только по участку, где  $\zeta$  очень близко к нулю, т. е.  $u$  очень близко к  $\vartheta$  и  $v$  очень близко к  $\varphi$ . Таким образом, асимптотическая форма решения при  $kr \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq F(\vartheta, \varphi, k) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad kr \rightarrow \infty. \quad (11.4.50)$$

Итак, амплитуда плоской волны, входящей в интегральное представление  $\psi$  через плоские волны, пропорциональна фактору углового распределения излучения  $F(\vartheta, \varphi, k)$  на больших расстояниях от источника. (Это верно только для случая, когда контур интеграла по  $u$  проходит от  $-i\infty$  до  $+i\infty$ , что исключает все приходящие из бесконечности волны.) Это соотношение не является неожиданным, однако его стоило доказать и, заодно, вычислить коэффициент пропорциональности, равный  $ik/4\pi$ .

**Применение краевых условий.** Нам остается еще определить фактор углового распределения при помощи краевых условий, заданных на границе излучателя  $r = a(\vartheta, \varphi)$ . Предположим, что на граничной поверхности задаются значения  $\psi$  при  $r = a(\vartheta, \varphi)$ , равные  $\psi_0(\vartheta, \varphi)$ . Эта функция связана с фактором углового распределения формулой (11.4.49), которая представляет собой интегральное уравнение для определения  $F(\vartheta, \varphi, k)$  через известные функции  $\psi_0$  и  $a$ :

$$\psi_0(\vartheta, \varphi) = \frac{ik}{4\pi} \int_0^{2\pi} dv \int_{-i\infty}^{i\infty} \sin u F(u, v) \times \\ \times \exp\{ika(\vartheta, \varphi) [\cos u \cos \vartheta + \sin u \sin \vartheta \cos(v - \varphi)]\} du. \quad (11.4.51)$$

Это уравнение, вообще говоря, нелегко решить; если  $a(\vartheta, \varphi)$  — координатная поверхность в некоторой разделяющейся системе координат и если  $ka$  не слишком велико, то лучше всего применить разложение по собственным функциям, уже рассмотренное в § 11.3. Но если  $ka$  велико (грубо говоря, больше 10), то мы можем использовать метод перевала (см. § 4.6), чтобы найти приближенное соотношение между  $F$  и  $\psi_0$ . Выделим прежде всего в функции  $F$  амплитуду и фазу

$$F(u, v) = f(u, v) e^{-i\beta(u, v)}, \quad (11.4.52)$$

а затем рассмотрим поведение фазы подинтегральной функции в формуле (11.4.51).

Мы выбрали контур в плоскости  $u$  так, что основная часть интеграла приходится на участок, близкий к действительной оси  $u$ ; на самом деле, выше было показано, что контур можно выбрать так, что существенным оказывается лишь интегрирование по участку, близкому к  $u = \vartheta, v = \varphi$ . Теперь этот результат несколько изменяется вследствие того, что  $a$  является функцией  $\vartheta$  и  $\varphi$ . Полный показатель экспоненты у подинтегрального выражения из (11.4.51) равен

$$t(u, v | \vartheta, \varphi) = ika(\vartheta, \varphi) \cos \theta - i\beta(u, v), \\ \cos \theta = \cos u \cos \vartheta + \sin u \sin \vartheta \cos(v - \varphi). \quad (11.4.53)$$

Если  $ka$  велико по сравнению с единицей ( $> 10$ ), то экспонента меняется значительно быстрее, чем амплитуда  $f$ . Поэтому для того, чтобы выяснить, где подинтегральная функция имеет наибольшее значение, можно ограничиться рассмотрением только  $t$  и можно выбрать  $\beta$  так, чтобы в соответствующей точке  $t$  было равно нулю, так же как  $\partial t / \partial u$  и  $\partial t / \partial v$ .

Величина  $a(\vartheta, \varphi) \cos \theta$  является проекцией вектора  $a(\vartheta, \varphi)$  на направление  $u, v$ , и если бы в выражение для  $t$  не входило  $\beta$ , то величина  $ka \cos \theta$  имела бы максимальное значение  $ka$  при  $\theta = 0$  (на рис. 11.3 единичный вектор  $\mathbf{u}$ , направление которого определяется углами  $u, v$ , совпадает с вектором  $\mathbf{a}$ , направление которого определяется углами  $\vartheta, \varphi$  в точке, в которой задано граничное значение  $\psi_0$ ). Но если положить  $\beta = ka$ , то  $\beta$  оказывается функцией  $\vartheta$  и  $\varphi$ , а не  $u$  и  $v$ . Правильный способ выбора соответствующего седловой точке  $t$  направления  $\mathbf{u}_0$ , при котором  $\beta$  может быть определено как функция от  $u$  и  $v$ , обращающая в этой точке  $t$  в нуль, излагается ниже.

Для каждого направления  $u, v$  вектора  $\mathbf{u}$  мы определяем на поверхности излучателя точку, в которой нормаль параллельна  $\mathbf{u}$  (вследствие ограничений, наложенных на форму поверхности, такая точка определяется единственным образом). Обозначим радиус-вектор этой точки через  $\mathbf{h}$  и его сферические углы через  $\sigma, \tau$  (они, конечно, являются функциями  $u, v$ ). Проекция  $\mathbf{h}$  на  $\mathbf{u}$  есть не что иное, как расстояние от начала до пересечения  $\mathbf{u}$  с плоскостью, касательной к поверхности и перпендикулярной к  $\mathbf{u}$ . При этом,

если фиксировать  $u, v$  и изменять  $\vartheta, \varphi$ , то значения  $\vartheta, \varphi$ , при которых величина  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = a(\vartheta, \varphi) \cos \theta$  будет наибольшей, равны соответственно  $\sigma, \tau$ , а значит  $\mathbf{a}(\sigma, \tau) = \mathbf{h}$  (это, конечно, функция  $u, v$ ).

Мы выбираем теперь в качестве  $\beta$  величину

$$kh(u, v) \cdot \mathbf{u} = ka(\sigma, \tau) \cos \eta,$$

где

$$\cos \eta = \cos u \cos \sigma + \sin u \sin \sigma \cos(v - \tau).$$

Тогда, очевидно, показатель

$$t = ik[\mathbf{a}(\vartheta, \varphi) - \mathbf{h}(u, v)] \cdot \mathbf{u}$$

равен нулю и имеет стационарное значение, когда вектор  $\mathbf{u}$  направлен так, что  $\mathbf{h}(u, v)$  совпадает с  $\mathbf{a}(\vartheta, \varphi)$ . Таким образом, удастся так выбрать функцию  $\beta$ , зависящую только от  $u$  и  $v$ , что  $t$  для некоторых  $u, v$  будет равно нулю и стационарно при любых значениях  $\vartheta$  и  $\varphi$ .

Для заданных  $\vartheta, \varphi$  примем теперь за ось сферической системы координат для интегрирования по  $u, v$  направление  $\mathbf{u}_0(\vartheta, \varphi)$  (направление нор-

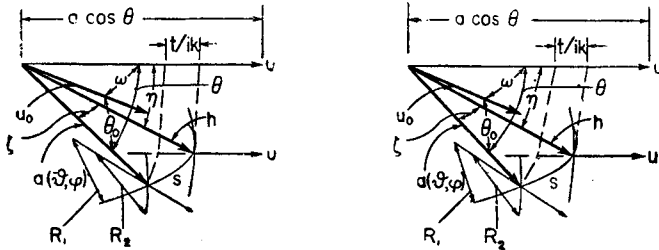


Рис. 11.13. Углы и направления, необходимые для вычисления излучения поверхности  $a(\vartheta, \varphi)$ .

мали к поверхности в точке  $\vartheta, \varphi$ , характеризуемое углами  $u_0, v_0$ ). Когда  $\mathbf{u}$  отклоняется от направления  $\mathbf{u}_0$ , вектор  $\mathbf{h}$  отклоняется от направления  $\mathbf{a}(\vartheta, \varphi)$ . Соотношение между соответствующими углами  $\omega$  (угол между  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}_0$ ) и  $\zeta$  (угол между  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{a}$ ) зависит от кривизны поверхности в точке  $(\vartheta, \varphi)$ . Вблизи точки  $(\vartheta, \varphi)$  поверхность имеет форму, близкую к соприкасающемуся эллипсоиду с главными радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ , как показано на рис. 11.13. Если мы будем отсчитывать второй угол интегрирования  $\alpha$  (который вместе с  $\omega$  определяет ориентацию  $\mathbf{u}$  относительно  $\mathbf{u}_0$ ) от осевой плоскости с радиусом кривизны  $R_1$ , то сможем сразу увидеть, что отношение угла поворота вектора  $\mathbf{h}$  к углу поворота вектора  $\mathbf{u}$  равно отношению  $a(\vartheta, \varphi)$  к радиусу кривизны сечения поверхности в направлении  $\alpha$ :

$$\left( \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2} \right) \zeta = \frac{\omega}{a(\vartheta, \varphi)} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2(\alpha - \alpha_0)}, \quad \zeta, \omega \ll 1, \quad (11.4.54)$$

$$\cos \zeta = \cos \vartheta \cos \sigma + \sin \vartheta \sin \sigma \cos(\varphi - \tau),$$

$$\cos \omega = \cos u \cos u_0 + \sin u \sin u_0 \cos(v - v_0),$$

где  $\alpha_0$  — угол между плоскостью векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{u}_0$  и осевой плоскостью с радиусом кривизны  $R_1$ , являющейся начальной плоскостью для отсчета угла поворота  $\alpha$ . (Корень появляется потому, что поверхность в точке  $(\vartheta, \varphi)$  нормальна не к  $\mathbf{a}$ , а к  $\mathbf{u}_0$ , так что поворот вектора  $\mathbf{a}$  на угол  $\zeta$  вызывает различные линейные перемещения, зависящие от величины угла  $\alpha - \alpha_0$ .)

Если  $\zeta$  мало, то оказывается, что  $t \simeq \frac{1}{2} ikS^2 [(1/R_1) \cos^2 \alpha + (1/R_2) \sin^2 \alpha]$  и  $S \simeq \zeta \alpha / \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2(\alpha - \alpha_0)}$ . Поэтому для малых значений угла  $\omega$

$$t \simeq \frac{1}{2} ik \frac{R_1 R_2}{R_2 \cos^2 \alpha + R_1 \sin^2 \alpha} \omega^2 = -x.$$

Мы можем выбрать контур для  $u$  (или, скорее,  $\omega$ ) от  $-i\infty$  до  $+i\infty$  таким образом, чтобы  $x$  оставался действительным и менялся от нуля до бесконечности в обоих направлениях, и от  $u_0$  до  $+i\infty$  и от  $u_0$  до  $-i\infty$ . Следовательно, наше интегральное представление приобретает вид (учитывая, что  $\sin \omega d\omega \simeq \omega d\omega$ , если  $\omega$  мало)

$$\psi_0(\vartheta, \varphi) = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty \frac{R_2 \cos^2 \alpha + R_1 \sin^2 \alpha}{ikR_1 R_2} e^{-x} f(u, v) dx.$$

Теперь мы должны выразить амплитуду  $f(u, v)$  таким образом, чтобы связать ее с заданными значениями  $\psi_0$  на поверхности. Для этого лучше всего разложить  $f$  в ряд Тейлора вблизи  $u_0, v_0$ , выражая смещения, отсчитываемые от  $u_0$ , через угловые компоненты:  $\omega_x$  в осевой плоскости с радиусом кривизны  $R_1$  (точнее, такие угловые смещения вектора  $u$ , которые вызывают угловые смещения вектора  $h$  в плоскости с радиусом кривизны  $R_1$ ) и  $\omega_y$  в плоскости с радиусом кривизны  $R_2$ . Получаем

$$f(u, v) = f(u_0, v_0) + f_x \omega_x + f_y \omega_y + \frac{1}{2} f_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} f_{yy} \omega_y^2 + f_{xy} \omega_x \omega_y + \dots,$$

где  $\omega_x = \omega \cos \alpha$ ,  $\omega_y = \omega \sin \alpha$  и индексы при  $f$  обозначают производные от  $f$  по  $\omega_x, \omega_y$ , вычисленные при  $\omega_x = \omega_y = 0$  (т. е. при  $u_0, v_0$ ).

Выполняя интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} \psi_0(\vartheta, \varphi) \simeq \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} f(u_0, v_0) + \frac{\frac{1}{16} R_1^2 + \frac{1}{8} R_1 R_2 + \frac{5}{16} R_2^2}{ikR_1^2 R_2^2} f_{xx}(u_0, v_0) + \\ + \frac{\frac{5}{16} R_1^2 + \frac{1}{8} R_1 R_2 + \frac{1}{16} R_2^2}{ikR_1^2 R_2^2} f_{yy}(u_0, v_0) + \dots \end{aligned}$$

Эти ряды хорошо сходятся, пока  $kR_1 R_2 / (R_1 + R_2)$  достаточно велико. Чтобы получить формулу для асимптотической амплитуды  $f$  поля излучения через амплитуду полного поля  $\psi_0$  в точках на поверхности источника, этот ряд нужно обратить. Первое приближение, годное при  $kR \rightarrow \infty$  (т. е. годное для случая «геометрической оптики»), имеет вид

$$f(u, v) = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} \psi_0(\sigma, \tau), \tag{11.4.55}$$

где  $(\sigma, \tau)$  — точка на поверхности источника, в которой нормаль имеет направление  $u, v$ . Другими словами, в случае предельно коротких волн, волны излучаются нормально из каждой точки поверхности, причем относительная амплитуда пропорциональна гармоническому среднему радиусов кривизны поверхности  $2R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$  в соответствующей точке.

Следующее приближение получается подстановкой первого приближения в последующие члены ряда в правой части разложения, причем учитываются соотношения между  $\omega$  и  $\zeta$ . Окончательный результат можно сформулировать следующим образом: находим на поверхности точку  $(\sigma, \tau)$ , в которой нормаль имеет направление  $u, v$ , и определяем плоскости главных радиусов кривизны поверхности в этой точке. Обозначаем через  $\vartheta_1$  угловое смещение от  $(\sigma, \tau)$  в плоскости  $R_1$  и через  $\vartheta_2$  — в перпендикулярном к этой плоскости направлении. Тогда фактор углового распределения

$f(u, v)$ , дающий асимптотическую амплитуду волны в направлении  $u, v$ , равен

$$f(u, v) \simeq \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} \psi_0(\sigma, \tau) - \frac{\frac{1}{8} R_1^2 + \frac{1}{4} R_1 R_2 + \frac{5}{8} R_2^2}{ika R_2 (R_1 + R_2)} \left[ (1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \alpha_0) \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \left( \frac{R_1}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta_1} \right) \right]_{\sigma, \tau} - \frac{\frac{5}{8} R_1^2 + \frac{1}{4} R_1 R_2 + \frac{1}{8} R_2^2}{ika R_1 (R_1 + R_2)} \left[ (1 - \sin^2 \theta_0 \sin^2 \alpha_0) \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \left( \frac{R_2}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta_2} \right) \right]_{\sigma, \tau}, \quad (11.4.56)$$

где  $a = a(\sigma, \tau)$ ,  $\theta_0$  — угол между направлением  $\mathbf{u}(u, v)$  и направлением  $\mathbf{h}(\sigma, \tau)$ , т. е. направлением от начала координат к точке на поверхности, в которой нормаль имеет направление  $\mathbf{u}$ ;  $\alpha_0$  — угол между плоскостью, содержащей  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{h}$ , и плоскостью главного радиуса  $R_1$ . Все производные в этой формуле берутся в точке  $(\sigma, \tau)$ .

Наша формула показывает в первом приближении по малой величине  $1/ka$ , как конечная длина волны «стирает» четкие формы геометрической оптики, определенные в (11.4.55). Эта формула дает удовлетворительное приближение, если граничные значения  $\psi(\vartheta, \varphi)$  не слишком быстро меняются с изменением  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ . Подробное изучение случая, когда  $\psi_0$  разрывно, показывает, что в  $f$  возникают диффракционные полосы обычного френелевского типа, а в случае геометрической оптики (11.4.55) разрывность сохраняется.

Тот же анализ можно провести с теми же общими результатами, если на поверхности  $r = a(\vartheta, \varphi)$  задать вместо величины  $\psi_0$  нормальную составляющую ее градиента. Последующие члены ряда, первые два члена которого даны в (11.4.56), можно найти, рассматривая высшие члены разложения  $t$  и  $f$ . При этом возникают, однако, значительные алгебраические трудности, и мы не будем их здесь исследовать. Для двумерной задачи, которая, конечно, значительно проще, были найдены приближения всех порядков, а также был исследован и случай разрывной функции  $\psi$  (см. в библиографии в конце этой главы работу Лакса и Фешбаха).

**Рассеяние волн, вариационный принцип.** Задачи рассеяния, так же как и задачи излучения, могут быть решены методом: функция Грина — интегральное уравнение — вариационный принцип. Полезно рассмотреть случай рассеяния плоской волны на объекте конечных размеров (поверхность, объем) с определенными краевыми условиями на его границе (Дирихле, Неймана или смешанными). Воспользуемся функцией Грина

$$g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \frac{1}{R} e^{ikR}$$

для расходящихся волн в свободном пространстве. Мы ищем решение, которое должно иметь, например, равную нулю составляющую градиента на рассеивающей поверхности и которое соответствует падающей плоской волне  $Ce^{ik_i \cdot \mathbf{r}}$ , распространяющейся в направлении  $z$  с волновым числом  $k$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_i = ka_z$ . Используя наши обычные методы, легко показать, что это решение удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(\mathbf{r}) = Ce^{ik_i \cdot \mathbf{r}} + \frac{1}{4\pi} \oint \psi(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) dA_0, \quad (11.4.57)$$

где интеграл берется по поверхности рассеивателя, а  $\mathbf{n}_0$  — вектор внешней нормали к этой поверхности (его направление, следовательно, противоположно тому, которое было принято в гл. 7).

Постоянная  $C$  представляет собой амплитуду падающей волны; интенсивность этой волны равна некоторой постоянной  $D$ , умноженной на  $|C|^2$ . Асимптотическую форму рассеянной волны можно найти, используя асимптотическую форму  $(e^{ikr}/r)e^{-ik_s \cdot r_0}$  функции  $g_k$ , где  $\mathbf{k}_s = k\mathbf{a}_r$  — волновой вектор рассеянной волны, имеющий направление  $\mathbf{r}$  точки наблюдения в бесконечности. Эта рассеянная волна пропорциональна, конечно, амплитуде падающей волны:

$$\begin{aligned} \psi_s &\simeq Cf(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s) \frac{e^{ikr}}{r}, \\ f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s) &= \frac{-i}{4\pi C} \oint (\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n}_0) \psi(\mathbf{r}_0^s) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0^s} dA_0, \end{aligned} \tag{11.4.58}$$

где  $f$  — амплитуда рассеянной волны при единичной амплитуде падающей. Квадрат функции  $f$  дает интенсивность рассеянной волны в направлении, составляющем с направлением распространения падающей волны углы  $\theta, \varphi$ , а интеграл от  $|f|^2$  по  $\theta$  и  $\varphi$  есть *эффективное поперечное сечение* рассеяния плоской волны с волновым вектором  $\mathbf{k}_i$  (т. е. волны, имеющей длину волны  $2\pi/k$  и направление распространения  $\mathbf{a}_z$ ).

Для применения вариационного принципа необходимо, чтобы функция углового распределения  $f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)$  явно входила в интегральное уравнение (11.4.57). Этого можно достигнуть, умножая и деля на  $f$  первый член правой части (при этом заодно исключается произвольная амплитуда падающей волны  $C$ ):

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{-ie^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}}{4\pi f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)} \oint (\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n}_0) \psi(\mathbf{r}_0^s) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0^s} dA_0 + \frac{1}{4\pi} \oint \psi(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) dA_0. \tag{11.4.59}$$

Из этой формулы можно определить  $\psi(\mathbf{r})$ , если будет известно  $\psi(\mathbf{r}_0^s)$  на поверхности рассеивателя. Чтобы получить интегральное уравнение только для  $\psi(\mathbf{r}_0^s)$ , предыдущее уравнение можно рассматривать для значений  $\mathbf{r}$ , соответствующих точкам поверхности; однако таким образом мы получаем слишком сложное уравнение, содержащее несимметричную функцию  $\partial g_k / \partial n_0$ . Значительно более простая форма уравнения получится, если взять от обеих частей равенства (11.4.59) нормальную производную на поверхности. Левая часть тогда обращается в нуль, так как нормальная составляющая градиента  $\psi$  на поверхности равна нулю, и мы получаем

$$\frac{(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s}}{f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)} \oint (\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n}_0) \psi(\mathbf{r}_0^s) e^{-i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0^s)} dA_0 = - \oint \psi(\mathbf{r}_0^s) \left[ \frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} g_k(\mathbf{r}^s | \mathbf{r}_0^s) \right] dA_0. \tag{11.4.60}$$

Теперь можно применить вариационный принцип. Для этого умножим обе части на  $\tilde{\psi}(\mathbf{r}_0^s)$  и проинтегрируем по поверхности рассеивателя в координатах  $\mathbf{r}_0^s$ ; получим

$$-[f] = \frac{\oint (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}_1) \tilde{\psi}(\mathbf{r}_1^s) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_1^s} dA_1 \oint (\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n}_0) \psi(\mathbf{r}_0^s) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0^s} dA_0}{\oint dA \oint \tilde{\psi}(\mathbf{r}^s) \psi(\mathbf{r}_0^s) \left[ \frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} g_k(\mathbf{r}^s | \mathbf{r}_0^s) \right] dA_0}. \tag{11.4.61}$$

Истинные  $\psi$  и  $\tilde{\psi}$  дают стационарное значение величине  $[f]$ , равное функции углового распределения  $f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)$ . В справедливости этого утверждения можно убедиться, варьируя  $\tilde{\psi}$  и приравнявая нулю коэффициент при  $\delta\tilde{\psi}$ . Получающееся соотношение содержит, однако, функцию  $\psi$ , и мы не можем его использовать, пока не выясним характер этой функции. Это

можно сделать, приравнявая нулю коэффициент при  $\delta\psi$ , что приводит к уравнению

$$\frac{(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n}_0) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0^s}}{f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)} \oint (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) \psi(\mathbf{r}^s) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s} dA = - \oint \tilde{\psi}(\mathbf{r}^s) \left[ \frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} g_k(\mathbf{r}^s | \mathbf{r}_0^s) \right] dA_s.$$

Сравнение этого уравнения с уравнением (11.4.60) показывает, что  $\tilde{\psi}$  является *решением сопряженной задачи*: плоская волна с волновым вектором  $-\mathbf{k}_s$  посылается из точки  $(r, \vartheta, \varphi)$ , которая для  $\psi$  служит точкой наблюдения; и после встречи с препятствием возвращается как рассеянная волна с волновым вектором  $-\mathbf{k}_i$  к отрицательной бесконечности на оси  $z$ , соответствующей источнику для  $\psi$ . Приведенное доказательство того, что функция углового распределения  $f$  для основной и взаимной задач одинакова, представляет собой только другой способ обоснования принципа взаимности. Как указано на стр. 807 тома I, переход к сопряженному решению  $\tilde{\psi}$  связан с процессом перемены местами источника и наблюдателя.

**Функция углового распределения и полное эффективное поперечное сечение рассеяния.** Теперь мы можем следующим образом формулировать наш вариационный принцип для рассеяния. Берем достаточно общее выражение величины  $\psi$  на поверхности для случая падающей плоской волны, распространяющейся в направлении  $\mathbf{k}_i$ , и соответствующее выражение для волны  $\tilde{\psi}$ , распространяющейся в направлении  $-\mathbf{k}_s$ . Затем вычисляем по формуле (11.4.61) функцию  $f$ , как функцию параметров, входящих в  $\psi$  и  $\tilde{\psi}$ . Выражение  $\psi$  (и соответственно  $\tilde{\psi}$ ), для которого обращаются в нуль все первые производные от  $f$  по параметрам  $\psi$  (а также  $\tilde{\psi}$ ), будет наилучшим, а получающаяся при этом функция  $f$  будет ближе всего к истинной функции углового распределения  $f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)$ . В пределе, если семейства функций, определяемых выбранными выражениями  $\psi$  и  $\tilde{\psi}$  полны, функции, дающие стационарное значение величине  $f$ , представляют собой истинные значения  $\psi$  и  $\tilde{\psi}$  на граничной поверхности, а соответствующая величина  $f$  равна истинной функции углового распределения  $f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)$ .

Если нужно определить значения  $\psi$  вне граничной поверхности, подставляем найденные значения  $\psi$  на поверхности в формулу (11.4.59). Но делать это приходится редко, так как обычно требуется только угловое распределение и полное эффективное поперечное сечение рассеяния

$$Q(\mathbf{k}_i) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)|^2 \sin \vartheta d\vartheta. \quad (11.4.62)$$

Эту последнюю величину можно найти, исходя из  $f$ , интегрированием по углам  $\vartheta, \varphi$ , определяющим направление  $\mathbf{k}_s$  по отношению к  $\mathbf{k}_i$ . Однако нет необходимости непосредственно производить это интегрирование, так как величину  $Q$  можно найти непосредственно из  $f$  на основании следующих соображений.

Интенсивность рассеянной волны в направлении  $\mathbf{k}_s$  при единичной интенсивности падающей выражается формулой

$$|f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)|^2 \left(\frac{1}{r}\right)^2 = -\frac{1}{k|C|^2} \operatorname{Im} \left[ \psi_s \frac{\partial \bar{\psi}_s}{\partial r} \right]_{r \rightarrow \infty},$$

где  $\psi_s$  — рассеянная волна [эту волну представляет, очевидно, второй член правой части формулы (11.4.57), стремящийся к  $(Cf/r)e^{ikr}$  при  $r \rightarrow \infty$ ]. Интеграл от этого выражения по сфере бесконечного радиуса дает эффек-

тивное сечение  $Q$ . Однако нет необходимости интегрировать по бесконечно большой сфере; интеграл от  $(1/k|C|^2) \text{Im} [\psi_s (\partial \bar{\psi}_s / \partial n)]$  по любой замкнутой поверхности, внешней по отношению к рассеивателю, даст тот же результат. В частности, можно интегрировать по поверхности, отстоящей от рассеивателя на бесконечно малое расстояние:

$$Q(\mathbf{k}_i) = \frac{-1}{k|C|^2} \text{Im} \left\{ \oint \psi_s(\mathbf{r}^s) \left[ \frac{\partial}{\partial n} \bar{\psi}_s(\mathbf{r}^s) \right] dA \right\}. \quad (11.4.63)$$

В любой точке вне рассеивателя полное поле  $\psi$  равно сумме падающей плоской волны  $Ce^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$  и рассеянной волны  $\psi_s$ . Поскольку нормальная производная  $\psi$  на поверхности рассеивателя равна нулю, нормальная производная  $\psi_s$  на этой поверхности равна взятой со знаком минус нормальной производной плоской волны:

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial n} = -iC(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_s}{\partial n} = iC(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{k}_i) &= \frac{1}{k|C|^2} \text{Im} \left\{ i\bar{C} \oint (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) \psi_s(\mathbf{r}^s) e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s} dA \right\} = \\ &= \frac{1}{k|C|^2} \text{Im} \left\{ i\bar{C} \oint (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) [\psi(\mathbf{r}^s) - Ce^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s}] e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s} dA \right\}. \end{aligned}$$

Интеграл от второго слагаемого в квадратных скобках равен нулю, поскольку поток постоянного вектора  $\mathbf{k}_i$  равен нулю. Интеграл от первого слагаемого, согласно (11.4.58), пропорционален предельному значению  $f$  при  $\mathbf{k}_s$ , равном  $\mathbf{k}_i$ . Поэтому

$$Q(\mathbf{k}_i) = \frac{4\pi}{k} \text{Im} [f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_i)]. \quad (11.4.64)$$

Вместо того чтобы интегрировать  $|f|^2$  по всем направлениям  $\mathbf{k}_s$ , мы получаем  $Q$ , определяя мнимую часть предельного значения функции  $f$  при  $\mathbf{k}_s \rightarrow \mathbf{k}_i$  [см. (9.3.23)].

Если рассеивающей поверхностью является сфера радиуса  $a$ , то функция Грина может быть разложена по сферическим гармоникам [см. (11.3.44)]. Чтобы найти составляющие градиента, которые теперь являются производными по  $r$  и  $r_0$ , мы вспоминаем, что сначала на поверхность была помещена точка  $r_0$ , и, следовательно, нужно пользоваться выражением, пригодным для  $r > r_0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r \partial r_0} g_k &= ik^3 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ &\times P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) j'_n(kr_0) h'_n(kr), \end{aligned} \quad (11.4.65)$$

причем вместо  $r_0$  и  $r$  должно быть подставлено значение  $a$ .

**Рассеяние на сфере.** Если рассеивающей поверхностью является сфера и если  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  на поверхности разложены по сферическим гармоникам, то изложенный метод приводит к результатам, аналогичным (11.3.72) для  $\partial \psi / \partial n = 0$  (как это, конечно, и должно быть). Если мы направим  $\mathbf{k}_i$  вдоль сферической оси, то  $\psi$  не будет зависеть от  $\varphi$  и

$$\psi(\mathbf{r}^s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta),$$



где  $A_n$  — произвольные параметры, подлежащие варьированию. Тогда если  $\vartheta_s, \varphi_s$  — углы, связывающие  $\mathbf{k}_s$  с  $\mathbf{k}_i$ , то

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{r}^s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta_s) P_n^m(\cos \vartheta) \cos [m(\varphi - \varphi_s)].$$

Подобно этому разложения плоских волн, умноженные на  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$ , соответственно равны

$$(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} = k \sum_{n=0}^{\infty} i^n [nP_{n-1}(\cos \vartheta) + (n+1)P_{n+1}(\cos \vartheta)] j_n(ka),$$

$$(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n}) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} = k \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n j_n(ka) \sum_m \left[ n \frac{(n-m-1)!}{(n+m-1)!} P_{n-1}^m(\cos \vartheta_s) P_{n-1}^m(\cos \vartheta) - (n+1) \frac{(n-m+1)!}{(n+m+1)!} P_{n+1}^m(\cos \vartheta_s) P_{n+1}^m(\cos \vartheta) \right] \cos [m(\varphi - \varphi_s)].$$

Комбинируя все эти формулы и производя интегрирование в соотношении (11.4.61), мы получаем

$$- [f] = \frac{N^2}{ikM}, \quad N = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n j'_n(ka) P_n(\cos \vartheta_s),$$

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \frac{P_n(\cos \vartheta_s)}{2n+1} j'_n(ka) h'_n(ka),$$

где

$$j'_n(ka) = \frac{1}{k} \frac{d}{da} j_n(ka) = \frac{n}{2n+1} j_{n-1}(ka) - \frac{n+1}{2n+1} j_{n+1}(ka) = -D'_n \sin \vartheta'_n,$$

$$h'_n(ka) = \frac{1}{k} \frac{d}{da} h_n(ka) = iD'_n e^{i\vartheta'_n}.$$

Приравнивая нулю частные производные от  $[f]$  по всем  $A_n$ , мы получаем бесконечную систему уравнений

$$A_n = (-1)^n \frac{2n+1}{h'_n(ka)} \frac{M}{N}.$$

Поскольку  $M$  и  $N$  содержат все  $A_n$ , эта система однородных уравнений на первый взгляд кажется сложной. Заметим, однако, что если уравнения решены, то  $M = N^2$ , так что получается простая последовательность

1) Авторы выражаются не точно. Дело в том, что вариационный принцип определяет  $\psi$  и  $\tilde{\Psi}$ , а значит, и все  $A_n$  с точностью до множителя. Множитель зависит от амплитуды падающей волны и не влияет на величины  $f$  и  $Q$ . Так как  $M/N$  — однородная функция первой степени от  $A_n$ , то она тоже определяется с точностью до несущественного для наших целей множителя, а потому может быть принята равной единице. — Прим. перев.

соотношений

$$A_n = \frac{(-1)^n (2n+1)}{h'_n(ka)} = \frac{(-1)^n (2n+1) e^{-i\delta'_n}}{iD'_n},$$

$$f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s) = -\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-i\delta'_n} \sin \delta'_n P_n(\cos \vartheta_s),$$

$$Q(\mathbf{k}_i) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sin^2 \delta'_n \quad (11.4.66)$$

[используя для  $Q$  формулу (11.4.14)]. Эти формулы аналогичны формулам (11.3.72) для условий Неймана.

Таким образом, вариационный принцип при разложении по сферическим гармоникам приводит к тому же точному решению, что и вычисления § 11.3. Конечно, в этом нет ничего удивительного; оба результата должны совпадать. Но изложенный здесь метод более пригоден для определения физически интересных величин с меньшей затратой труда. Например, коль скоро найдены  $A_n$  можно непосредственно определить значения  $\psi$  на поверхности сферы (с точностью до коэффициента пропорциональности)

$$\psi(\mathbf{r}^s) = -iA \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{D_n(ka)} e^{-i\delta_n(ka)} P_n(\cos \vartheta). \quad (11.4.67)$$

Легко также видеть, что если воспользоваться функцией сравнения  $\psi$ , составленной из конечного числа сферических гармоник, то наилучшие возможные результаты для  $f$ ,  $Q$  и  $\psi(\mathbf{r}^s)$  должны совпасть с  $n$ -ми частичными суммами полученных ранее рядов. Но, за исключением исследования предельного случая коротких волн, о котором речь будет в дальнейшем, использование этого метода для сферической рассеивающей поверхности лишь повторяет то, что может быть сделано методом собственных функций. Вариационный метод полностью оправдывает себя, когда рассеивающая поверхность имеет более сложную форму и собственные функции или не полностью табулированы, или вовсе не могут быть получены (если поверхность не совпадает с координатной поверхностью системы координат, допускающей разделение).

**Рассеяние на полосе.** Хотя решение задачи рассеяния на полосе, выраженное через функции Матве, известно, вариационный метод имеет в этом случае некоторые преимущества, ибо результаты, получаемые этим методом, не будучи точными, имеют форму более компактную, чем выражение (11.2.102) и следующие. Чтобы получить хорошее приближение для рассеяния, мы воспользуемся, как мы это неоднократно делали ранее, приближенными значениями  $\psi$  на поверхности, получаемыми из рассмотрения установившегося потока, и затем применим уравнение (11.4.61).

Интегралы в формуле (11.4.61) нужно брать по обеим сторонам полосы, что сводится к интегралу по одной стороне от разности значений  $\psi$  на обеих сторонах полосы. Предположим, что полоса находится в плоскости  $y, z$ , ось ее направлена вдоль оси  $z$ , а ширина равна  $a$  (полоса занимает область  $x = 0, |y| < a/2$ ). Пусть направление распространения падающей волны лежит в плоскости  $x, y$ , образуя угол  $\varphi_i$  с осью  $x$ , и что требуется определить рассеянную волну в направлении, образующем угол  $\varphi_s$  с осью  $x$ . Из формулы (10.1.28) следует, что при обтекании полосы установившимся потоком жидкости, скорость которого составляет угол  $\varphi_i$  с нормалью к полосе, разность между значениями  $\psi$  в точках  $(0^+, y)$

и  $(0^-, y)$  (для  $|y| < a/2$ ) равна  $B \sqrt{1 - (2y/a)^2} \cos \varphi_i$ . Здесь  $B$  — постоянная, которая исключается при вариационных рассмотрениях и, значит, не подлежит вычислению. Аналогичная разность для потока, направленного под углом  $-\varphi_s$ , равна  $-B \sqrt{1 - (2y/a)^2} \cos \varphi_s$ .

Подставляя принятые выражения в (11.4.61), мы получаем для одного из интегралов числителя выражение

$$\begin{aligned} \oint (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) \tilde{\psi}(\mathbf{r}^s) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s} dA &= \\ &= -kB \cos \varphi_i \cos \varphi_s \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{a}\right)^2} e^{iky \sin \varphi_i} dy = \\ &= -\frac{1}{2} \cos \varphi_i \cos \varphi_s \int_0^\pi (1 - \cos^2 u) e^{i(ka/2) \sin \varphi_i \cos u} du = \\ &= -\frac{1}{2} \pi ka B \cos \varphi_i \cos \varphi_s \left[ J_0 \left( \frac{1}{2} ka \sin \varphi_i \right) + J_2 \left( \frac{1}{2} ka \sin \varphi_i \right) \right] = \\ &= -\frac{2\pi B}{\sin \varphi_i} \cos \varphi_i \cos \varphi_s J_1 \left( \frac{1}{2} ka \sin \varphi_i \right). \end{aligned}$$

Второй интеграл числителя равен

$$\frac{2\pi B}{\sin \varphi_s} \cos \varphi_i \cos \varphi_s J_1 \left( \frac{1}{2} ka \sin \varphi_s \right).$$

Чтобы вычислить интеграл в знаменателе, необходимо [подходящим образом выразить  $g$ . Это достигается при помощи интегрального представления Фурье

$$g_k(x, y | x_0, y_0) = i \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(y - y_0 + i|x - x_0| \sqrt{k^2 - \omega^2})] \frac{d\omega}{\sqrt{k^2 - \omega^2}},$$

где мнимая часть радикала положительна при  $\omega > k$ . Таким образом, мы имеем

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} g_k \right]_{x, x_0 \rightarrow 0} = i \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - \omega^2} e^{i\omega(y - y_0)} d\omega,$$

и интеграл в знаменателе можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \oint dA \oint \tilde{\psi}(\mathbf{r}^s) \psi(\mathbf{r}_0^s) \left[ \frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} g_k(\mathbf{r}^s | \mathbf{r}_0^s) \right] dA_0 &= \\ &= -iB^2 \cos \varphi_i \cos \varphi_s \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - \omega^2} d\omega \times \\ &\quad \times \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{a}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y_0}{a}\right)^2} e^{i\omega(y - y_0)} dy dy_0 = \\ &= -8\pi^2 B^2 i \cos \varphi_i \cos \varphi_s \int_0^\infty \sqrt{k^2 - \omega^2} \left[ J_1 \left( \frac{1}{2} a\omega \right) \right]^2 \frac{d\omega}{\omega^2} = \\ &= 8\pi^2 B^2 \cos \varphi_i \cos \varphi_s (R - iX), \end{aligned}$$

где

$$R = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} J_1^2\left(\frac{1}{2}kax\right) \frac{dx}{x^2} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 u J_1^2\left(\frac{1}{2}ka \sin u\right) du,$$

$$X = \int_1^\infty \sqrt{x^2-1} J_1^2\left(\frac{1}{2}kax\right) \frac{dx}{x^2} = \int_0^{\pi/2} \sin u \operatorname{tg} u J_1^2\left(\frac{1}{2}ka \sec u\right) du.$$

Эти интегралы можно подсчитать численно. Они конечны для всех действительных значений  $ka$ .

Соответствующие выражения для функции углового распределения  $f$  и эффективной ширины рассеяния  $Q$  могут быть представлены так:

$$f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s) \simeq \frac{-\operatorname{ctg} \varphi_i \operatorname{ctg} \varphi_s}{2(R-iX)} J_1\left(\frac{1}{2}ka \sin \varphi_i\right) J_1\left(\frac{1}{2}ka \sin \varphi_s\right),$$

$$Q(\mathbf{k}_i) \simeq \frac{2\pi}{k} \frac{X}{R^2+X^2} \operatorname{ctg}^2 \varphi_i J_1^2\left(\frac{1}{2}ka \sin \varphi_i\right). \quad (11.4.68)$$

Интенсивность рассеянной волны обращается в нуль, когда направление распространения падающей волны или направление распространения рассеянной находится в плоскости полосы ( $\varphi_i$  или  $\varphi_s$  равно  $\pi/2$ ); если же направление распространения падающей волны составляет с полосой прямой угол ( $\varphi_i = 0$ ), то эффективная ширина равна  $\pi ka^2 X/8(R^2+X^2)$ .

Подобные (но значительно более трудные) вычисления были произведены для случая диска (см. в библиографии работы Левина и Швингера; фактически вычисления были произведены для круглого отверстия в плоскости, но, по принципу Бабине, эти задачи равносильны).

**Рассеяние коротких волн.** В качестве последнего примера использования метода интегральных уравнений мы рассмотрим рассеяние плоской волны на жесткой сфере в предельном случае, когда длина волны  $2\pi/k$  очень мала по сравнению с радиусом сферы  $a$ . Здесь удобнее всего воспользоваться формулой Грина для рассеянной волны  $\psi_s$  с функцией Грина для свободного пространства  $g_k = (1/R)e^{ikR}$

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint \left[ \psi_s(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) - g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} \psi_s(\mathbf{r}_0^s) \right] dA_0,$$

где снова  $\mathbf{n}_0$  — вектор внешней нормали к поверхности рассеивателя.

Поскольку нормальная составляющая градиента полного решения  $\psi$  должна обращаться в нуль на рассеивающей поверхности, нормальная составляющая градиента  $\psi_s$  должна там совпадать с составляющей градиента падающей плоской волны  $\psi_i$ , взятой со знаком минус. Таким образом,

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint \left[ \psi_s(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) + g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} \psi_i(\mathbf{r}_0^s) \right] dA_0, \quad (11.4.69)$$

где  $\psi = \psi_i + \psi_s$  и  $\psi_i$  — плоская волна  $Ce^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$ .

Мы знаем, что для очень коротких волн часть поверхности, на которой произведение  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_i$  положительно (если поверхность всюду выпуклая) находится в «тени», в то время как та часть, для которой  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_i$  отрицательно, «освещена» падающей волной. Под «тенью» мы понимаем область, где  $\psi_s$  почти полностью уничтожает  $\psi_i$  как по величине, так и по градиенту. В «освещенной» же части  $\partial \psi_s / \partial n$  уничтожает  $\partial \psi_i / \partial n$ , а  $\psi_s$  на поверхности приблизительно равно  $\psi_i$ . Поэтому наша рассеянная волна может быть приближенно представлена в виде суммы интегралов по обеим частям

поверхности от произведений, составленных при помощи функции Грина и падающей волны

$$\begin{aligned} \psi_s(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi} \int_I \int \left[ \psi_i(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) + g_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} \psi_i(\mathbf{r}_0^s) \right] dA_0 + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_S \int \left[ g_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} \psi_i(\mathbf{r}_0^s) - \psi_i(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \right] dA_0, \end{aligned} \quad (11.4.70)$$

где значки  $I$  и  $S$  указывают, что интегрирование производится соответственно по освещенной (illuminated) и по теневой (shadow) части.

Эти два интеграла ведут себя совершенно различно. Первый представляет «отраженную волну», рассмотренную на стр. 356; второй — это «тенеобразующая» волна, подавляющая падающую волну. Если бы второй интеграл был взят по замкнутой поверхности, он в точности уничтожил бы падающую волну; поскольку интегрирование производится лишь по части поверхности, падающая волна уничтожается только позади предмета.

Так называемое *преобразование Маджи* значительно упрощает вычисление интеграла для тенеобразующей волны. Заметим, что вектор

$$\mathbf{A} = g_h \text{grad}_0 \psi_i - \psi_i \text{grad}_0 g_h,$$

рассматриваемый как функция  $\mathbf{r}_0^s$ , имеет равную нулю дивергенцию (за исключением случая, когда  $\mathbf{r}$  также находится на поверхности). Действительно,

$$\text{div } \mathbf{A} = g_h \nabla_0^2 \psi_i - \psi_i \nabla_0^2 g_h = 4\pi \psi_i(\mathbf{r}_0^s) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^s),$$

что равно нулю, пока точка  $\mathbf{r}$  не лежит на поверхности. Поэтому  $\mathbf{A}$  можно рассматривать как ротор некоторого вектора  $\mathbf{B}$  (см. стр. 59 тома I) и, используя теорему Стокса (стр. 51 тома I), мы получаем

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_0 = \frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (11.4.71)$$

где *контурный интеграл от  $\mathbf{B}$  берется вдоль линии на поверхности, отделяющей теневую часть от освещенной* (назовем ее *теневой линией*). Преобразование Маджи выражает  $\mathbf{B}$  через  $g_h$  и  $\psi_i$ . Это дает возможность заметить интеграл по поверхности эквивалентными линейными источниками, расположенными вдоль теневой линии.

Однако фактически нам нет надобности вычислять вектор  $\mathbf{B}$ ; достаточно заметить тот очевидный факт, что он зависит только от функции Грина и падающей волны и не зависит от формы поверхности рассеивателя (зависит только от формы теневой линии). Таким образом, мы показали, что *тенеобразующая волна одинакова для всех поверхностей, имеющих одну и ту же теневую линию* [по крайней мере в том приближении, которое соответствует формуле (11.4.70)]. В частности, эта волна будет такой же для непрозрачной пленки, край которой совпадает с теневой линией первоначального рассеивателя.

Чтобы показать, как применяется этот прием, мы вернемся к сфере радиуса  $a$ . Эквивалентной поверхностью, производящей такую же тенеобразующую волну, будет диск радиуса  $a$ , концентрический со сферой и перпендикулярный к направлению распространения падающей волны. Таким образом, тенеобразующая волна обратна по знаку волне, излучаемой диском, колеблющимся с такой же фазой и амплитудой, что и у падающей плоской волны. Вблизи диска эта волна создает вокруг его края обычные френелевские диффракционные кольца; вдали от диска наблюдается обычная фраунгоферова картина. Если мы найдем асимптотическое

выражение для  $\psi_s$ , то мы сможем рассчитать случай диффракции Фраунгофера.

Итак, при вычислении второго интеграла в формуле (11.4.70) можно интегрировать по поверхности диска в полярных координатах  $\varphi_0, r_0$ ;  $\psi_i$  равно  $Ce^{ikr}$ , а асимптотическая форма для  $g_k$  имеет вид  $(e^{ikr}/r)e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0}$ , где  $\mathbf{k}_s$  — вектор, характеризуемый углами  $\vartheta, \varphi$  и направленный к точке наблюдения. Для тенеобразующей волны получаем приближенное выражение

$$\begin{aligned} ikC(1 + \cos \vartheta) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^a r_0 e^{-ikr_0 \sin \vartheta \cos(\varphi_0 - \varphi)} dr_0 = \\ = \frac{1}{2} ikC(1 + \cos \vartheta) \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^a J_0(kr_0 \sin \vartheta) r_0 dr_0 = \\ = \frac{1}{2} ika^2 C \frac{1 + \cos \vartheta}{ka \sin \vartheta} J_1(ka \sin \vartheta) \frac{e^{ikr}}{r}. \end{aligned}$$

Величина в квадратных скобках равна единице при  $\vartheta = 0$ , т. е. прямо позади диска, в центре тени; она убывает до нуля при возрастании  $\vartheta$  приблизительно до значения, для которого  $\sin \vartheta = 3,8/ka$  (этот угол мал, когда  $|ka| \gg 1$ ), и для больших  $\vartheta$  остается малой. Этот член существенен только непосредственно позади предмета (в чем нет ничего удивительного, поскольку он образует тень).

С первым интегралом формулы (11.4.70), представляющим отраженную волну, нельзя обращаться столь же бесцеремонно. Ввиду того что в нем вместо знака минус фигурирует знак плюс, он не может быть представлен контурным интегралом, и для коротких волн его приходится вычислять методом перевала. Это вычисление очень похоже на проведенное на стр. 500. Мы рассмотрим здесь только случай сферы. Пусть единичный вектор нормали к поверхности в точке  $(\vartheta_0, \varphi_0)$  по-прежнему обозначается  $\mathbf{n}_0$ ,  $\mathbf{k}_i = ka_z$  является волновым вектором падающей волны, а вектор  $\mathbf{k}_s = ka_r$  направлен к точке наблюдения. Тогда первый интеграл (11.4.70) принимает вид

$$\frac{ia^2 C}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{\pi/2}^{\pi} (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{n}_0 e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{n}_0 a} \sin \vartheta_0 \frac{e^{ikr}}{r} d\vartheta_0 = \frac{a^2 C}{4\pi} \frac{\partial F}{\partial a} \frac{e^{ikr}}{r},$$

где

$$F = \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{\pi/2}^{\pi} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{n}_0 a} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0.$$

Седловая точка для  $\vartheta_0$  в интеграле  $F$  — это та точка на сфере, где вектор  $\mathbf{n}_0$  параллелен вектору  $-(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s)$ , расположенному «между»  $\mathbf{k}_i$  и  $\mathbf{k}_s$ . Он соответствует точке на сфере, в которой первичная волна зеркально отражается в направлении  $\mathbf{k}_s$ . Поскольку вектор  $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s)$  имеет длину  $2k \sin(\vartheta/2)$  и направление его определяется углами  $(\pi - \vartheta)/2, \varphi + \pi$ , мы принимаем единичный вектор  $\mathbf{n}_s$ , характеризуемый этими углами, за полярную ось для интегрирования по сфере и вместо  $\vartheta_0, \varphi_0$  вводим соответствующие углы  $u, v$ . Наш интеграл принимает вид

$$F = \int \int dv du e^{2ika \sin(\vartheta/2) \cos u \sin u},$$

причем пределы интегрирования соответствуют  $\pi/2 \leq \vartheta_0 \leq \pi$  и довольно сложно выражаются для переменной  $u$ .

Так как мы рассчитываем найти асимптотическое выражение для  $F$ , то мы будем интегрировать по  $u$  в комплексной плоскости и выберем контур интегрирования так, чтобы вблизи  $u = \pi$  показатель экспоненты имел постоянную фазу и достиг своего максимума при  $u = \pi$ . Если это будет сделано, то точное выражение пределов интегрирования по  $u$  и  $v$  не будет иметь значения, за исключением случая, когда  $ap_s$  очень близко к теневой линии, т. е. когда  $\vartheta \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$F \simeq -2\pi \int_{\pi}^{i\infty} e^{2ika \sin(\vartheta/2) \cos u} \sin u \, du = \\ = 2\pi i e^{-2ika \sin(\vartheta/2)} \int_0^{\infty} e^{-2ka \sin(\vartheta/2)x} \, dx = \frac{\pi i e^{-2ika \sin(\vartheta/2)}}{ka \sin(\vartheta/2)},$$

так что первый интеграл в (11.4.70) приближенно равен

$$\frac{aC}{2r} \exp \left\{ ik \left[ r - 2a \sin \left( \frac{1}{2} \vartheta \right) \right] \right\}$$

и фаза отраженной волны отстает на величину  $2ak \sin(\vartheta/2)$ , как того и требует «геометрическая оптика».

В принятом приближении для значений  $\psi_s$  на сфере асимптотическое выражение для  $\psi_s$  имеет вид

$$\psi_s \simeq Cf(\vartheta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \frac{r}{a} \rightarrow \infty, \quad (11.4.72)$$

где

$$f(\vartheta) \simeq \frac{1}{2} ia \left\{ ie^{-2ikas \ln(\vartheta/2)} + ka \left[ \frac{1 + \cos \vartheta}{ka \sin \vartheta} J_1(ka \sin \vartheta) \right] \right\}$$

при  $ka \rightarrow \infty$ . Амплитуда отраженной волны в этом приближении не зависит от  $\vartheta$ . Тенеобразующая волна имеет острый пик в направлении  $\vartheta = 0$ ; в других направлениях она пренебрежимо мала.

Выражение для отраженной волны непригодно при  $\vartheta \rightarrow 0$  и поэтому формулу (11.4.64) применять нельзя. Чтобы найти  $Q$ , мы должны проинтегрировать  $|f|^2$  по всем направлениям. Но поскольку отраженная часть  $f$  не зависит от  $\vartheta$ , мы можем получить соответствующую часть эффективного поперечного сечения, умножая квадрат абсолютной величины этой части на  $4\pi$ . Таким образом, для отраженной мощности при единичной интенсивности падающей волны мы получаем значение  $\pi a^2$ . Интегрируя  $|f|^2$  для тенеобразующей части, мы находим, что соответствующее эффективное поперечное сечение также равно  $\pi a^2$ . Следовательно, полное эффективное поперечное сечение *рассеяния очень коротких волн* равно  $2\pi a^2$ , т. е. удвоенному геометрическому сечению сферы, как это уже было установлено на стр. 357 и 450. Половина этого сечения приходится на отраженную часть волны, а другая половина—на тенеобразующую часть.

## Задачи к главе 11

11.1. Струна переменной линейной плотности  $\rho = \rho_0 [1 + b(x)]$  г/см натянута между неподвижными закреплениями с натяжением  $T$  (координаты закреплений  $x=0$  и  $x=l$ ). Применяя метод возмущений гл. 9, найти приближения первого порядка для формы струны и частот собственных колебаний.