

## *Диффузия. Волновая механика*

Эта глава содержит смешанный материал: в ней наряду с рассмотрением некоторых дальнейших аспектов теории диффузии и кинетической теории дается обзор методов решения выведенного в § 2.6 простейшего уравнения Шредингера. Эти две темы логически мало связаны между собой, но их нам нужно изучить, прежде чем перейти к рассмотрению векторных полей.

Мы уже рассматривали в гл. 10 некоторые стационарные задачи диффузии, поскольку эти задачи сводятся к решению уравнений Лапласа или Пуассона. В первом параграфе этой главы мы займемся нестационарными задачами диффузии. При этом выявится различие между свойствами решений параболических (см. стр. 644 тома I) и эллиптических (или волновых) уравнений. Во многих интересных задачах кинетической теории уравнение диффузии уже не является достаточно хорошим приближением. В этих случаях нам приходится вычислять функцию распределения, определяющую вероятность нахождения частицы в заданном элементе фазового пространства. Второй параграф этой главы содержит несколько типичных примеров подсчета функций распределения.

Последний параграф главы посвящен основным решениям нерелятивистского волнового уравнения для элементарных частиц, таких, как электрон или протон. Мы не пытаемся дать в этом параграфе исчерпывающее изложение волновой механики; для этого имеются другие руководства. Мы приведем лишь ряд примеров, достаточных для того, чтобы проиллюстрировать наиболее распространенные методы вычислений: расчет уровней энергии в связанных состояниях, исследование стационарного рассеяния частиц силовым полем и несколько случаев задач, содержащих зависимости от времени.

### 12.1. Решения уравнения диффузии

В § 2.4 было указано на различие между решениями уравнения диффузии

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (12.1.1)$$

(где  $a^2 = \kappa/\rho C$ ,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $\rho$  — плотность и  $C$  — удельная теплоемкость среды) и решениями волнового уравнения. Первая производная по времени, фигурирующая в уравнении (12.1.1), приводит к необратимости процессов в противоположность процессам обратимым, на которые указывает вторая производная по времени в волновом уравнении. Например, струна длины  $l$ , которая до момента  $t=0$  удерживалась в покое в положении  $\psi_0(x)$ , а затем была освобождена, будет совершать колебания, описываемые формулой ( $c$  — скорость распространения

колебаний вдоль струны):

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n c t}{l}\right), \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi_0(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx$$

С другой стороны, для пластины из теплопроводящего материала толщины  $l$ , в которой при  $t=0$  температура распределена по закону  $\psi_0(x)$  ( $x$  — расстояние от одной из граней пластины, отсчитываемое по нормали к этой грани;  $x=l$  соответствует второй грани) и грани которой поддерживаются при нулевой температуре, последующее распределение температуры описывается формулой

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left[-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right],$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi_0(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (12.1.2)$$

Множители, зависящие от пространственных координат, в членах этих рядов одинаковы; однако зависимость от времени в последнем случае характеризуется экспоненциальным множителем, в то время как в случае волновой задачи появляются тригонометрические множители. В решении волнового уравнения обращение времени не влияет на характер решения (в приведенном примере решение совершенно не изменится); в решении уравнения диффузии изменение знака времени существенно изменяет решение (в самом деле: решение становится расходящимся при отрицательных значениях времени).

**Неустановившийся процесс в случае поверхностного нагрева пластины.** Несколько простых примеров в дальнейшем еще больше подчеркнут различие между решениями уравнения диффузии и волнового уравнения. Предположим, что одна грань  $x=0$  пластины толщины  $l$  поддерживается при нулевой температуре [поскольку к решению уравнения (12.1.1) можно прибавить постоянную, за «нулевую температуру» следует принять некоторую подходящую температуру, не зависящую от времени], а на второй грани  $x=l$  поддерживается температура, изменяющаяся по закону

$$\psi_{x=l} = e^{-i\omega t}.$$

Зависимость от времени установившегося решения  $\psi$  имеет вид  $e^{-i\omega t}$  (истинная температура есть действительная часть  $\psi$ ), причем пространственно зависящая часть решения должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{i\omega}{a^2} \psi = 0$$

и краевым условиям:  $\psi=0$  при  $x=0$  и  $\psi=e^{-i\omega t}$  при  $x=l$ . Решением этой задачи является функция

$$\psi(\omega, x) = \frac{\sin[(x/a) \sqrt{i\omega}]}{\sin[(l/a) \sqrt{i\omega}]} e^{-i\omega t}. \quad (12.1.3)$$

Если  $\psi$  — температура, то  $-x \operatorname{grad} \psi = \mathbf{J}$  есть поток тепла через единицу площади, так что поток тепла через поверхность  $x=0$  будет равен

$$J(\omega, 0) = -\sqrt{i\rho C \kappa \omega} \operatorname{cosec}[(l/a) \sqrt{i\omega}] e^{-i\omega t} =$$

$$= -\frac{\sqrt{\rho C \kappa \omega}}{\sqrt{\sin^2[V(\omega/2)l/a] + \operatorname{sh}^2[V(\omega/2)l/a]}} e^{-i\omega t + \frac{1}{4}i\pi - i\alpha}, \quad (12.1.4)$$

где

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} [V(\omega/2)l/a] \operatorname{th} [V(\omega/2)l/a].$$

Если  $V(\omega/2)l/a$  очень мало, то поток тепла велик и совпадает по фазе с температурой. При малых частотах поток тепла успевает стабилизироваться, пока он проходит сквозь пластину, и распределение температуры получается умножением выражения для стационарного потока на медленно меняющийся временной множитель. Для высоких частот  $[V(\omega/2)l/a]$  — велико) поток тепла не успевает выравняться; температура на поверхности  $x=l$  изменит знак на противоположный до того, как предыдущий максимум успеет проникнуть достаточно глубоко в плиту, и, таким образом, сквозь плиту распространяется подобие «тепловой волны». Для больших  $V(\omega/2)l/a$  амплитуда потока тепла на противоположной грани пластины равна произведению

$$2 \sqrt{\rho C \kappa \omega} \exp[-V(\omega/2)l/a]$$

на амплитуду температуры на нагреваемой грани, а отставание по фазе равно  $V(\omega/2)l/a - \pi/4$  радиан. Следовательно, в этом случае наблюдается передача сквозь пластину колебаний тепловой энергии, хотя и связанная с большим затуханием и значительной дисперсией (отставание фазы пропорционально  $l$  и аргумент экспоненты может быть записан в виде  $i(V(\omega/2)/a)(l - V\sqrt{2\omega}at) - i\pi/4$ , так что фазовая скорость равна  $a\sqrt{2\omega} = \sqrt{2\omega\kappa/\rho C}$ , т. е. зависит от частоты).

Теперь мы можем применить преобразование Лапласа для вычисления потока тепла через поверхность  $x=0$ , если поверхности  $x=l$  мгновенно сообщается тепловой импульс  $\psi(l) = \delta(t)$ . В соответствии с (11.4.16) этот поток тепла должен быть равен

$$J_{\delta}(t, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} J(\omega, 0) d\omega.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, нужно подсчитать вычеты в полюсах  $J(\omega, 0)$ . При  $\omega=0$  полюса нет. Член  $\sin[(l/a)\sqrt{i\omega}]$  в знаменателе обращается в нуль при  $\omega = -i(\pi n a/l)^2$ , где  $n$  — целое положительное число; дальнейшее исследование показывает, что других особенностей в конечной части плоскости  $\omega$  нет. Чтобы найти вычеты, положим

$$\omega = -i(\pi n a/l)^2 + \epsilon,$$

откуда

$$\sin[(l/a)\sqrt{i\omega}] \simeq \frac{1}{2} i\epsilon (-1)^n (l^2/\pi n a^2)$$

и таким образом вычет в  $n$ -м полюсе равен

$$-(2\pi^2 n^2 / i\rho C l^3) (-1)^n e^{-(\pi n a/l)^2 t}.$$

Поскольку все эти полюсы находятся на или под действительной осью  $\omega$ , поток тепла при отрицательных  $t$  оказывается равным нулю (в чем нет ничего неожиданного). Таким образом, поток тепла, исходящий из грани  $x=0$ , описывается функцией

$$J_{\delta}(t, 0) = \frac{2\pi^2 n^2}{\rho C l^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 e^{-(\pi n a/l)^2 t} u(t).$$

Этот ряд сходится при  $t > 0$ , но при  $t=0$  ведет себя плохо. Однако его можно проинтегрировать, чтобы получить поток тепла, исходящий

из грани  $x=0$ , если грань  $x=l$  поддерживается при температуре  $T(t)$   $u(t)$ . При этом

$$J(t) = u(t) \frac{2\pi^2 x^2}{\rho C l^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \int_0^t T(\tau) e^{-(\pi n a/l)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (12.1.5)$$

Этот ряд удовлетворительно сходится при  $t > 0$ . В дальнейшем мы увидим, что делать при  $t$ , близких к нулю.

Конечно, можно было бы вычислить направленный влево поток тепла или температуру не только при  $x=0$ , но и для любой точки  $x$  внутри пластины. Например, распределение температуры дается функцией:

$$\begin{aligned} \psi_5(t, x) &= -\frac{2\pi a^2}{l^2} \sum_n (-1)^n n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) e^{-(\pi n a/l)^2 t} = \\ &= \frac{a^2}{l} \frac{d}{dx} \vartheta_3\left(\frac{\pi x}{2l} - \frac{1}{2}\pi, e^{-(\pi a/l)^2 t}\right), \end{aligned} \quad (12.1.6)$$

где функция  $\vartheta_3$  — одна из тета-функций, определенных в формуле (4.5.70). Это соотношение дает возможность использовать некоторые известные псевдопериодические свойства этих функций. Например, используя правило суммирования Пуассона [см. также формулу (11.2.90) и следующие], можно получить полезные формулы

$$\begin{aligned} \vartheta_3(u, q) &= \sqrt{\frac{-\pi}{\ln q}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{1}{\ln q}(u - \pi n)^2\right], \\ \psi_5(t, x) &= \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \frac{d}{dx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - 2nl - l)^2}{4a^2 t}\right], \\ J_5(t, x) &= -\frac{\pi a^2}{l} \frac{d^2}{dx^2} \vartheta_3 = \frac{\pi a}{l} \frac{d}{dt} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - 2nl - l)^2}{4a^2 t}\right] \right\}, \end{aligned} \quad (12.1.7)$$

из которых мы впоследствии выведем интересные свойства  $\psi$  и  $J$ .

**Функции Грина и фиктивные источники.** Полученные формулы показывают, что рассматриваемое распределение температуры соответствует последовательности функций Грина уравнения теплопроводности (для диполей, возникающих при слиянии на каждой грани источника и его изображения; математическим выражением диполя является производная) вида (7.4.10), расположенных в точках  $x=l+2nl$ . Эту же последовательность функций фиктивных источников можно получить непосредственно, если с самого начала решать нашу задачу методом функции Грина. В зависимости от математического или физического аспекта исследования предыдущий экскурс можно рассматривать как окольный метод либо для получения функции Грина, либо для доказательства соответствующего разложения в ряд тета-функции.

Ряд в формулах (12.1.7) (выражающих распределение через источники и их изображения) весьма удобен для изучения распространения теплового импульса в особенности при  $t \rightarrow 0$ , где ряды (12.1.6) сходятся плохо. Для малых значений времени температура всюду крайне мала, за исключением непосредственной окрестности грани  $x=l$ . Так как здесь не учитывается конечная скорость распространения тепла, рассмотренная на стр. 800 тома I, то некоторое количество тепла начинает выходить через грань  $x=0$  уже при сколь угодно малых (положительных)  $t$ . Поскольку, однако,

это количество тепла при малом  $t$  весьма мало, то вряд ли стоит усложнять решение введением в рассмотрение конечной скорости. В более общих случаях, когда поверхность  $x=l$  поддерживается при температуре  $T_0(t)u(t)$ , в формулах

$$T(t, x) = \int_0^t T_0(t-\tau) \phi_\delta(\tau, x) d\tau, \quad (12.1.8)$$

$$J(t, x) = -\kappa \int_0^t T_0(t-\tau) \frac{d}{dx} \phi_\delta(\tau, x) d\tau$$

обычно бывает удобнее использовать ряд (12.1.6), хотя, если по каким-либо соображениям это более целесообразно, можно использовать и ряды (12.1.7). Следует вновь подчеркнуть, что если  $T_0$  есть простая функция от  $t$  (например, ступенчатая функция), то окончательный результат легче получить, видоизменяя ряды (12.1.2); только для сложных  $T_0$  необходимо применять метод преобразования Лапласа.

**Нагревание излучением.** К другому краевому условию при  $x=l$  мы приходим, если пластина нагревается за счет теплообмена с внешним источником. В этом случае поток тепла пропорционален разности между температурой  $T_r(t)$  источника и температурой на грани пластины при  $x=l$ . Если температура источника изменяется по закону  $e^{-i\omega t}$  по сравнению с некоторой «нулевой температурой», то краевое условие имеет вид

$$-J = \kappa h (T_r - \psi),$$

или

$$\frac{d\psi}{dx} + h\psi = h e^{-i\omega t} \quad \text{при } x=l.$$

Соответствующее решение для случая  $\psi=0$  при  $x=0$  равно

$$\psi(\omega, x) = \frac{ah \sin[(x/a) \sqrt{i\omega}] e^{-i\omega t}}{ha \sin[(l/a) \sqrt{i\omega}] + \sqrt{i\omega} \cos[(l/a) \sqrt{i\omega}]} \quad (12.1.9)$$

Сдвиг фаз температур, получающийся в этом случае, больше, чем в случае (12.1.3). Этот сдвиг тем больше, чем больше частота.

Чтобы получить отсюда нестационарное распределение, соответствующее зависимости  $T_r$  от времени в форме дельта-функции, мы должны прежде всего найти нули знаменателя и затем вычислить вычеты функции  $\psi(\omega, x)$  от  $\omega$ . Нули определяются корнями  $\nu_n$  уравнения  $\operatorname{tg}(\pi\nu) + \pi\nu/hl = 0$ , причем имеют место следующие асимптотические выражения:

$$\nu_n \simeq n [1 - \pi/hl], \quad hl \ll 1/n,$$

$$\nu_n \simeq n + \frac{1}{2} + \left[ hl/\pi^2 \left( n + \frac{1}{2} \right) \right], \quad n \gg 1/hl.$$

Промежуточные значения  $\nu_n$  должны быть вычислены как функции от  $hl$ . Полюсы подынтегральной функции расположены в  $\omega = -i(\pi\nu_n a/l)^2$  и, подсчитав вычеты, мы получим окончательно

$$\psi_\delta(t, x) = -2\pi a^2 h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n}{h^2 l^2 + hl + \pi^2 \nu_n^2} \frac{\sin(\pi\nu_n x/l)}{\cos(\pi\nu_n)} e^{-(\pi\nu_n a/l)^2 t} u(t); \quad (12.1.10)$$

поведение этого решения похоже на (12.1.6).

Если бы толщина пластины была бесконечна, то решение, конечно, было бы проще. Если теплопроводящая среда находится в области  $x > 0$ , то

фундаментальное решение для случая чисто гармонического краевого режима будет иметь вид

$$\psi(\omega, x) = \exp[-(x/a)\sqrt{p+pt}], \quad p = -i\omega.$$

Теперь для вычисления распределения температуры внутри области  $x > 0$  для любых разумных краевых условий при  $x=0$ ,  $t > 0$  мы можем применить метод преобразования Лапласа.

Предположим, например, что температура грани  $x=0$  равна  $\varphi_0(t)u(t)$ . Преобразование Лапласа этой величины равно

$$\Phi_0(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi_0(t) dt. \quad (12.1.11)$$

Тогда преобразованием Лапласа распределения температуры  $\psi(x, t)$  в среде будет

$$\Psi(x, p) = \Phi_0(p) e^{-qx}, \quad q = \sqrt{p/a^2}.$$

Соответствующие функции  $\psi(x, t)$  [для некоторых простейших форм  $\Phi_0(p)$ ] могут быть найдены в таблицах в конце гл. 11. Если, например, температура при  $x=0$  равняется нулю до момента  $t=0$ , а начиная с этого момента линейно возрастает как  $At$ , то преобразование Лапласа есть  $\Phi_0(p) = A/p^2$ , и соответствующее распределение температуры в среде будет иметь вид

$$\psi(x, t) = A \left( t + \frac{x^2}{2a^2} \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - A \frac{x}{a} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-x^2/4a^2t},$$

где

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-w^2} dw.$$

При распределении температуры, соответствующем случаю, когда температура грани задается дельта-функцией,  $\Phi_0 = 1$  и, следовательно, согласно (11.1.16) и (12.1.8),

$$\psi(x, t) = \frac{x}{2a^2} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau^3}} \varphi_0(t-\tau) e^{-x^2/4a^2\tau} d\tau. \quad (12.1.12)$$

С другой стороны, если грань  $x=0$  нагревается благодаря теплообмену с внешними источниками, так что  $-d\psi/dx + h\psi = h\varphi_0(t)$ , то соответствующее краевое условие приводит для преобразования Лапласа к формуле

$$\Psi(x, p) = [h\Phi_0(p)/(q+h)] e^{-qx},$$

откуда можно опять-таки определить распределение температуры  $\psi(x, t)$ . Оба эти результата можно, конечно, получить и с помощью метода функции Грина, используя функции Грина из § 7.4.

**Нестационарное внутреннее нагревание пластины.** Температура  $\psi(x, t)$  в пластине толщины  $l$  (между  $x=0$  и  $x=l$ ), которая нагревается внутренними источниками, распределенными с объемной плотностью  $P(x, t)$  кал/сек·см<sup>3</sup> определяется решением неоднородного уравнения

$$\partial\psi/\partial t = a^2 \nabla^2 \psi + 4\pi a^2 s(x, t), \quad (12.1.13)$$

где

$$a^2 = \kappa/\rho C \quad \text{и} \quad s = P/4\pi\kappa.$$

Простой метод вычисления  $\psi$  для почти произвольного  $P$  заключается в том, чтобы вычислить  $\psi$  для  $P$ , имеющего характер простой гармоник, и применить затем преобразование Лапласа. В соответствии с этим мы прежде всего найдем решение уравнения (12.1.13) для  $s = \sigma(x - x_0)e^{-pt}$ . Оно является решением уравнения  $a^2 \nabla^2 \psi + p\psi = 0$  всюду, кроме точки  $x = x_0$ , где имеется разрыв производной со скачком  $-4\pi$ . Если  $\psi$  должно быть равно нулю на обеих гранях пластины, то  $\psi = G(p|x|x_0)$ , где

$$G(p|x|x_0) = \frac{4\pi a}{\sqrt{p} \sin\left(\frac{l\sqrt{p}}{a}\right)} \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{a}\sqrt{p}\right) \sin\left(\frac{l-x_0}{a}\sqrt{p}\right), & x < x_0, \\ \sin\left(\frac{x_0}{a}\sqrt{p}\right) \sin\left(\frac{l-x}{a}\sqrt{p}\right), & x > x_0, \end{cases} \quad (12.1.14)$$

и распределение температуры для  $s = (1/4\pi\kappa)P(x, p)e^{-pt}$  имеет вид

$$\psi(x, p) = \frac{1}{4\pi\kappa} \int_0^l P(x_0, p) G(p|x|x_0) e^{-pt} dx_0.$$

В частном случае однородного нагревания, когда выделяющаяся в единице объема мощность равна действительной части  $P_0 e^{-pt}$ , где  $P_0$  не зависит от  $x$ , распределение температуры имеет вид

$$\psi(x, p) = \text{Re} \left\{ \frac{(a^2/\kappa) P_0 e^{-pt}}{p \cos(l\sqrt{p}/2a)} \left[ \cos\left(\frac{l-2x}{2a}\sqrt{p}\right) - \cos\left(\frac{l}{2a}\sqrt{p}\right) \right] \right\}. \quad (12.1.15)$$

Эта формула находит интересное применение в задаче о металлической полосе, нагреваемой переменным током частоты  $\omega/2\pi$  и погруженной в среду (например, в жидкий гелий) с большой теплопроводностью. Поскольку в любой момент получаемое полосой количество тепла пропорционально квадрату тока, мощность источников тепла  $P$  в единице объема равна  $P_0 - \text{Re}(P_0 e^{-2i\omega t})$ , где  $P_0$  есть средняя плотность мощности источников тепла; колебания мощности имеют по сравнению с нагревающим током удвоенную частоту. При этом распределение температуры вдоль полосы, толщина которой  $l$ , а ширина значительно больше чем  $l$ , будет иметь вид

$$\psi = \frac{P_0}{2\kappa} x(l-x) - \text{Re} \left\{ \frac{a^2 P_0 e^{-2i\omega t}}{2i\omega\kappa \cos(l\sqrt{2i\omega}/2a)} \times \left[ \cos\left(\frac{l-2x}{2a}\sqrt{2i\omega}\right) - \cos\left(\frac{l}{2a}\sqrt{2i\omega}\right) \right] \right\}.$$

Поток тепла через единицу площади грани  $x=0$  равен

$$-J_0 = \frac{1}{2} l P_0 \left\{ 1 - \text{Re} \left[ \frac{2a}{l\sqrt{2i\omega}} \text{tg} \left( \frac{l\sqrt{2i\omega}}{2a} \right) e^{-2i\omega t} \right] \right\} \simeq \begin{cases} l P_0 \sin^2(\omega t), & l\sqrt{2\omega}/2a \ll 1, \\ \frac{1}{2} l P_0 \left[ 1 - \frac{2a}{l\sqrt{2\omega}} \cos\left(2\omega t - \frac{1}{4}\pi\right) \right], & l\sqrt{2\omega}/2a \gg 1. \end{cases} \quad (12.1.16)$$

При этом предполагается, что выделяющаяся мощность равна  $2P_0 \sin^2(\omega t)$ . Для низких частот поток энергии из полосы совпадает по фазе с током: он падает до нуля (приблизительно) в течение каждой половины цикла. Для высоких частот колебания потока не столь резки и не совпадают по фазе с источником тепла.

Если выделение тепла происходит неперiodически, то температура среды может быть найдена методом преобразования Лапласа. Например,

если в каждой единице объема мгновенно выделяется единичное количество тепла  $u(t)$ , то температура будет равна

$$\begin{aligned} \psi_\delta(x, t) &= \frac{a^2}{2\pi i x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-pt}}{p \cos(l \sqrt{p}/2a)} \left[ \cos\left(\frac{l-2x}{2a} \sqrt{p}\right) - \cos\left(\frac{l}{2a} \sqrt{p}\right) \right] dp = \\ &= \frac{4a^2}{\pi x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\frac{\pi x}{l}(2n+1)\right] \exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 (2n+1)^2 t\right] u(t), \\ J_\delta(x, t) &= -\frac{2a^2}{l} \vartheta_2\left(\frac{x}{l}, \frac{4\pi i a^2 t}{l^2}\right) u(t) = \\ &= -\sqrt{\frac{x}{\pi p t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left[-\frac{(x-nl)^2}{4a^2 t}\right] u(t). \quad (12.1.17) \end{aligned}$$

Здесь мы вновь использовали свойства тета-функции, указанные в таблице в конце гл. 4. Распределение температуры и поток тепла через поверхность  $x=0$ , если плотность распределения источников тепла по всей полосе равна  $P(t)$ , как и ранее, вычисляются по формулам

$$T(x, t) = \int_0^t P(t-\tau) \psi_\delta(x, \tau) d\tau, \quad U_0(t) = - \int_0^t P(t-\tau) J_\delta(0, \tau) d\tau.$$

**Диффузия и поглощение частиц.** Уравнение диффузии приближенно описывает диффузию частиц (например, электронов в газе или нейтронов в веществе) постольку, поскольку рассматриваемые расстояния велики по сравнению со средней длиной свободного пробега частиц и поскольку рассматриваемое время велико по сравнению со средним временем между столкновениями. При выводе уравнения (2.4.42) было указано, что постоянная диффузии  $a^2$  равна произведению одной трети средней скорости  $v_a$  частицы на среднюю длину свободного пробега  $\lambda_a$  и что, кроме членов, содержащих производные по времени и по пространственным координатам, в уравнении имеются члены, учитывающие поглощение и возникновение частиц. Если скорости всех частиц в данной области достаточно мало отличаются друг от друга по величине и вместе с тем достаточно равномерно распределены по всем направлениям, т. е. если поведение частиц мало отличается от среднего поведения, то уравнение для плотности частиц  $\rho$  как функции пространственных координат и времени будет иметь вид

$$\partial \rho / \partial t = a^2 \nabla^2 \rho - \chi \rho + q, \quad (11.1.18)$$

где  $a^2 = (1/3) v_a \lambda_a$  ( $v_a$  — средняя скорость и  $\lambda_a$  — средняя длина свободного пробега частиц),  $\chi$  есть средняя частота поглощения частиц в среде, а  $q$  — среднее число частиц, возникающих в единице объема среды, как это было принято при выводе (2.4.42).

Для наших рассмотрений существенны следующие характеристики частиц и среды, через которую они проходят: средняя скорость  $v_a$  и средняя длина свободного пробега  $\lambda_a$  частиц; доля столкновений  $\chi$ , при которых частица поглощается, а также  $q$  — скорость, с которой увеличивается число частиц, участвующих в рассматриваемом процессе — либо в результате возникновения в среде (как, например, при распаде или радиоактивности), либо в результате первичного рассеяния какого-либо однородного падающего пучка, часть частиц которого достаточно глубоко проникает в среду прежде, чем они испытывают свое первое столкновение. (Мы, естественно, считаем местом их возникновения точку, в которой они



включаются в  $\rho$  при своем первом столкновении.) Через эти физические величины, как уже было упомянуто, постоянная диффузии выражается так:  $a^2 = (1/3) \lambda_a v_a$ ;  $v_a/\lambda_a$  есть частота столкновений для некоторой средней частицы, а  $\kappa v_a/\lambda_a$  — частота столкновений этой средней частицы, при которых происходит ее поглощение, которая должна быть равна частоте поглощения  $\chi$ .

Следующий пример иллюстрирует некоторые свойства решений этого уравнения. Внезапный ливень частиц падает на поверхность  $x = 0$  вещества, заполняющего полубесконечную область  $x > 0$ . Эти частицы можно рассматривать как возникающие в среде в том месте, где они впервые подвергаются рассеянию. Но если поверхность  $x = 0$  пересекает  $N$  частиц, то  $(\sqrt{V/\lambda_i}) e^{-x/\lambda_i} dx$  частиц будет рассеяно и включено в распределение за поверхностью на участке между  $x$  и  $x + dx$ . Таким образом, в случае ливня в форме дельта-функции плотность источников  $q$  будет равна  $(1/\lambda_i) e^{-x/\lambda_i} \delta(t)$ . Чтобы найти последующее поведение  $\rho$ , нужно решить уравнение (12.1.18) при этом  $q$ . Конечно, в действительности, вследствие конечной скорости  $v_i$  частиц падающего пучка первые столкновения в глубине среды будут иметь место позднее, чем столкновения вблизи поверхности. Следовательно, для  $q$  правильнее было бы пользоваться формулой  $(1/\lambda_i) e^{-x/\lambda_i} \delta(t - x/v_i)$ . Но этим эффектом можно пренебречь, если  $v_i$  велико по сравнению со средней скоростью диффундирующих частиц  $v_a$  или если изменение плотности во времени происходит медленно по сравнению с частотой столкновений  $v_i/\lambda_i$ . В дальнейшем мы опускаем член  $x/v_i$  в  $\delta$ , хотя в случае надобности его можно учесть. Постоянная  $\lambda_i$  есть, конечно, средняя длина свободного пробега падающих частиц.

Если область  $x < 0$  есть свободное пространство, так что все частицы, вылетающие из вещества, никогда не возвращаются обратно, то, согласно (2.4.34),  $\rho$  удовлетворяет краевому условию  $\rho = \gamma (\partial \rho / \partial x)$  при  $x = 0$  (где  $\gamma = 0,71 \lambda_a$ ). Однако вначале мы займемся решением задачи со значительно более простым краевым условием  $\rho = 0$  при  $x = 0$ . Из формулы (2.4.43) можно получить функцию Грина для рассматриваемого здесь одномерного случая и условия  $\rho = 0$  при  $x = 0$

$$G(t|x|x_0) = \frac{e^{-\chi t}}{2a\sqrt{\pi t}} [e^{-(x-x_0)^2/4a^2 t} - e^{-(x+x_0)^2/4a^2 t}] u(t). \quad (12.1.19)$$

Если при  $t = 0$  внезапно «впрыскиваются» частицы, то для  $t > 0$  плотность распределения частиц определяется выражением

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, t) &= \frac{1}{\lambda_i} \int_0^\infty e^{-x_0/\lambda_i} G(t|x|x_0) dx_0 = \\ &= \frac{1}{2\lambda_i} e^{-\chi t + (a^2 t/\lambda_i^2)} \left[ e^{-x/\lambda_i} \operatorname{erfc} \left( \frac{a\sqrt{t}}{\lambda_i} - \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{x/\lambda_i} \operatorname{erfc} \left( \frac{a\sqrt{t}}{\lambda_i} + \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right] u(t), \quad (12.1.20) \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{erfc}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_w^\infty e^{-u^2} du \simeq \begin{cases} 2 + (1/w\sqrt{\pi}) e^{-w^2}, & w \rightarrow -\infty, \\ 1 - 2w/\sqrt{\pi}, & w \rightarrow 0, \\ e^{-w^2} (1/w\sqrt{\pi}) [1 - 1/2w^2], & w \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Множитель  $e^{-\chi t}$  соответствует потерям из-за поглощения частиц, множитель  $e^{a^2 t/\lambda_i^2}$  — возрастанию плотности вследствие притока в точку  $x$  частиц из областей, где ранее создались большие плотности.

Для  $t$  малого по сравнению с  $(x/a)^2$  первый член в прямых скобках в (12.1.20) много больше второго, и все выражение сводится к  $(1/\lambda_i) e^{-x/\lambda_i}$  для всех  $x$ , за исключением  $x$ , весьма близких к нулю. Для  $t$  большого сравнительно с  $(\lambda_i/a)^2$  оба члена в скобках почти взаимно уничтожаются, и тогда получается

$$\varphi_s \simeq x \frac{1}{2} \frac{\lambda_i}{a^2 t^{3/2} \sqrt{\pi}} e^{-x/\lambda_i - x^2/4a^2 t}, \quad t \gg \lambda_i^2/a^2.$$

При  $t=0$   $\varphi_s = (1/\lambda_i) e^{-x/\lambda_i}$ ; с ростом  $t$  пик, близкий к  $x=0$ , быстро «тает» до нуля; с течением времени значение функции распределения в области, лежащей ниже поверхности, уменьшается до тех пор, пока, наконец, остается лишь невысокий максимум, расположенный внутри материала.

Если вместо мгновенного «впрыскивания» частиц при  $t=0$  задается постоянный поток, то процесс в конце концов становится стационарным, причем за каждую секунду на плоскости  $x=0$  поглощается и оставляет ее столько же частиц, сколько их попадает на эту плоскость. Соответствующее уравнение

$$a^2 \frac{d^2 \rho}{dx^2} - \chi \rho = - \frac{1}{\lambda_i} e^{-x/\lambda_i} \quad (12.1.24)$$

имеет стационарное решение

$$\varphi_s(x) = \frac{\lambda_i}{a^2 - \lambda_i^2 \chi} [e^{-x\sqrt{\chi}/a} - e^{-x/\lambda_i}],$$

обращающееся в нуль при  $x=0$ . Для больших значений  $x$  это решение ведет себя как экспонента с показателем  $x/\lambda_i$  или  $x\sqrt{\chi}/a$  в зависимости от того, какой показатель меньше.

Однако, как указывалось ранее,  $\chi/a^2 = (\kappa v_a/\lambda_a) (3/\lambda_a v_a) = 3\kappa/\lambda_a^2$ , где  $\kappa$  — доля столкновений, при которых происходит поглощение частиц, — обычно величина небольшая. Поэтому  $\sqrt{\chi}/a$  обычно меньше чем  $1/\lambda_i$ , если только средний свободный пробег частиц падающего пучка не превышает значительно средний свободный пробег  $\lambda_a$  частиц, описываемых функцией распределения  $\rho$ . Поэтому глубокое проникновение частиц (поведение  $\rho$  для больших  $x$ ) обычно определяется главным образом процессом поглощения и диффузии (первая экспонента), а не проникновением падающего пучка (вторая экспонента).

Неустановившееся решение, соответствующее единичному потоку частиц, возникающему при  $t=0$  и затем продолжающемуся, имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_s(x) - \int_0^\infty \varphi_s(x_0) G(t|x|x_0) dx_0 = \\ &= \varphi_s(x) - \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2 \chi - a^2} \left\{ \varphi_s(x, t) - \frac{1}{2\lambda_i} \left[ e^{-x\sqrt{\chi}/a} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\chi t} - \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{x\sqrt{\chi}/a} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\chi t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right] \right\}. \quad (12.1.22) \end{aligned}$$

Эти и другие решения были получены для краевого условия  $\rho=0$  при  $x=0$ . Однако, как было уже упомянуто ранее, более точное краевое условие для плотности частиц  $\rho$  имеет вид  $\rho = \gamma (\partial \rho / \partial x)$  при  $x=0$ , где  $\gamma \approx 0,71 \lambda_a$ . Мы можем, однако, превратить полученные решения  $\varphi$  в решения для  $\rho$ , удовлетворяющие более точным краевым условиям, полагая

$$\rho - \gamma (\partial \rho / \partial x) = \varphi(x, t),$$

или

$$\rho(x, t) = - (e^{x/\gamma} / \gamma) \int_0^x e^{-u/\gamma} \varphi(u, t) du = \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty e^{-w/\gamma} \varphi(x+w, t) dw. \quad (12.1.23)$$

Если  $\rho$  удовлетворяет уравнению (12.1.18), то  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \nabla^2 \varphi - \chi \varphi + q - \gamma \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Если  $\varphi = 0$  при  $x = 0$ , то  $\rho = \gamma (\partial \rho / \partial x)$  при  $x = 0$ .

Например, стационарное решение уравнения (12.1.21) для  $\rho$  соответствует  $\varphi$ , удовлетворяющему (при  $\lambda_a = \lambda_i$ ) уравнению

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \chi \varphi = - \frac{1,71}{\lambda_i} e^{-x/\lambda_i},$$

т. е.  $\varphi = 1,71 \varphi_s(x)$ , где  $\varphi_s$  найдено выше. Выполнив интегрирование для  $\rho$ , мы получим

$$\rho_s(x) = \frac{1,71 \lambda_i}{a^2 - \lambda_i^2 \chi} \left[ \frac{a e^{-x \sqrt{\chi/a}}}{a + \gamma \sqrt{\chi}} - \frac{\lambda_i e^{-x/\lambda_i}}{\lambda_i + \gamma} \right]. \quad (12.1.24)$$

Это решение удовлетворяет надлежащим краевым условиям для  $\rho$ . Другие нестационарные решения могут быть в случае надобности также вычислены при помощи (12.1.23).

Краевое условие с  $\gamma = 0,71 \lambda_a$  дает, конечно, достаточно хорошее приближение только тогда, когда на расстоянии  $\lambda_a$  от границы нет источников. В рассмотренном случае таких источников действительно нет. В других случаях значение постоянной 1,71 в (12.1.24) должно быть несколько изменено.

**Деление и диффузия.** Если среда, в которой диффундируют нейтроны, частично состоит из делящегося вещества, то нейтроны не только поглощаются этой средой, но и возникают в ней. Возникающие нейтроны обладают двумя свойствами, которые существенно влияют на ход цепной реакции. Во-первых, не все эти нейтроны появляются одновременно, некоторые выделяются с заметным запаздыванием. Во-вторых, нейтроны, возникающие в процессе деления, обычно обладают энергией более высокой, чем средняя энергия нейтронов, и потому они должны быть замедлены, прежде чем смогут вызвать дальнейшие деления. Чтобы изучить, как эти свойства воздействуют на ход явления, мы их рассмотрим порознь. Сначала учтем запаздывание, а затем замедление.

Для начала пренебрежем как запаздыванием, так и замедлением и предположим, что в заданном объеме каждую секунду определенный процент нейтронов вызывает акты деления и что в результате этих актов немедленно «создается» большое количество нейтронов с той же средней энергией. В этом случае величина  $q$  в уравнении (12.1.18) прямо пропорциональна  $\rho$ ; коэффициент пропорциональности  $R$  постоянен. Единственное изменение, которое это обстоятельство вносит в полученные ранее решения уравнения, заключается в том, что вместо коэффициента поглощения  $\chi$  теперь следует во всех формулах ввести  $\chi - R$ , что равносильно уменьшению частоты поглощения частиц. В том случае, когда скорость размножения  $R$  существенно превышает частоту поглощения  $\chi$ , плотность нейтронов постепенно возрастает, и будет развиваться цепная реакция. Насколько именно  $R$  должно превышать  $\chi$ , зависит от конфигурации материала, как это будет показано ниже.

Как было указано ранее, величина  $\chi$  выражается через среднюю скорость  $v_a$  нейтронов и их средний свободный пробег  $\lambda_a$  следующим образом:  $\chi = \nu v_a / \lambda_a$ , где  $\nu$  есть доля столкновений, приводящих к поглощению ударяющихся нейтронов. Аналогично этому мы можем ввести долю  $\zeta$  столкновений, вызывающих деление, и среднее количество  $\nu$  нейтронов, «создаваемых» при одном делении; тогда

$$R = \zeta \nu_a / \lambda_a.$$

Поэтому мы можем сделать следующее предварительное замечание: цепная реакция невозможна ни при какой конфигурации, если только не выполнено неравенство  $\kappa > \kappa_c$ , т. е. для развития цепной реакции доля нейтронов деления, создаваемых при одном столкновении, должна быть больше доли поглощенных нейтронов.

Если нейтроны, создаваемые при делении, испускаются с некоторым запаздыванием, то член  $q$  не точно пропорционален  $\rho(x, t)$ . Если мы пренебрегаем эффектом замедления, то  $q$  выражается через значение  $\rho$  в той же точке  $x$ , но в другой, более ранний чем  $t$  момент времени  $\tau$ . Предположим, что нейтроны, создаваемые при делении, испускаются в результате единого радиоактивного процесса. Тогда доля испускаемых нейтронов есть показательная функция времени  $e^{-a\tau}$  (хорошее приближение даже для случая, когда имеет место несколько процессов) и уравнение, которому должно удовлетворять  $\rho$ , имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) - \chi \rho(x, t) + aR \int_0^{\infty} e^{-a\tau} \rho(x, t - \tau) d\tau + q. \quad (12.1.25)$$

Интегральный член этого уравнения учитывает (приближенно) запаздывание, но не учитывает эффекта замедления.  $1/a$  есть среднее время запаздывания испускания нейтронов. Последний член  $q$  соответствует внешним нейтронам, вводимым в рассматриваемую область извне. Заметим, что если  $\rho$  не зависит от времени, то интегральный член сводится к  $R\rho(x)$ . Влияние запаздывания испускания нейтронов сказывается, таким образом, только при нестационарных процессах в системе.

**Решение при помощи преобразования Лапласа.** Мы изложим сейчас решение этого уравнения методом преобразования Лапласа. Рассмотрим случай пластины толщины  $l$  с границами  $x=0$  и  $x=l$  и предположим, что в любой момент времени  $\rho=0$  при  $x=0$  и  $x=l$ . Если  $q$  зависит от времени, то разложим его в интеграл Фурье, и прежде всего решим задачу для

$$q = \delta(x - x_0) e^{-i\omega t}.$$

Выберем стационарное решение в форме

$$\varphi(x|x_0|\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) e^{-i\omega t}.$$

Подставив его в (12.1.25), умножая на  $\sin(\pi n x/l)$  и интегрируя по  $x$ , получим уравнения для коэффициентов  $A_n$

$$\frac{1}{2} l \left[ -i\omega + \beta_n + \chi - \frac{aR}{a - i\omega} \right] A_n = \sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right),$$

где  $\beta_n = (\pi n a/l)^2$ , так же как  $\chi$  и  $R$ , имеет размерность частоты. Решение  $\varphi(x|x_0|\omega)$  в дальнейшем будет выражено через корни уравнения  $\omega^2 + i\omega(a + \chi + \beta_n) + a(R - \beta_n - \chi) = 0$ , которые запишем в виде  $-i\omega_n^+$  и  $-i\omega_n^-$ , где

$$\begin{aligned} \omega_n^+ &= \frac{1}{2} (a + \chi + \beta_n) + \frac{1}{2} \sqrt{(\beta_n + \chi - a)^2 + 4aR} \simeq \\ &\simeq \beta_n + \chi + aR/\beta_n, \quad \beta_n \gg \chi, R, a, \\ \omega_n^- &= \frac{1}{2} (a + \chi + \beta_n) - \frac{1}{2} \sqrt{(\beta_n + \chi - a)^2 + 4aR} \simeq \\ &\simeq a - aR/\beta_n, \quad \beta_n \gg \chi, R, a. \end{aligned}$$

Полезно выразить эти корни непосредственно через физические константы, упомянутые выше:

$$\left. \begin{matrix} \omega_n^+ \\ \omega_n^- \end{matrix} \right\} = \frac{v_a}{2\lambda_a} \left\{ \frac{1}{3} \lambda_a^2 \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 + x + \delta \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\pi n \lambda_a}{l} \right)^2 + x - \delta \right]^2 + 4v\zeta\delta} \right\},$$

где  $x$ , как ранее было указано, есть вероятность поглощения при столкновении,  $1/\delta$  есть среднее запаздывание испускания нейтронов, выраженное в единицах среднего времени свободного пробега ( $\alpha = \delta v_a / \lambda_a$  или  $1/\delta = v_a / \lambda_a \alpha$ ) и  $v\zeta$  есть среднее количество нейтронов, создаваемых при одном столкновении ( $v$  — среднее количество нейтронов, получающихся при распаде, и  $\zeta$  — вероятность деления при столкновении).

Через эти величины  $\varphi$  выразится так:

$$\varphi(x|x_0|\omega) = \frac{2i\omega - 2\alpha}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x_0/l) \sin(\pi n x/l)}{(\omega + i\omega_n^+)(\omega + i\omega_n^-)} e^{-i\omega t},$$

и неустановившийся процесс в случае частиц, вводимых в рассматриваемую область в точке  $x_0$  в момент  $t=0$ ,  $q = \delta(x-x_0)\delta(t)$ , описывается, как и ранее, формулой

$$\begin{aligned} \varphi_\delta(x|x_0|t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x|x_0|\omega) d\omega = \\ &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x_0/l) \sin(\pi n x/l)}{\sqrt{\left[ \frac{1}{3} (\pi n \lambda_a/l)^2 + x - \delta \right]^2 + 4v\zeta\delta}} \left\{ \left[ \frac{\lambda_a \omega_n^+}{v_a} - \delta \right] \exp(-\omega_n^+ t) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \delta - \frac{\lambda_a \omega_n^-}{v_a} \right] \exp(-\omega_n^- t) \right\} u(t). \end{aligned} \quad (12.1.26)$$

Если плотность нейтронов, вводимых за секунду в рассматриваемую область в момент  $t$  в точке  $x$ , есть  $q(x, t)$  (нейтроны вводятся извне, а не возникают в результате деления, так как процесс деления учтен в самом уравнении), то в приближении, указанном в связи с (12.1.25), плотность распределения частиц в рассматриваемой области будет иметь вид

$$\rho(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l q(x_0, \tau) \varphi_\delta(x|x_0|t-\tau) dx_0.$$

Более точными являются краевые условия, согласно которым

$$\rho = \pm 0,71\lambda (\partial\rho/\partial x)$$

на обеих гранях пластины. Эти условия можно (если  $l \gg \lambda$ ) приближенно учесть, располагая грани истинной пластины в плоскостях  $x = 0,71\lambda$  и  $x = l - 0,71\lambda$  так, что длина  $l$  в (12.1.26) на  $1,42\lambda$  больше толщины пластины.

При рассмотрении уравнения (12.1.26) можно обнаружить много интересного. Прежде всего если  $R=0$  ( $\zeta=0$ ), то вторая экспонента исчезает и решение принимает вид

$$\rho = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left\{-\frac{tv_a}{\lambda_a} \left[ x + \frac{1}{3} \left( \frac{\pi n \lambda_a}{l} \right)^2 \right]\right\},$$

где  $x$  есть средняя доля столкновений, приводящих к потере нейтронов вследствие поглощения (т. е. отношение поперечного сечения поглощения к полному поперечному сечению). Отметим, что члены вида  $(1/3) (\pi n \lambda_a/l)^2$  соответствуют потере частиц вследствие диффузии из пластины. Чтобы число нейтронов, участвующих в процессе, не уменьшалось, оба члена должны быть достаточно малыми; материал среды должен быть таким, чтобы основную долю всех столкновений составляли упругие столкновения: толщина пластины

должна равняться нескольким длинам свободного пробега, так чтобы потеря нейтронов при диффузии из пластины за среднее время свободного пробега  $(1/3)(\pi n \lambda_a / l)^2$  также была весьма мала. Это предельное выражение для  $\rho$  при  $R=0$ , естественно, является решением уравнения (12.1.18).

Если теперь немного увеличить  $R$  (или  $v\zeta$ ), то вторая экспонента в (12.1.26) при  $t=0$  будет по величине меньше, чем первая. До тех пор пока  $v\zeta$  мало, быстрота убывания второго члена определяется величиной  $\alpha (= \delta v_a / \lambda_a)$ , т. е. степенью запаздывания при испускании нейтронов. Если запаздывание мало, т. е. если  $\alpha$  велико, то уже при значениях  $t$ , близких к нулю, вторым членом можно пренебречь. Если, однако,  $\alpha$  мало, т. е. если нейтроны, образующиеся при делении, появляются медленно, то второй член будет затухать медленно с течением времени. Поэтому после достаточно продолжительного промежутка времени останется только этот второй член. Плотность будет определяться не постоянной диффузии  $a^2$ , а оставшимися запаздывающими нейтронами.

Если  $R$  достаточно велико, то  $\omega_1$  становится отрицательным, и цепная реакция оказывается неустойчивой — плотность будет неограниченно возрастать. Это происходит, когда

$$\sqrt{(\beta_1 + \chi - \alpha)^2 + 4\alpha R} > \alpha + \chi + \beta_1,$$

т. е. когда  $R > \chi + \beta_1 = \chi + (\pi a / l)^2$ , или

$$v\zeta > \chi + \frac{1}{3}(\pi \lambda_a / l)^2. \quad (12.1.27)$$

Это требование совершенно очевидно: для развития цепной реакции необходимо, чтобы среднее количество нейтронов, возникающих в результате деления при одном столкновении, было больше, чем среднее количество нейтронов, поглощаемых при столкновении, плюс соответствующее количество нейтронов, потерянных при диффузии из пластины. Поскольку нейтроны теряются при поглощении и при вылете за пределы пластины, постольку для осуществления цепной реакции нужно, чтобы коэффициент  $R$  превышал коэффициент поглощения  $\chi$  на величину  $(1/3)(\pi a / l)^2$ . Чем тоньше пластина или чем больше постоянная диффузии  $a^2$ , тем более «обогащенным» должен быть материал, чтобы могла развиваться цепная реакция. [Следует заметить, что если бы на обеих гранях пластины имелись идеальные отражатели нейтронов, то разложение решения производилось бы по косинусам, а не по синусам, в ряд входил бы член с  $n=0$ , и развитие цепной реакции начиналось бы при  $R > \chi$  (при  $v\zeta > \chi$ ); потерь при диффузии не было бы вовсе.]

Следует также отметить, что если все нейтроны возникают без запаздывания (т. е. если  $\alpha$  бесконечно), то решение принимает вид

$$\rho = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left\{-t\left[\chi - R + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\right]\right\},$$

т. е. является решением уравнения (12.1.18) при  $q = R\rho$ . В этом предельном случае, если  $R$  больше критического значения, то  $\rho$  начинает сразу возрастать. С другой стороны, если  $\delta$  мало (длительное запаздывание), то (12.1.26) показывает, что  $\rho$  может первоначально убывать, даже если  $\omega_1$  отрицательно. Дело в том, что первое слагаемое в скобках есть величина, убывающая по экспоненциальному закону, которая, однако, при малых  $t$  больше второго слагаемого, если только  $\delta$  достаточно мало. Плотность  $\rho$  сначала убывает, пока второе возрастающее слагаемое не достигнет требуемого значения, т. е. пока запаздывающие нейтроны не накопятся в количестве, достаточном для осуществления цепной реакции.

**Замедление частиц.** Чтобы учесть тот факт, что нейтроны, возникающие при делении, должны быть замедлены, для того чтобы они в свою очередь вызвали возможно больше новых делений, мы должны рассмотреть решения уравнения диффузии (2.4.54). Это уравнение выводится из следующих соображений: частицы с большими скоростями вводятся в среду, которая вызывает их замедление, причем каждое столкновение вызывает частичное уменьшение их энергии. При этом интенсивность процесса диффузии частиц из вещества наружу можно характеризовать средним количеством столкновений, испытываемых частицей с момента ее появления. Если, например, частицы, обладающие большой энергией, будут вводиться в заданной точке среды, то более медленные частицы будут обнаружены в других местах; чем медленнее частицы, тем больше будет область их распределения. Формула (2.4.54) выражает именно такое поведение; оно будет вновь рассмотрено в § 12.2.

Безразмерный параметр, называемый *возрастом* частицы

$$\tau = \frac{MQ}{mQ_m} \ln \frac{v_i}{v} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{v_i}{v}, \quad v = v_i e^{-\tau}$$

(где  $mQ_m/MQ = \eta$  есть средняя относительная потеря скорости при одном столкновении), характеризует среднее число столкновений, испытанных частицей скорости  $v$ , если она была введена в среду со скоростью  $v_i$ . [Мы предполагаем для простоты изложения, что  $MQ/mQ_m$  в нашем случае не зависит от  $v$ , хотя (2.4.53) показывает, что рассмотрение может быть подобным же способом проведено, если это условие и не выполнено.] Величина, которая соответствует здесь плотности распределения,

$$\phi = n_i Q_m p^4 \rho / M = p^3 v \rho(v) \eta / \lambda,$$

есть полное число частиц, находящихся в единице объема, скорость которых больше чем  $v$  (возраст меньше  $\tau$  или импульс больше чем  $p = mv$ ) в начале данной секунды и меньше  $v$  (возраст больше чем  $\tau$ ) в конце той же секунды. Поэтому пространственное распределение вводимых частиц с большими скоростями соответствует начальному условию для  $\phi$ . Как мы скоро увидим,  $\tau$  пропорционально времени, когда  $\lambda$  постоянно ( $\lambda = 1/n_i Q$ ).

Уравнение для определения пространственного распределения  $\phi$  и зависимости его от *возрастного параметра*  $\tau$ , согласно (2.4.54), имеет вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{3} \lambda^2 \nabla^2 \phi - \kappa_i \phi, \quad (12.1.28)$$

где  $\lambda$  есть средний свободный пробег частиц с большой скоростью (предполагаемый здесь постоянным, что, однако, необязательно для того, чтобы уравнение удовлетворялось), а безразмерная постоянная  $\kappa_i$  равна доле частиц, поглощаемых средой при каждом столкновении. Решения этого уравнения, конечно, совершенно аналогичны полученным нами ранее; интерпретация их, однако, несколько иная. Например, если частицы «создаются» на глубине  $x_i$  внутри пластины толщины  $l$ , так что количество вводимых в секунду в единице объема частиц с начальной скоростью  $v_i$  есть  $\delta(x - x_i)$ , то величина  $\phi$  для скорости  $v$  определяется формулой

$$\phi(x | x_i | \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x_i}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left\{-\tau \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi n \lambda}{l}\right)^2 + \kappa_i\right]\right\},$$

а плотность распределения частиц, имеющих скорость между  $v$  и  $v + dv$ , определяется из соотношения  $m p^2 \rho(v) dv = P(v) dv$ , где

$$P(v) = \frac{\lambda}{v^2 \eta} \phi = \frac{2\lambda}{\eta l v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x_i}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \left(\frac{v}{v_i}\right)^{[(\pi n \lambda / l)^2 + 3\kappa_i](1/3\eta)}. \quad (12.1.29)$$

Если  $2\eta > (1/3)(\pi\lambda/l)^2 + \kappa_i$ , то в соответствии с полученным решением должно быть бесконечно много частиц, скорость которых равна нулю; в этом случае частицы замедляются так быстро, что они не могут достаточно интенсивно диффундировать из пластины. Фактически, по различным причинам, этого никогда не случается: прежде всего условия, при которых выведено уравнение (12.1.28), не выполнены в предельном случае исчезающего  $v$ ; кроме того,  $\eta$  обычно достаточно мало, так что данное условие никогда не реализуется.

**Деление, диффузия и замедление.** Возвратимся к пластине из делящегося материала. Если плотность распределения частиц, обладающих скоростью, достаточно низкой для того, чтобы они могли вызвать деление, равна  $\rho(x, t)$ , то в соответствии с определением  $R$  в одну секунду в единице объема в результате деления возникает  $R\rho(x, t)$  нейтронов. Эти нейтроны должны быть замедлены до того, как они смогут вызвать дальнейшее деление, и при этом замедлении некоторые из них диффундируют, поглощаются или уходят за пределы пластины. Таким образом, под  $\rho$  мы будем понимать плотность распределения только тех нейтронов, которые способны вызвать деление. Обычно сюда включаются только медленные нейтроны, т. е. нейтроны, скорость которых меньше, чем некоторая предельная скорость  $v_p$ . (Фактический критерий не так резок, но в первом приближении мы предположим, что все нейтроны, скорость которых меньше чем  $v_p$ , могут произвести деление, а нейтроны с большей скоростью — не могут и в  $\rho$  не включены.) Из проведенного выше рассмотрения процесса замедления мы заключаем, что если плотность возникающих при делении быстрых нейтронов (со средней скоростью  $v_i$ ) есть  $R\rho(x_i, t_i)$ , то в одну секунду в точке  $x$  в распределение  $\rho$  включается количество нейтронов, равное

$$R \int_0^l \rho(x_i, t_i) \psi(x|x_i|\tau_i) dx_i = R \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{l} \int_0^l \rho(x_i, t_i) \sin\left(\frac{\pi n x_i}{l}\right) dx_i \right\} \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \left(\frac{v_p}{v_i}\right)^{[(\pi n \lambda/l)^2 + 3\kappa_i](1/3\eta)},$$

т. е. столько нейтронов получают скорость, меньшую чем  $v_p$ .

Средний промежуток времени, потребный для замедления нейтронов от скорости  $v_i$  до  $v_p$ , получается при использовании выражения  $\lambda/v$  для среднего времени свободного пробега — среднего промежутка времени между двумя столкновениями. Бесконечно малый промежуток времени  $dt$  связан с соответствующим числом столкновений  $d\tau$  соотношением

$$dt = (\lambda/v) d\tau = -(\lambda/\eta v^2) dv,$$

и среднее запаздывание во времени будет равно

$$t - t_i = \frac{\lambda}{\eta} \left[ \frac{1}{v_p} - \frac{1}{v_i} \right], \quad \eta = \frac{mQ_m}{MQ}$$

(пока  $\lambda$  совершенно не зависит от  $v$ ). Если  $v_i \gg v_p$ , то приближенное значение этого среднего запаздывания  $\lambda/\eta v_p$  значительно больше, чем среднее время между столкновениями  $\lambda/v_p$  замедленных нейтронов, но обычно оно меньше, чем среднее запаздывание вновь возникающих нейтронов. Если мы предположим, что среднее запаздывание (которое по крайней мере так же велико, как  $\lambda/\eta v_p$ ) есть  $1/\alpha$ , то приближенное выражение для числа нейтронов, входящих после их замедления в распределение  $\rho(x, t)$ , имеет вид



[см. (12.1.25)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha R_n \int_0^{\infty} e^{-au} du \frac{2}{l} \int_0^l \rho(x_i, t-u) \sin\left(\frac{\pi n x_i}{l}\right) dx_i \right\} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad (12.1.30)$$

где

$$R_n = R (v_p/v_i)^{(1/3\eta) [(\pi n \lambda/l)^2 + 3\chi_i]}$$

и

$$\alpha = \delta v_p/\lambda < \eta v_p/\lambda.$$

Эта величина  $R_n$  меньше  $R$ , потому что некоторые нейтроны были поглощены или диффундировали из пластины прежде, чем они успели настолько замедлиться, чтобы войти в распределение  $\rho(x, t)$ .

Если теперь вновь применить метод преобразования Лапласа, подставив в (12.1.25) вышеприведенное выражение на место предпоследнего члена и приняв  $q = \delta(x - x_0) e^{-pt}$ , то мы сможем, как и ранее, получить решение (12.1.25), положив

$$\rho = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) e^{-pt},$$

причем коэффициенты  $A_n$  определяются из соотношений

$$\left[ -p + \beta_n + \chi - \frac{\alpha R_n}{\alpha - p} \right] A_n = \frac{2}{l} \sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right),$$

отличающегося от ранее полученного уравнения только тем, что вместо  $R$  в нем фигурирует  $R_n$ . Следовательно, мы можем целиком использовать метод, приведший к (12.1.26), заменив в окончательной формуле  $R$  на  $R_n$  ( $R_1$  в первом члене ряда,  $R_2$  во втором члене и т. д.).

Решение для нейтронов, мгновенно введенных при  $t=0$  в точке  $x_0$ , когда учитывается (приближенно) эффект замедления, определяется рядом (12.1.26) после подстановки  $R_n$  в  $n$ -й член (а также в  $\omega_n^+$  и  $\omega_n^-$ ) вместо  $R$ . Изучение поведения решения ведется так же, как и ранее. Цепная реакция может начаться только при  $R_1 > \chi + \beta_1$  или

$$v > (1/\zeta) \left[ \chi_p + \frac{1}{3} (\pi \lambda/l)^2 \right] (v_i/v_p)^{(1/3\eta) [(\pi n \lambda/l)^2 + 3\chi_i]},$$

причем  $R = v \zeta v_p/\lambda$ ,  $a^2 = (1/3) v_p \lambda$  и  $\chi = \chi v_p/\lambda$ . При этом мы допускаем, что  $\chi$  может быть различным для медленных ( $v < v_p$ ) и быстрых ( $v > v_p$ ) нейтронов. Таким образом, нейтроны, полученные в результате деления, могут потеряться двумя способами до того, как они получают возможность вызвать дальнейшее деление: некоторые нейтроны теряются вследствие поглощения или диффузии из пластины в процессе замедления (эти потери описываются множителем  $v_i/v_p$ , являющимся преобладающим множителем, если  $v_i \gg v_p$ ), другие теряются уже будучи замедленными, так как даже тогда, когда замедление достаточно для того, чтобы вызвать деление, только малая доля  $\zeta$  всех столкновений фактически приводит к делению. [Эти потери описываются множителем  $\chi_p/\zeta + (1/3 \zeta) (\pi \lambda/l)^2$  в нашем неравенстве.] Так как  $v_i$  обычно значительно больше, чем  $v_p$ , то  $\chi_i/\eta$  должно быть весьма малым и  $l \sqrt{\eta}$  должно быть несколько большим, чем  $\lambda$ ; в противном случае, чтобы цепная реакция могла начаться, потребовались бы чудовищно большие значения  $v$ . Поскольку  $\eta$  — часть энергии, теряющаяся при каждом столкновении, —

приблизительно пропорциональна отношению масс соударяющихся нейтрона и атома-мишени, материал пластины должен содержать в большом количестве легкие атомы, причем эти атомы не должны поглощать нейтроны ( $\kappa$  мало). Во всяком случае, чтобы цепная реакция могла начаться при осуществимых  $\nu$ , толщина пластины  $l$  должна быть значительно больше, чем средний свободный пробег  $\lambda$ .

**Общий случай, диффузионное приближение.** Мы можем теперь обобщить полученные результаты и рассчитать цепную реакцию в куске однородного материала любого размера и формы. Решим уравнение Гельмгольца при краевом условии, согласно которому  $\rho$  равно нулю на поверхности, отстоящей на расстоянии, равном  $0,71$  среднего свободного пробега нейтрона, от истинной границы материала (во внешнюю сторону). Найдем последовательность собственных значений  $k_n$  (соответствующих  $\lambda n/l$  для пластины), последовательность собственных функций  $\psi_n(\mathbf{r})$  [ $\sin(\pi n x/l)$  для пластины] и их нормирующие постоянные  $\Lambda_n$ . Для характеристики рассматриваемого процесса существенны следующие свойства материала (мы повторяем наши определения): средняя длина свободного пробега нейтронов  $\lambda$  (предполагаемая независимой от  $\nu$ ), средняя скорость  $v_i$  нейтронов, возникающих при делении, средняя скорость  $v_p$ , ниже которой нейтроны могут вызвать деление, относительная потеря скорости  $\eta$  при каждом столкновении в процессе замедления ( $\eta \simeq m/M$ ), доля столкновений  $\kappa$ , при которых нейтрон поглощается без деления ( $\kappa_i$  для быстрых нейтронов и  $\kappa_p$  для тех, у которых скорость меньше чем  $v_p$ ), среднее запаздывание  $1/\alpha = \lambda/v_p \delta$  ( $\delta < \eta$ ) появления остающихся в распределении замедленных нейтронов и, наконец, частота возникновения  $R$  нейтронов при делении, вызванном нейтроном, имеющим скорость, меньшую  $v_p$ . [Эта частота равна произведению  $v_p/\lambda$  на долю  $\zeta$  столкновений, вызывающих деление, и на среднее количество  $\nu$  нейтронов, полученных при каждом делении ( $R = \nu \zeta v_p/\lambda$ ).]

Плотность вызывающих деление нейтронов в точке  $\mathbf{r}$  в момент  $t > 0$ , образующихся при введении в точке  $\mathbf{r}_0$  при  $t=0$  одного медленного нейтрона, равна при этом

$$\rho_n(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | t) = \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r}) / \Lambda_n}{\sqrt{\left(\frac{1}{3} \lambda^2 k_n^2 + \kappa_p - \delta\right)^2 + 4\nu_n \zeta \delta}} \times \\ \times \left[ \left(\frac{\lambda}{v_p} \omega_n^+ - \delta\right) e^{-\omega_n^+ t} + \left(\delta - \frac{\lambda}{v_p} \omega_n^-\right) e^{-\omega_n^- t} \right], \quad (12.1.31)$$

причем учтены (приблизительно) эффекты диффузии, поглощения, деления, запаздывающего испускания и замедления. При этом

$$\left. \begin{array}{l} \omega_n^+ \\ \omega_n^- \end{array} \right\} = \frac{v_p}{2\lambda} \left[ \frac{1}{3} \lambda^2 k_n^2 + \kappa_p + \delta \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3} \lambda^2 k_n^2 + \kappa_p - \delta\right)^2 + 4\nu_n \zeta \delta} \right],$$

где  $\delta = \alpha \lambda / v_p$  есть отношение среднего времени между столкновениями к среднему запаздыванию нейтронов деления ( $\delta < \eta$ ) (см. выше) и

$$\nu_n = \nu (v_p/v_i)^{(1/\eta)} \left[ \frac{1}{3} \lambda^2 k_n^2 + \kappa_i \right]$$

есть среднее количество нейтронов, возникающих при делении, которые избегают поглощения или потери от диффузии из реактора и, замедлившись, присоединяются к распределению медленных нейтронов соответственно  $n$ -й парциальной волне.

Если второй показатель деления  $\omega_1^-$  для самой низкой формы волны  $\psi_1$  ( $k_1 < k_n$ ,  $n > 1$ ) окажется отрицательным, то функция распределения в конце концов достигнет значений, необходимых для развития цепной

реакции. Это будет иметь место при

$$v > (1/\xi) \left( \frac{1}{3} \lambda^2 k_1^2 + \kappa_p \right) (v_i/v_p)^{(1/\eta)} \left( \frac{1}{3} \lambda^2 k_1^2 + \kappa_i \right). \quad (12.1.32)$$

Если  $\kappa$  выбрано так, что  $\omega_1$  точно равно нулю, то установившаяся плотность  $\rho$  соответствует первой собственной функции  $\psi_1$ , так как все остальные слагаемые ряда (12.1.31) быстро затухают со временем. Поскольку  $k_1$  обратно пропорционально наименьшему диаметру реактора, то, для того чтобы неравенство (12.1.32) могло быть выполнено, размеры реактора должны быть значительно больше среднего свободного пробега  $\lambda$ .

**Нагревание шара.** Решение задач диффузии для конфигураций, отличных от пластины с параллельными гранями, осуществляется уже знакомым нам способом. Мы рассмотрим здесь только один случай — шар радиуса  $R$ . Рассмотрим, например, теплопроводящий шар, медленно вращающийся перед источником тепла (Земля и Солнце). В этом случае краевое условие состоит в задании потока энергии, поглощаемого поверхностью. Если ось вращения совпадает с осью  $z$  ( $z = r \cos \vartheta$ ), а излучение исходит из точки, находящейся на большом расстоянии в положительном направлении оси  $x$  ( $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$ ), то поток тепла через граничную поверхность будет равен  $I_0 \sin \vartheta \cos \varphi$ . Однако если оси координат жестко связаны с шаром, вращающимся вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ , то поток тепла через поверхность  $r = R$  равен  $I_0 \sin \vartheta \cos(\omega t - \varphi)$ . Распределение температуры внутри шара дается решением уравнения (12.1.1), при условии, что произведение  $\kappa$  на радиальную составляющую градиента решения при  $r = R$  равно заданному потоку тепла. Это решение есть действительная часть функции

$$\psi(r, \omega) = \frac{I_0}{\sqrt{i\kappa\rho C\omega}} \frac{j_1(\sqrt{i\omega} r/a)}{j_1'(\sqrt{i\omega} R/a)} \sin \vartheta e^{i(\varphi - \omega t)}, \quad (12.1.33)$$

где  $j_1$  — сферическая функция Бесселя,  $j_1'$  — ее производная и  $C$  — удельная теплоемкость материала ( $a^2 = \kappa/\rho C$ ). При этом, очевидно, предполагается, что тепло, поглощенное на нагреваемой стороне шара, вновь излучается другой стороной. Всякий избыток поглощения или отдачи тепла должен быть связан с наличием в решении неперiodического члена, о чем будет еще речь ниже.

Если  $\omega$  мало по сравнению с  $a^2/R^2 = \kappa/\rho CR^2$ , то при  $r \leq R$  аргумент  $j_1$  мал, а для таких значений аргумента  $j_1(z) \simeq (1/3)z$  и  $j_1'(z) \simeq 1/3$ . Следовательно, для  $\omega R^2 \ll a^2$

$$\operatorname{Re}[\psi(r, \omega)] \simeq (I_0/\kappa) r \sin \vartheta \cos(\varphi - \omega t) = (I_0/\kappa) [x \cos \omega t + y \sin \omega t].$$

При этом градиент температуры постоянен вдоль радиуса шара и направлен в сторону источника. С другой стороны, если угловая скорость  $\omega$  велика по сравнению с  $a^2/R^2$ , то  $j_1(z) \simeq -(1/z) \cos z \simeq -(1/2z) e^{-iz}$  для  $z = \sqrt{i\omega}(r/a)$ , и  $r$ , близкого к  $R$ , а  $j_1'(z) \simeq (i/2z) e^{-iz}$ . Следовательно, если  $\sqrt{\omega}R \gg a$  и  $R - r \ll R$ , то распределение температуры определяется как

$$\operatorname{Re}[\psi(r, \omega)] = \frac{I}{\sqrt{\kappa\rho C\omega}} e^{-\sqrt{\frac{1}{2}\omega}(R-r)/a} \cos \left[ \omega t - \sqrt{\frac{\rho C\omega}{2\kappa}}(R-r) - \varphi - \frac{1}{4}\pi \right].$$

Это выражение можно интерпретировать как волну, распространяющуюся с фазовой скоростью  $\sqrt{2\kappa\omega/\rho C}$  и с длиной волны  $\sqrt{8\pi^2\kappa/\rho C\omega}$ . Эта волна быстро затухает по мере удаления от поверхности: ее амплитуда уменьшается в  $e^{-2\pi}$  раз при смещении на каждую длину волны. Фронт волны вращается вместе с шаром, отставая от него по фазе на  $45^\circ$ .

Если, с другой стороны, весь шар облучается равномерно, т. е. поток энергии пропорционален разности между температурой окружающей среды и температурой поверхности шара, то можно воспользоваться сферически симметричным решением уравнения (12.1.1). Если краевое условие имеет вид  $\partial\psi/\partial r = h(e^{-i\omega t} - \psi)$  при  $r = R$ , то температура внутри шара равна действительной части функции

$$\psi(r, \omega) = \frac{R^2 h}{r} \frac{\sin(\sqrt{i\omega} r/a) / \sin(\sqrt{i\omega} R/a)}{(\sqrt{i\omega} R/a) \operatorname{ctg}(\sqrt{i\omega} R/a) - 1 + Rh} e^{-i\omega t}. \quad (12.1.34)$$

Если облучение начинается с момента  $t = 0$  так, что до этого момента шар имел нулевую температуру, а после этого момента обогреватель имеет температуру, равную единице, то последующая температура шара в точке  $r$  в момент  $t$  будет выражаться формулой

$$T = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r, \omega) \frac{d\omega}{\omega}, \quad t > 0.$$

Этот интеграл можно, как обычно, вычислить при помощи вычетов.

Наконец, если каким-нибудь образом сферическая поверхность  $r = r_0$  нагревается периодически, так что плотность поглощенной энергии равна  $\delta(r - r_0) e^{-i\omega t}$ , то соответствующая функция Грина

$$\varphi(r | r_0 | \omega) = \frac{ar_0}{xr} \frac{e^{-i\omega t / \sqrt{i\omega}}}{\sin(\sqrt{i\omega} R/a)} \begin{cases} \sin\left(\frac{\sqrt{i\omega}}{a} r\right) \sin\left[\frac{\sqrt{i\omega}}{a} (R - r_0)\right], & r < r_0, \\ \sin\left(\frac{\sqrt{i\omega}}{a} r_0\right) \sin\left[\frac{\sqrt{i\omega}}{a} (R - r)\right], & r > r_0, \end{cases} \quad (12.1.35)$$

может быть использована для вычисления распределения температуры при переменном внутреннем нагреве и нулевом граничном условии. Методами, которые мы считаем теперь уже известными, мы вычисляем нестационарную температуру, обусловленную мгновенным поглощением энергии  $\delta(r - r_0) \delta(t)$  поверхностью  $r = r_0$  при  $t = 0$ :

$$\varphi_\delta(r | r_0 | t) = \frac{2r_0 a^2}{xrR} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r_0}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n r}{a}\right) e^{-(\pi n a/R)^2 t}, \quad t > 0. \quad (12.1.36)$$

Тогда температура в точке  $r$  в момент  $t$ , вызванная поглощением энергии с плотностью  $P(r, t)u(t)$ , при нулевых начальных и граничных условиях равна

$$T(r, t) = \int_0^t d\tau \int_0^R P(r_0, \tau) \varphi_\delta(r | r_0 | t - \tau) dr_0.$$

Отсюда можно, например, получить распределение температуры внутри Земли при нагревании радиоактивными источниками, распределенными любым образом по радиусу и во времени.

## 12.2. Функции распределения для задач диффузии

Во многих случаях приближение, описываемое уравнением диффузии, бывает недостаточным; по этой причине мы постараемся проанализировать атомистические детали процесса диффузии глубже, чем это было возможно сделать в предыдущем параграфе. Для этого мы должны вернуться к