

Если, с другой стороны, весь шар облучается равномерно, т. е. поток энергии пропорционален разности между температурой окружающей среды и температурой поверхности шара, то можно воспользоваться сферически симметричным решением уравнения (12.1.1). Если краевое условие имеет вид $\partial\psi/\partial r = h(e^{-i\omega t} - \psi)$ при $r = R$, то температура внутри шара равна действительной части функции

$$\psi(r, \omega) = \frac{R^2 h}{r} \frac{\sin(\sqrt{i\omega} r/a) / \sin(\sqrt{i\omega} R/a)}{(\sqrt{i\omega} R/a) \operatorname{ctg}(\sqrt{i\omega} R/a) - 1 + Rh} e^{-i\omega t}. \quad (12.1.34)$$

Если облучение начинается с момента $t = 0$ так, что до этого момента шар имел нулевую температуру, а после этого момента обогреватель имеет температуру, равную единице, то последующая температура шара в точке r в момент t будет выражаться формулой

$$T = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r, \omega) \frac{d\omega}{\omega}, \quad t > 0.$$

Этот интеграл можно, как обычно, вычислить при помощи вычетов.

Наконец, если каким-нибудь образом сферическая поверхность $r = r_0$ нагревается периодически, так что плотность поглощенной энергии равна $\delta(r - r_0) e^{-i\omega t}$, то соответствующая функция Грина

$$\varphi(r | r_0 | \omega) = \frac{ar_0}{xr} \frac{e^{-i\omega t / \sqrt{i\omega}}}{\sin(\sqrt{i\omega} R/a)} \begin{cases} \sin\left(\frac{\sqrt{i\omega}}{a} r\right) \sin\left[\frac{\sqrt{i\omega}}{a} (R - r_0)\right], & r < r_0, \\ \sin\left(\frac{\sqrt{i\omega}}{a} r_0\right) \sin\left[\frac{\sqrt{i\omega}}{a} (R - r)\right], & r > r_0, \end{cases} \quad (12.1.35)$$

может быть использована для вычисления распределения температуры при переменном внутреннем нагреве и нулевом граничном условии. Методами, которые мы считаем теперь уже известными, мы вычисляем нестационарную температуру, обусловленную мгновенным поглощением энергии $\delta(r - r_0) \delta(t)$ поверхностью $r = r_0$ при $t = 0$:

$$\varphi_\delta(r | r_0 | t) = \frac{2r_0 a^2}{xrR} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r_0}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n r}{a}\right) e^{-(\pi n a/R)^2 t}, \quad t > 0. \quad (12.1.36)$$

Тогда температура в точке r в момент t , вызванная поглощением энергии с плотностью $P(r, t)u(t)$, при нулевых начальных и граничных условиях равна

$$T(r, t) = \int_0^t d\tau \int_0^R P(r_0, \tau) \varphi_\delta(r | r_0 | t - \tau) dr_0.$$

Отсюда можно, например, получить распределение температуры внутри Земли при нагревании радиоактивными источниками, распределенными любым образом по радиусу и во времени.

12.2. Функции распределения для задач диффузии

Во многих случаях приближение, описываемое уравнением диффузии, бывает недостаточным; по этой причине мы постараемся проанализировать атомистические детали процесса диффузии глубже, чем это было возможно сделать в предыдущем параграфе. Для этого мы должны вернуться к

рассмотрению функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, описывающей плотность частиц в элементе фазового пространства, соответствующем положению \mathbf{r} , импульсу \mathbf{p} и времени t , т. е. поля в шестимерном (не считая времени) фазовом пространстве. Общие свойства этой функции были рассмотрены в § 2.4. Мы исследуем сейчас некоторые методы, с успехом применяемые для вычисления функции f , и укажем решения нескольких типичных и практически интересных задач.

Сосредоточим внимание в первую очередь на одномерных задачах, соответствующих задаче о «пластине» из предыдущего параграфа. Многие важные примеры мало отличаются от такой схемы, причем, ограничиваясь

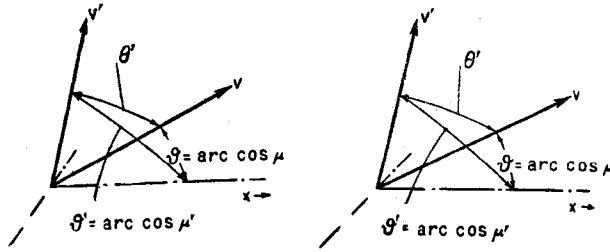


Рис. 12.1. Углы и векторы скоростей, входящие в уравнение переноса.

его, мы избегаем чрезмерного количества индексов и алгебраических трудностей, которые могли бы только заслонить суть дела. Мы не будем также учитывать обмен энергией при столкновениях и влияние на частицы электрических, магнитных и тому подобных сил. Таким образом, для начала мы можем считать, что все частицы имеют одинаковую (по абсолютной величине) скорость, а в результате столкновений меняется только направление их движения.

При всех этих ограничениях получающаяся функция распределения зависит только от одной координаты x , времени t и угла ϑ между направлением движения частицы и осью x и не зависит ни от каких других возможных переменных. Другими словами, величина $f(x, \mu, t) dx d\mu$ есть число частиц, находящихся в момент времени t внутри призматической пластинки с площадью поперечного сечения, равной единице, расположенной между плоскостями x и $x + dx$, и движущихся в направлении, образующем с осью x угол ϑ , косинус которого заключен между μ и $\mu + d\mu$. В соответствии с (2.4.16) и (2.4.35) и рис. 12.1 уравнение для f будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(x, \mu, t) + \mu v \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mu, t) = \\ = -n_t Q_t v f(x, \mu, t) + n_t v \int \int \sigma(\theta') f(x, \mu', t) d\Omega' + S(x, \mu, t), \end{aligned} \quad (12.2.1)$$

где n_t есть среднее число атомов-мишеней (или молекул, или ядер) в 1 см^3 , S — средняя плотность частиц, возникающих в одну секунду в 1 см^3 с направлениями движения, заключенными между μ и $\mu + d\mu$, v — средняя скорость частиц и $\mu = \cos \vartheta$. Величина σ описывает угловое распределение упруго рассеиваемых частиц, так что

$$Q_e = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

есть поперечное сечение упругого рассеяния на атомах-мишенях частиц, имеющих скорость v . Величина $Q_t = Q_e/v$ есть полное поперечное сечение,

включая возможное поперечное сечение поглощения, так что $\kappa \leq 1$ есть средняя доля оставшихся частиц, а $1 - \kappa$ — доля частиц, поглощенных при столкновениях. Коэффициент κ иногда называют *коэффициентом альбедо*, так как он определяет отражательную способность (называемую альбедо) слоя материала.

Мы можем теперь принять среднюю длину свободного пробега $1/n_i Q_i$ [см. уравнение (2.4.12)] за единицу длины, а среднее время свободного пробега $1/n_i Q_i v$ — за единицу времени и выразить длину и время в этих единицах. Положив $\xi = n_i Q_i x$ и $\tau = n_i Q_i v t$, получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(\xi, \mu, \tau) + \mu \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \mu, \tau) + f(\xi, \mu, \tau) = \kappa \int \int \alpha(\theta') f(\xi, \mu', \tau) d\Omega' + s(\xi, \mu, \tau), \quad (12.2.2)$$

где $s = S/n_i Q_i v$, а $\alpha(\theta') = \sigma(\theta')/Q_e$ — фактор углового распределения, нормированный к единице так, что

$$2\pi \int_0^\pi \alpha(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 1.$$

Определим теперь вид функции f , получающейся при различных предположениях относительно α и вида функций источника s для различных краевых условий.

Однородное пространственное распределение. Для начала предположим, что границы рассматриваемой области настолько удалены, что их влиянием можно пренебречь и что функция источника s не зависит от x (однородное пространственное распределение источников). Тогда f также не зависит от x . Если, кроме того, характер возникновения частиц изотропен, так что s не зависит от μ , то f не будет зависеть и от μ , и задача станет тривиальной. Уравнение переноса (12.2.2) принимает вид

$$\frac{df}{d\tau} + (1 - \kappa) f = s(\tau).$$

Его решением является

$$f(\tau) = e^{(\kappa-1)\tau} \left[f(0) + \int_0^\tau e^{(1-\kappa)y} s(y) dy \right], \quad (12.2.3)$$

где начало отсчета τ выбрано так, что $s(\tau) = 0$ при $\tau \leq 0$.

Характер решения существенно зависит от величины $1 - \kappa$, т. е. от доли частиц, поглощаемых при столкновениях. Если эта величина больше нуля, то f остается ограниченным при всех значениях τ (если только s не возрастает до бесконечности). До тех пор пока некоторые частицы поглощаются, будет существовать конечное значение f , достаточно большое для того, чтобы количество частиц, поглощаемых за единицу времени, $(1 - \kappa)f$, могло бы уравновесить s — количество частиц, вводимых за единицу времени. Если, с другой стороны, ни одна частица не поглощается (коэффициент альбедо $\kappa = 1$), то

$$f(\tau) = f(0) + \int_0^\tau s(y) dy,$$

и, поскольку s неотрицательно, f стремится к бесконечности. Частицы не поглощаются, и все вводимые частицы остаются в среде бесконечно долго. Если непрерывно вводятся все новые частицы, то плотность неограниченно возрастает.

Если s не изотропно по отношению к направлениям вводимых частиц, то следует принять во внимание угловую зависимость частиц, рассеянных при столкновении (зависимость α от ϑ). Наиболее естественный метод решения таких задач состоит в разложении функции распределения в ряд по сферическим гармоникам. Если, например, функция источника симметрична относительно некоторой оси, которую можно принять за ось x , то эта ось будет также осью симметрии для распределения f . Следовательно, мы можем положить

$$f(\mu, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\tau) P_n(\mu), \quad s(\mu, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\tau) P_n(\mu),$$

где $\mu = \cos \vartheta$ (см. рис. 12.1). В этих формулах коэффициенты $S_n(\tau)$ известны, а функции $F_n(\tau)$ подлежат определению. Функция рассеяния α также может быть разложена по сферическим гармоникам угла θ' , образованного векторами v' и v (см. рис. 12.1):

$$\begin{aligned} \alpha(\theta') &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n P_n(\cos \theta') = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n \sum_{m=0}^n \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta') P_n^m(\cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi')], \\ A_n &= 2\pi \int_{-1}^1 \alpha(\arccos \mu) P_n(\mu) d\mu. \end{aligned} \quad (12.2.4)$$

Чтобы удовлетворить нормировочному условию $2\pi \int \alpha d\mu = 1$, следует принять A_0 равным единице.

Подстановка всех этих рядов в уравнение (12.2.2) (если можно пренебречь членом с $\partial/\partial \xi$) приводит к последовательности уравнений

$$\begin{aligned} (d/d\tau)F_0 + (1 - \kappa)F_0 &= S_0(\tau), \\ (d/d\tau)F_n + (1 - \kappa A_n)F_n &= S_n(\tau), \quad n > 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения могут быть решены аналогично уравнению (12.2.3). Например, для случая, когда и f и s равны нулю при $\tau \leq 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} f(\mu, \tau) &= e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^y \sum_{n=0}^{\infty} e^{\kappa A_n(\tau-y)} S_n(y) P_n(\mu) dy = \\ &= e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^y s(\mu, y) dy + e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^y \sum_{n=0}^{\infty} [e^{\kappa A_n(\tau-y)} - 1] S_n(y) P_n(\mu) dy. \end{aligned} \quad (12.2.5)$$

Если κ мало по сравнению с единицей (т. е. если при столкновениях большинство частиц поглощается), то вторая форма решения является более удобной, ибо в этом случае второй член в ней мал и

$$f(\mu, \tau) \simeq e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^y s(\mu, y) dy + \kappa e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^y \sum_{n=0}^{\infty} (\tau - y) A_n S_n(y) P_n(\mu) dy, \quad A_0 = 1.$$

Тем самым в том случае, когда только немногие частицы рассеиваются упруго, функция распределения f в любой момент времени есть своего рода усредненная по величине и направлению функция источника s . Усреднение проведено по времени предшествующего свободного пробега (единичный интервал τ) и еще добавляется поправочный член, зависящий

от углового распределения упругого рассеяния (т. е. от A_n). Таким образом, среднее время свободного пробега играет роль времени релаксации для функции распределения.

Если коэффициент альбеда κ не очень мал, но функция углового распределения $\alpha(\theta')$ не сильно зависит от угла рассеяния θ' , то все A_n , за исключением первого, будут малы, и хорошим приближением для функции распределения служит выражение

$$f(\mu, \tau) \simeq e^{(\kappa-1)\tau} \int_0^\tau e^{(1-\kappa)y} S_0(y) dy + e^{-\tau} \int_0^\tau e^y [s(\mu, y) - S_0(y)] dy,$$

где $S_0(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s(\mu, \tau) d\mu$ есть среднее значение s по всем углам в момент времени τ . Время релаксации для составляющей, зависящей от угла, совпадает со средним временем свободного пробега. В этом случае составляющая, зависящая от угла, приходит в равновесие с распределением источника значительно быстрее, чем изотропная часть.

Если $s(\mu, \tau)$ имеет некоторую асимптотическую форму, которая, начиная с $\tau = T$, не зависит от τ , то функция распределения достигает установившегося состояния по прошествии времени, несколько более длительного, чем $T + (1-\kappa)^{-1}$. Это установившееся распределение может быть представлено в виде

$$f(\mu, \tau) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(T)}{1-\kappa A_n} P_n(\mu), \quad \tau - T - \frac{1}{1-\kappa} \gg 1,$$

$$f(\mu, \tau) \simeq s(\mu, T) + \kappa \sum_{n=0}^{\infty} A_n S_n(T) P_n(\mu), \quad \kappa \ll 1,$$

$$f(\mu, \tau) \simeq \frac{\kappa}{1-\kappa} S_0(T) + s(\mu, T), \quad A_n \ll 1, \quad n > 0.$$

Вторая формула показывает, что если большинство частиц при столкновениях поглощаются, то асимптотическая форма для f почти та же, что для распределения вводимых частиц s . С другой стороны, если поглощение мало ($1-\kappa \ll 1$), то третья формула показывает, что когда рассеяние почти изотропно, то и установившееся распределение почти изотропно. Заметим, что если поглощения вовсе нет ($\kappa = 1$), то не может быть установившегося состояния, так как, по мере того как вводятся частицы, количество их неограниченно возрастает.

Приближения для рассеяния вперед. В следующем параграфе [см. (12.3.60) и след.] будет показано, что при больших скоростях угловое распределение заряженных частиц, рассеянных атомами, приблизительно пропорционально $[1 + (1/2)(v/u)^2 \sin^2(\vartheta/2)]^{-2}$, где v есть скорость падающей частицы, ϑ — угол ее упругого рассеяния и u — постоянная, определяемая свойствами частицы и атома-мишени. Когда v много больше чем u , почти все рассеяние сосредоточено в направлении «вперед», т. е. в телесном угле $\vartheta < (1/2)\pi$. В таких случаях полезно сконцентрировать внимание на области, близкой к $\vartheta = 0$, и, следовательно, производить вычисления в плоскости, касательной к единичной сфере при $\vartheta = 0$. Другими словами, вместо интегрирования по ϑ' и φ' можно интегрировать по ρ' и φ' , где $\rho' = 2tg(\vartheta'/2)$. Ошибка такого представления будет велика в области $\rho' > 2$, но если боковое рассеяние и рассеяние назад незначительны, то общая ошибка будет незначительной. Критерием применимости

указанного приближения служит следующее условие: при $\rho > 2$ ($\vartheta > \pi/2$) значения f должны быть пренебрежимо малы по сравнению со значениями f при $\rho \ll 2$ (при ϑ , близких к нулю).

Когда это условие выполнено, можно ввести в касательной плоскости прямоугольные координаты $\beta = \rho \cos \varphi$ и $\eta = \rho \sin \varphi$ и разложить соответствующие функции по полиномам Эрмита от β и η . Так, например, очень хорошим приближением для фактора углового распределения рассеяния при больших скоростях может служить

$$\alpha(\vartheta) \simeq \frac{v^2}{\pi u^2} e^{-(v/u)^2 \rho^2} \simeq \frac{v^2}{\pi u^2} e^{-(x^2 + y^2)},$$

где $x = (2v/u) \operatorname{tg}(\vartheta/2) \cos \varphi$ и $y = (2v/u) \operatorname{tg}(\vartheta/2) \sin \varphi$. Элемент площади на касательной плоскости, соответствующий $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ на единичной сфере, приближенно равен $(u/v)^2 dx dy$, так что интеграл от произведения α на $(u/v)^2 dx dy$ по касательной плоскости будет равен единице.

Чтобы провести интегрирование в (12.2.2), выразим координаты ϑ , φ и ϑ' , φ' через прямоугольные координаты x , y и x' , y' ; тогда относительные координаты, соответствующие θ' , будут $x - x'$ и $y - y'$. Представим далее f и s через полиномы Эрмита

$$f = \sum_{m,n} e^{-(x^2+y^2)} F_{mn}(\tau, \xi) H_{2m}(x) H_{2n}(y),$$

$$s = \sum_{m,n} e^{-(x^2+y^2)} S_{mn}(\tau, \xi) H_{2m}(x) H_{2n}(y).$$

Мы использовали только четные полиномы, ибо и f и s предполагаются симметричными относительно начала (по той же причине $F_{mn} = F_{nm}$ и $S_{mn} = S_{nm}$).

Если теперь мы сможем выразить функцию $\alpha(\theta')$ под знаком интеграла через полиномы Эрмита от x' , то получим соотношения, связывающие коэффициенты F_{mn} с коэффициентами S_{mn} . Функция $\alpha(\theta')$, выраженная через координаты x' , y' начального и x , y конечного направления скорости частицы, имеет вид

$$\alpha(\theta') = (v^2/\pi u^2) e^{-(x-x')^2 - (y-y')^2}.$$

Необходимые соотношения вытекают из рассмотрения производящей функции полиномов Эрмита

$$e^{-x^2 + 2xx' - x'^2} = e^{-x^2} \sum_m \frac{(x')^m}{m!} H_m(x) = e^{-x^2} \sum_{m,s} \frac{1}{2^{m_s!} (m-2s)!} H_{m-2s}(x') H_m(x).$$

Подставим в интеграл это соотношение и аналогичное соотношение для y , y' . После интегрирования по x' , y' в вышеуказанной сумме останутся только члены с четными значениями m . Приравнявая коэффициенты при многочленах Эрмита с одинаковыми индексами в обеих частях равенства, мы получим в конце концов (приближенные) уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F_{mn} + \frac{\partial}{\partial \xi} F_{mn} + (1 - \kappa) F_{mn} \simeq \kappa \sum_{s,t} \frac{F_{m-s, n-t}}{2^{2s+2t} s! t!} + S_{mn}, \quad (12.2.6)$$

где суммирование производится по всем s , меньшим чем $m+1$, и по всем t , меньшим чем $n+1$, за исключением члена с $s = t = 0$, который перенесен в левую часть уравнения.

Мы предположили, что v достаточно велико по сравнению с u , так что $\mu = \cos \vartheta \simeq 1 - (1/2)(u/v)^2 (x^2 + y^2)$ может считаться приближенно равным

единице в той части плоскости x, y , где F заметно отличны от нуля. Таким образом, для распределений, при которых рассеяние происходит лишь на малые углы, расстояние внутри пластины ξ и время τ равнозначны друг другу [уравнение (12.2.6) симметрично относительно ξ и τ].

В качестве примера рассмотрим установившийся пучок частиц, падающих на грань $\xi = 0$ пластины, проникающих в нее и рассеивающихся при проникновении. В этом случае f зависит только от ξ , x и y и не зависит от τ . Чтобы не вводить сложных краевых условий, можно считать, что частицы вступают в распределение лишь после первого столкновения. Если в падающем пучке имеется I_0 частиц в секунду на единицу площади (в единицах квадрата среднего свободного пробега), движущихся в направлении ξ (по нормали к грани пластины), то интенсивность неотклоненных частиц на расстоянии ξ свободных пробегов от поверхности равна $I_0 e^{-\xi}$. Распределение частиц сразу же после первого рассеяния (в соответствии с нашей договоренностью это «возникающие» частицы) будет равно

$$s(\xi, x, y) = I_0 e^{-\xi} \alpha(\vartheta) = (v^2/\pi u^2) e^{-\xi - x^2 - y^2}$$

или

$$S_{mn}(\xi) = (v^2/\pi u^2) \delta_{m0} \delta_{n0} e^{-\xi}.$$

Выражение для F_{00} тогда имеет вид

$$F_{00} = \frac{v^2}{\pi u^2} e^{-(1-x)\xi} \int_0^\xi e^{-xy} dy.$$

Эта величина линейно возрастает от нуля при $\xi = 0$, проходит через максимум и затем убывает до нуля пропорционально экспоненте $e^{-(1-x)\xi}$, которая убывает медленно, если коэффициент захвата $1 - x$ мал.

Можно вычислить также и другие члены ряда для f . Приведем несколько следующих членов:

$$F_{01} = F_{10} = \frac{v^2}{\pi u^2} \frac{1}{4} x e^{-(1-x)\xi} \int_0^\xi dy_1 \int_0^{y_1} e^{-xy_2} dy_2,$$

$$F_{11} = \frac{v^2}{\pi u^2} e^{-(1-x)\xi} \int_0^\xi dy_1 \int_0^{y_1} \left[\frac{1}{16} x e^{-xy_2} + \frac{1}{8} x^2 \int_0^{y_2} e^{-xy_3} dy_3 \right] dy_2 = 2F_{02} = 2F_{20},$$

$$F_{21} = F_{12} = 3 \frac{v^2}{\pi u^2} e^{-(1-x)\xi} \times$$

$$\times \int_0^\xi dy_1 \int_0^{y_1} \left[\frac{x}{384} e^{-xy_2} + \int_0^{y_2} \left(\frac{3x^2}{128} e^{-xy_3} + \frac{x^3}{32} \int_0^{y_3} e^{-xy_4} dy_4 \right) dy_3 \right] dy_2 = 3F_{03} = 3F_{30}$$

и т. д.

Все F_{mn} с одинаковым значением $m + n$ пропорциональны друг другу (это соответствует требованию, чтобы f была функцией только от $x^2 + y^2$, а не от x^2 или y^2 в отдельности). Все эти F_{mn} , за исключением F_{00} , при малых ξ возрастают пропорционально ξ^2 , а при больших ξ пропорциональны $\xi^{m+n} e^{-(1-x)\xi}$.

Если поглощения нет ($x = 1$), то эти ряды расходятся, ибо каждый член неограниченно возрастает вместе с возрастанием ξ . В этом случае для каждой частицы после некоторого числа столкновений вероятность движения под большими углами ϑ станет большой, и первоначальное предположение, согласно которому большинство частиц движутся почти параллельно оси z (чем оправдывается рассматриваемое приближение), не выполняется. Если же, однако, имеется заметное поглощение ($x < 1$), то

ряды не расходятся, так как большинство частиц поглощаются ранее, чем они успевают в результате рассеяния заметно отклониться от направления оси ξ . (Сравнить с задачами 12.14—12.16.)

Тот же способ решения может быть применен и в случае нестационарного процесса, когда при $t=0$ в пластину вводятся частицы, первоначально двигавшиеся параллельно оси ξ в положительном направлении. Распределение расплывается и среднее отклонение от направления ξ неограниченно возрастает, если $\kappa=1$ (поглощения нет), но остается ограниченным, если $\kappa < 1$. Однако мы затратили уже достаточно времени на рассмотрение слишком схематизированных задач; теперь следует перейти к более общим функциям распределения.

Общие рассуждения, стационарные случаи. Стационарное уравнение для функции распределения в случае, когда f зависит только от одной пространственной координаты и когда внутри области нет источников, получается из (12.2.2) и имеет вид

$$\mu(\partial/\partial\xi) f(\xi, \mu, \varphi) + f(\xi, \mu, \varphi) = R(\xi, \mu, \varphi). \quad (12.2.7)$$

Расстояние ξ измеряется в единицах среднего свободного пробега $1/n_t Q_t$, $\vartheta = \arccos \mu$ есть угол между вектором скорости и осью x (т. е. осью ξ), а φ — угол между плоскостью v , x и плоскостью x , y . Функция

$$R(\xi, \mu, \varphi) = \kappa \int \int \alpha(\theta') f(\xi, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu'$$

есть число частиц, включающихся в распределение при (ξ, μ, φ) за среднее время свободного пробега вследствие столкновений, и может быть названа *восстанавливающей функцией столкновений*. Постоянная $\kappa = Q_s/Q_t$ есть коэффициент альbedo, а α — фактор углового распределения упруго рассеянных частиц, нормированный так, чтобы

$$2\pi \int_0^\pi \alpha(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 1.$$

Через θ' обозначен угол между направлениями скорости до (соответствующей ϑ' , φ') и после столкновения (соответствующей ϑ , φ):

$$\cos \theta' = \cos \vartheta' \cos \vartheta + \sin \vartheta' \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi').$$

Когда α выражен через сферические гармоники [аналогично (12.2.4)]:

$$\alpha(\theta') = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n P_n(\cos \theta'),$$

то для обеспечения нормировки α коэффициент A_0 должен быть равен единице. Для изотропного рассеяния все A_n равны нулю, за исключением $A_0 = 1$.

Интеграл от f , распространенный на все направления, $\rho(\xi) = \int \int f(\xi, \mu, \varphi) d\varphi d\mu$, дает плотность частиц на расстоянии ξ от границы. Средний поток частиц в направлении ξ в любой точке пропорционален

$$J(\xi) = \int \int \mu f(\xi, \mu, \varphi) d\varphi d\mu.$$

Интегрируя равенство (12.2.7) по μ и φ , мы получим [используя (12.2.4) и интегрируя сначала по μ , φ]

$$\begin{aligned} (d/d\xi) J(\xi) &= -\rho(\xi) + \kappa \int \int d\mu d\varphi \int \int \alpha(\theta') f(\xi, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' = \\ &= -(1 - \kappa A_0) \rho(\xi) = -(1 - \kappa) \rho(\xi), \end{aligned} \quad (12.2.8)$$

т. е. уравнение непрерывности для частиц. Если $1 - \kappa = 0$, то частицы не поглощаются, и поток J не зависит от ξ . Если частицы поглощаются ($\kappa < 1$), то (при отсутствии источников) поток J убывает с возрастанием ξ .

Другим интегральным инвариантом движения частиц является второй момент распределения

$$K(\xi) = \int \int \mu^2 f(\xi, \mu, \varphi) d\varphi d\mu.$$

Если средний поток J аналогичен дипольному моменту распределения, то K аналогичен квадрупольному моменту. Если все частицы движутся под прямыми углами к оси x , то K равно нулю; если все они движутся параллельно оси x (безразлично в положительном или отрицательном направлении), то K достигает своей максимальной величины для данного ρ .

Уравнение для K можно получить, умножая (12.2.7) на μ и интегрируя:

$$(d/d\xi)K(\xi) = -J(\xi) + \kappa \int \int \mu d\mu d\varphi \int \int \alpha(\theta') f(\xi, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi'.$$

Разложив $\alpha(\theta')$ в ряд по сферическим гармоникам [см. (12.2.4)] и интегрируя сначала по μ и φ , приводим интеграл к виду

$$\kappa A_1 \int \int \mu' f(\xi, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' = \kappa A_1 J(\xi),$$

так что уравнение для второго момента распределения примет форму

$$(d/d\xi)K(\xi) = -(1 - \kappa A_1)J(\xi). \quad (12.2.9)$$

Если нужно, то можно продолжить эти рассуждения и построить последовательность уравнений для высших моментов, причем каждый следующий момент будет выражен через предшествующий момент, коэффициент альbedo κ и коэффициент в разложении углового распределения $\alpha(\theta)$. Обычно, хотя и не всегда, коэффициенты A_n меньше единицы, так что ни один из высших моментов не оказывается независимым от ξ .

Можно представить себе метод решения, основанный на следующей процедуре. Разложим f по сферическим гармоникам:

$$f(\xi, \vartheta, \varphi) = \sum_{m,n} [F_{mn} \cos(m\varphi) + F_{mn}^0 \sin(m\varphi)] P_n^m(\cos \vartheta),$$

$$\rho(\xi) = 4\pi F_{00}, \quad J(\xi) = \frac{4}{3} \pi F_{01}, \quad K(\xi) = \frac{4}{3} \pi F_{00} + \frac{8}{15} \pi F_{02} \text{ и т. д.}$$

Подставив эти ряды в уравнение (12.2.7), используя разложение (12.2.4) и соотношение

$$\mu P_n^m(\mu) = \frac{n-m+1}{2n+1} P_{n+1}^m(\mu) + \frac{n+m}{2n+1} P_{n-1}^m(\mu),$$

мы в конце концов приходим к системе совместных уравнений для коэффициентов $F_{mn}(\xi)$

$$\frac{d}{d\xi} F_{m,n+1} + \frac{2n+3}{n+m+1} (1 - \kappa A_n) F_{mn} + \frac{2n+3}{2n-1} \frac{n-m}{n+m+1} \frac{d}{d\xi} F_{m,n-1} = 0 \quad (12.2.10)$$

и к аналогичной системе для коэффициентов F_{mn}^0 .

Можно пытаться найти f , вычисляя последовательно F_{mn} . К сожалению, однако, обычно бывает не легко выразить через F_{mn} краевые условия на граничной поверхности. Пусть, например, пластина полубесконечна и представляет собой среду, заполняющую все полупространство $\xi > 0$. Предположим, что на поверхность $\xi = 0$ падает поток частиц, движущихся в положительном ξ -направлении. Распределение f при $\xi = 0$ имеет следую-

щую сложную форму: для $\mu > 0$ оно описывается выражением $I_0 \delta(1 - \mu)$ (представляющим распределение падающих частиц), но при $\mu < 0$ оно не равно нулю и неизвестно (в него входят частицы, претерпевшие в среде одно или больше столкновений и выброшенные из нее). Фактически во многих задачах желательнее изучить именно поведение $f(0, \mu, \varphi)$ для $\mu < 0$, так как оно дает угловое распределение частиц, диффузно отраженных от поверхности среды. Тем не менее указанные выше решения полезны при описании предельного случая в области, находящейся на большом расстоянии от границ (см. также задачи 12.8—12.13).

Предполагая, что зависимость F_{mn} от ξ выражается показательными функциями $e^{-k\xi}$, мы сведем систему (12.2.10) к системе совместных алгебраических уравнений, из которых можно в принципе определить допустимые значения k и соответствующие значения F_{mn} .

Однако из рекуррентных формул для F_{mn} замкнутое выражение для k получить достаточно сложно, так что этот метод решения в дальнейшем не будет рассматриваться.

Заметим, что подстановка выражения $f = e^{-k\xi} g(\mu)$ в интегро-дифференциальное уравнение (12.2.7) приводит к некоторым возможным решениям в случае изотропного рассеяния ($\alpha = 1/4\pi$), так как в этом случае $R(\xi, \mu, \varphi)$ не зависит от μ и

$$(1 - \mu k) g(\mu) = G, \quad R(\xi, \mu, \varphi) = e^{-k\xi} G.$$

Подстановка $g = G/(1 - \mu k)$ в интеграл для R дает

$$G = \frac{\alpha G}{4\pi} \iint \frac{d\mu' d\varphi'}{1 - k\mu'}, \quad 1 = \frac{1}{2} \alpha \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{1 - k\mu'} = \frac{\alpha}{k} \operatorname{Ar th} k,$$

и для k получается уравнение

$$\frac{\operatorname{th}(k/\alpha)}{k/\alpha} = \alpha, \quad \alpha = \frac{k}{\operatorname{Ar th} k}. \quad (12.2.11)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (4.4.4), которое было изучено для всех комплексных значений k/α . На рисунках в гл. 4 можно увидеть общие свойства корней k и характер их зависимости от α . Так, например, при $\alpha = 1$ k равно нулю, или $\pm 4,493 i$, или $\pm 7,725 i$, или $\pm 10,904 i$ и т. д.; при $\alpha = 0,5$ k равно $\pm 0,9575$, или $\pm 2,138 i$, или $\pm 3,798 i$, или $\pm 5,406 i$, но при $\alpha = 0$ k равно единице. Следовательно, решением (12.2.7) для изотропного рассеяния при $\alpha = 0,5$ должно быть

$$f(\xi, \mu) = \frac{C_1 e^{-0,96\xi}}{1 - 0,96\mu} + \frac{C_2 e^{+0,96\xi}}{1 + 0,96\mu} + B_1 \frac{\cos(2,14\xi) + 2,14\mu \sin(2,14\xi)}{1 + (2,14\mu)^2} + \dots,$$

если только это выражение удовлетворяет краевым условиям при $\xi = 0$.

Для $\alpha = 1$ (отсутствие поглощения) возможно другое простое решение, даже если α зависит от θ . Подставив в уравнение (12.2.7) $f = G(\mu - k\xi)$, можно показать, что k должно быть равно $1 - A_1$. Выразив G через полный поток J (который не зависит от ξ , если $\alpha = 1$), мы получим

$$f = (3/4\pi) J [\mu - (1 - A_1) \xi]. \quad (12.2.12)$$

Это выражение также есть решение, которое не удовлетворяет обычным краевым условиям. Мы, однако, увидим на стр. 576, что оно пригодно как асимптотическая форма решения.

Интегральные соотношения между переменными. Можно, конечно, получить формальное решение уравнения (12.2.7), рассматривая R как известную

функцию от ξ , μ и φ и обращаясь с этим уравнением, как с неоднородным уравнением по ξ . В решение входит в качестве слагаемого решение однородного уравнения $I_0(\mu, \varphi) e^{-\xi/\mu}$. Эта часть при $\mu > 0$ представляет те падающие частицы, которые поступают в среду извне через левую грань, а при $\mu < 0$ — через правую грань. Так, например, для пластины, расположенной между плоскостями $\xi = 0$ и $\xi = a$, формальным решением уравнения (12.2.7) является

$$f(\xi, \mu, \varphi) = f(0, \mu, \varphi) e^{-\xi/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_0^{\xi} R(\eta, \mu, \varphi) e^{-(\xi-\eta)/\mu} d\eta,$$

$$f(\xi, -\mu, \varphi) = f(a, -\mu, \varphi) e^{(\xi-a)/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_{\xi}^a R(\eta, -\mu, \varphi) e^{(\xi-\eta)/\mu} d\eta, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (12.2.13)$$

Это решение пришлось, конечно, разбить на две части, соответствующие частицам с положительной и отрицательной ξ -компонентой скорости. Это необходимо потому, что мы можем задавать на поверхности только распределение входящих, но никак не выходящих частиц. Здесь, например, мы задаем $f(0, \mu, \varphi)$ и стремимся найти $f(0, -\mu, \varphi)$.

Пара выражений (12.2.13), однако, не дает решения, поскольку само R зависит от f . Эти соотношения дают интегральные уравнения для f , из которых можно получить более простое интегральное уравнение для средней плотности ρ . Для изотропного рассеяния ($\alpha = 1/4\pi$), например, R равно $\chi\rho/4\pi$, так что f можно определить из соотношений

$$f(\xi, \mu, \varphi) = \begin{cases} f(0, \mu, \varphi) e^{-\xi/\mu} + \frac{\chi}{4\pi\mu} \int_0^{\xi} \rho(\eta) e^{(\eta-\xi)/\mu} d\eta, & 0 < \mu \leq 1, \\ f(a, \mu, \varphi) e^{(a-\xi)/\mu} - \frac{\chi}{4\pi\mu} \int_{\xi}^a \rho(\eta) e^{(\eta-\xi)/\mu} d\eta, & -1 \leq \mu < 0, \end{cases}$$

которые подобны (2.4.19). Как упоминалось в § 2.4, первый член в верхнем выражении описывает остаток первоначального пучка, который проник под углом $\arcs \cos \mu$ через поверхность $\xi = 0$ и без столкновений прошел ξ/μ средних свободных пробегов. Второй интегральный член описывает привнос в функцию распределения тех частиц, которые имели свое последнее столкновение на некоторой глубине η [поскольку они движутся вправо ($\mu > 0$), η должно быть меньше чем ξ] и достигли глубины ξ без дальнейших столкновений.

Наконец, зная, что функция распределения f может быть вычислена (по крайней мере для изотропного рассеяния), если известна плотность, мы можем составить интегральное уравнение для ρ . Это было уже сделано в § 2.4 [см. (2.4.20)]. Чтобы получить искомое уравнение нужно только проинтегрировать равенства (12.2.13) по μ . Поскольку $\rho(\xi) = \int \int f(\xi, \mu, \varphi) d\mu d\varphi$,

$$\rho(\xi) = \Phi(\xi) + \frac{1}{2} \chi \int_0^a \rho(\eta) E_1(|\eta - \xi|) d\eta, \quad (12.2.14)$$

где

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-xy} \frac{dy}{y^n}$$

и

$$\Phi(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\infty} \left[f\left(0, \frac{1}{y}, \varphi\right) e^{-\xi y} + f\left(a, -\frac{1}{y}, \varphi\right) e^{-(a-\xi)y} \right] dy.$$

Это уравнение Фредгольма второго рода (см. гл. 8); если $\Phi = 0$, оно однородно, а если $a \rightarrow \infty$, то получающееся уравнение (2.4.20) называется *уравнением Милна*. Мы рассмотрим это уравнение несколькими страницами ниже, а сейчас рассмотрим различные способы решения уравнения (12.2.7).

Большая часть задач диффузии [типа, описываемого уравнением (12.2.7)], которые мы будем рассматривать, сводится к двум общим случаям. Один случай — это случай очень толстой пластины ($a \rightarrow \infty$), в которую частицы или вводятся с дальней стороны или образуются в пластине на некотором расстоянии от поверхности $\xi = 0$, так что в области $\xi < 0$ нет других частиц, кроме вышедших из пластины. К этому случаю сводится диффузия света, возникающего внутри звезды, достигающего ее поверхности и излучаемого вовне; в эту схему укладывается также задача о нейтронах, проникающих сквозь защитный слой; эти нейтроны приходят с внутренней стороны слоя, причем некоторые из них достигают внешней поверхности и выходят через нее наружу. Фактически к этой схеме приближенно сводится любая задача о материале со свободной поверхностью, содержащем диффундирующие частицы, если только поверхность материала близка к плоскости и плотность частиц зависит главным образом от глубины под поверхностью (по крайней мере на участке, сравнимом с длиной нескольких средних свободных пробегов) и если на эту поверхность извне не падают никакие частицы. Такие задачи могут быть названы *задачами о диффузной эмиссии*.

В этом случае мы принимаем $a \rightarrow \infty$, и, поскольку частиц, падающих на поверхность $\xi = 0$, нет, функция $f(0, \mu, \varphi)$ ($\mu > 0$) в (12.2.13) равна нулю. Весь процесс симметричен относительно оси ξ , так что f и R не зависят от φ . В этих задачах нас обычно мало интересует поглощение частиц внутри материала; главным образом мы желаем выяснить угловое распределение частиц, покидающих поверхность $\xi = 0$. Поэтому мы полагаем $\kappa = 1$ и выражение (12.2.13) принимает вид

$$f(\xi, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^{\xi} R(\eta, \mu) e^{-(\xi-\eta)/\mu} d\eta, & 0 < \mu \leq 1, \\ -\frac{1}{\mu} \int_{\xi}^{\infty} R(\eta, \mu) e^{-(\xi-\eta)/\mu} d\eta, & 0 > \mu \geq -1. \end{cases} \quad (12.2.15)$$

Если рассеяние изотропно [$R(\eta, \mu) = \rho(\eta)/4\pi$], то функция распределения f просто связана с плотностью $\rho(\xi)$, и интегральное уравнение для ρ превращается в стандартное уравнение Милна

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \rho(\eta) E_1(|\xi - \eta|) d\eta. \quad (12.2.16)$$

Краевое условие для f имеет вид $f(0, \mu) = 0$ при $0 < \mu \leq 1$. Подлежит вычислению величина $f(0, \mu)$ при $0 > \mu \geq -1$, дающая угловое распределение излучения во внешней области.

Другой случай, представляющий интерес, — это случай достаточно толстой или достаточно сильно поглощающей пластины, когда можно пренебречь частицами, выходящими с другой стороны (или теми, которые воз-

никают в глубине пластины) и можно ограничиться рассмотрением поведения частиц, падающих на поверхность $\xi = 0$. Рассмотрим однородный пучок, падающий на поверхность $\xi = 0$ по направлению, определяемому углами φ_0 , $\arcs \cos \mu_0$, так что

$$f(0, \mu, \varphi) = I_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad 0 < \mu \leq 1.$$

Требуется найти угловое распределение $f(0, \mu, \varphi)$ ($0 > \mu \geq -1$) частиц, диффузно отраженных от пластины. Такие задачи могут быть названы *задачами о диффузном отражении*.

В этом случае, поскольку падающий пучок зависит от φ , диффузно отраженное излучение, вообще говоря, зависит от φ и от μ . Но при изотропном рассеянии частица после первого столкновения «забывает» первоначальное направление своего движения. Таким образом, функцию распределения можно расчленить на еще не отклоненную часть падающего пучка $I_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{-\xi/\mu_0}$ и не зависящий от φ остаток распределения $f_d(\xi, \mu)$, учитывающий частицы, претерпевшие хотя бы одно столкновение. В этом случае формула (12.2.13) для f_d принимает вид

$$f_d(\xi, \mu) = \begin{cases} \frac{x}{4\pi\mu} \int_0^{\xi} \rho(\eta) e^{(\eta-\xi)/\mu} d\eta, & 0 < \mu \leq 1, \\ \frac{-x}{4\pi\mu} \int_{\xi}^{\infty} \rho(\eta) e^{(\eta-\xi)/\mu} d\eta, & 0 > \mu \geq -1, \end{cases} \quad (12.2.17)$$

причем зависимость от φ в функции f сохраняется лишь в части, соответствующей падающим частицам, не претерпевшим еще ни одного столкновения.

Найденное угловое распределение диффузно отраженных частиц дает возможность получить еще одно интегральное соотношение, которое окажется полезным в дальнейшем. Предположим, что диффузно отраженное распределение для пучка, падающего под углом $\arcs \cos \mu_0$ к оси ξ , имеет вид $(I_0/\mu) S(\mu, \mu_0) = f(0, -\mu)$. Функция $S(\mu, \mu_0)$ есть ξ -компонента интенсивности отраженного под углом $\arcs \cos(-\mu)$ пучка при единичной интенсивности направленного под углом $\arcs \cos \mu_0$ падающего пучка; она определена только для $\mu, \mu_0 \geq 0$. Если мы имеем дело с изотропным рассеянием, то S не зависит от $\varphi - \varphi_0$, иначе мы должны были бы писать $S(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0)$. Нетрудно показать, что $S(\mu, \mu_0) = S(\mu_0, \mu)$.

Функция $S(\mu, \mu_0)$, очевидно, дает все, что нужно для решения задачи о диффузном отражении. Выведем интегральное соотношение, содержащее S . Для этого заметим, что на глубине ξ под поверхностью частицы, движущиеся вглубь пластины, можно рассматривать как «падающие» на плоскость $\xi = \text{const}$, проникающие сквозь нее и вновь диффузно отражаемые обратно. На глубине ξ такими частицами оказываются, во-первых, те из падающих частиц, которые еще ни разу не испытали соударения, $I_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{-\xi/\mu_0}$, и, во-вторых, частицы, входящие в остаток распределения, $f_d(\xi, \mu)$, при $\mu > 0$. Для каждого направления движения рассматриваемых частиц мы получаем распределение $S(\mu, \mu_0)/\mu$ рассеянных частиц, возвращающихся к $\xi = 0$ из части пластины справа от плоскости $\xi = \text{const}$. Поэтому для изотропного рассеяния мы можем вычислить распределение частиц, движущихся наружу, через функцию рассеяния S и функцию распределения частиц, движущихся вглубь пластины,

$$f(\xi, -\mu) = \frac{1}{\mu} I_0 e^{-\xi/\mu_0} S(\mu, \mu_0) + \frac{2\pi}{\mu} \int_0^1 S(\mu, \mu') f_d(\xi, \mu') d\mu'. \quad (12.2.18)$$

Это интегральное соотношение окажется весьма полезным в дальнейшем.

Подобно этому, для случая диффузной эмиссии единственное обстоятельство, вызывающее различие между величиной $f(\xi, -\mu)$ и внешним излучением $f(0, -\mu)$, состоит в том, что влево от плоскости ξ имеется участок, где возникают частицы, движущиеся внутрь пластины. Они отражаются обратно в соответствии с функцией S :

$$f(\xi, -\mu) = f(0, -\mu) + \frac{2\pi}{\mu} \int_0^1 S(\mu, \mu') f(\xi, \mu') d\mu'. \quad (12.2.19)$$

Это замечание также окажется полезным.

Расчет диффузного рассеяния. Функция $S(\mu, \mu_0)$, определяющая ξ -компоненту интенсивности диффузно отраженного под углом $\arcs \cos(-\mu)$ излучения, вызванного падающим под углом $\arcs \cos \mu_0$ единичным пучком, представляет собой своего рода функцию Грина для функции распределения. Через эту функцию могут быть выражены решения задачи о диффузной эмиссии и диффузном отражении. Однако для получения окончательного результата приходится преодолеть немало трудностей, заключающихся в уже написанных уравнениях.

Прежде всего продифференцируем (12.2.18) по ξ и положим $\xi = 0$:

$$\mu f'(0, -\mu) = -\frac{1}{\mu_0} I_0 S(\mu, \mu_0) + 2\pi \int_0^1 S(\mu, \mu') f_d(0, \mu') d\mu',$$

где $f'(\xi, \mu) = \partial f(\xi, \mu) / \partial \xi$. Теперь можно вновь использовать уравнение (12.2.7) (для изотропного рассеяния):

$$\mu f'_d(0, \mu) = -f_d(0, \mu) + R(0), \quad \mu f'(0, -\mu) = f(0, \mu) - R(0).$$

Но величина $R(0)$ есть общее количество всех частиц, рассеянных во всех направлениях атомами-мишенями, находящимися вблизи поверхности $\xi = 0$. Тем самым количество падающих и диффундирующих частиц, рассеянных при $\xi = 0$, будет равно

$$R(0) = \frac{\pi}{4\pi} I_0 \left[1 + 2\pi \int_0^1 S(\mu'', \mu_0) \frac{d\mu''}{\mu''} \right] = \frac{\pi \rho(0)}{4\pi}.$$

Используем также тот факт, что $f(0, -\mu) = (I_0/\mu) S(\mu, \mu_0)$ и $f_d(0, \mu) = 0$ ($\mu > 0$), и соотношение симметрии $S(\mu', \mu_0) = S(\mu_0, \mu')$. Тогда из уравнения для $\mu f'(0, -\mu)$ мы получим для функции рассеяния S уравнение простого вида

$$\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0} \right) S(\mu, \mu_0) = \frac{\pi}{4\pi} \left[1 + 2\pi \int_0^1 S(\mu'', \mu_0) \frac{d\mu''}{\mu''} \right] \left[1 + 2\pi \int_0^1 S(\mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \right]$$

или

$$S(\mu, \mu_0) = \frac{\pi}{4\pi} \frac{\mu \mu_0}{\mu + \mu_0} H(\mu_0) H(\mu), \quad (12.2.20)$$

где

$$H(\mu) = 1 + 2\pi \int_0^1 S(\mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'}.$$

Функция H есть стандартное угловое распределение, через которое можно выразить функцию рассеяния S . Для определения H мы с по-

мощью (12.2.20) составим для нее интегральное уравнение

$$H(\mu) = 1 + \frac{1}{2} \kappa \mu H(\mu) \int_0^1 \frac{H(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu'. \quad (12.2.21)$$

Нетрудно показать, что $H(\mu)$ нормирована так, что

$$\int_0^1 H(\mu) d\mu = \frac{2}{\kappa} (1 - \sqrt{1 - \kappa}), \quad (12.2.22)$$

и что функция H удовлетворяет также интегральному уравнению

$$\frac{1}{H(\mu)} = \sqrt{1 - \kappa} + \frac{1}{2} \kappa \int_0^1 H(\mu') \frac{\mu' d\mu'}{\mu + \mu'}. \quad (12.2.23)$$

Для последнего уравнения можно получить достаточно точное решение методом последовательных приближений. Результаты можно проверить, используя (12.2.22). Несколько значений H для различных значений κ и μ приведены в следующей таблице. В дополнение к таблице заметим, что $H(\mu) = 1$ при $\kappa = 0$ и $H(0) = 1$.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ $H(\mu)$

$\mu =$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\kappa = 0,2$	1,0389	1,0555	1,0659	1,0732	1,0786
$\kappa = 0,4$	1,0858	1,1252	1,1509	1,1694	1,1834
$\kappa = 0,6$	1,1452	1,2186	1,2689	1,3063	1,3354
$\kappa = 0,8$	1,2286	1,3611	1,4590	1,5358	1,5982
$\kappa = 1,0$	1,4503	1,8293	2,1941	2,5527	2,9078

С помощью функции $H(\mu)$ можно найти угловое распределение частиц на поверхности $\xi = 0$ для падающего пучка, направленного под углом $\arccos \mu_0$ к оси ξ ,

$$f(0, \mu) = \begin{cases} I_0 \partial(\mu - \mu_0) \partial(\varphi - \varphi_0), & 0 < \mu \leq 1, \\ (I_0/4\pi) [\kappa \mu_0 / (\mu_0 - \mu)] H(\mu_0) H(-\mu), & 0 > \mu \geq -1. \end{cases} \quad (12.2.24)$$

Заметим, что влияние коэффициента альbedo κ сказывается на величине полного отражения и непосредственно и косвенно через изменение углового распределения диффузного отражения; чем ближе κ к нулю, тем равномернее распределение.

Решение для более общего распределения падающих частиц можно получить, интегрируя приведенное выражение по μ_0 . Если это распределение не аксиально-симметрично, так что количество частиц (все они имеют одинаковую по величине скорость), косинус угла падения которых лежит между μ_0 и $\mu_0 + d\mu_0$, равно $2\pi f_0(\mu_0) d\mu_0$, то угловое распределение на поверхности $\xi = 0$ будет иметь вид

$$f(0, \mu) = \begin{cases} f_0(\mu), & 0 < \mu \leq 1, \\ \frac{1}{2} \kappa H(-\mu) \int_0^1 \frac{\mu_0 f_0(\mu_0) H(\mu_0)}{\mu_0 - \mu} d\mu_0, & 0 > \mu \geq -1. \end{cases} \quad (12.2.25)$$

После того как угловое распределение при $\xi = 0$ получено, функцию распределения при $\xi > 0$ можно найти, непосредственно решая уравнение (12.2.7). Например, функцию f можно разложить по сферическим гармоникам, как указано в (12.2.10). Зависимость коэффициентов от ξ можно легко найти, поскольку известны их значения при $\xi = 0$. Кроме этого, можно, как это будет показано ниже, произвести преобразование Лапласа функции распределения.

Расчет диффузной эмиссии. Если поглощения нет ($\kappa = 1$) и если нет частиц, падающих на поверхность $\xi = 0$, то частицы из полубесконечной пластины постепенно диффундируют вовне через поверхность $\xi = 0$. Так как при $\kappa = 1$ полный поток J всюду одинаков [см. (12.2.8)], то естественно предположить, что он всюду отрицателен, поскольку поток, выходящий через поверхность $\xi = 0$, отрицателен. Соотношение между угловым распределением испускаемых частиц $f(0, -\mu)$ и функцией рассеяния $S(\mu, \mu_0)$ определяется формулой (12.2.19); из этого соотношения можно определить $f(0, -\mu)$ через функцию H .

Как и ранее, продифференцируем (12.2.19) и положим $\xi = 0$:

$$\mu f'(0, -\mu) = 2\pi \int_0^1 S(\mu, \mu') f'(0, \mu') d\mu',$$

но $\mu' f'(0, \mu') = R(0)$ и $\mu f'(0, -\mu) = f(0, -\mu) - R(0)$, причем для изотропного рассеяния при отсутствии поглощения $R(\xi) = \rho(\xi)/4\pi$. Следовательно,

$$f(0, -\mu) = \frac{1}{4\pi} \rho(0) \left[1 + 2\pi \int_0^1 S(\mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \right] = \frac{1}{4\pi} \rho(0) H(\mu), \quad (12.2.26)$$

и мы получили распределение испускаемых частиц, выраженное через ту же функцию $H(\mu)$, что и в случае диффузного отражения.

При отсутствии поглощения асимптотическая зависимость f от ξ , μ и полный поток описываются формулой (12.2.12). Если J отрицателен и рассеяние изотропно, можно утверждать, что

$$f(\xi, \mu) = -\frac{3}{4\pi} (\xi - \mu) J + f_1(\xi, \mu),$$

где $f_1 \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Можно также получить соотношение между f_1 и функцией рассеяния $S(\mu, \mu')$. Поскольку $(3/4\pi)(\mu - \xi)J$ есть точное решение уравнения (12.2.7), рассеяние поправочного члена f_1 должно давать в точности f_1 ; другими словами,

$$f(\xi, -\mu) = -\frac{3}{4\pi} (\xi - \mu) J + \frac{2\pi}{\mu} \int_0^1 S(\mu, \mu') f_1(\xi, \mu') d\mu', \quad 0 < \mu \leq 1.$$

С другой стороны, так как $f(0, \mu') = 0$ для $\mu > 0$, то мы должны иметь $f_1(0, \mu') = (3/4\pi)\mu'$. В конце концов получим

$$f(0, -\mu) = -\frac{3}{4\pi} J \left[\mu + \frac{2\pi}{\mu} \int_0^1 S(\mu, \mu') \mu' d\mu' \right]. \quad (12.2.27)$$

Эта формула представляет распределение излучения через J и функцию рассеяния S .

Умножая (12.2.26) на $2\pi\mu$ и интегрируя по μ от -1 до 0 ($f=0$ при $\mu > 0$), а также умножая (12.2.27) на 2π и опять интегрируя по μ , получим

$$-J = \frac{1}{4} \rho(0) \left[1 + 4\pi \int_0^1 d\mu \int_0^1 S(\mu, \mu') \frac{\mu'}{\mu} d\mu' \right],$$

$$\rho(0) = -\frac{3}{4} J \left[1 + 4\pi \int_0^1 d\mu \int_0^1 S(\mu, \mu') \frac{\mu'}{\mu} d\mu' \right].$$

Отсюда следует интересное соотношение между средним потоком и плотностью частиц на поверхности $\xi=0$ для консервативного случая ($\kappa=1$) и изотропного рассеяния:

$$\rho(0) = -\sqrt{3}J. \quad (12.2.28)$$

В этом случае диффузная эмиссия выражается в виде

$$f(0, -\mu) = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} J H(\mu), \quad (12.2.29)$$

где J — отрицательная величина.

Такой же метод может быть применен и в том случае, когда постоянная κ отлична от единицы. В этом случае [см. (12.2.11)] асимптотическое представление функции распределения имеет вид $Ge^{k\xi}/(1+\mu k)$, где k — положительный, действительный корень уравнения $k = \text{th}(k/\kappa)$. Так как никакие дополнительные частицы не вступают в среду через поверхность $\xi=0$ (фактически они только выходят через эту поверхность) и так как имеется поглощение ($\kappa < 1$), то и функция распределения $f(\xi, \mu)$ и плотность $\rho(\xi)$ должны экспоненциально возрастать с возрастанием ξ для того, чтобы, несмотря на поглощение, все еще оставалось достаточно частиц, уходящих через поверхность $\xi=0$. Поэтому мы полагаем

$$f(\xi, \mu) = \frac{Ge^{k\xi}}{1+\mu k} + f_1(\xi, \mu), \quad f_1 \underset{\xi \rightarrow \infty}{\simeq} 0.$$

Тогда

$$f(\xi, -\mu) = \frac{Ge^{k\xi}}{1-\mu k} + \frac{2\pi}{\mu} \int_0^1 S(\mu, \mu') f_1(\xi, \mu) d\mu$$

или, поскольку $f_1(0, \mu') = -G/(1+\mu'k)$,

$$f(0, -\mu) = G \left\{ \frac{1}{1-k\mu} - \frac{2\pi}{\mu} \int_0^1 \frac{S(\mu, \mu')}{1+k\mu'} d\mu' \right\} =$$

$$= G \left\{ \frac{1}{1-k\mu} - \frac{1}{2} \kappa H(\mu) \int_0^1 \frac{\mu' H(\mu') d\mu'}{(\mu+\mu')(1+k\mu')} \right\}.$$

После дальнейших преобразований мы приходим в конце концов к выводу, что для случая $\kappa < 1$ в отсутствии падающего на поверхность $\xi=0$ пучка диффузное излучение, испускаемое поверхностью $\xi=0$, равно

$$f(0, -\mu) = \frac{G}{H(1/k)} \frac{H(\mu)}{1-k\mu}. \quad (12.2.30)$$

При решении более сложных задач, как, например, задач о проникновении через пластину конечной толщины, или при изучении влияния изотропного рассеяния при диффузном отражении или эмиссии приходится включать в рассмотрение значительно большее число деталей. Однако и эти задачи можно решить методами, сходными с уже рассмотренными,

но выкладки окажутся более утомительными. С ними можно ознакомиться по книгам или статьям, посвященным этой теме.

Решение методом преобразования Лапласа. Другим способом можно прийти к решению задачи о диффузной эмиссии, применяя преобразование Лапласа. Эта возможность становится очевидной из анализа выражения (12.2.15), связывающего функцию распределения (для случая изотропного рассеяния и отсутствия поглощения и падающего пучка) с плотностью частиц $\rho(\xi)$, а также интегрального уравнения (12.2.16) для ρ . Ядро $E_1(|\xi - \eta|)$ интегрального уравнения для ρ [E_1 определено в (12.2.14)] есть функция от $|\xi - \eta|$; в § 8.4 мы видели, что подобные ядра особенно удобны для применения метода преобразования Лапласа или Фурье. Другие преимущества этого метода выяснятся в ходе решения.

Преобразования Лапласа функции распределения и плотности частиц определяются так:

$$F(p, \mu) = \int_0^{\infty} f(\xi, \mu) e^{-p\xi} d\xi, \quad \text{Re } p > 0, \quad (12.2.31)$$

$$P(p) = \int_0^{\infty} \rho(\xi) e^{-p\xi} d\xi = 2\pi \int_{-1}^1 F(p, \mu) d\mu.$$

Отметим также одно полезное обстоятельство: преобразование Лапласа для плотности связано с угловым распределением испускаемого излучения. Из формул (12.2.15), выражающих f через ρ (для изотропного рассеяния без поглощения $R = \rho/4\pi$), следует, что распределение испускаемого излучения имеет вид

$$f(0, -\mu) = \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^{\infty} \rho(\eta) e^{-\eta/\mu} d\eta = \frac{1}{4\pi\mu} P\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (12.2.32)$$

Это одна из дополнительных «прибылей», приносимых методом преобразования Лапласа; если мы ищем только угловое распределение испускаемого излучения, то нет необходимости производить обратное преобразование и находить ρ по P ; можно использовать само P . Это обстоятельство косвенно связано с тем, что, как мы заметили ранее, $f(0, -\mu)$ значительно легче вычислить, чем $f(\xi, \mu)$. Мы могли бы при желании остановиться на этом, ибо величину $f(0, -\mu)$ мы нашли еще раньше [см. (12.2.29)], и теперь могли бы, используя (12.2.32) при помощи обратного преобразования, получить $\rho(\xi)$, а отсюда и $f(\xi, \mu)$.

Однако этот метод приносит и другие «прибыли», и поэтому мы продолжим наше рассмотрение. Например, преобразование Лапласа уравнения переноса для данного случая

$$\mu f'(\xi, \mu) + f(\xi, \mu) = \rho(\xi)/4\pi$$

дает

$$F(p, \mu) = \frac{1}{1+p\mu} \left[\frac{1}{4\pi} P(p) + \mu f(0, \mu) \right]. \quad (12.2.33)$$

Мы получаем простое алгебраическое соотношение между преобразованиями Лапласа f и ρ и функции распределения на поверхности. Умножая на $2\pi d\mu$ и интегрируя по μ , мы наконец получаем уравнение для преобразования Лапласа плотности

$$P(p) \left[1 - \frac{1}{p} \text{Ar th } p \right] = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\mu f(0, \mu)}{1+p\mu} d\mu. \quad (12.2.34)$$

Теперь еще попробуем «поднять самого себя за волосы», используя метод Винера — Хопфа. Этот метод был уже рассмотрен в § 8.4 в связи с той же задачей. Чтобы не разрывать нити рассуждения, мы воспроизведем здесь основные результаты. В (12.2.34) входят три функции: $P(p)$, $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p$ и

$$j(p) = 2\pi \int_{-1}^0 \frac{\mu f(0, \mu)}{1 + p\mu} d\mu.$$

Функция $P(p)$ должна быть аналитической во всей области $\operatorname{Re} p > 0$, ибо ее обратное преобразование равно нулю при $\xi < 0$. Функция $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p$ оказывается аналитической в полосе $-1 < \operatorname{Re} p < 1$. Функция $j(p)$ аналитична во всей области $\operatorname{Re} p < 1$, ибо $\mu f(0, \mu)$ ограничена в области $0 > \mu \geq -1$ и равна нулю при $\mu > 0$. (Если бы f не было равно нулю при $\mu > 0$, то область интегрирования не могла бы быть сведена к интервалу $0 > \mu \geq -1$, интеграл имел бы полюсы в области $\operatorname{Re} p < 1$ и рассматриваемый метод был бы неприменим.) Но если нет падающего на поверхность $\xi = 0$ излучения, т. е. если $f(0, \mu)$ равно нулю при $\mu > 0$, то $j(p)$ аналитична во всей области $\operatorname{Re} p < 1$ и при $p \rightarrow \infty$ стремится к нулю как $1/p$.

Если теперь мы сможем представить $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p$ в виде отношения двух функций, одна из которых аналитична в области $\operatorname{Re} p > 0$, а другая в области $\operatorname{Re} p < 1$, то можно будет, умножив исходное выражение на некоторую функцию, получить равенство, одна часть которого аналитична в области $\operatorname{Re} p > 0$, а другая в области $\operatorname{Re} p < 1$. Они равны между собою в полосе $0 < \operatorname{Re} p < 1$ и при аналитическом продолжении оказываются равными всюду, а тем самым представляют функцию, аналитическую всюду (и потому равную постоянной).

Как в § 8.4, возьмем логарифм величины $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p$ и попытаемся представить его в виде разности двух функций, аналитических в соответствующих областях. Но мы не можем использовать непосредственно $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p$, так как это выражение обращается в нуль при $p = 0$ (как p^2) и логарифм при этом имеет особенность. Если мы возьмем $(1/p^2) [1 - (1/p) \operatorname{Arth} p]$, то логарифм будет бесконечно возрастать при $p \rightarrow \infty$, но если положим

$$\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{p} \operatorname{Arth} p\right) = \frac{\tau_+(p)}{\tau_-(p)},$$

то логарифмы обеих частей равенства будут аналитичны в полосе $1 > \operatorname{Re} p > -1$ и будут стремиться к нулю при $|p| \rightarrow \infty$. Чтобы найти функции τ_{\pm} , удовлетворяющие этому равенству и аналитические в нужных областях, мы воспользуемся интегральной формулой Коши (4.2.8), выбрав контур интегрирования вдоль границы полосы, внутри которой $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p$ аналитична:

$$\ln \left[\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{p} \operatorname{Arth} p\right) \right] = \ln \tau_+(p) - \ln \tau_-(p), \quad (12.2.35)$$

$$\ln \tau_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \ln \left[\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \left(1 - \frac{1}{s} \operatorname{Arth} s\right) \right] \frac{ds}{s-p}, \quad 1 > \beta > 0,$$

$$\ln \tau_- = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \ln \left[\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \left(1 - \frac{1}{s} \operatorname{Arth} s\right) \right] \frac{ds}{s-p}.$$

Первый интеграл (который дает τ_+) аналитичен при $\operatorname{Re} p < \beta$, а второй (который дает τ_-) аналитичен при $\operatorname{Re} p > -\beta$. Следовательно, преобра-

зовав (12.2.34) к виду

$$P(p) \frac{p^2}{(p+1)\tau_-(p)} = \frac{p-1}{\tau_+(p)} 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\mu f(0, \mu)}{1+p\mu} d\mu,$$

мы видим, что левая часть равенства аналитична в области $\operatorname{Re} p > 0$, а правая часть аналитична в области $\operatorname{Re} p < \beta$. Более того, поскольку при большом p , τ_+ стремится к постоянной, деленной на p , величина справа (а следовательно, и величина слева) при $p \rightarrow \infty$ стремится к постоянной.

Так как обе части при аналитическом продолжении аналитичны всюду и ограничены на бесконечности, то они всюду равны постоянной C . Поэтому

$$P(p) = (C/p^2)(p+1)\tau_-(p). \quad (12.2.36)$$

Чтобы вычислить значение постоянной C , мы найдем предельное значение обеих частей при $p \rightarrow 0$. При $p=0$ функция $j(p)$ из (12.2.34) равна J , т. е. постоянному полному потоку частиц, движущихся в отрицательном направлении к поверхности $\xi=0$ и сквозь нее. Когда $p \rightarrow 0$, функция $1 - (1/p) \operatorname{Ar th} p \rightarrow -p^2/3$; следовательно (q_∞ — постоянная),

$$P(p) \simeq -3J \left[\frac{1}{p^2} + \frac{q_\infty}{p} + \dots \right], \quad p \rightarrow 0. \quad (12.2.37)$$

Заметим, что отсюда можно получить асимптотическую формулу для преобразования P , т. е. для плотности ρ : $\rho \simeq -3J(q_\infty + \xi + \dots)$ при $\xi \rightarrow \infty$, что соответствует асимптотической форме (12.2.12).

Возвращаясь к (12.2.35), при помощи некоторой деформации контура можно показать, что $\tau_- \rightarrow \sqrt{3}$ при $p \rightarrow 0$. В результате находим, что $C = -\sqrt{3}J$, где J — полный поток в направлении положительных ξ (и поэтому в нашей задаче величина отрицательная), и что

$$P(p) = -\sqrt{3}J \frac{p+1}{p^2} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \ln \left[\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \left(1 - \frac{1}{s} \operatorname{Ar th} s\right) \right] \frac{ds}{s-p} \right\} \quad (12.2.38)$$

(для $1 > \beta > 0$) с асимптотическим поведением, указанным в (12.2.37). Появляющаяся здесь постоянную q_∞ можно вычислить, разлагая интеграл в (12.2.38) по степеням p ; при этом найдем

$$q_\infty = 0,7104461 \dots \quad (12.2.39)$$

Сопоставление формул (12.2.9), (12.2.32) и (12.2.37) показывает, что $K = 2\pi \int \mu^2 f d\mu = -J(q_\infty + \xi)$.

Сравнивая (12.2.38) с (12.2.32) и (12.2.29), мы видим, что

$$H(\mu) = (1+\mu) \exp \left\{ \frac{\mu}{2\pi i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \ln \left[\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \left(1 - \frac{1}{s} \operatorname{Ar th} s\right) \right] \frac{ds}{\mu s - 1} \right\}, \quad (12.2.40)$$

что дает возможность вычислить и диффузное отражение и диффузную эмиссию. Заметим, что эта формула пригодна только для $x=1$, в то время как прежнее выражение для H было пригодно при $0 < x < 1$. Угловое распределение частиц, испускаемых из поверхности, можно найти либо вычисляя интеграл в (12.2.40), либо решая интегральное уравнение (12.2.23).

Результат получится, конечно, один и тот же. После этого можно будет, если это окажется необходимым, вычислить плотность частиц как функцию от ξ и далее, используя (12.2.15), найти функцию распределения для любого значения ξ .

Вычисление плотности вариационным методом. Функция плотности

$$\rho(\xi) = 2\pi \int_{-1}^1 f(\xi, \mu) d\mu$$

может быть найдена из (12.2.38) с помощью обратного преобразования Лапласа по формуле

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} P(p) e^{p\xi} dp, \quad (12.2.41)$$

хотя соответствующие выкладки весьма утомительны. Результаты были воспроизведены на рис. 2.20, где было рассмотрено соотношение между точным решением и приближением, полученным из уравнения диффузии. Было отмечено, что в толще пластины на глубине, многим большей чем средний свободный пробег, плотность почти точно равна своему асимптотическому выражению

$$\rho(\xi) \simeq -3J(0,710446 + \xi + \dots), \quad \xi \gg 1 \quad (12.2.42)$$

[см. (2.4.31) и (2.4.34)]. Из (12.2.15) видно, что асимптотическое представление функции распределения имеет вид

$$f(\xi, \mu) \simeq -\frac{3}{4\pi} J(0,710446 + \xi - \mu + \dots), \quad \xi \gg 1. \quad (12.2.43)$$

В этой области f можно с большой точностью считать сферически симметричной функцией ($\xi \gg \mu$), так что диффузионное приближение (см. § 2.4) оказывается удовлетворительным. Однако вблизи поверхности ($\xi < 1$) это диффузионное приближение для точных вычислений уже недостаточно, хотя, как показано на фиг. 2.21, «приближение 2/3» в (2.4.31) довольно удовлетворительно.

Функция, определяющая плотность, может быть также найдена вариационным методом. Подлежащее решению интегральное уравнение имеет вид

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \rho(\eta) E_1(|\xi - \eta|) d\eta$$

[см. (12.2.16)]. Но из асимптотической формулы для ρ мы можем установить, что

$$\rho(\xi) = -3J[\xi + q(\xi)], \quad (12.2.44)$$

где

$$\begin{aligned} q(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\simeq} q_{\infty} &= -\frac{K(0)}{J} = -\frac{2\pi}{J} \int_{-1}^0 f(0, \mu) \mu^2 d\mu = \\ &= \frac{1}{2J} \int_0^{\infty} d\eta \int_{-1}^0 \rho(\eta) e^{\eta/\mu} d\mu = -\frac{1}{2J} \int_0^{\infty} \rho(\eta) E_3(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Последнее следует из (12.2.15) и определения E_n :

$$E_n(\eta) = \int_1^{\infty} e^{-\eta y} \frac{dy}{y^n}.$$

Выражая ρ через $q(\xi)$, мы наконец получим

$$q(\xi) \simeq q_\infty = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{4} + \int_0^\infty q(\eta) E_3(\eta) d\eta \right], \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (12.2.45)$$

С другой стороны, подставляя в обе части интегрального уравнения вместо ρ его выражение через q (и интегрируя вновь по частям в некоторых слагаемых), мы получаем интегральное уравнение для q

$$q(\xi) = \frac{1}{2} E_3(\xi) + \frac{1}{2} \int_0^\infty q(\eta) E_1(|\xi - \eta|) d\eta. \quad (12.2.46)$$

Чтобы получить вариационный принцип, положим

$$D = \frac{\int_0^\infty q^*(\xi) \left[q^*(\xi) - \frac{1}{2} \int_0^\infty q^*(\eta) E_1(|\xi - \eta|) d\eta \right] d\xi}{\left[\int_0^\infty \left[q^*(\eta) E_3(\eta) d\eta \right]^2 \right]}. \quad (12.2.47)$$

Можно показать (см. гл. 9), что минимальное значение D достигается при $q^*(\xi) = q(\xi)$ и что это минимальное значение равно [см. (12.2.45)]

$$D_{\min} = 1 / \left(\frac{4}{3} q_\infty - \frac{1}{2} \right).$$

Следовательно, выбрав в качестве q^* подходящую функцию (стремящуюся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$), зависящую от параметров, и варьируя эти параметры так, чтобы минимизировать D , мы получим одновременно и наилучшую форму для q и значение q_∞ . Это значение можно сравнить с точным значением из (12.2.39) и проверить, таким образом, степень совпадения.

Например, если в качестве q взять постоянную $q = \alpha$, то D окажется равным $9/4$ и, таким образом, $q_\infty = \alpha = 17/24 = 0,7083$, что отличается от точного значения меньше чем на 1%. С другой стороны, полагая

$$q^*(\xi) = q_\infty [1 - AE_2(\xi) + BE_3(\xi)], \quad (12.2.48)$$

мы получим для минимального значения $D = 2,235831$, причем $A = 0,3428949$ и $B = 0,3158704$. Получающееся при этом значение q_∞ будет равно $0,7104457$, что совпадает с точным значением до шестого десятичного знака, так что соответствующее по (12.2.44) выражение для ρ оказывается весьма близким к точному. При желании можно отсюда получить также $H(\mu)$ и $f(\xi, \mu)$.

Этими вычислениями мы заканчиваем рассмотрение классической задачи Милна о диффузии частиц (или света) через рассеивающую среду, когда рассеяние изотропно и когда частицы при каждом столкновении не теряют энергии. Это последнее ограничение оказывается самым существенным. В самом деле, мы многократно указывали, каким образом можно было бы распространить проведенные вычисления на случай анизотропного рассеяния и как можно было бы включить в рассмотрение аннигиляцию и возникновение частиц в среде. Мы могли бы провести вычисления и для других пространственных случаев, отличных от рассмотренного одномерного. Например, уравнение переноса для излучения, распространяющегося

от источника сферически симметрично по всем направлениям, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} f(r, \mu, \tau) + \mu \frac{\partial}{\partial r} f(r, \mu, \tau) + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} f(r, \mu, \tau) + f(r, \mu, \tau) = \\ = \kappa \int \int \alpha(\theta') f(r, \mu', \tau) d\Omega' + s(r, \mu, \tau), \quad (12.2.49) \end{aligned}$$

где угол между направлением движения и радиусом-вектором, соответствующим r , равен $\arccos \mu$. Сравнение с (12.2.2) показывает, что трехмерная формулировка задачи приводит к появлению в уравнении члена с $\partial f / \partial \mu$. Решение делается более затруднительным, но оно может быть проведено приближенно (если нужно, то вариационным методом).

Но если нужно учесть и тот факт, что при столкновениях частицы не только меняют направление своего движения, но и замедляются, то приходится вводить в задачу новое качество, существенно меняющее ее характер. Если атомы-мишени много тяжелее, чем диффундирующие частицы (в обычных задачах это имеет место для электронов и не имеет места для нейтронов), то эти частицы претерпевают много столкновений прежде, чем их скорость значительно уменьшается, другими словами, длина замедления значительно больше, чем длина свободного пробега. И пока мы имеем дело с областью, отстоящей от границы на расстоянии, меньшем длины замедления, можно пользоваться приведенными в этом разделе решениями, ибо частицы, находящиеся в наружном слое, не успевают, до того как они покинут среду, заметно изменить свою скорость. Для тяжелых атомов этот наружный слой достаточно толст, а иногда он охватывает всю среду; но для легких атомов этот слой тонк и при вычислении функции распределения глубоко под поверхностью приходится учитывать потери энергии.

Потери энергии при столкновениях. Влияние потерь энергии при столкновениях было изучено в § 2.4; мы рассмотрим сейчас лишь несколько примеров, чтобы показать как некоторые методы, о которых уже шла речь в предыдущих главах, дают возможность получить решения новых задач. Мы ограничимся случаем, когда столкновения упруги, т. е. потерянная частицами энергия превращается в кинетическую энергию атомов-мишеней, и когда рассеяние частиц атомом-мишенью (в системе координат, движущейся вместе с центром масс частицы и атома) изотропное.

В большинстве случаев имеется некоторая максимальная энергия частиц; это либо энергия частиц, падающих на материал, либо начальная энергия частиц, возникающих в материале. Обычно бывает удобно выражать кинетическую энергию частиц E (и, таким образом, их скорость) через эту начальную энергию E_0 . Наиболее удобным оказывается логарифмический параметр $u = \ln(E_0/E)$. Энергетический параметр u меняется при этом от нуля (максимум энергии $E = E_0$) до бесконечности (минимум энергии $E = 0$). Функция распределения f оказывается, таким образом, функцией положения, задаваемого вектором \mathbf{r} , кинетической энергии, задаваемой параметром u , направления скорости частицы, задаваемого единичным вектором \mathbf{a}_u , и времени. Величина u пропорциональна «возрастной» переменной, встречающейся в (2.4.54) и (12.1.28).

Функция рассеяния α есть функция угла между первичным направлением частицы \mathbf{a}'_u и ее конечным направлением \mathbf{a}_u . Так как частица теряет энергию, то начальная и конечная энергии различны, и так как атом-мишень после столкновения движется, то угловое распределение рассеянных частиц в координатах, неподвижных относительно большинства атомов, не будет равномерным, даже если рассеяние изотропно в системе центра масс. Более того, имеется определенная зависимость между углом рассеяния θ' и отношением начальной кинетической энергии E' к

конечной энергии частицы E . Если Θ есть угол рассеяния в системе центра масс и если отношение массы атома-мишени к массе частицы равно M , то зависимость между θ' , Θ и начальными и конечными значениями энергетического параметра u' и u имеет вид

$$\begin{aligned} (M+1)e^{-w/2}\cos\theta' &= (M\cos\Theta+1), \\ \cos\Theta &= 1 - [(M+1)^2/2M](1-e^{-w}), \\ \cos\theta' &= \frac{1}{2}(M-1)e^{w/2} - \frac{1}{2}(M+1)e^{-w/2}, \end{aligned} \quad (12.2.50)$$

где $w = u - u'$. Заметим еще, что наибольшая потеря энергии возможна при $\theta' = \pi$, когда $w_\pi = 2 \ln [(M+1)/(M-1)]$, за исключением случая $M=1$ (мишени имеют такую же массу, как и частицы), когда $w_\pi = \infty$ и $\theta'_{\max} = \pi/2$.

Интеграл R для полного числа частиц, рассеянных в заданную область фазового пространства, есть интеграл по u' и по элементарному углу $d\Omega'$. Но вследствие соотношения между углом и энергией в функцию рассеяния α в качестве множителя входит дельта-функция (для рассеяния, изотропного в системе центра масс), т. е.

$$\alpha(\theta', w) = \begin{cases} \frac{(M+1)^2}{8\pi M} e^{-w} \delta \left[\cos\theta' - \frac{1}{2}(M-1)e^{w/2} + \frac{1}{2}(M+1)e^{-w/2} \right], & w \leq w_\pi, \\ 0, & w > w_\pi. \end{cases}$$

При этом α нормирована так, что

$$\int du' \int \int \alpha(\theta', u - u') d\Omega' = \frac{(M+1)^2}{4M} \int_0^{w_\pi} e^{-w} dw = 1.$$

Средняя потеря энергии при каждом столкновении (в логарифмической шкале) и средний косинус угла отклонения будут равны

$$\begin{aligned} w_{\text{ср.}} &= [\ln(E_0/E)]_{\text{ср.}} = 1 - \frac{(M-1)^2}{2M} \ln \left(\frac{M+1}{M-1} \right), \\ (\cos\theta')_{\text{ср.}} &= \int du' \int \int \cos\theta' \alpha(\theta', u - u') d\Omega' = \frac{2}{3M}. \end{aligned} \quad (12.2.54)$$

Прежде чем написать вместо (12.2.1) новое уравнение переноса, сделаем для упрощения еще одну замену. Мы не можем более полагать $n_i Q_i x = \xi$, ибо число столкновений $n_i Q_i$ на единицу расстояния, проходящего частицей со скоростью v , меняется вместе с v , а v нельзя более считать постоянной. Можно, однако, добиться некоторого упрощения заменой зависимого переменного на

$$\psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) = n_i Q_i v f(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u),$$

где $\psi du d\Omega$ есть число столкновений за секунду в единице объема, испытанных частицами, находящимися в энергетическом интервале du , направление скорости которых заключено в телесном угле $d\Omega$. Обозначим еще через $\lambda(u) = 1/n_i Q_i$ длину среднего свободного пробега для частиц с энергией, соответствующей $u = \ln(v_0^2/v^2)$, а отношение поперечного сечения рассеяния без захвата Q_s к полному поперечному сечению Q_t обозначим через $\kappa(u)$ и будем называть коэффициентом альбеда для энергии, соответствующей u .

После всех этих замен уравнение переноса принимает вид

$$\frac{\lambda(u)}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) + \lambda(u) \mathbf{a}_u \cdot \text{grad} \psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) + \psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) = \\ = \int_0^u \kappa(u') du' \int \int \alpha(\theta', u - u') \psi(\mathbf{r}, u', \mathbf{a}'_u) d\Omega' + S(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u), \quad (12.2.52)$$

где S (как и прежде) означает количество частиц, возникающих за секунду в единице объема, энергия которых лежит в интервале; соответствующем значению u , а направление движения задается вектором \mathbf{a}_u .

Однородное пространственное распределение. Во многих случаях внутри среды, в которой происходит диффузия, где воздействие границ не сказывается (характер этого воздействия был только что подробно рассмотрен), ψ и S более или менее не зависят от \mathbf{r} . В этом случае можно отбросить усложняющий уравнение член с $\text{grad} \psi$ и, кроме того, исключить из рассмотрения направление движения частиц, проинтегрировав (12.2.52) по всем направлениям. Даже если ψ и зависит от \mathbf{r} и \mathbf{a}_u , но среда, в которой происходит диффузия, простирается настолько далеко, что за секунду теряется лишь пренебрежимо малая доля всех частиц, выходящих из среды, то можно проинтегрировать уравнение (12.2.52) по пространству и всем направлениям \mathbf{a}_u . В результате мы получим $\left(\eta = \int \dots \int \psi dV d\Omega \right)$

$$\frac{\lambda(u)}{v} \frac{\partial}{\partial t} \eta(u, t) + \eta(u, t) = q(u, t) + \int_0^u \kappa(u') a(u - u') \eta(u', t) du', \quad (12.2.53)$$

где ηdu есть среднее количество столкновений, испытанных за единицу времени частицами из энергетического интервала, заданного величиной du ; $q du$ — общее количество частиц из того же интервала, возникающих за секунду, и

$$a(u - u') = \begin{cases} \int \int \alpha(\theta', w) d\Omega' = \frac{(M+1)^2}{4M} e^{u'-u}, & u - u' \leq \omega_\pi, \\ 0, & u - u' > \omega_\pi, \end{cases} \quad (12.2.54)$$

есть соответствующая функция рассеяния.

Рассмотрим прежде всего установившееся состояние, когда q , а значит, и η не зависят от времени. Достаточно решить задачу для случая, когда в среду каждую секунду вводится единичное количество частиц одинаковой энергии E_0 , так что $q = \delta(u)$. Используя это решение, мы сможем справиться и с другими случаями. Опуская зависимость от времени, мы сводим уравнение (12.2.53) к простому интегральному уравнению Вольтерра, которое может быть превращено в дифференциальное уравнение, если только ω_π меньше чем $2 \ln[(M+1)/(M-1)]$.

Если, например, $M = 1$ (нейтроны в водороде), то $\omega_\pi \rightarrow \infty$, и дифференциальное уравнение для $\eta(u)$ имеет вид

$$\frac{d\eta}{du} = -[1 - \kappa(u)]\eta.$$

Решение, не учитывающее частиц, не испытавших ни одного столкновения после своего возникновения, имеет вид

$$\eta(u) = \eta(0) \exp \left\{ - \int_0^u [1 - \kappa(y)] dy \right\}, \quad u > 0 \quad (12.2.55)$$

[его следует сравнить с (2.4.55)].

Множитель $1 - \kappa(u)$ есть доля столкновений, которые приводят к поглощению частиц. При отсутствии поглощения κ для всех значений u равно единице, а $\eta(u) = 1$ при $u > 0$. В этом случае функция распределения f пропорциональна $1/vn_i Q_i$. Это означает, что число частиц возрастает при переходе к все более медленным частицам (если только $n_i Q_i$ не стремится к $Au^{-\gamma}$ с $\gamma \geq 1$). Чтобы при отсутствии поглощения было достигнуто устойчивое состояние, источник должен действовать достаточно продолжительное время и, таким образом, должно накопиться достаточно большое количество медленных частиц.

Случай $M = 1$ оказывается более простым, чем случай $M > 1$, потому что при $M = 1$ в результате одного столкновения частицы с энергией E_0 с атомом-мишенью могут возникать частицы с любой энергией от E_0 до 0. Если $M > 1$, то существует определенная энергия

$$E_{\min} = E_0 e^{-w\pi} = E_0 [(M-1)/(M+1)]^2,$$

такая, что более низкие энергии не могут быть достигнуты в результате одного столкновения частицы, имеющей энергию E_0 . Как и можно было ожидать, функция η имеет разрыв при соответствующем значении u , который усложняет весь процесс.

Так как ядро уравнения (12.2.53) при отсутствии захвата [$\kappa(u') = 1$] является функцией от $u - u'$, можно попытаться использовать преобразование Лапласа. Интегральный член в (12.2.53) может быть преобразован при помощи теоремы о свертке: преобразование Лапласа функции

$$\int_0^u \eta(u') a(u-u') du' \text{ есть } H(p) A(p),$$

где H и A — преобразования Лапласа для $\eta(u)$ и $a(u)$. Преобразованием Лапласа для a является

$$A(p) = \frac{(M+1)^2}{4M} \int_0^{w\pi} e^{-u(p+1)} du = \frac{(M+1)^2}{4M(p+1)} \left[1 - \left(\frac{M-1}{M+1} \right)^{2(p+1)} \right]. \quad (12.2.56)$$

Следовательно, преобразование Лапласа уравнения

$$\eta(u) = \int_0^u a(u-u') \eta(u') du' + q(u)$$

имеет вид

$$H(p) = H(p) A(p) + Q(p),$$

где $Q(p)$ — преобразование $q(u)$; если $q(u) = \delta(u)$, то $Q(p) = 1$.

Таким образом, преобразованием Лапласа для $\eta(u)$ в случае установившегося процесса без поглощения, когда функция источника $q(u) = \delta(u)$, является

$$H(p) = \frac{4M(p+1)}{(M+1)^2 \{ [4M(p+1)/(M+1)^2] - 1 + [(M-1)/(M+1)]^{2(p+1)} \}}. \quad (12.2.57)$$

Обратным преобразованием отсюда можно получить среднее количество столкновений в секунду η как функцию от u при отсутствии захвата:

$$\eta(u) = \frac{4M}{2\pi i (M+1)^2} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{(p+1) e^{pu} dp}{[4M(p+1)/(M+1)^2] - 1 + [(M-1)/(M+1)]^{2(p+1)}}, \quad (12.2.58)$$

где $\beta > 0$. Большая часть полюсов подинтегрального выражения располо-

жена слева от мнимой оси p , но один полюс находится в точке $p=0$, и вычет в этом полюсе равен $[(M+1)^2/4M\omega_{\text{ср.}}]$, где величина $\omega_{\text{ср.}}$, определенная в (12.2.51), есть средняя потеря энергии при одном столкновении. Поэтому для больших u (частицы с малой энергией) асимптотическая форма для функции столкновений η имеет вид

$$\eta \simeq 1/\omega_{\text{ср.}}, \quad u \rightarrow \infty, \quad (12.2.59)$$

для стационарного процесса без захвата. Этот результат является обобщением (12.2.55) для $\kappa = 1$.

Решение при малых значениях u можно получить, прибавляя к (12.2.59) сумму вычетов во всех других полюсах подинтегрального выражения из (12.2.58). Соответствующие результаты изложены во многих статьях, посвященных настоящему вопросу, и повторять их здесь нет никакой надобности. Точно так же, нет смысла рассматривать здесь более сложный случай, когда имеет место захват [$\kappa(u) < 1$].

Задачи с временной зависимостью без захвата также могут быть решены методом преобразования Лапласа, хотя в самом общем случае сделать это не так просто. В случае, если $M=1$ (атомы-мишени имеют ту же массу, что и частицы), уравнение (12.2.53) упрощается и принимает вид

$$\frac{\lambda(u)}{v} \frac{\partial}{\partial t} \eta(u, t) + \eta(u, t) = \int_0^u e^{u'-u} \eta(u', t) du' + \delta(u) \delta(t). \quad (12.2.60)$$

Производя преобразование Лапласа по времени, мы получаем

$$\left[1 + \frac{s\lambda(u)}{v} \right] H(u, s) = \int_0^u e^{u'-u} Z(u', s) du' + \frac{e^{-u}}{1 - \frac{s\lambda_0}{v_0}},$$

где

$$H(u, s) = \int_0^\infty \eta(u, t) e^{-st} dt = \frac{\delta(u)}{1 + \frac{s\lambda_0}{v_0}} + Z(u, s).$$

Дифференцируя равенство по u , мы приходим к дифференциальному уравнению, решая которое относительно Z , в конце концов получим преобразование Лапласа функции η :

$$H(u, s) = \frac{\delta(u)}{1 + s\lambda_0/v_0} + \frac{\exp \left\{ -s \int_0^u du' / [s + v'/\lambda(u')] \right\}}{[1 + s\lambda_0/v_0][1 + s\lambda(u)/v]}. \quad (12.2.61)$$

Если предварительно выяснить характер зависимости от u среднего свободного пробега $\lambda(u)$, то, произведя обратное преобразование, можно будет найти η . Если, например, $\lambda(u)$ пропорционально скорости v , то обращение осуществляется просто. С другой стороны, если λ постоянная, то уравнение (12.2.53) можно решить и для случая $M > 1$. См. по этому поводу задачи 12.12 и 12.16.

Возрастная теория. Если нельзя пренебречь изменением в пространстве функции распределения f , а поэтому и функции частоты столкновений $\psi = n_i Q_i v f$, то следует вернуться к уравнению (12.2.52). Как указывалось в § 2.4 и 12.1, при большом M , когда при столкновениях теряется лишь незначительная часть энергии и когда достигнуто устойчивое состояние, приближение возрастной теории оказывается применимым, за исключением случая, когда плотность частиц заметно меняется на протяжении одного среднего свободного пробега (и когда приходится прибегать к методу,

изложенному в начале этого параграфа). Мы уже нашли [см. (2.4.56) и (12.1.29)] некоторые решения для такого приближения; здесь мы только еще раз выведем основное уравнение, для того чтобы установить связь между ранее полученными результатами и материалом, рассмотренным в настоящем параграфе.

Если предположить, что ψ мало меняется в пространстве, то естественно считать, что оно почти одинаково для разных направлений (почти не зависит от \mathbf{a}_u) и что его малая асимметрия направлена в сторону наибольшего изменения ψ в пространстве. Другими словами, можно предположить, что

$$\psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) \simeq \frac{1}{4\pi} [\psi_0(\mathbf{r}, u) + g(u) \mathbf{a}_u \cdot \text{grad } \psi_0(\mathbf{r}, u)], \quad (12.2.62)$$

где

$$\psi_0(\mathbf{r}, u) = \int \int \psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) d\Omega,$$

$g(u)$ предполагается малым. Если теперь подставить это выражение в уравнение (12.2.52) (опуская зависимость от времени) и взять среднее по всем направлениям \mathbf{a}_u (что сводится к интегрированию по Ω), то получим уравнение [см. рассуждение, предшествующее (2.4.41)]

$$\frac{1}{3} \lambda(u) g(u) \nabla^2 \psi_0(\mathbf{r}, u) + \psi_0(\mathbf{r}, u) = \int_0^u a(u-u') \psi_0(\mathbf{r}, u') \kappa(u') du' + S_0(\mathbf{r}, u), \quad (12.2.63)$$

где $S_0(\mathbf{r}, u) = \int \int S(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) d\Omega$ есть «нулевой момент» функции источника, а $a(u-u')$ — функция, определенная формулой (12.2.54).

В случае большого M величина w_π мала и область u' , в которой подинтегральное выражение заметно отличается от нуля, мала. Если с изменением u величина ψ_0 меняется постепенно и относительно медленно, то $\psi_0(\mathbf{r}, u-w_\pi)$ не будет заметно отличаться от $\psi_0(\mathbf{r}, u)$ и $\psi_0(\mathbf{r}, u')$ можно разложить в ряд Тейлора

$$\kappa(u') \psi_0(\mathbf{r}, u') = \kappa(u) \psi_0(\mathbf{r}, u) + (u' - u) (\partial/\partial u) [\kappa(u) \psi_0(\mathbf{r}, u)] + \dots$$

Подставляя это в (12.2.63) и используя соотношения

$$\int_{u-w_\pi}^u a(u-u') du' = 1,$$

$$\int_{u-w_\pi}^u (u-u') a(u-u') du' = w_{\text{ср.}} = 1 - \frac{(M-1)^2}{2M} \ln \left(\frac{M+1}{M-1} \right),$$

мы получим наконец (для $u > w_\pi$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \lambda(u) g(u) \nabla^2 \psi_0(\mathbf{r}, u) = \\ & = -w_{\text{ср.}} \kappa(u) \frac{\partial}{\partial u} \psi_0(\mathbf{r}, u) - [1 - \kappa(u)] \psi_0(\mathbf{r}, u) + S_0(\mathbf{r}, u), \end{aligned}$$

где $g(u)$ еще подлежит определению.

Чтобы найти $g(u)$ и оценить точность, с которой (12.2.62) определяет ψ , умножим (12.2.52) на косинус угла ϑ между \mathbf{a}_u и $\text{grad } \psi_0$ и про-

интегрируем по всем направлениям \mathbf{a}_u . В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \lambda(u) \operatorname{grad} \psi_0 + \frac{1}{3} g(u) \operatorname{grad} \psi_0 - S_1(\mathbf{r}, u) = \\ & = \frac{1}{3} \chi(u) g(u) \operatorname{grad} \psi_0 \iint \cos \vartheta d\Omega \int_{u-w_\pi}^u du' \iint \cos \vartheta' \alpha(\vartheta', u-u') d\Omega' + \dots = \\ & = \frac{2}{9M} \chi(u) g(u) \operatorname{grad} \psi_0 + \dots, \end{aligned}$$

где $S_1(\mathbf{r}, u) = \iint \cos \vartheta S(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) d\Omega$ есть первый момент распределения источников. Отсюда, ограничиваясь принятой нами степенью точности, в случае, когда можно пренебречь величиной S_1 , получим

$$g(u) = -\lambda(u) / [1 - (2/3M) \chi(u)],$$

откуда окончательно «возрастное» уравнение приобретает вид

$$\nabla^2 \phi_0(\mathbf{r}, T) - (\partial/\partial T) \phi_0(\mathbf{r}, T) - \varepsilon(T) \phi_0(\mathbf{r}, T) = -\sigma(\mathbf{r}, T), \quad (12.2.64)$$

где «возраст» частиц

$$T = \frac{1}{3} \int_0^u \frac{\lambda^2(u') du'}{\omega_{\text{ср.}} \chi(u') [1 - (2/3M) \chi(u')]} \quad (12.2.65)$$

и

$$\varepsilon = \frac{3(1-\chi)[1-(2\chi/3M)]}{\lambda^2}, \quad \sigma = \frac{3[1-(2\chi/3M)]}{\lambda^2} S_0.$$

«Возраст» T имеет размерность площади и пропорционален квадрату среднего расстояния, пройденного частицей за время, в течение которого она достигает энергии $E = E_0 e^{-u}$. Напомним, что функция распределения равна $f(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) = [\lambda(u)/v] \psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u)$ и что ψ определяется через ψ_0 формулой (12.2.62).

Эта приближенная формула для f и соответствующее уравнение для ψ_0 пригодно, если $\lambda |\operatorname{grad} \psi_0|$ значительно меньше, чем ψ_0 . Это приближение не является достаточно хорошим для частиц, энергии которых близки к E_0 (когда u меньше чем w_π); оно непригодно, если $\lambda(u)$ или $\chi(u)$ заметно меняются, когда u близко к w_π .

Сравнение с уравнением (2.4.54) показывает, что выбранная здесь шкала для возраста T частиц отличается от выбранной ранее шкалы. Этим было достигнуто упрощение формы уравнения. Новая переменная T , грубо говоря, пропорциональна произведению квадрата среднего свободного пробега λ на старую переменную τ , которая обозначала среднее количество столкновений, требующееся для уменьшения первоначальной энергии частицы E_0 до энергии $E = E_0 e^{-u}$. Прежняя переменная τ имела преимущество большей физической наглядности; новая переменная T облегчает решение уравнения, когда $\lambda(u)$ меняется вместе с u . Сравнение с уравнением (12.1.28) обнаруживает то же обстоятельство, с тем дополнительным отличием, что новое $\chi(u)$ есть доля частиц, не поглощенных при столкновении, в то время как старое χ_i обозначало долю поглощенных частиц.

Поскольку в этом параграфе мы показали, как получить решение, когда уравнение диффузии не может быть использовано, и поскольку в § 2.4 и 12.1 уже были рассмотрены примеры методов решения задач «возрастной» разновидности уравнения диффузии, мы не станем разбирать дальнейшие детали этой теории.

Сейчас подходящий момент, чтобы закончить этот параграф. Мы показали, как решается задача диффузии в двух важных случаях, когда обыкновенное уравнение диффузии и уравнение в возрастной форме ока-

зываются неадекватными. Вблизи границ диффузионной среды мы оказались в состоянии исправить обычное диффузионное приближение как в отношении углового распределения частиц, испускаемых с поверхности в свободное пространство, так и в отношении распределения плотности частиц на глубине под поверхностью, не превосходящей среднего свободного пробега, если только на этом участке можно пренебречь эффектом замедления частиц. Внутри среды мы оказались в состоянии получить улучшение результатов вычислений, основанных на простой «возрастной» теории, для случаев, где значительная доля энергии теряется при столкновениях (легкие атомы-мишени), если только можно пренебречь пространственным изменением плотности частиц и если доля $1 - \alpha$ частиц, поглощаемых при столкновениях, мала. В других случаях обычная теория диффузии или «возрастная» теория, рассмотренные в § 12.1, оказываются адекватными.

Теперь мы переходим к изучению уравнения совершенно другого типа.

12.3. Решение уравнения Шредингера

Движение частицы массы M в поле с потенциалом $V(\mathbf{r}, p)$, где \mathbf{r} и p — ее положение и импульс, определяется уравнением Шредингера

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, p)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (12.3.1)$$

где \mathcal{H} — оператор Гамильтона. Он может быть представлен в виде суммы кинетической и потенциальной энергий частицы

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2M} + V(\mathbf{r}, p).$$

Уравнение (12.3.1), конечно, не учитывает релятивистских и спиновых эффектов. В § 2.6 мы достаточно подробно выяснили происхождение и физическую интерпретацию уравнения Шредингера [см. (2.6.38)] и потому ограничимся здесь кратким обзором соответствующих фактов.

Определения. Рассмотрим сначала уравнения, которым удовлетворяет Ψ . Следует напомнить, что для превращения (12.3.1) в дифференциальное уравнение, необходимо либо \mathbf{r} , либо p представить как дифференциальный оператор. В последнем случае

$$p = \frac{\hbar}{i} \nabla,$$

так что уравнение (12.3.1) может быть представлено в виде

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V\left[\mathbf{r}, \frac{\hbar}{i} \nabla\right] \right\} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

или

$$[-\nabla^2 + U]\Psi = \frac{i}{\alpha^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

где

$$U = \frac{2M}{\hbar^2} V, \quad \alpha^2 = \frac{\hbar}{2M}.$$

В этих уравнениях волновая функция Ψ есть функция от \mathbf{r} и t .

Полностью эквивалентное этому уравнение Шредингера в импульсном представлении можно получить, заменяя \mathbf{r} оператором

$$\mathbf{r} = -\frac{\hbar}{i} \nabla_p,$$